ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Olivier BIQUARD

Sur les variétés CR de dimension 3 et les twisteurs

Tome 57, nº 4 (2007), p. 1161-1180.

<http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2007__57_4_1161_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
57, 4 (2007) 1161-1180

SUR LES VARIÉTÉS CR DE DIMENSION 3 ET LES TWISTEURS

par Olivier BIQUARD

Résumé. — Nous montrons qu'une variété CR strictement pseudoconvexe, de dimension 3, analytique réelle, est le bord à l'infini d'une unique métrique d'Einstein autoduale, définie dans un petit voisinage. La preuve s'appuie sur une construction nouvelle d'espaces de twisteurs à l'aide de courbes rationnelles singulières.

Abstract. — We prove that any real analytic strictly pseudoconvex CR 3-manifold is the boundary (at infinity) of a unique selfdual Einstein metric defined in a neighborhood. The proof uses a new construction of twistor space based on singular rational curves.

1. Introduction

Dans l'article fondateur [13], LeBrun montre qu'une variété conforme X^3, analytique réelle, est l'infini conforme d'une métrique d'Einstein autoduale, unique dans un voisinage de X. Ici, infini conforme signifie que la métrique d'Einstein admet un pôle d'ordre deux au bord, mais sa structure conforme s'étend au bord X pour induire la structure conforme initiale.

Une question similaire peut être posée en partant d'une variété CR strictement pseudoconvexe X^3. Le but de cet article est d'y répondre positivement. L'exemple standard de la théorie est l'espace hyperbolique complexe, dont un modèle est la métrique de Bergmann sur la boule de $\mathbb{R}^4$,

$$g_B = \frac{1}{1-r^2}\sum_1^4 dx_i^2 + \frac{r^2}{(1-r^2)^2}(dr^2 + r^2\eta^2) \tag{1.1}$$

où η est la 1-forme sur la sphère S^3 obtenue comme forme de connexion du fibré de Hopf $S^3 \to S^2$.

Mots-clés : twisteurs, métrique autoduale, variété CR.
Classification math. : 53C26, 53C28.

Plus généralement, si X^3 est munie d'une distribution de contact H, noyau de la forme de contact $\ker\eta$, et d'une structure CR J sur H, de sorte que

$$\gamma(x,y) = d\eta(x,Jy) \tag{1.2}$$

soit une métrique sur H, on dira que X est l'infini conforme d'une variété riemannienne (M^4,g) si $X=\partial M$, et, en choisissant une fonction x sur M s'annulant exactement sur X à l'ordre un, on a le comportement asymptotique suivant de g près du bord X :

$$g \sim \frac{dx^2+\eta^2}{x^2} + \frac{\gamma}{x}. \tag{1.3}$$

Cette condition impose que le tenseur de courbure de g soit asymptotique à celui de la métrique de Bergmann, voir [2]. Un changement conforme $(\eta,\gamma)\to(f\eta,f\gamma)$ par une fonction $f>0$ ne modifie pas ce comportement asymptotique, puisqu'on retrouve (1.3) en faisant $x\to\frac{x}{f}$.

Les exemples explicites de métriques d'Einstein autoduales avec une variété CR comme infini conforme sont les métriques SU_2-invariantes sur la boule [11], et des métriques toriques [6].

D'un autre côté existe une construction plus abstraite : une structure CR sur la sphère S^3, proche de la structure standard, est l'infini conforme d'une unique métrique d'Einstein sur la boule, complète, petite déformation de la métrique de Bergmann [2]. Parmi ces structures CR, celles dont le remplissage d'Einstein est autodual forment une famille de dimension infinie, dont l'espace tangent en la structure standard est le noyau de l'opérateur différentiel $(\bar\partial\sharp\bar\partial)^*$ agissant sur l'espace des sections du fibré $\Omega^{0,1}\otimes T^{1,0}$, espace vu comme l'espace tangent à toutes les structures CR (cette condition, démontrée dans [4], est reformulée ainsi dans l'article de synthèse [5]). Comme cette condition infinitésimale est de nature locale, cela conduit naturellement à la question suivante : le problème, pour une structure CR, d'être l'infini conforme d'une métrique d'Einstein autoduale, admet-il une obstruction de nature locale ? ou, au contraire, la condition infinitésimale indiquée plus haut est-elle bien une obstruction globale au remplissage par une métrique *complète* sur la boule ?

Dans le cas réel, le théorème de LeBrun évoqué plus haut montre qu'il n'y a pas d'obstruction locale, et la condition pour remplir une métrique conforme sur la sphère par une métrique d'Einstein autoduale complète sur la boule, trouvée dans [3], est en effet de nature globale (phénomène de « fréquences positives » prédit par LeBrun)—même la condition infinitésimale est globale.

Le résultat suivant indique qu'il en est de même dans le cas complexe, en montrant l'absence d'obstruction locale.

THÉORÈME 1.1. — *Soit X une variété CR strictement pseudoconvexe de dimension 3, analytique réelle. Alors X est l'infini conforme d'une métrique d'Einstein autoduale g définie dans un petit voisinage de X (g est analytique réelle et a le comportement (1.3) près de X). Le germe de g le long de X est unique.*

En particulier, le développement asymptotique d'une métrique d'Einstein autoduale près de son infini conforme est complètement déterminé, et la métrique est analytique réelle. Cela contraste fortement avec le problème similaire pour une métrique Kähler-Einstein d'infini conforme une structure CR : dans le développement formel apparaissent des termes indéterminés et des termes logarithmiques [9, 15].

Remarquons que la formule (1.1) pour la métrique de Bergmann garde un sens pour $r > 1$, et définit une métrique Kähler-Einstein autoduale, de signature (2,2), sur le fibré en disques holomorphes $\mathcal{O}(1)$ au-dessus de la droite projective P^1. La métrique g construite dans le théorème précédent est analytique réelle, et en la prolongeant de l'autre côté de X, on obtient le résultat suivant.

COROLLAIRE 1.2. — *Sous les mêmes hypothèses, la variété X est l'infini conforme d'une métrique d'Einstein autoduale de signature (2,2), unique, définie dans un petit voisinage de X, de comportement asymptotique donné par la formule (1.3) avec $x < 0$.*

La transformation twistorielle de Penrose (voir [1]) est un outil puissant dans la construction de métriques autoduales d'Einstein. Ces deux résultats sont démontrés à l'aide d'une nouvelle construction twistorielle, où le bord est réalisé comme ensemble de courbes rationnelles ayant un point double.

Décrivons le plan de l'article. On commence par décrire dans la section 2 l'espace des twisteurs de l'espace hyperbolique complexe, motivant la construction twistorielle proprement dite dans les sections 3 et 4. Celle-ci consiste à relever, dans la complexification de X, les feuilletages en courbes holomorphes induits par les fibrés $T^{1,0}$ et $T^{0,1}$ de la structure CR, à un fibré de formes différentielles, puis à recoller les deux espaces de feuilles. La construction rappelle celle des twisteurs du cotangent d'une variété kählérienne par Feix [10], dans laquelle sont recollés des espaces de fonctions affines sur les sous-variétés intégrales des distributions $T^{1,0}$ et $T^{0,1}$ dans la complexification de la variété. On réalise alors la variété initiale comme espace de courbes rationnelles dans l'espace des twisteurs, mais ici s'ajoute une difficulté technique : ces courbes sont singulières. Après lissification (section 5), on accomplit dans les sections 6 et 7 la transformée twistorielle inverse pour déterminer le comportement de la métrique ainsi construite.

Remerciements. Je remercie Olivier Debarre pour m'avoir longuement expliqué le problème de lissification des courbes rationnelles singulières.

2. L'espace des twisteurs de l'espace hyperbolique complexe

On considère l'espace $\mathbb{C}^{1,2}$. Dans des coordonnées complexes (z^1, z^2, z^3), on a donc une forme hermitienne $|z^1|^2 - |z^2|^2 - |z^3|^2$. On notera $\mathcal{F}$ l'espace des drapeaux de $\mathbb{C}^3$, consistant d'une droite D et d'un plan $P \supset D$. L'espace $\mathcal{F}$ dispose de deux projections sur $P^2_{\mathbb{C}}$, données respectivement par $(D, P) \to D$ et $(D, P) \to P$. En chaque point, la somme des espaces tangents à chacune des fibres des projections est un sous-fibré holomorphe du fibré tangent de codimension un—en fait une structure de contact holomorphe.

L'espace hyperbolique complexe $H^2_{\mathbb{C}}$ se décrit comme l'espace des droites positives de $\mathbb{C}^{1,2}$. Son espace des twisteurs, $\mathcal{N}$, est le domaine de $\mathcal{F}$ décrit par

$$\mathcal{N} = \{(D, P) \in \mathcal{F}, D < 0, P \text{ de signature } (1,1)\}.$$

La projection twistorielle $\pi : \mathcal{N} \to H^2_{\mathbb{C}}$ est

$$\pi(D, P) = D^\perp \cap P,$$

sa structure réelle

$$\tau(D, P) = (P^\perp, D^\perp),$$

sa structure de contact holomorphe est la restriction à $\mathcal{N}$ de celle de $\mathcal{F}$, elle est en chaque point transverse à la fibre de π.

Le bord de $H^2_{\mathbb{C}}$, la sphère S^3, s'identifie à l'espace des droites isotropes de $\mathbb{C}^{1,2}$. La projection twistorielle s'étend au-dessus du bord, et l'espace des twisteurs $\mathcal{T} = \mathcal{N}|_{S^3}$ au-dessus de S^3 a deux composantes $\mathcal{T}_\pm$, et s'écrit

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_+ \cup_{S^3} \mathcal{T}_-. \tag{2.1}$$

En effet, ces deux composantes sont décrites par :

- $\mathcal{T}_+$ est l'espace des (D, P) tels que D est isotrope et $P \supset D$; sur cette composante $\pi(D, P) = D$;
- $\mathcal{T}_-$ est l'espace des (D, P) tels que P soit isotrope et $D \subset P$; sur cette composante $\pi(D, P) = P^\perp$.

Les deux composantes s'intersectent en les couples (D, P), où D et P sont isotropes, avec $D = P^\perp = \pi(D, P)$; cette intersection est donc égale à S^3. La structure réelle τ échange $\mathcal{T}_+$ et $\mathcal{T}_-$ en fixant S^3.

Enfin, explicitons complètement la famille de courbes rationnelles de $\mathcal{F}$ dans laquelle se trouvent les fibres de la projection twistorielle π. Cette famille est de dimension 4, et est paramétrée par un couple (d, p) d'une droite d et d'un plan p de $\mathbb{C}^3$; la courbe correspondante dans $\mathcal{F}$ est

$$C(d,p) = \{(D,P), D \subset p, P = D + d\}. \tag{2.2}$$

Cette courbe est lisse si $d \not\subset p$; si au contraire $d \subset p$, c'est-à-dire $(d,p) \in \mathcal{F}$, alors les courbes dégénèrent vers

$$C(d,p) = \{(D,p), D \subset p\} \cup \{(d,P), P \supset d\},$$

qui est une courbe rationnelle avec un point double (d, p).

2.1. Généralisation

Ce comportement du bord de l'espace des twisteurs de l'espace hyperbolique complexe est en réalité commun à toutes les métriques avec le comportement asymptotique (1.3). En effet, l'espace des twisteurs d'une variété conforme X de dimension 3 s'identifie au projectivisé des directions nulles du cotangent $(\Omega^1_X)^\mathbb{C}$, et la forme de contact holomorphe est héritée de la forme de Liouville de $(\Omega^1_X)^\mathbb{C}$, voir [14]. Appliquons cette description dans le cas suivant : si X est une variété CR strictement pseudoconvexe, avec repère local $(\eta, \theta^1, \theta^{\bar 1})$ de $(\Omega^1_X)^\mathbb{C}$, où η est une forme de contact, θ^1 engendre l'espace $T^{1,0} \subset (\ker \eta) \otimes \mathbb{C}$ de la structure CR, et $d\eta = i\theta^1 \wedge \theta^{\bar 1}$, alors l'espace des twisteurs conformes pour la métrique $\frac{dx^2+\eta^2}{x^2} + \frac{\gamma}{x}$ s'identifie au-dessus d'un point $p \in X$ à la courbe d'équation

$$xa^2 + bc = 0 \tag{2.3}$$

dans $P(\Omega^1_p X)^\mathbb{C}$, où une 1-forme est paramétrée par $a\eta + b\theta^1 + c\theta^{\bar 1}$. Quand x tend vers 0, la courbe tend vers la courbe singulière d'équation

$$bc = 0, \tag{2.4}$$

donc le bord de l'espace des twisteurs peut être considéré comme constitué de courbes rationnelles singulières. Dans la suite, nous construirons un espace des twisteurs coïncidant au bord avec la réunion de ces courbes singulières.

3. Les twisteurs

Partons d'une variété X^3 satisfaisant les hypothèses du théorème 1.1. La structure CR est déterminée par le fibré en droites complexes $T^{1,0} \subset T_X^{\mathbb{C}}$ des vecteurs de type $(1,0)$, tel qu'en posant $T^{0,1} = \overline{T^{1,0}}$, on ait $T^{1,0} \cap T^{0,1} = 0$.

La variété X admet un fibré holomorphe tangent de rang 2, $T' = T_X^{\mathbb{C}}/T^{0,1}$, muni de l'opérateur $\bar{\partial}$ défini par

$$\bar{\partial}_X Y = [X, Y]$$

pour $X \in T^{0,1}$ et $Y \in T'$. Cet opérateur agit aussi sur le dual $\Omega' = (T^{0,1})^{\perp} \subset (T_X^{\mathbb{C}})^*$. En particulier, si η est une 1-forme réelle s'annulant sur $T^{1,0} \oplus T^{0,1}$, alors $\bar{\partial}\eta \in \Omega^{0,1} \otimes \Omega'$ s'identifie à la forme de Levi $d\eta$. Puisque X est strictement pseudoconvexe, en tout point $-id\eta(\xi, \bar{\xi}) > 0$ pour $\xi \in T^{1,0}$ non nul.

Au moins localement, la variété X admet une complexification $X^{\mathbb{C}}$, munie d'une structure réelle τ. Les distributions $T^{1,0}$ et $T^{0,1}$ s'y étendent comme sous-fibrés holomorphes de $T_{X^{\mathbb{C}}}$, et y sont échangées par la structure réelle. Nous noterons C_x^+ et C_x^- les courbes intégrales de $T^{0,1}$ et $T^{1,0}$ passant par x. Les fibrés T' et Ω' se prolongent aussi à $X^{\mathbb{C}}$.

Dans la suite, nous nous restreindrons toujours à un petit ouvert U de $X^{\mathbb{C}}$ autour d'un point $x_0 \in X$, stable par τ. Les constructions, canoniques, se recollent dans un petit voisinage de X.

L'opérateur $\bar{\partial}$ du fibré Ω' sur X se prolonge sur $X^{\mathbb{C}}$ en une dérivation holomorphe, ∇, du fibré Ω' le long des courbes C^+. Passant au projectivisé $P\Omega'$, les directions horizontales de ∇ définissent un feuilletage de dimension 1 de $P\Omega'$, dont on notera $\mathcal{N}^+$ l'espace des feuilles, de dimension 3.

Symétriquement, on dispose d'une dérivation le long des courbes C^- sur le fibré $\Omega'' = (T^{1,0})^{\perp} = \overline{\Omega'}$. Les directions horizontales du projectivisé $P\Omega''$ définissent à nouveau un feuilletage de dimension 1 de $P\Omega''$, dont on notera $\mathcal{N}^-$ l'espace des feuilles. Il est clair que $\mathcal{N}^+$ et $\mathcal{N}^-$ sont échangés par la structure réelle τ. Quitte à restreindre l'ouvert U, on peut supposer $\mathcal{N}^{\pm}$ lisses.

Les multiples de la forme de contact η vivent aussi bien dans Ω' que dans Ω''. On obtient ainsi des applications $i_{\pm} : X^{\mathbb{C}} \to \mathcal{N}^{\pm}$ en associant à un point x la classe $[\eta_x]$ de la forme η_x dans $\mathcal{N}^{\pm}$.

Lemme 3.1. — *Les applications $i_{\pm} : X^{\mathbb{C}} \to \mathcal{N}^{\pm}$ sont des immersions.*

Démonstration. — Vérifions le pour i_+. Il est clair que la différentielle de i_+ est injective dans les directions transverses aux courbes C_+. D'un autre côté, le long des courbes C_+, la dérivée $\nabla\eta$ d'une forme de contact η

s'identifie à $d\eta$, donc, en tout point, est en dehors de $\Omega^{0,1}\otimes\mathbb{C}\eta$. La section de $P\Omega'$ définie par η n'est ainsi parallèle en aucun point, donc la différentielle de i_+ le long de C_+ est injective. □

À nouveau en restreignant l'ouvert U de $X^{\mathbb{C}}$, on peut supposer que les $i_\pm$ sont des plongements de U comme ouvert de $\mathcal{N}^\pm$.

Lemme 3.2. — *On peut choisir le petit ouvert U de sorte que l'application $U \to \mathcal{N}^+ \times \mathcal{N}^-$ définie par $x \to (i_+(x), i_-(x))$ soit propre.*

Démonstration. — Près du point $x_0 \in X$ fixé, quitte à choisir U assez petit, l'espace $\mathcal{F}^+$ des courbes C^+ et l'espace $\mathcal{F}^-$ des courbes C^- sont lisses, et l'application $\phi : U \to \mathcal{F}^+ \times \mathcal{F}^-$, définie par

$$\phi(x) = (C_x^+, C_x^-),$$

est une immersion. Quitte à restreindre encore U, l'image de ϕ dans $\mathcal{F}^+ \times \mathcal{F}^-$ est une sous-variété. Fixons à présent un petit ouvert V de $\mathcal{F}^+ \times \mathcal{F}^-$ contenant $\phi(x_0)$, et posons $U = \phi^{-1}(V)$. Il est maintenant clair que

$$\phi : U \longrightarrow V$$

est propre.

On dispose de deux projections $p_\pm : \mathcal{N}^\pm \to \mathcal{F}^\pm$, et

$$\phi(x) = (p_+ i_+(x), p_- i_-(x)).$$

Le lemme résulte alors immédiatement de la propreté de ϕ. □

Le lemme nous indique que le recollement de $\mathcal{N}^+$ et $\mathcal{N}^-$ en identifiant les ouverts $i_+(U)$ et $i_-(U)$,

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}^+ \amalg_U \mathcal{N}^-, \tag{3.1}$$

est une variété. La structure réelle τ agit sur $\mathcal{N}$ en échangeant $\mathcal{N}^+$ et $\mathcal{N}^-$, avec points fixes $U \cap X$.

4. La forme de contact holomorphe

Au-dessus de l'espace total du fibré $P\Omega'$ sur X on dispose d'un fibré en droites complexes $L = \mathcal{O}(1)$. On peut identifier la fibre de L en un point $\alpha \in \Omega'_x$ à l'espace

$$T'_x/\alpha^\perp. \tag{4.1}$$

Le fibré L descend en un fibré, que nous noterons encore L, sur l'espace des feuilles $\mathcal{N}_+$. De même sur $P\Omega''$ nous disposons d'un fibré $\mathcal{O}(1)$ défini à partir de T'' par la même formule (4.1). Au point $(x, [\eta])$ de $\mathcal{N}_+$ ou $\mathcal{N}_-$, les fibrés L_x s'identifient tous deux à $TX^{\mathbb{C}}/(T^{1,0} \oplus T^{0,1})$ et se recollent donc pour donner un fibré L sur $\mathcal{N}$.

L'espace total du fibré $\Omega' \subset T^*_{X^{\mathbb{C}}}$ hérite de la 1-forme de Liouville λ de $T^*_{X^{\mathbb{C}}}$. Le long d'une courbe C^+, son noyau contient par définition le vecteur horizontal X_H associé à ∇, et en réalité

$$i_{X_H} d\lambda = 0. \tag{4.2}$$

(Cette équation pourrait servir de définition du vecteur horizontal X_H.) Comme λ s'annule sur les fibres du fibré $\Omega' \to X^{\mathbb{C}}$, elle descend sur le projectivisé $P\Omega'$ comme 1-forme à valeurs dans L, puis par (4.2) sur l'espace des feuilles $\mathcal{N}^+$, toujours à valeurs dans L. On a donc démontré la première partie du lemme suivant.

Lemme 4.1. — *La distribution* $\ker \lambda$ *sur* $P\Omega'$ *descend en une structure de contact holomorphe sur* $\mathcal{N}^+$. *De même on obtient une structure de contact holomorphe sur* $\mathcal{N}^-$.

Démonstration. — Il reste à montrer que la distribution est de contact. Notons p la projection $P\Omega' \to X^{\mathbb{C}}$. Si $\xi \in P\Omega'_x$, l'espace tangent $T_{[\xi]}\mathcal{N}^+ = T_\xi P\Omega'/\mathbb{C}X_H$ peut se représenter comme $p^{-1}(T') = T'_x \oplus T_\xi(p^{-1}(x))$, où on a choisi un relèvement de T' dans $T_\xi\Omega'$. Dans cette écriture, la forme $d\lambda$ est le crochet de dualité, elle est non nulle sur $T'_x \otimes T_\xi(p^{-1}(x)) \subset T'_x \otimes \Omega'_x$. □

Lemme 4.2. — *Le plongement* $i_\pm : X^{\mathbb{C}} \to \mathcal{N}^\pm$ *ramène la structure de contact de* $\mathcal{N}^\pm$ *sur la structure de contact standard* $T^{1,0} \oplus T^{0,1}$ *de* $X^{\mathbb{C}}$.

Démonstration. — C'est évident à partir de la formule $i_\pm(x) = [\eta_x]$. □

Corollaire 4.3. — *Les structures de contact de* $\mathcal{N}^+$ *et* $\mathcal{N}^-$ *se recollent au-dessus de* $X^{\mathbb{C}}$ *pour définir une forme de contact* η^c *sur* $\mathcal{N}$, *à valeurs dans le fibré en droites* L. □

5. Les courbes rationnelles

Pour chaque point $x \in X^{\mathbb{C}}$, les images dans $\mathcal{N}$ des projectivisés $P\Omega'_x$ et $P\Omega''_x$ définissent deux courbes rationnelles $\mathcal{C}^+_x$ et $\mathcal{C}^-_x$ de $\mathcal{N}$, qui se coupent au point $[\eta_x]$ et y sont transverses. On définit la courbe

$$\mathcal{C}_x = \mathcal{C}^+_x \cup \mathcal{C}^-_x.$$

Les $(\mathcal{C}_x)_{x \in U}$ forment une famille à trois paramètres de P^1 avec points doubles ; l'involution réelle τ transforme $\mathcal{C}_x$ en $\mathcal{C}_{\tau(x)}$ en échangeant les parties positives et négatives. Au-dessus des points réels, c'est-à-dire au-dessus de X, la famille des $\mathcal{C}_x$ dessine un espace de twisteurs qui généralise le bord de celui de l'espace hyperbolique complexe, décrit par (2.1), et donne le résultat attendu (2.4) pour une métrique avec comportement asymptotique similaire.

Lemme 5.1. — *Chaque courbe $\mathcal{C}_x^{\pm}$ a fibré normal $\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}$.*

Démonstration. — On a le diagramme

$$\begin{array}{ccc} P\Omega' & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{N}^+ \\ \big\downarrow{\scriptstyle p} & & \\ X^{\mathbb{C}} & & \end{array}$$

Soit $x \in X^{\mathbb{C}}$, le fibré normal de $\mathcal{C}_x^+ = \pi(P\Omega'_x)$ dans $\mathcal{N}^+$ s'identifie au fibré $T_{P\Omega'}/\pi^* T_{\mathcal{C}_x^+}$ sur $P\Omega'_x$. Or $\pi^* T_{\mathcal{C}_x^+} = p^*(T^{0,1})$, d'où sur $P\Omega'_x$ l'égalité

$$T_{P\Omega'}/\pi^* T_{\mathcal{C}_x^+} = p^*(T') = \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}.$$

$\square$

Lemme 5.2. — *Les déformations d'une courbe $\mathcal{C}_x$ ($x \in U$) forment une famille $(\mathcal{C}_y)_{y \in V}$ paramétrée par une variété V de dimension 4, et contenant U. Dès que $y \in V - U$, la courbe rationnelle $\mathcal{C}_y$ est lisse, de fibré normal $\mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(1)$.*

Pour démontrer le lemme, nous commençons par un résultat général, qui m'a été expliqué par O. Debarre.

Lemme 5.3. — *Soit $\mathcal{C}$ une courbe rationnelle avec un point double dans une variété complexe $\mathcal{N}^3$, dont chaque composante a fibré normal $\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}$. Alors l'espace des déformations de $\mathcal{C}$ est une famille lisse de dimension 4, dans laquelle :*

- *les courbes à point double forment une sous-famille lisse de dimension 3 ;*
- *les courbes lisses ont fibré normal $\mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(1)$ ou $\mathcal{O}(2) \oplus \mathcal{O}$.*

Les deux fibrés normaux possibles indiqués par le lemme se réalisent effectivement. Le cas $\mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(1)$ est celui des twisteurs de l'espace hyperbolique complexe décrit dans la section 2. Le cas $\mathcal{O}(2) \oplus \mathcal{O}$ se réalise dans l'exemple suivant : la courbe $\mathcal{C}_0 = (P^1 \times \{y\} \times \{z\}) \cup (\{x\} \times P^1 \times \{z\})$ dans $\mathcal{N} = P^1 \times P^1 \times P^1$ satisfait les hypothèses du lemme 5.3, la famille des déformations contient des courbes lisses $\mathcal{C}$ incluses dans la surface $S = P^1 \times P^1 \times \{z\} \subset \mathcal{N}$, dont le fibré normal est $N_{\mathcal{C}/S} \oplus N_{S/\mathcal{N}} = \mathcal{O}(2) \oplus \mathcal{O}$.

Démonstration du lemme 5.3. — On part d'une courbe singulière $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$, avec point singulier p. Puisque le fibré normal de $\mathcal{C}_1$ est trivial, les déformations de $\mathcal{C}_1$ forment une famille de dimension 2 de courbes feuilletant un voisinage ouvert W de $\mathcal{C}_1$: en particulier, par un point de W passe exactement une courbe de la famille. La même chose étant valable pour $\mathcal{C}_2$, les déformations de $\mathcal{C}$ conservant un point double sont paramétrées par le point double, libre de bouger dans un voisinage de p. Donc les déformations avec point double forment une famille lisse de dimension 3.

Passons aux déformations générales : on notera f (resp. f_i) l'injection de $\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{C}_i$) dans $\mathcal{N}$. On calcule la cohomologie du faisceau $f^*T_{\mathcal{N}}$ sur $\mathcal{C}$: sur chaque composante $\mathcal{C}_i$, on a

$$f_i^*T_{\mathcal{N}} = \mathcal{O} \oplus \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(2), \tag{5.1}$$

et la suite exacte

$$0 \to f_1^*T_{\mathcal{N}}(-p) \to f^*T_{\mathcal{N}} \to f_2^*T_{\mathcal{N}} \to 0$$

conduit immédiatement à

$$\begin{aligned} &H^0(\mathcal{C}, f^*T_{\mathcal{N}}) = H^0(\mathcal{C}_1, f_1^*T_{\mathcal{N}}(-1)) \oplus H^0(\mathcal{C}_2, f_2^*T_{\mathcal{N}}) = \mathbb{C}^7 \\ &H^1(\mathcal{C}, f^*T_{\mathcal{N}}) = 0. \end{aligned}$$

De l'annulation du H^1 on déduit (voir [12] ou [8, proposition 4.24]) que f admet des désingularisations $g : P^1 \to \mathcal{N}$. En outre, la famille des morphismes g est lisse, de dimension 7. Divisant par le groupe des paramétrisations de P^1, de dimension 3, il reste une famille de déformations de $\mathcal{C}$ de dimension 4.

Reste à trouver le fibré normal d'une courbe lisse $g : P^1 \to \mathcal{N}$ de la famille. Puisque $H^1(\mathcal{C}, f^*T_{\mathcal{N}}) = 0$, on a par semi-continuité $H^1(P^1, g^*T_{\mathcal{N}}) = 0$. Calculons de même $H^1(P^1, g^*T_{\mathcal{N}}(-1))$. Sur la courbe singulière $\mathcal{C}$, prenons un faisceau $\mathcal{L}$ de degré 0 sur C_1 et -1 sur C_2, alors la suite exacte

$$0 \to f_1^*T_{\mathcal{N}}(-p) \to f^*T_{\mathcal{N}} \otimes \mathcal{L} \to f_2^*T_{\mathcal{N}}(-1) \to 0$$

conduit, comme ci-dessus, à l'annulation

$$H^1(\mathcal{C}, f^*T_{\mathcal{N}} \otimes \mathcal{L}) = 0,$$

qui implique, par semi-continuité, $H^1(P^1, g^*T_{\mathcal{N}}(-1)) = 0$. Les possibilités pour le fibré $g^*T_{\mathcal{N}}$ sont alors minces : écrivons

$$g^*T_{\mathcal{N}} = \mathcal{O}(a) \oplus \mathcal{O}(b) \oplus \mathcal{O}(c), \quad a \leqslant b \leqslant c,$$

les entiers a, b et c satisfont les conditions suivantes :

(1) $a+b+c=4$ car le degré de $g^*T_{\mathcal{N}}$ est égal au degré de $f^*T_{\mathcal{N}}$ sur $\mathcal{C}$, donc à la somme des degrés de $f_i^*T_{\mathcal{N}}$ sur chaque composante $\mathcal{C}_i$; vu (5.1), chacun de ces degrés est égal à 2 ;

(2) $a \geqslant 0$ car $H^1(P^1, g^*T_{\mathcal{N}}(-1)) = 0$;

(3) $g^*T_{\mathcal{N}}$ admet le sous-faisceau $T_{P^1} = \mathcal{O}(2)$, avec quotient localement libre, ce qui impose $c=2$, ou bien $b=2$ et $c>2$.

Il n'y a que deux solutions à ces contraintes :

$$a=0, b=c=2, \qquad \text{ou bien} \qquad a=b=1, c=2.$$

Le lemme est démontré. □

Démonstration du lemme 5.2. — Le lemme 5.3 fournit une famille de courbes rationnelles déformant la courbe singulière $\mathcal{C}_x$, mais il reste à comprendre le fibré normal. Pour cela, nous allons, en utilisant les dilatations du groupe de Heisenberg, approcher la structure CR sur X^3 par la twstucture standard de la sphère S^3.

Rappelons brièvement le modèle du groupe de Heisenberg H. Dans des coordonnées $(\sigma, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}$, la forme de contact s'écrit

$$\eta = d\sigma + \Im(\bar{u}du), \tag{5.2}$$

et la structure CR est définie par l'espace $T_0^{1,0}$ engendré par le vecteur $\frac{\partial}{\partial u} + \frac{i\bar{u}}{2}\frac{\partial}{\partial \sigma}$. Toute la structure est invariante sous les dilatations paraboliques

$$\phi_t(\sigma, u) = (t^2\sigma, tu). \tag{5.3}$$

Bien entendu, cette structure n'est autre que celle de la sphère standard S^3, privée d'un point. D'ailleurs les dilatations ϕ_t s'étendent en des isométries de l'espace hyperbolique complexe : dans le groupe résoluble $\mathbb{R}_+ \ltimes H$,

$$\phi_t(s, \sigma, u) = (ts, t^2\sigma, tu); \tag{5.4}$$

la coordonnée $s \geqslant 0$ peut être considérée comme une coordonnée s'annulant exactement à l'ordre 1 sur le bord. Nous noterons $\mathcal{N}_0$ l'espace des twisteurs correspondant, décrit section 2 et aussi plus loin section 6.

Revenons à présent à la structure CR sur X. Par le lemme de Darboux, on peut trouver autour du point $x \in X$ des coordonnées $(\sigma, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ autour de l'origine, telles que la forme de contact soit donnée par la formule (5.2), et de plus la structure CR de X, déterminée par son espace $T^{1,0}$, coïncide à l'origine avec celle du groupe de Heisenberg. Alors, les dilatations paraboliques ϕ_t ramènent, quand $t \to 0$, la structure CR de X vers celle du groupe de Heisenberg :

$$\phi_t^* T^{1,0} \longrightarrow T_0^{1,0}.$$

Nous noterons $\mathcal{N}_t = \phi_t^* \mathcal{N}$ l'espace des twisteurs pour la structure CR $\phi_t^* T^{1,0}$, au-dessus d'un petit ouvert fixé de X autour de x : via ϕ_t, les espace $\mathcal{N}_t$ s'identifient à des voisinages de plus en plus petits de la courbe singulière $\mathcal{C}_x$ dans $\mathcal{N}$, et convergent vers $\mathcal{N}_0$ quand t tend vers 0.

Fixons une petite boule, V, dans la famille de courbes rationnelles déformant la courbe singulière $\mathcal{C}_x$ de $\mathcal{N}$, et $U \subset V$ la sous-famille de dimension 3 des courbes singulières (qui s'identifie à un petit voisinage de x dans $X^{\mathbb{C}}$). Nous conviendrons que l'origine dans V correspond à la courbe $\mathcal{C}_x$. Les dilatations ϕ_t agissent sur V en préservant U sur lequel elles agissent par les dilatations paraboliques (5.3). En fait, on peut paramétrer l'espace V de courbes rationnelles de $\mathcal{N}_t$ de sorte que l'action de ϕ_t sur V soit donnée par la formule (5.4) dans des coordonnées *complexes* $(s, \sigma, u, \bar{u})$ sur V, où u et $\bar{u}$ sont considérées comme coordonnées complexes indépendantes.

Soit $v \in V - U$, la courbe $\phi_t^* \mathcal{C}_v$ dans $\mathcal{N}_t$ converge quand $t \to 0$ vers une courbe rationnelle dans $\mathcal{N}_0$, donc de fibré normal $\mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(1)$. On en déduit que pour $t \leqslant t_0$, il en est de même pour toutes les courbes $\phi_t^* \mathcal{C}_v$, donc pour les courbes $\mathcal{C}_{\phi_t(v)}$. Si on prend une famille compacte de vecteurs v, on peut choisir le même t_0 pour tous ces vecteurs.

Si on pouvait appliquer ce résultat pour tous les v au bord d'un petit ouvert B de V, alors tous les P^1 paramétrés par $\phi_{t_0}(B)$ auraient fibré normal $\mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(1)$, et on aurait fini. Malheureusement, la restriction $v \notin U$ ne permet pas ce raisonnement de compacité. Dans un premier temps, on peut déduire l'existence de petits disques holomorphes Δ passant par l'origine dans V, transverses à U, paramétrant des P^1 à fibré normal $\mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(1)$.

Dans un second temps, observons que ce résultat vaut pour tous les points de $U \subset V$. Près de l'origine, on décrit ainsi un voisinage ouvert de U, et le lemme est démontré. $\square$

En poussant plus loin les arguments de cette démonstration, il est plausible qu'on puisse montrer, sans utiliser le lemme 5.3, l'existence des déformations de la courbe singulière $\mathcal{C}_x$, avec le fibré normal attendu : l'idée est, dans le processus d'approximation ci-dessus, de déformer les courbes rationnelles provenant du modèle de l'espace de Heisenberg (donc à fibré normal $\mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(1)$) en des courbes de $\mathcal{N}$. J'ai préféré distinguer les arguments valables en général (lemme 5.3) des arguments particuliers à la situation géométrique étudiée.

6. Le voisinage d'une courbe singulière

Pour réaliser la transformée twistorielle inverse, il sera important de comprendre de manière précise l'espace des twisteurs $\mathcal{N}$ au voisinage d'une courbe singulière.

Comme vu en (5.2), on peut choisir des coordonnées (σ, u, v) dans un voisinage d'un point $x \in X^{\mathbb{C}}$, de sorte que la forme de contact ait la forme standard :

$$\eta = d\sigma + \frac{1}{2i}(vdu - udv).$$

Pour la structure CR standard sur le groupe de Heisenberg, les $(1,0)$-formes sont données par $\theta^1 = du$ et les $(0,1)$-formes par $\theta^{\bar{1}} = dv$. Par un choix correct de coordonnées et de forme de contact [7], on peut faire coïncider une structure CR quelconque avec le modèle jusqu'à l'ordre 2 au voisinage du point x :

$$\theta^1 - du = O_2(\sigma, u, v), \quad \theta^{\bar{1}} - dv = O_2(\sigma, u, v), \tag{6.1}$$

où O_2 signifie des termes d'ordre 2 en les variables indiquées. La structure réelle s'écrit explicitement comme

$$\tau(\sigma, u, v) = (\bar{\sigma}, \bar{v}, \bar{u}). \tag{6.2}$$

Paramétrons la courbe $\mathcal{C}_y^+ = P\Omega_y'$ par $z_+ \to \eta + z_+\theta^1$ et la courbe $\mathcal{C}_y^-$ par $z_- \to \eta + z_-\theta^{\bar{1}}$. Un voisinage de $\mathcal{C}_x^+$ dans $\mathcal{N}^+$ est paramétré par les coordonnées (σ_+, u_+, z_+), où (σ_+, u_+) sont les coordonnées (σ, u) sur $\{v = 0\}$, et de même un voisinage de $\mathcal{C}_x^-$ dans $\mathcal{N}^-$ est paramétré par les coordonnées (σ_-, v_-, z_-).

Lemme 6.1. — *Les injections $X^{\mathbb{C}} \to \mathcal{N}^{\pm}$ sont données, dans le cas où X est le groupe de Heisenberg, par*

$$i_+(\sigma, u, v) = \big(\sigma_+ = \sigma + \frac{i}{2}uv, u_+ = u, z_+ = -iv\big),$$
$$i_-(\sigma, u, v) = \big(\sigma_- = \sigma - \frac{i}{2}uv, v_- = v, z_- = iu\big).$$

Dans le cas général, i_+ et i_- diffèrent du modèle par des termes d'ordre 3 au moins.

Démonstration. — Pour l'espace de Heisenberg, on a vu que $\Omega^{1,0}$ est engendré par du. Dans les coordonnées (σ, u, v, z_+) sur $P\Omega'$, la forme de Liouville s'exprime donc comme

$$\lambda = \eta + z_+du. \tag{6.3}$$

Puisque $d\eta = idu\wedge dv$, on obtient

$$d\lambda = (dz_+ - idv)\wedge du. \tag{6.4}$$

Le vecteur $\partial_v + \frac{u}{2i}\partial_\sigma$, de type $(0,1)$, se relève donc en le vecteur horizontal défini par (4.2),

$$X_H = \partial_v + \frac{u}{2i}\partial_\sigma + i\partial_{z_+}. \tag{6.5}$$

Les courbes intégrales de $T^{0,1}$ dans $X^{\mathbb{C}}$ sont les courbes $\{\sigma=\sigma_0, u=u_0\}$, où σ_0 et u_0 sont des constantes ; le vecteur X_H y étant constant, les feuilles de $P\Omega'$ se décrivent comme les

$$F(\sigma_0,u_0,z_0) = \Big\{\big(\sigma=\sigma_0+\frac{uv}{2i}, u=u_0, v, z_+=z_0+iv\big)\Big\}.$$

En particulier, $(\sigma,u,v,0)$ et $(\sigma-\frac{uv}{2i},u,0,-iv)$ sont dans la même feuille, ce qui fournit la formule pour i_+.

La formule pour i_- est similaire. Pour une variété générale, l'approximation (6.1) indique que $\lambda=\eta+z_+\theta^1$ diffère du modèle (6.3) à l'ordre 3, donc $d\lambda$ de (6.4) à l'ordre 2, ainsi que X_H de (6.5). Cela donne une approximation d'ordre 3 sur l'injection i_+, obtenue en intégrant X_H. □

Les sections de L sur $\mathcal{C}_y$ s'identifient aux $a+bz_++cz_-$. La forme de contact tautologique s'exprime alors évidemment dans un voisinage de $\mathcal{C}_x$ comme

$$\begin{aligned}\eta^c &= d\sigma_+ + z_+\big(du_+ + O_2(\sigma_+,u_+)\big),\\ &= d\sigma_- + z_-\big(dv_- + O_2(\sigma_-,v_-)\big).\end{aligned}$$

En particulier, le long de $\mathcal{C}_+$, la différentielle $d\eta^c$, bien définie seulement sur $\ker\eta^c$, est fournie par les formules

$$d\eta^c|_{\mathcal{C}_x^+} = dz_+\wedge du_+,\quad d\eta^c|_{\mathcal{C}_x^-} = dz_-\wedge dv_-.$$

Bien entendu, au point double les deux composantes fournissent le même résultat $idu\wedge dv$.

Comme on a vu, il n'y a pas d'obstruction aux déformations de la courbe rationnelle $\mathcal{C}_x$, donc l'espace tangent à l'espace des déformations est paramétré par les sections sur $\mathcal{C}_x$ du faisceau normal $(\mathcal{I}_{\mathcal{C}_x}/\mathcal{I}^2_{\mathcal{C}_x})^*$, voir [12, I.2, théorème 2.8]. En termes concrets, pour le modèle de l'espace de Heisenberg, la courbe $\mathcal{C}_x$ a pour équation locale $uv=0$ en coordonnées (σ,u,v), et les sections locales de $\mathcal{I}_{\mathcal{C}_x}/\mathcal{I}^2_{\mathcal{C}_x}$ sont $d\sigma$ et $udv+vdu$; cela signifie qu'une section locale du faisceau normal $N_{\mathcal{C}_x}$ est décrite par un couple $(a\partial_u+b\partial_\sigma, a'\partial_v+b'\partial_\sigma)$ de sections locales sur $\mathcal{C}_x^+$ et $\mathcal{C}_x^-$, avec b et b' holomorphes, a et a' méromorphes avec pôle simple en x, satisfaisant les relations $\operatorname{Res}_x a = \operatorname{Res}_x a'$ et $b=b'$ au point double x. Cette description reste valable dans le cas général par le lemme 6.1, et, passant aux systèmes de coordonnées (σ_+, u_+, z_+) et (σ_-, v_-, z_-), une section *globale* de $N_{\mathcal{C}_x}$ est décrite par un couple

$$s = (s_+ = a\partial_{u_+} + b\partial_{\sigma_+}, s_- = a'\partial_{v_-} + b'\partial_{\sigma_-}) \tag{6.6}$$

sur chaque composante, avec a et a' méromorphes sur $\mathcal{C}_x^+$ et $\mathcal{C}_x^-$ avec pôle simple au point double x, et b et b' holomorphes (donc constants) ; et satisfaisant la compatibilité au point double :

$$\operatorname{Res}_x a = -\operatorname{Res}_x a', \quad b' - b = \operatorname{Res}_x a. \tag{6.7}$$

Les sections holomorphes représentent les déformations avec point double, tandis que les sections méromorphes représentent les lissifications. Dans la suite, nous utiliserons la base privilégiée de sections suivantes :

$$\begin{aligned} s_0 &= \frac{1}{i}\Big(\frac{1}{z_+}\partial_{u_+} - \frac{1}{2}\partial_{\sigma_+}, -\frac{1}{z_-}\partial_{v_-} + \frac{1}{2}\partial_{\sigma_-}\Big), \\ s_1 &= \frac{1}{2}(\partial_{\sigma_+}, \partial_{\sigma_-}), \\ s_2 &= (\partial_{u_+}, 0), \\ s_3 &= (0, \partial_{v_-}). \end{aligned} \tag{6.8}$$

On notera (s^0, s^1, s^2, s^3) la base duale. On peut remarquer que la section s_2, tangente à $X^{\mathbb{C}}$, engendre $T^{1,0}$, tandis que s_3 engendre $T^{0,1}$. En fait, puisqu'on récupère $X^{\mathbb{C}}$ comme l'espace des points doubles des courbes singulières, les vecteurs tangents à $X^{\mathbb{C}}$ en x, correspondant respectivement aux sections s_1, s_2 et s_3, sont en coordonnées (σ, u, v) les vecteurs $\frac{\partial_\sigma}{2}$, ∂_u et ∂_v. De (6.1) résulte l'égalité

$$s^1 = 2\eta, \quad s^2 = \theta^1, \quad s^3 = \theta^{\bar{1}}. \tag{6.9}$$

Enfin, il est facile de voir que la section s_0 est réelle (c'est une raison du facteur i dans son expression).

7. La transformée twistorielle inverse

Partons d'une variété CR strictement pseudoconvexe X^3. On a construit un espace de twisteurs $\mathcal{N}$, avec une famille de courbes rationnelles, à fibré normal $\mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(1)$, paramétrée par une variété M de dimension 4, dans laquelle $X^{\mathbb{C}}$ se plonge comme le diviseur des courbes à points doubles.

L'espace $\mathcal{N}$ est équipé d'une forme de contact holomorphe η^c, à valeurs dans le fibré L. Au-dessus d'une courbe singulière $\mathcal{C}_x$, le fibré L a degré 1 sur chaque composante $\mathcal{C}_x^{\pm}$, donc est au total de degré 2 sur chaque courbe rationnelle.

Dans ces conditions, la transformée twistorielle inverse indique que M est munie d'une métrique autoduale d'Einstein g, dont $\mathcal{N}$ est l'espace des twisteurs. Nous emploierons la description suivante de la métrique.

Considérons le fibré en droites sur M défini par

$$\mathcal{L}_m = H^0(\mathcal{C}_m, \Omega^1_{\mathcal{C}_m} \otimes L). \tag{7.1}$$

Sur $X \subset M$, la formule continue à avoir un sens, car sur chaque composante, L se restreint en un faisceau de degré 1, et $\Omega^1_{\mathcal{C}_m}$ en un faisceau de degré -1.

La forme de contact η^c, restreinte à une courbe rationnelle $\mathcal{C}_x$, définit un élément $\Theta_x \in \mathcal{L}_x$, donc une section Θ de $\mathcal{L}$. Les courbes à points doubles sont legendriennes pour η^c, donc la section Θ est nulle sur X, transverse à X comme on le verra dans le lemme 7.2.

Définissons le fibré de rang 3 sur M par $W_m = H^0(\mathcal{C}_m, L)$, c'est le fibré $\Omega^2_- M$ des 2-formes antiautoduales sur M. Or l'espace $H^0(P^1, L)$, où $L = \mathcal{O}(2)$, est muni d'une métrique canonique Υ, définie par

$$\Upsilon(u, v) = ud^2v + vd^2u - dudv \in H^0(P^1, (\Omega^1_{P^1})^2 \otimes L^2) \simeq \mathbb{C}. \tag{7.2}$$

En formule, si on a une coordonnée z sur P^1, et les sections u et v sont données par $u = a + bz + cz^2$ et $v = a' + b'z + c'z^2$, alors

$$\Upsilon(u, v) = \big(2(ac' + a'c) - bb'\big)dz^2. \tag{7.3}$$

Cela signifie que le fibré W est muni d'une métrique Υ à valeurs dans $\mathcal{L}^2$, donc

$$\Theta^{-2}\Upsilon$$

est une métrique sur W, à savoir (à une constante près) le produit extérieur sur $\Omega^2_- M$ (défini négatif sur les sections réelles).

On réalise W_m comme espace de 2-formes sur $H^0(\mathcal{C}_m, N_m)$ de la manière suivante : si $m \notin X$, la courbe $\mathcal{C}_m$ est transverse à la distribution de contact η^c, donc le fibré normal N_m de $\mathcal{C}_m$ s'identifie à $\ker \eta^c$, et $d\eta^c$ est bien défini sur N_m. On dispose alors d'une 2-forme ω sur $M - X$, à valeurs dans W, définie par

$$\omega : \Lambda^2 H^0(\mathcal{C}_m, N_m) \xrightarrow{d\eta^c} W_m.$$

Choisissant une base orthonormale locale (w_1, w_2, w_3) de W, nous obtenons trois 2-formes

$$\omega_i = 2\Theta^{-2}\Upsilon(\omega, w_i) \tag{7.4}$$

locales sur M qui forment une base orthonormale de $\Omega^2_- M$. La connaissance d'une telle base suffit à caractériser la métrique g de M. (Le facteur 2 dans la formule est présent pour normaliser la métrique de manière agréable dans la suite.)

Remarque 7.1. — Nous n'utilisons pas la description, plus habituelle, de la métrique comme $g = \omega_H \omega_E$, avec $H_m = H^0(\mathcal{C}_m, L^{1/2})$, $E_m = H^0(\mathcal{C}_m, N_m \otimes L^{-1/2})$, et ω_H et ω_E sont des formes symplectiques définies sur H par le wronskien et sur E par $d\eta^c$. En effet, la définition de $L^{1/2}$ sur les courbes singulières est problématique, car L est de degré 1 sur chaque composante. On notera que la métrique (7.2) sur W est le carré du wronskien.

Les sections du faisceau $\Omega^1_{\mathcal{C}_x}$ s'identifient aux couples (α_+, α_-) de 1-formes sur $\mathcal{C}_x^+$ et $\mathcal{C}_x^-$, méromorphes avec pôle simple au point double x, satisfaisant

$$\operatorname{Res}_x \alpha_+ + \operatorname{Res}_x \alpha_- = 0.$$

(Cette relation provient de l'équation locale $z_+ z_- = 0$ pour $\mathcal{C}_x$.) Dans la suite, il sera commode de choisir la section particulière de $\Omega^1_{\mathcal{C}_x} \otimes L$ sur $\mathcal{C}_x$, donnée par le couple

$$\Big(\frac{dz_+}{iz_+} \otimes 1, -\frac{dz_-}{iz_-} \otimes 1\Big)$$

de sections sur $\mathcal{C}_x^+$ et sur $\mathcal{C}_x^-$, pour trivialiser $\mathcal{L}$ au point x ; nous étendons cette trivialisation en une trivialisation

$$\ell : \mathcal{L} \to \mathbb{C}$$

dans un voisinage de x. En particulier, $\ell\Theta$ devient une équation locale de X dans M, comme le montre le lemme suivant qui calcule de plus la métrique Υ sur X.

LEMME 7.2. — *La section Θ est transverse sur X, donc pour $m \notin X$, la courbe $\mathcal{C}_m$ est transverse à la distribution de contact* $\ker \eta^c$.

La métrique Υ sur W, à valeurs dans $\mathcal{L}^2$, satisfait

$$\ell^2 \Upsilon(a + bz_+ + cz_-, a' + b'z_+ + c'z_-) = -aa' - 2\ell\Theta(bc' + b'c) + O(\Theta^2).$$

Démonstration. — Prenons des coordonnées (z_+, z_-) sur $\mathbb{C}^2$, et définissons la famille C_ϵ de courbes de degré 2 de P^2 par l'équation

$$z_+ z_- = \epsilon.$$

Pour $\epsilon = 0$ on a une courbe singulière C_0 et un morphisme évident (en coordonnées) $f_0 : C_0 \to \mathcal{C}_x \subset \mathcal{N}$. Celui-ci s'étend en une famille de morphismes $f_\epsilon : C_\epsilon \to \mathcal{N}$ induisant une application ϕ du disque Δ dans M

telle que $\phi(0) = x$. De plus, on peut s'assurer que $\frac{d\phi}{d\epsilon}(0)$ est exactement la direction dans T_xM donnée par la section normale σ_0 définie en (6.8). Alors, sur $\mathcal{C}_x^+$,

$$\left.\frac{d\ell\Theta}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} = i_{\sigma_0} d\eta^c(iz_+\partial_{z_+}) = d\eta^c(\sigma_0, iz_+\partial_{z_+}) = -1,$$

et on trouve, comme il se doit, le même résultat sur $\mathcal{C}_x^-$:

$$\left.\frac{d\ell\Theta}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} = i_{\sigma_0} d\eta^c(-iz_-\partial_{z_-}) = d\eta^c(\sigma_0, -iz_-\partial_{z_-}) = -1,$$

d'où

$$\ell\Theta = -\epsilon + O(\epsilon^2). \tag{7.5}$$

Cela assure bien la transversalité de Θ sur X.

La section $a+bz_+ +cz_-$ de L induit une section $a+bz_+ +cz_-$ de $\mathcal{O}_{P^2}(1)$, et donc sur chaque C_ϵ une section $a + bz_+ + \frac{c\epsilon}{z_+}$ de $\mathcal{O}(2)$ (convergeant vers $a + bz_+$ sur $\mathcal{C}_x^+$ quand $\epsilon \to 0$). En appliquant la formule (7.3), on déduit

$$\ell^2\Upsilon(a + bz_+ + cz_-, a' + b'z_+ + c'z_-) = -aa' + 2\epsilon(bc' + b'c) + O(\epsilon^2),$$

et le lemme découle de (7.5). □

Comme $\mathcal{C}_x$ est legendrienne pour η^c, la forme $d\eta^c$ n'est pas intrinsèque sur le fibré normal de $\mathcal{C}_x$, mais, pour $s, t \in H^0(\mathcal{C}_x, N_x)$ est bien défini

$$\Theta d\eta^c(s,t) = \eta^c \wedge d\eta^c(s,t) \in H^0(\mathcal{C}_x, \Omega^1_{\mathcal{C}_x} \otimes L^2) = \mathcal{L}_x \otimes W_x.$$

En calculant cette expression sur la base (6.8), on obtient :

$$2\ell\Theta d\eta^c = s^0 \wedge s^1 + z_+(s^0 - is^1) \wedge s^2 + z_-(s^0 + is^1) \wedge s^3.$$

Par le lemme 7.2, une base orthonormale (négative) de W_x pour la métrique $\Theta^{-2}\Upsilon$ près de x, à l'ordre 1 près transversalement à X, est donnée par

$$\begin{aligned} w_1 &= \ell\Theta, \\ w_2 &= \frac{z_+ + z_-}{2}\sqrt{\ell\Theta}, \\ w_3 &= \frac{z_+ - z_-}{2i}\sqrt{\ell\Theta}. \end{aligned}$$

Ici il est important de noter que, puisque la structure réelle agit par $\tau(\eta + z_+\theta^1) = \eta + \bar{z}_+\theta^{\bar{1}}$, elle envoie z_+ sur $\bar{z}_-$, si bien que la base ci-dessus est réelle. On en déduit, par la formule (7.4), la base de 2-formes antiautoduales, toujours à l'ordre 1 près,

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= (\ell\Theta)^{-2} s^0 \wedge s^1,\\
\omega_2 &= (\ell\Theta)^{-3/2}\big(-(s^0+is^1)\wedge s^3 - (s^0-is^1)\wedge s^2\big),\\
\omega_3 &= (\ell\Theta)^{-3/2} i\big((s^0+is^1)\wedge s^3 - (s^0-is^1)\wedge s^2\big),
\end{aligned}$$

puis, en posant $\alpha^2 = s^2+s^3$ et $\alpha^3 = i(s^3-s^2)$, toujours à $O(\Theta)$ près,

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= (\ell\Theta)^{-2} s^0 \wedge s^1,\\
\omega_2 &= (\ell\Theta)^{-3/2}(-s^0\wedge\alpha^2 - s^1\wedge\alpha^3),\\
\omega_3 &= (\ell\Theta)^{-3/2}(s^0\wedge\alpha^3 - s^1\wedge\alpha^2).
\end{aligned}$$

Cela correspond aux termes principaux des 2-formes antiautoduales pour la métrique

$$\frac{(s^0)^2+(s^1)^2}{(\ell\Theta)^2} + \frac{(\alpha^2)^2+(\alpha^3)^2}{\ell\Theta}.$$

En revenant à (6.9), on a $(\alpha^2)^2+(\alpha^3)^2 = 4\theta^1\theta^{\bar 1} = 2\gamma$, d'où

$$g \sim \frac{d(\ell\Theta)^2+4\eta^2}{(\ell\Theta)^2} + \frac{2\gamma}{\ell\Theta}.$$

Ainsi, la métrique g a près de $X^{\mathbb{C}}$ le comportement (1.3), ce qui achève la démonstration du théorème 1.1 : suivant qu'on regarde sur la partie réelle $M^{\mathbb{R}}$ le côté $\ell\Theta > 0$ ou $\ell\Theta < 0$, on obtient une métrique positive ou de signature $(2,2)$.

Nous serons plus rapides sur la partie unicité du théorème 1.1. On a vu en (2.3) que le bord de l'espace des twisteurs d'une métrique autoduale d'Einstein avec comportement asymptotique (1.3) doit être l'espace $\mathcal{N}|_X$ construit section 3, avec sa structure de contact holomorphe. Le germe de l'espace des twisteurs est uniquement déterminé par cette hypersurface réelle.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. F. Atiyah, N. J. Hitchin & I. M. Singer, « Self-duality in four-dimensional Riemannian geometry », *Proc. Roy. Soc. London Ser. A* **362** (1998), n° 1711, p. 425-461.

[2] O. Biquard, « Métriques d'Einstein asymptotiquement symétriques », *Astérisque* **265** (2000), p. vi+109.

[3] ———, « Métriques autoduales sur la boule », *Invent. math.* **148** (2002), n° 3, p. 545-607.

[4] ———, « Autodual Einstein versus Kähler-Einstein », *Geom. Funct. Anal.* **15** (2005), n° 3, p. 598-633.

[5] ———, « Cauchy-Riemann 3-Manifolds and Einstein Fillings », in *Perspectives in Riemannian Geometry* (V. Apostolov, A. Dancer, N. Hitchin & M. Wang, éds.), CRM Proceedings and Lecture Notes, vol. 40, American Mathematical Society, 2006, p. 27-46.

[6] D. M. J. Calderbank & M. A. Singer, « Einstein metrics and complex singularities », *Invent. Math.* **156** (2004), n° 2, p. 405-443.

[7] S. S. Chern & J. K. Moser, « Real hypersurfaces in complex manifolds », *Acta Math.* **133** (1974), n° 3, p. 219-271.

[8] O. Debarre, *Higher-dimensional algebraic geometry*, Universitext, Springer-Verlag, New York, 1961.

[9] C. L. Fefferman, « Monge-Ampère equations, the Bergman kernel, and geometry of pseudoconvex domains », *Ann. of Math. (2)* **103** (1976), n° 2, p. 395-416.

[10] B. Feix, « Hyperkähler metrics on cotangent bundles », *J. Reine Angew. Math.* **532** (2001), p. 33-46.

[11] N. J. Hitchin, « Twistor spaces, Einstein metrics and isomonodromic deformations », *J. Reine Angew. Math.* **42** (1995), n° 1, p. 30-112.

[12] J. Kollár, *Rational curves on algebraic varieties*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete., Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[13] C. LeBrun, « $\mathcal{H}$-space with a cosmological constant », *Proc. Roy. Soc. London Ser. A* **380** (1982), n° 1778, p. 171-185.

[14] ———, « Twistor CR manifolds and three-dimensional conformal geometry », *Trans. Amer. Math. Soc.* **284** (1984), n° 2, p. 601-616.

[15] J. M. Lee & R. Melrose, « Boundary behaviour of the complex Monge-Ampère equation », *Acta Math.* **148** (1982), p. 159-192.

Manuscrit reçu le 13 avril 2006,
accepté le 12 octobre 2006.

Olivier BIQUARD
Université Louis Pasteur et CNRS
IRMA
7 rue René Descartes
67084 Strasbourg cedex (France)
olivier.biquard@math.u-strasbg.fr