ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Éric BALANDRAUD

Une variante de la méthode isopérimétrique de Hamidoune, appliquée au théorème de Kneser

Tome 58, nº 3 (2008), p. 915-943.

<http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2008__58_3_915_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
58, 3 (2008) 915-943

UNE VARIANTE DE LA MÉTHODE ISOPÉRIMÉTRIQUE DE HAMIDOUNE, APPLIQUÉE AU THÉORÈME DE KNESER

par Éric BALANDRAUD

RÉSUMÉ. — En théorie additive des nombres, le théorème de Kneser joue aujourd'hui un rôle central dans un grand nombre de démonstrations. Hamidoune a récemment développé une approche alternative au théorème de Kneser, qu'il a appelé méthode isopérimétrique et qui lui a permis de donner de nouvelles preuves et de nombreuses généralisations de résultats classiques. Cependant, jusqu'à maintenant, on ne connaissait pas de démonstration du théorème de Kneser par cette méthode. Nous proposons ici une nouvelle approche de type isopérimétrique, qui nous permet entre autres de donner une seconde preuve du théorème de Kneser.

ABSTRACT. — In additive number theory, Kneser's theorem is now a key element in a large number of proofs. Recently, Hamidoune developped a different approach, that he called the isoperimetric method, and that allowed him to provide news proofs and generalizations of classical results. However, until now there was no known proof of Kneser's theorem by this method. We present here a new isoperimetric point-of-view that, among others, yields a second proof of Kneser's theorem.

Introduction

Soit $(G,+)$ un groupe (non nécessairement abélien). Soient A et B deux sous-ensembles de G et $g \in G$; on note $A+B = \{a+b \mid a \in A,\ b \in B\}$ et $g+B = \{g\}+B$. Par convention, on pose $\emptyset + B = \emptyset$. Les premiers résultats sur l'addition d'ensembles sont dûs à Cauchy, notamment ce qu'on appelle maintenant le théorème de Cauchy-Davenport (et ses applications). Démontré en premier lieu par Cauchy en 1813 [3], celui-ci l'utilisa pour démontrer que dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ tout élément est somme de k puissances k-ièmes.

Mots-clés : Théorie additive des nombres, théorème de Kneser, méthode isopérimétrique, théorie d'addition d'ensembles.
Classification math. : 11P70.

Le théorème fut redécouvert en 1935 par Davenport [6], mais ce n'est que douze ans plus tard qu'il réalisa qu'il avait été précédé [7].

Théorème 1 (théorème de Cauchy-Davenport). — *Soient p un nombre premier, A et B deux sous-ensembles non vides de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Alors on a*

$$|A+B| \geqslant \min\big(p, |A|+|B|-1\big).$$

Le théorème de Vosper (cf. [26], [25]), qui date de 1956, précise la structure des ensembles intervenant dans le théorème de Cauchy-Davenport, lorsque la somme est de cardinal minimal, c'est-à-dire dans les cas d'égalité.

Théorème 2 (théorème de Vosper). — *Soient p un nombre premier, A et B deux sous-ensembles de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ contenant chacun au moins deux éléments et tels que $|A+B| < p-1$. Si $|A+B| = |A|+|B|-1$, alors A et B sont des progressions arithmétiques de même raison.*

Les applications de ces résultats sont extrêmement nombreuses en théorie additive des nombres. Certaines généralisations aux groupes abéliens sont bien connues, comme le théorème de Chowla dans les groupes cycliques [4], ou le théorème de Mann [22], qui est le premier à faire intervenir explicitement des sous-groupes :

Théorème 3 (théorème de Mann). — *Soient G un groupe abélien fini, et A et B deux sous-ensembles non vides de G tels que $A+B \neq G$. Il existe un sous-groupe strict H de G (i.e. $H \neq G$), tel que*

$$|A+B| \geqslant |A|+|H+B|-|H|.$$

Dans un groupe abélien G, on appelle période d'un sous-ensemble B de G, l'ensemble des $g \in G$, tel que $g+B = B$. Il est immédiat de constater que la période d'un sous-ensemble B est un sous-groupe de G. On dit qu'un ensemble est périodique si sa période n'est pas réduite au sous-groupe trivial. Le théorème suivant dû à Kneser (cf. [20], [21]) s'est révélé être un outil extrêmement important en théorie additive des nombres :

Théorème 4 (théorème de Kneser). — *Soient G un groupe abélien, A et B deux sous-ensembles finis non vides de G. Si H désigne la période de $A+B$, alors on a*

$$|A+B| \geqslant |A+H|+|B+H|-|H|.$$

On constate tout d'abord que le théorème de Kneser implique les théorèmes de Cauchy-Davenport et de Mann cités précédemment. De plus, les applications du théorème de Kneser sont elles aussi très nombreuses et dans des domaines assez divers, notamment pour les ensembles d'entiers de petite somme, ou pour les ensembles « sum-free » dans les groupes abéliens. Certaines de ces applications sont développées dans l'ouvrage de référence de Nathanson [23]. Dans [19], Kemperman exposa une méthode générale, généralisant le théorème de Vosper, basée sur des transformations des ensembles considérés. Plus récemment, Hamidoune [11], [12], [13], [14], [16], développa une méthode qu'il appela isopérimétrique, et qui permit de nombreuses généralisations des théorèmes sur l'addition d'ensembles comme par exemple une généralisation du théorème $3k-3$ de Freiman [17], [18], une amélioration de la détermination de la fonction X d'Erdős-Graham [24] ou des avancées sur le problème de Frobenius [15]. Cependant jusqu'à maintenant, on ne connaissait pas de preuve du théorème de Kneser basée sur cette méthode. Le propos de cet article est d'introduire une variante de la méthode isopérimétrique de Hamidoune, adaptée spécifiquement à l'étude des ensembles de petites sommes. On pourra apprécier l'intérêt de cette nouvelle approche par le fait qu'elle nous permet de donner une seconde preuve du théorème de Kneser. Parmi les différentes formulations du théorème de Kneser, nous nous intéresserons plus particulièrement à celle-ci, qui peut se comprendre comme une caractérisation des paires de petite somme :

Théorème 5 (théorème de Kneser). — *Soient G un groupe abélien, A et B deux sous-ensembles finis non vides de G, tels que*

$$|A+B| < |A|+|B|-1.$$

Alors $A+B$ est périodique et si H est la période de $A+B$, on a

$$|A+B| = |A+H|+|B+H|-|H|.$$

L'équivalence entre les formulations des théorèmes 4 et 5 se démontre par un passage au quotient. Pour l'étude des paires (A,B) de sous-ensembles d'un groupe G de petite somme (i.e. $|A+B|<|A|+|B|-1$ et $A+B\neq G$), on est amené à s'intéresser pour un ensemble B donné aux valeurs de la fonction $\Phi_B : X \mapsto |X+B|-|X|$. La méthode isopérimétrique de Hamidoune caractérise déjà les ensembles A qui atteignent le minimum $\kappa_1(B)$ de cette fonction. Mais le théorème de Kneser est plus général et donne un résultat pour tous les ensembles qui atteignent les valeurs de cette fonction inférieures à $|B|-1$. Le principe de la variante de la méthode isopérimétrique que nous introduisons consiste précisément à considérer les valeurs successives prises par la fonction Φ_B entre $\kappa_1(B)$ et $|B|-1$, et les ensembles pour lesquels la fonction Φ_B atteint ces valeurs. Pour cela, nous étudierons dans la première partie les propriétés d'outils additifs purement ensemblistes relatifs à un ensemble B. Nous définirons alors une certaine famille de sous-ensembles dépendant de l'ensemble B, les cellules pour B, qui sont des ensembles maximaux pour la somme par B. Le but principal de cette première partie est de restreindre l'étude de la fonction Φ_B à cette famille de sous-ensembles. Nous développerons dans une deuxième partie le principe des idées isopérimétriques (reprenant celles de Hamidoune, généralisant certaines), qui s'exprimera sous la forme d'inégalités liées à cette fonction Φ_B. On définit la seconde suite des nombres isopérimétriques, la suite croissante des valeurs de Φ_B sur les cellules (la première étant celle des travaux de Hamidoune). Ces propriétés et leurs liens avec les cellules forment la base de notre nouvelle approche isopérimétrique. Elles seront exposées dans un cadre général (dans un groupe non nécessairement abélien), car la méthode isopérimétrique permet également d'envisager l'étude de problèmes dans un cadre non abélien [27], [1].

Nous donnons dans la partie 3.1 un premier résultat (traduction d'un résultat dû à Hamidoune [11]) concernant les ensembles minimisant la fonction Φ_B dans un groupe abélien. Puis en 3.2, nous donnons un résultat original de structure (dans le cas abélien) concernant cette fois, tous les ensembles tels que leurs valeurs par Φ_B soient strictement inférieures à $|B|-1$. De ce résultat, on déduit rapidement une nouvelle preuve du théorème de Kneser dans la partie 4.

1. Outils additifs de pivot $B \subset G$

Dans toute cette partie, on considère un groupe G non nécessairement abélien et un sous-ensemble B de G. On donne ici les définitions et propriétés de base nécessaires à la suite de l'article. Dans un souci de concision, nous ne donnerons pas les preuves des résultats les plus simples (mais la référence [1] contient les preuves complètes ; elles ne font intervenir que des considérations ensemblistes élémentaires).

1.1. L'application $P_B : X \longmapsto G \setminus ((G \setminus (X+B)) - B)$

On note $\mathbf{P}(G)$, l'ensemble des parties de G. On s'intéresse aux propriétés de l'application :

$$P_B : \mathbf{P}(G) \longrightarrow \mathbf{P}(G); \quad X \longmapsto G \setminus ((G \setminus (X+B)) - B).$$

L'étude de cette application permet de mettre en évidence les propriétés élémentaires suivantes (dont on pourra trouver les preuves dans [1]) : pour tous sous-ensembles X et Y de G, on a

$$X \subset P_B(X), \tag{1.1}$$

$$X + B = P_B(X) + B, \tag{1.2}$$

$$P_B^2(X) = P_B(X), \tag{1.3}$$

$$X + B = Y + B \text{ si et seulement si } P_B(X) = P_B(Y). \tag{1.4}$$

Cette dernière propriété fait de $P_B(X)$ un ensemble caractéristique de la somme $X + B$. Cela nous permettra par la suite de limiter l'étude aux ensembles images de P_B. On peut aussi remarquer que l'ensemble $P_B(X)$ peut être défini comme l'ensemble maximal M tel que $M + B \subset X + B$.

1.2. Propriétés de l'image $\mathbf{C}_B$ de P_B

On note $\mathbf{C}_B$ l'ensemble des images de $\mathbf{P}(G)$ par P_B,

$$\mathbf{C}_B = P_B\big(\mathbf{P}(G)\big).$$

Les éléments de $\mathbf{C}_B$ seront appelés les *cellules* pour B. Elles sont caractérisées naturellement comme étant les solutions de $P_B(X) = X$. On remarque que $P_B(\emptyset) = \emptyset$, ainsi $\emptyset \in \mathbf{C}_B$. De même, on a $P_B(G) = G$, ainsi $G \in \mathbf{C}_B$. Ce sont ces cellules qui nous intéressent, car elles sont caractéristiques de leurs sommes avec B, nous allons donner leurs propriétés les plus élémentaires. Dans la suite, on note $\pi(X)$ l'ensemble des $g \in G$ tels que $g + X = X$. Comme dans le cas abélien, il est immédiat de constater que $\pi(X)$ est un sous-groupe de G, qu'on appelle période à gauche de X. Pour tous sous-ensembles X, Y de G, et tout $g \in G$, on a :

$$P_B(g + X) = g + P_B(X), \tag{1.5}$$

$$\pi(X) \subset \pi(P_B(X)), \tag{1.6}$$

$$\text{si } X \subset Y, \text{ alors on a } P_B(X) \subset P_B(Y). \tag{1.7}$$

On déduit de (1.5) que l'ensemble $\mathbf{C}_B$ est stable par translation à gauche par un singleton. Le point clé de cette section est le résultat suivant :

Proposition 6. — *L'ensemble $\mathbf{C}_B$ est stable par intersection : si C_1 et C_2 sont deux éléments de $\mathbf{C}_B$, alors $C_1 \cap C_2 \in \mathbf{C}_B$.*

Démonstration. — Soit $Z = C_1 \cap C_2$. Comme $Z \subset C_1$, d'après (1.7) et (1.3), on a $P_B(Z) \subset P_B(C_1) = C_1$. De même, on a $P_B(Z) \subset P_B(C_2) = C_2$.

Ainsi $P_B(Z) \subset C_1 \cap C_2 = Z$. De plus, (1.1) nous donne $Z \subset P_B(Z)$, donc on a $Z = P_B(Z)$, ce qui signifie que $Z \in \mathbf{C}_B$. $\square$

Notons bien que tout ce qui a été établi jusqu'ici l'a été dans un cadre général. Nous voyons maintenant une particularité du cas où le groupe est abélien. Si G est abélien, pour tout sous-ensemble X de G, on a

$$-P_B(X) = P_{-B}(-X), \tag{1.8}$$

On en déduit que si G est abélien, $\mathbf{C}_B$ et $\mathbf{C}_{-B}$ sont symétriques : pour tout sous-ensemble X de G, $X \in \mathbf{C}_B$ si et seulement si $-X \in \mathbf{C}_{-B}$.

1.3. Dualité additive $D_B : X \mapsto G \setminus (X + B)$

Parmi les propriétés des cellules qui nous seront utiles, il se trouve que celles pour B et celles pour $-B$ entretiennent des relations privilégiées que nous allons détailler maintenant. On considère la fonction suivante :

$$D_B : \mathbf{P}(G) \longrightarrow \mathbf{P}(G), \quad X \longmapsto G \setminus (X + B).$$

On remarque immédiatement que

$$P_B = D_{-B} \circ D_B.$$

Bien que l'expression de D_B soit plus simple que celle de P_B, il est naturel de présenter P_B en premier lieu car elle permet de définir les cellules pour B. En effet, l'étude de l'application D_B permet de remarquer qu'elle établit une bijection de $\mathbf{C}_B$ sur $\mathbf{C}_{-B}$, d'inverse D_{-B}. C'est cette propriété qui justifie l'appellation de dualité additive.

Proposition 7. — *L'image de la fonction D_B est $\mathbf{C}_{-B}$. De plus D_B est une bijection de $\mathbf{C}_B$ sur $\mathbf{C}_{-B}$, d'inverse D_{-B}.*

Démonstration. — En effet, on a $X + B = P_B(X) + B$ d'après (1.2) ; on obtient donc $D_B(X) = D_B(P_B(X))$. Pour $X \subset G$, on a $D_B(X) \in \mathbf{C}_{-B}$; en effet

$$P_{-B}\big(D_B(X)\big) = (D_B \circ D_{-B} \circ D_B)(X) = D_B\big(P_B(X)\big) = D_B(X).$$

Ainsi D_B est à image dans $\mathbf{C}_{-B}$. Comme P_B est une bijection de $\mathbf{C}_B$ sur lui-même (P_B est même l'identité de $\mathbf{C}_B$ sur lui-même) et que $P_B = D_{-B} \circ D_B$, alors D_B est une injection de $\mathbf{C}_B$ sur $\mathbf{C}_{-B}$ et D_{-B} une surjection de $\mathbf{C}_{-B}$ sur $\mathbf{C}_B$. Il suffit d'échanger les rôles de B et $-B$ pour obtenir les propriétés inverses. Ainsi D_B et D_{-B} sont des bijections respectivement de $\mathbf{C}_B$ sur $\mathbf{C}_{-B}$ et de $\mathbf{C}_{-B}$ sur $\mathbf{C}_B$ et inverses l'une de l'autre. $\square$

On détermine les propriétés élémentaires suivantes de D_B (les preuves complètes sont dans [1]). Pour tous sous-ensembles X et Y de G, toute cellule C pour B et tout $g \in G$, on a :

$$D_B(g+X) = g + D_B(X), \tag{1.9}$$

$$\pi(X) \subset \pi(D_B(X)) \text{ et } \pi(C) = \pi(D_B(C)), \tag{1.10}$$

$$\text{si } X \subset Y \text{ alors on a } D_B(Y) \subset D_B(X), \tag{1.11}$$

$$P_B(X \cup Y) = D_{-B}(D_B(X) \cap D_B(Y)). \tag{1.12}$$

Toutes les propriétés précédentes de D_B sont établies sans aucune hypothèse sur G, nous allons maintenant voir une conséquence de la commutativité de G. Si G est abélien, pour tout sous-ensemble X de G, on a

$$D_B(-X) = -D_{-B}(X). \tag{1.13}$$

Remarque 1. — La notion de dualité additive apparaît implicitement dans l'énoncé du théorème de Vosper. En effet, la condition $|A+B| < p-1$ est équivalente à $|D_B(A)| \geqslant 2$. On a alors dans les hypothèses du théorème à la fois $|A| \geqslant 2$ et $|D_B(A)| \geqslant 2$. Elle apparaît aussi, sans notation, dans les travaux de Hamidoune, qui s'intéresse aux ensembles X vérifiant $|X| \geqslant k$ et $|D_B(X)| \geqslant k$.

1.4. Contributions de B

Dans les parties précédentes, aucune supposition n'avait été faite sur l'ensemble B. Nous allons voir ici que des propriétés propres à l'ensemble B peuvent avoir des conséquences intéressantes pour l'études de ses cellules. On note $\mathbf{P}_f(G)$ l'ensemble des parties finies de G.

1.4.1. — Si B est un sous-ensemble fini et non vide de G, l'image de tout sous-ensemble fini de G par P_B est fini, autrement dit :

$$P_B\big(\mathbf{P}_f(G)\big) \subset \mathbf{P}_f(G).$$

Si G est un groupe infini et B est un sous-ensemble fini de G, alors D_B est une bijection de l'ensemble des cellules finies de $\mathbf{C}_B$ sur l'ensemble des cellules de complémentaire fini de $\mathbf{C}_{-B}$.

1.4.2. — Si B est un sous-ensemble contenant 0 de G, alors pour tout X contenu dans G, les trois ensembles X, $(X+B) \setminus X$ et $D_B(X)$ forment une partition du groupe G.

En effet, comme $0 \in B$, on a $X \subset (X+B)$, ainsi X et $(X+B) \smallsetminus X$ forment une partition de $X+B$. Par définition, $D_B(X)$ est le complémentaire de $X+B$ dans G. Ainsi X, $(X+B) \smallsetminus X$ et $D_B(X)$ forment une partition de G. On en déduit l'égalité :

Proposition 8. — *Soit G un groupe. Si B est un sous-ensemble contenant 0, alors pour toute cellule C pour B, on a*

$$(C+B) \smallsetminus C = \big(D_B(C) - B\big) \smallsetminus D_B(C).$$

Démonstration. — Comme $0 \in B$, C, $(C+B) \smallsetminus C$ et $D_B(C)$ forment une partition de G. De même, $0 \in (-B)$, ainsi $D_B(C)$, $(D_B(C) - B) \smallsetminus D_B(C)$ et $D_{-B}(D_B(C)) = C$ forment aussi une partition de G. Ces deux partitions comptent trois éléments chacune et ont deux éléments communs : C et $D_B(C)$. Ainsi il s'agit exactement de la même partition de G et donc $(C+B) \smallsetminus C = (D_B(C) - B) \smallsetminus D_B(C)$. □

2. Idées isopérimétriques

Dorénavant on considère un groupe G et B un sous-ensemble fini non vide de G.

2.1. Définition et premières propriétés

On s'intéresse aux valeurs de l'application :

$$\Phi_B : \mathbf{P}_f(G) \longrightarrow \mathbb{N}, \quad X \longmapsto |X+B| - |X|,$$

qui, lorsque $0 \in B$, donne le nombre d'éléments du périmètre de X dans le graphe de Cayley de (G, B), (graphe dont les sommets sont les éléments de G et les arêtes les paires (g_1, g_2), telles qu'il existe $b \in B$ tel que $g_1 + b = g_2$). Les graphes de Cayley occupent une place importante en théorie des graphes, voir le chapitre 6 de [10]. C'est à partir du point de vue de la théorie des graphes que la méthode a été qualifiée d'isopérimétrique par Hamidoune. Cette fonction va nous permettre de classer les cellules pour B. Nous nous intéressons principalement aux ensembles de petit périmètre et donc aux cellules de petit périmètre. On établit dans cette partie les propriétés de Φ_B et ses relations avec les cellules pour B, en particulier le fait que Φ_B prend toujours une valeur moindre sur une cellule que sur un ensemble qui donne la même somme par B et le fait que Φ_B prend la même valeur sur une cellule que Φ_{-B} sur la cellule duale. Une propriété immédiate de la définition de Φ_B est que pour tout $g \in G$, on a

$$\Phi_B = \Phi_{B+g}.$$

En effet, quel que soit l'élément $g \in G$, et pour tout sous-ensemble fini X, les sous-ensembles $X + B$ et $X + B + g$ sont de même cardinal. On a alors $|X + B| - |X| = |X + B + g| - |X|$, donc $\Phi_B(X) = \Phi_{B+g}(X)$. Si l'on choisit $g = -b$, avec $b \in B$, cela revient à considérer que 0 appartient à B. On peut alors considérer que pour tout X sous-ensemble de G, on a $X \subset (X + B)$ et donc on peut écrire

$$\Phi_B(X) = \big|(X + B) \smallsetminus X\big|.$$

Contrairement à la formulation initiale de Φ_B, cette formulation ne nécessite pas que l'ensemble X soit fini. On peut ainsi sans aucune perte de généralité considérer que B contient 0 et étendre la fonction Φ_B à tout sous-ensemble X de G. Pour B un sous-ensemble fini de G contenant 0, on considèrera la fonction

$$\Phi_B : \mathbf{P}(G) \longrightarrow \&\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \quad X \longmapsto \big|(X + B) \smallsetminus X\big|.$$

Lemme 9 (de translation). — *Soient G un groupe et B un sous-ensemble fini non vide de G. Pour tout $g \in G$ et tout X sous-ensemble fini de G, on a*

$$\Phi_B(X) = \Phi_B(g + X)$$

Proposition 10. — *Soient G un groupe et B un sous-ensemble fini non vide de G. Pour tout sous-ensemble fini X de G, on a*

$$\Phi_B(P_B(X)) \leqslant \Phi_B(X).$$

De plus, si $\Phi_B(P_B(X)) = \Phi_B(X)$, alors $P_B(X) = X$.

Démonstration. — On a vu en 1.4 que si B et X sont finis, alors $P_B(X)$ l'est aussi. De plus, d'après (1.1), on a $X \subset P_B(X)$, donc $|X| \leqslant |P_B(X)|$ et d'après (1.2), on a $X + B = P_B(X) + B$, donc $|X + B| = |P_B(X) + B|$. Ainsi

$$\Phi_B(X) = |X + B| - |X| \geqslant \big|P_B(X) + B| - |P_B(X)\big| = \Phi_B\big(P_B(X)\big).$$

De plus, si $\Phi_B(P_B(X)) = \Phi_B(X)$, on obtient naturellement $|P_B(X)| = |X|$. Et l'inclusion (1.1) impose alors $P_B(X) = X$. □

Proposition 11. — *Soient G un groupe et B un sous-ensemble fini contenant* 0*. Pour toute cellule finie ou de complémentaire fini C pour B, on a*

$$\Phi_B(C) = \Phi_{-B}\big(D_B(C)\big).$$

Démonstration. — On a $(C+B)\smallsetminus C=(D_B(C)-B)\smallsetminus D_B(C)$ d'après la proposition 8. Ainsi

$$\Phi_B(C)=\big|(C+B)\smallsetminus C\big|=\big|(D_B(C)-B)\smallsetminus D_B(C)\big|=\Phi_{-B}\big(D_B(C)\big).$$

□

Le cas abélien présente une particularité que nous voyons maintenant.

Lemme 12. — *Si G est un groupe abélien et B un sous-ensemble fini de G contenant* 0, *alors pour tout sous-ensemble fini X de G, on a*

$$\Phi_B(X)=\Phi_{-B}(-X).$$

Démonstration. — Par unicité de l'élément opposé, on a $|X|=|-X|$ et $|X+B|=|-B-X|$. De plus, par commutativité, on a $|-X-B|=|-B-X|$, ainsi $|X+B|-|X|=|-X-B|-|-X|$. □

2.2. Les k-cellules et k-noyaux

On note $\mathbf{C}_B^0=\{\emptyset,G\}$; on a $\mathbf{C}_B^0\subset\mathbf{C}_B$. On note aussi $\lambda_0(B)=0=\Phi_B(\emptyset)=\Phi_B(G)$. On appelle 0-cellule, un élément de $\mathbf{C}_B^0$. On introduit une notation des cellules finies ou de complémentaire fini qui vise à les classer en fonction de la taille de leurs périmètres. En particulier, on appelle l'ensemble des tailles de ces périmètres la *seconde suite isopérimétrique* (en convenant d'appeler première suite isopérimétrique celle définie dans les travaux de Hamidoune [11], [12], [13], [14], [16]) : on note $\mathbf{C}_{B,f}$ l'ensemble des cellules finies ou de complémentaire fini de B. Comme B est fini, naturellement ces cellules ont un périmètre fini.

Définition 1. — On appelle *seconde suite de nombres isopérimétriques* la suite ordonnée des valeurs prises par la fonction Φ_B sur l'ensemble des cellules finies ou de complémentaire fini $\mathbf{C}_{B,f}\smallsetminus\mathbf{C}_B^0$. On la notera

$$\Phi_B(\mathbf{C}_{B,f}\smallsetminus\mathbf{C}_B^0)=\big\{0\leqslant\lambda_1(B)<\lambda_2(B)<\cdots\big\}.$$

La proposition 11 et la correspondance des cellules par dualité assure que cette suite est la même pour un ensemble B et pour son symétrique $-B$.

Définition 2. — Pour k un entier naturel non nul, on appelle *k-cellule* une cellule finie ou de complémentaire fini C, qui n'est pas une 0-cellule, telle que $\Phi_B(C)=\lambda_k(B)$. On note $\mathbf{C}_B^k$ l'ensemble des k-cellules.

Si $\lambda_1(B) = 0$, on a

$$\mathbf{C}_B^1 = (\mathbf{C}_{B,f} \setminus \mathbf{C}_B^0) \cap \Phi_B^{-1}\big(\lambda_1(B)\big).$$

Pour $k > 1$, et pour tout $k \in \mathbb{N}$ si $\lambda_1(B) \neq 0$, on a

$$\mathbf{C}_B^k = \mathbf{C}_{B,f} \cap \Phi_B^{-1}\big(\lambda_k(B)\big).$$

Parmi les k-cellules, lorsqu'il en existe de cardinal fini, certaines jouent un rôle privilégié : celles de cardinal minimal. On les distingue en donnant la définition suivante :

Définition 3. — Soit k un entier naturel non nul. S'il existe des k-cellules de cardinal fini, on appelle *k-noyau* une k-cellule de cardinal minimal. On note ce cardinal $\beta_k(B)$.

Par définition, un noyau est toujours fini.

Remarque 2. — Pour k un entier naturel non nul, s'il existe des k-cellules, au moins l'un des deux entiers $\beta_k(B)$ et $\beta_k(-B)$ est bien défini. En effet, si $\beta_k(B)$ n'est pas défini, toutes les k-cellules pour B sont infinies, donc par définition de complémentaire fini, ce qui impose que toutes les k-cellules pour $-B$ sont finies et ainsi que $\beta_k(-B)$ soit bien défini.

LEMME 13. — *Pour tout entier naturel k non nul pour lequel $\beta_k(B)$ et $\beta_k(-B)$ sont définis, on a*

$$\beta_k(B) + \lambda_k(B) + \beta_k(-B) \leqslant |G|.$$

Démonstration. — Si G est infini, tous les termes du membre de gauche étant finis, l'inégalité est assurée. Si G est fini, on considère un k-noyau N_k pour B, alors d'après la proposition 11, $D_B(N_k)$ est une k-cellule pour $-B$, ainsi, on a $|D_B(N_k)| \geqslant \beta_k(-B)$. De plus, comme les trois ensembles N_k, $(N_k+B)\setminus N_k$ et $D_B(N_k)$ forment, comme cela a été vu en 1.4, une partition de G, on obtient

$$\begin{aligned}|G| &= |N_k| + \big|(N_k + B) \setminus N_k\big| + \big|D_B(N_k)\big| \\ &= \beta_k(B) + \lambda_k(B) + \big|D_B(N_k)\big| \geqslant \beta_k(B) + \lambda_k(B) + \beta_k(-B).\end{aligned}$$

□

Remarque 3. — Si G est abélien, d'après le lemme 12 et (1.8), on a $\Phi_B(X) = \Phi_{-B}(-X)$ et $(X \in \mathbf{C}_B \Leftrightarrow -X \in \mathbf{C}_{-B})$; ainsi pour tout entier naturel k, $\beta_k(B)$ et $\beta_k(-B)$ sont toujours tous les deux définis et égaux :

$$\lambda_k(B) = \lambda_k(-B) \quad \text{et} \quad \beta_k(B) = \beta_k(-B).$$

Remarque 4. — Bien que similaires, les outils de la méthode isopérimétrique développés par Y. ould Hamidoune, notamment dans [13] et [16] ne sont pas les mêmes que ceux qui viennent d'être définis ; ainsi les k-cellules et les k-fragments des articles de Hamidoune ne sont pas tout à fait les mêmes objets, les k-noyaux ne sont pas les k-atomes et la première suite des nombres isopérimétriques $\kappa_k(B)$ est différente de celle des $\lambda_k(B)$. Cependant pour $k = 1$, et dans un groupe abélien, les 1-noyaux sont exactement les 1-atomes et les 1-cellules sont exactement les 1-fragments. Par exemple, dans un groupe abélien G pour un ensemble B tel que $\lambda_1(B) < |B| - 1$, la proposition 4.2 de [16] établit qu'il existe un sous-groupe fini de G, distinct de $\{0\}$, tel que les 1-atomes soient les classes modulo ce sous-groupe. Ainsi, le dual d'un 1-atome est une union non vide de classes modulo ce sous-groupe. Il s'ensuit qu'un 1-atome contenant n-éléments est aussi un i-atome pour tout entier i de 1 à n. La définition des i-cellules impose qu'une i-cellule ne peut être une j-cellule si $i \neq j$.

2.3. Inégalité fondamentale

On établit ici une inégalité classique liant les périmètres des intersection et union de deux cellules en fonction de leur propre périmètre, on peut la retrouver dans le lemme 3.5 de [14]. Cette inégalité sera l'outil clef, qui nous permettra de donner les résultats de structure des cellules et noyaux.

Proposition 14. — *Soient G un groupe, B un sous-ensemble fini non vide de G contenant 0 et X et Y deux sous-ensembles finis ou de complémentaire fini de G, alors on a*

$$\Phi_B(X \cap Y) + \Phi_B(X \cup Y) \leqslant \Phi_B(X) + \Phi_B(Y).$$

Démonstration. — On considère les deux partitions $\{X, (X+B) \setminus X, D_B(X)\}$ et $\{Y, (Y+B) \setminus Y, D_B(Y)\}$ vues en 1.4 et on construit la partition croisée

$\cap$	X	$(X+B) \setminus X$	$D_B(X)$
Y	R_{11}	R_{12}	R_{13}
$(Y+B) \setminus Y$	R_{21}	R_{22}	R_{23}
$D_B(Y)$	R_{31}	R_{32}	R_{33}

On a alors les trois égalités et l'inclusion suivantes :

$$\begin{aligned}(X+B)\smallsetminus X &= R_{12}\cup R_{22}\cup R_{32},\\ (Y+B)\smallsetminus Y &= R_{21}\cup R_{22}\cup R_{23},\\ ((X\cup Y)+B)\smallsetminus (X\cup Y) &= R_{32}\cup R_{22}\cup R_{23},\\ ((X\cap Y)+B)\smallsetminus (X\cap Y) &\subset R_{12}\cup R_{22}\cup R_{21}.\end{aligned}$$

Comme B est fini et que X et Y sont chacun soit fini soit de complémentaire fini, les éléments R_{12}, R_{22}, R_{32}, R_{21} et R_{23} de cette partition sont tous finis. Ainsi, on déduit des égalités et de l'inclusion précédentes, trois nouvelles égalités et une inégalité

$$\begin{aligned}\Phi_B(X) &= |R_{12}|+|R_{22}|+|R_{32}|,\\ \Phi_B(Y) &= |R_{21}|+|R_{22}|+|R_{23}|,\\ \Phi_B(X\cup Y) &= |R_{32}|+|R_{22}|+|R_{23}|,\\ \Phi_B(X\cap Y) &\leqslant |R_{12}|+|R_{22}|+|R_{21}|.\end{aligned}$$

En additionnant les deux premières lignes d'une part et les deux suivantes d'autre part, on a alors

$$\begin{aligned}\Phi_B(X)+\Phi_B(Y) &= |R_{12}|+|R_{21}|+2|R_{22}|+|R_{32}|+|R_{23}|,\\ \Phi_B(X\cap Y)+\Phi_B(X\cup Y) &\leqslant |R_{12}|+|R_{21}|+2|R_{22}|+|R_{32}|+|R_{23}|,\end{aligned}$$

ce qui permet de conclure que

$$\Phi_B(X\cap Y)+\Phi_B(X\cup Y)\leqslant \Phi_B(X)+\Phi_B(Y).$$

□

On en déduit le résultat fondamental suivant, qui sera souvent utilisé dans la suite.

Corollaire 15. — *Soient G un groupe et B un sous-ensemble fini contenant 0 de G, C_i une i-cellule et C_j une j-cellule pour B. Si k et ℓ sont les entiers tels que $C_i\cap C_j$ soit une k-cellule et $P_B(C_i\cup C_j)$ soit une ℓ-cellule pour B, alors*

$$\lambda_k(B)+\lambda_\ell(B)\leqslant \lambda_i(B)+\lambda_j(B).$$

De plus, si cette inégalité est une égalité, on a $P_B(C_i\cup C_j)=C_i\cup C_j$.

Démonstration. — Il suffit d'appliquer la proposition 14 avec $X=C_i$, et $Y=C_j$ pour obtenir l'inégalité

$$\Phi_B(C_i\cap C_j)+\Phi_B(C_i\cup C_j)\leqslant \Phi_B(C_i)+\Phi_B(C_j),$$

donc

$$\lambda_k(B) + \Phi_B(C_i \cup C_j) \leqslant \lambda_i(B) + \lambda_j(B).$$

De plus, on a $\lambda_\ell(B) = \Phi_B(P_B(C_i \cup C_j)) \leqslant \Phi_B(C_i \cup C_j)$ d'après la proposition 10, d'où l'inégalité.

On a nécessairement $\Phi_B(P_B(C_i \cup C_j)) = \Phi_B(C_i \cup C_j)$ dans le cas d'égalité. La proposition 10 affirme alors que l'on a $P_B(C_i \cup C_j) = C_i \cup C_j$. □

Une autre inégalité un peu plus technique aura une grande importance par la suite pour s'assurer que les unions de cellules de petit périmètre ne puissent pas donner de cellules de trop petit périmètre. Il s'agit d'une généralisation de l'inégalité (5) du lemme 3.3 de [16].

Lemme 16. — *Soient G un groupe, B un sous-ensemble fini de G contenant* 0, *C_i une i-cellule finie et C_j une j-cellule pour B. Soit k l'entier tel que $C_i \cap C_j$ soit une k-cellule pour B. Si $k \geqslant j$, on a*

$$\lambda_j(B) + \big|D_B(C_j) \smallsetminus D_B(C_i)\big| \leqslant \lambda_i(B) + |C_i \smallsetminus C_j|.$$

Démonstration. — La preuve se base aussi sur la partition croisée de la proposition 14 :

$\cap$	C_j	$(C_j + B) \smallsetminus C_j$	$D_B(C_j)$
C_i	R_{11}	R_{12}	R_{13}
$(C_i + B) \smallsetminus C_i$	R_{21}	R_{22}	R_{23}
$D_B(C_i)$	R_{31}	R_{32}	R_{33}

On note sur cette partition croisée l'égalité et l'inclusion suivantes :

$$(C_i + B) \smallsetminus C_i = R_{21} \cup R_{22} \cup R_{23},$$
$$((C_i \cap C_j) + B) \smallsetminus (C_i \cap C_j) \subset R_{21} \cup R_{22} \cup R_{12}.$$

La cellule C_i est finie, ainsi $C_i + B$ est fini, donc les éléments R_{11}, R_{12}, R_{13}, R_{21}, R_{22} et R_{23} sont tous finis. De plus C_j est une j-cellule, donc de périmètre fini, ainsi R_{32} est aussi fini. On en conclut que les deux seuls éléments de cette partition croisée qui peuvent éventuellement être infinis sont R_{31} et R_{33}.

Comme $C_i \cap C_j$ est une k-cellule et C_i une i-cellule, on a l'égalité et l'inégalité suivantes :

$$\lambda_i(B) = |R_{21}| + |R_{22}| + |R_{23}|, \quad \lambda_k(B) \leqslant |R_{21}| + |R_{22}| + |R_{12}|.$$

De plus, on remarque sur la partition que

$$|D_B(C_j) \smallsetminus D_B(C_i)| = |R_{13}| + |R_{23}|$$

et $|C_i \smallsetminus C_j| = |R_{12}| + |R_{13}|$. Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned}\lambda_k(B) + |D_B(C_j) \smallsetminus D_B(C_i)| &\leqslant (|R_{21}| + |R_{22}| + |R_{12}|) + (|R_{13}| + |R_{23}|)\\ &\leqslant (|R_{21}| + |R_{22}| + |R_{23}|) + (|R_{12}| + |R_{13}|)\\ &\leqslant \lambda_i(B) + |C_i \smallsetminus C_j|.\end{aligned}$$

Enfin, l'inégalité $k \geqslant j$ impose $\lambda_k(B) \geqslant \lambda_j(B)$, ce qui nous donne

$$\lambda_j(B) + \big|D_B(C_j) \smallsetminus D_B(C_i)\big| \leqslant \lambda_i(B) + |C_i \smallsetminus C_j|.$$

□

3. Structure dans le cas abélien

Dans toute cette partie, on considère un groupe abélien G et un sous ensemble B fini non vide.

3.1. Structure des 1-cellules et 1-noyaux

On donne un premier résultat de structure pour les 1-cellules et 1-noyaux, représentatif du travail qui suit. Ce résultat est connu et dû à Hamidoune, proposition 4.2 de [16], ou [12]. Pour cela on considère les intersections non-vides des 1-noyaux avec les 1-cellules et on montre que ces intersections ne peuvent être quelconques. Le fait de pouvoir librement translater un 1-noyau en un autre permet de décrire la structure des 1-cellules.

3.1.1. *Critère d'existence de* 1*-cellules.* — Soient G un groupe et B un sous-ensemble fini de G. Si $B = G$, alors pour tout $X \subset G$ non vide, on a $X + B = G$. Ainsi les seules cellules sont $\emptyset$ et G et il n'y a pas de 1-cellule. Par contre, si B est différent de G, alors pour X réduit à un singleton quelconque, on a

$$|X + B| - |X| = |B| - 1 \text{ et } X + B \neq G.$$

Ainsi, $X \neq \emptyset$ et $X + B \neq G$ donc $P_B(X)$ n'est pas une 0-cellule, il existe alors des 1-cellules et on a $\lambda_1(B) \leqslant |B| - 1$.

3.1.2. *Structure des* 1*-cellules et* 1*-noyaux.* — Soient G un groupe abélien et B un sous-ensemble fini non vide de G, différent de G. Si $\lambda_1(B) = |B|-1$, alors les 1-noyaux sont exactement les singletons de G. Si nécessaire on pourra donc se restreindre au cas $\lambda_1(B) < |B| - 1$, qui impose donc que toutes les 1-cellules contiennent au moins deux éléments.

Définition 4. — On appelle *condition $E_1(B)$ pour une cellule C pour B*, la condition
$$|G \smallsetminus C| \geqslant \lambda_1(B) + \beta_1(B).$$

D'après la remarque 3, $\lambda_1(B) + \beta_1(B)$ est toujours fini. Ainsi, si le groupe G est infini cette condition est remplie pour toute cellule finie.

Remarque 5. — Si G est abélien, toutes les 1-cellules pour B vérifient la condition $E_1(B)$.

Démonstration. — Si C_1 est une 1-cellule pour B, $D_B(C_1)$ est alors une 1-cellule pour $-B$ et est donc de cardinal supérieur à $\beta_1(-B) = \beta_1(B)$, ainsi
$$|G \smallsetminus C_1| - \lambda_1(B) = \big|D_B(C_1)\big| \geqslant \beta_1(B)$$
et C_1 vérifie la condition $E_1(B)$. □

La proposition suivante met en lumière le rôle particulier des 1-noyaux. Il s'agit d'un cas particulier de la proposition 3.4 de [16].

Proposition 17. — *Soient G un groupe abélien, B un sous-ensemble fini contenant 0 de G, N_1 un 1-noyau et C_1 une 1-cellule pour B. Si $N_1 \cap C_1$ n'est pas vide, alors $N_1 \subset C_1$.*

Démonstration. — D'après la proposition 6, l'intersection $N_1 \cap C_1$ est une k-cellule, pour un certain $k \geqslant 1$. D'après le lemme 16, on a alors
$$\big|D_B(C_1) \smallsetminus D_B(N_1)\big| \leqslant |N_1 \smallsetminus C_1|.$$

On s'intéresse maintenant à l'union $C_1 \cup N_1$ et à la cellule associée $P_B(C_1 \cup N_1)$. On va tout d'abord montrer qu'il s'agit d'une ℓ-cellule pour un certain $\ell \geqslant 1$. Comme C_1 est une 1-cellule pour B, C_1 remplit la condition $E_1(B)$, ainsi on a $\big|D_B(C_1)\big| \geqslant \beta_1(B) = |N_1|$. Or
$$\begin{aligned} |D_B(C_1) \cap D_B(N_1)| &= \big|D_B(C_1)\big| - \big|D_B(C_1) \smallsetminus D_B(N_1)\big| \\ &\geqslant \big|D_B(C_1)\big| - |N_1 \smallsetminus C_1| \\ &\geqslant |N_1| - |N_1 \smallsetminus C_1| = |N_1 \cap C_1| > 0. \end{aligned}$$
Ainsi comme, d'après (1.12), $D_B(C_1 \cup N_1) = D_B(C_1) \cap D_B(N_1)$ et que cet ensemble n'est pas vide d'après l'inégalité ci-dessus, il s'agit d'une ℓ-cellule pour B pour un certain $\ell \geqslant 1$.

Le corollaire 15 nous donne alors
$$\lambda_k(B) + \lambda_\ell(B) \leqslant \lambda_1(B) + \lambda_1(B).$$
Et ce, avec $k \geqslant 1$ et $\ell \geqslant 1$. Comme la suite des valeurs $\lambda_i(B)$ est strictement croissante à partir de $i = 1$, on a nécessairement $k = \ell = 1$.

De plus, N_1 est un 1-noyau, c'est une 1-cellule de cardinal minimal, ainsi l'égalité $k = 1$ impose l'inclusion $N_1 \subset C_1$. $\square$

On retrouve alors un premier résultat de structure pour les 1-noyaux et les 1-cellules pour B, qui correspond à la proposition 4.2 de [16].

THÉORÈME 18. — *Soient G un groupe abélien, B un sous-ensemble fini contenant 0 de G. Il existe un sous-groupe fini H tel que les 1-noyaux pour B soient les classes modulo H, et les 1-cellules soient périodiques modulo ce sous-groupe.*

Démonstration. — Si l'on a $\lambda_1(B) = |B| - 1$, le sous-groupe trivial $H = \{0\}$ convient. On peut supposer désormais que $\lambda_1(B) < |B| - 1$. Si l'on considère deux 1-noyaux pour B, d'intersection non vide, d'après la proposition 17 précédente, ils sont inclus l'un dans l'autre, donc égaux. Ainsi deux 1-noyaux distincts sont disjoints.

Si N_1 est un 1-noyau pour B contenant 0 et si $x \in N_1$ avec $x \neq 0$, d'après (1.5) N_1 et $-x + N_1$ sont deux 1-noyaux pour B, contenant tous les deux 0 donc d'intersection non vide, ils sont donc égaux : $N_1 = -x + N_1$.

Alors pour tout $x \in N_1$, on a $-x + N_1 = N_1$, ce qui signifie que N_1 est un sous-groupe fini de G. Par translation toutes les classes modulo N_1 sont des 1-noyaux. Et comme toutes les classes modulo N_1 forment une partition de G, il ne peut y avoir d'autres 1-noyaux.

Si C_1 est une 1-cellule pour B, la proposition 17 impose qu'elle contient tous les 1-noyaux qu'elle intersecte. Ainsi C_1 est une union de classes modulo N_1. Et donc $N_1 \subset \pi(C_1)$. $\square$

Remarque 6. — Comme Hamidoune le remarque dans le corollaire 4.3 de [16], ce premier résultat nous permet d'ores et déjà de retrouver le théorème de Cauchy-Davenport, le théorème de Chowla dans les groupes cycliques et le théorème de Mann.

3.2. Structure des i-cellules et i-noyaux (lorsque $\lambda_i(B) < |B| - 1$)

Dans cette partie, tous les résultats sont originaux. On veut montrer que toutes les i-cellules sont périodiques en généralisant les idées précédentes.

Le cas des i-cellules pour $i > 1$ est un peu plus délicat et nécessite quelques propositions préalables. L'idée consiste à mettre en place des conditions assurant que les unions de cellules de petits périmètres ne donnent pas des cellules de périmètre trop petit, puis de mettre en place des résultats assurant l'existence de i-cellules suffisamment petites. Cela nous permettra d'établir que les i-noyaux sont disjoints.

Définition 5. — Pour un entier non nul i, on appelle condition $E_i(B)$ pour une cellule C pour B, la condition

$$|G \smallsetminus C| \geqslant \lambda_i(B) + \beta_i(B).$$

De même que pour la définition 4, on remarque que cette condition est remplie pour toute cellule finie pour B si G est infini.

Lemme 19. — *Soient G un groupe abélien, B un sous-ensemble fini contenant 0 de G, et i un entier non nul. Soit C_j une j-cellule pour B avec $j \geqslant i$. Si C_j ne vérifie pas la condition $E_i(B)$, alors $D_B(C_j)$ vérifie la condition $E_i(-B)$ et $|D_B(C_j)| < \beta_i(B) + \lambda_i(B) - \lambda_j(B)$.*

Démonstration. — Comme C_j ne vérifie pas la condition $E_i(B)$, $G \smallsetminus C_j$ est un ensemble fini et on a

$$|G \smallsetminus C_j| < \lambda_i(B) + \beta_i(B).$$

Comme $D_B(C_j) \subset G \smallsetminus C_j$, $D_B(C_j)$ est aussi fini, et on peut alors écrire

$$\begin{aligned}\big|D_B(C_j)\big| &= |D_B(C_j) - B| - \lambda_j(B)\\ &= |G \smallsetminus C_j| - \lambda_j(B) < \lambda_i(B) - \lambda_j(B) + \beta_i(B).\end{aligned}$$

De plus si G est infini, $D_B(C_j)$ est fini et vérifie donc la condition $E_i(-B)$. Si G est fini, on a vu au corollaire 13, que $\beta_i(B) + \lambda_i(B) + \beta_i(-B) \leqslant |G|$. Ainsi

$$\big|D_B(C_j)\big| < \lambda_i(B) - \lambda_j(B) + \beta_i(B) \leqslant \beta_i(B) \leqslant |G| - \lambda_i(B) - \beta_i(-B).$$

On obtient finalement

$$\big|G \smallsetminus D_B(C_j)\big| > \lambda_i(B) + \beta_i(-B) = \lambda_i(-B) + \beta_i(-B).$$

□

On donne maintenant une première implication de la condition $E_i(B)$.

Lemme 20. — *Soient G un groupe abélien et B un sous-ensemble fini de G contenant 0, N_i un i-noyau et C_j une j-cellule pour B avec $j \geqslant i$. Soit k l'entier tel que $N_i \cap C_j$ soit une k-cellule. Si $k \geqslant j$ et C_j vérifie $E_i(B)$, $P_B(N_i \cup C_j)$ est une l-cellule pour B avec $l > 0$.*

Démonstration. — L'intersection $N_i \cap C_j$ est une k-cellule finie, avec $k \geqslant j$, ainsi d'après le lemme 16, on a

$$\lambda_j(B) + \big|D_B(C_j) \smallsetminus D_B(N_i)\big| \leqslant \lambda_i(B) + |N_i \smallsetminus C_j|.$$

On cherche maintenant à minorer $|D_B(C_j)|$. Comme C_j vérifie la condition $E_i(B)$, on a

$$|G \smallsetminus C_j| \geqslant \lambda_i(B) + \beta_i(B).$$

Ainsi comme $G \smallsetminus C_j = D_B(C_j) \cup ((D_B(C_j) - B) \smallsetminus D_B(C_j))$, on obtient $\big|D_B(C_j)\big| + \lambda_j(B) \geqslant \lambda_i(B) + \beta_i(B)$, donc

$$\big|D_B(C_j)\big| \geqslant \lambda_i(B) + \beta_i(B) - \lambda_j(B).$$

Comme d'après (1.12), on a $P_B(N_i \cup C_j) = D_{-B}(D_B(C_j) \cap D_B(N_i))$, on peut écrire

$$\begin{aligned}\big|D_B(C_j) \cap D_B(N_i)\big| &= \big|D_B(C_j)\big| - \big|D_B(C_j) \smallsetminus D_B(N_i)\big| \\ &\geqslant \big|D_B(C_j)\big| - \lambda_i(B) + \lambda_j(B) - |N_i \smallsetminus C_j| \\ &\geqslant \big(\beta_i(B) + \lambda_i(B) - \lambda_j(B)\big) - \lambda_i(B) + \lambda_j(B) - |N_i \smallsetminus C_j| \\ &= |N_i| - |N_i \smallsetminus C_j| = |N_i \cap C_j| > 0.\end{aligned}$$

Ainsi, $P_B(N_i \cup C_j)$ est une l-cellule pour B ou le dual d'une ℓ-cellule pour $-B$ avec $\ell > 0$. □

Le lemme précédent a pour but de ramener l'étude des j-cellules pour $j \geqslant i$ à celles contenues dans un $(i-1)$-noyau. On définit maintenant une nouvelle condition adaptée aux j-cellules dans un $(i-1)$-noyau.

Définition 6. — Pour un entier $i \geqslant 2$, on appelle condition $E'_i(B)$ pour une cellule C pour B incluse dans un $(i-1)$-noyau N_{i-1}, la condition

$$|C| \leqslant \big(\lambda_{i-1}(B) + \beta_{i-1}(B)\big) - \big(\lambda_i(B) + \beta_i(B)\big).$$

Lemme 21. — *Soient G un groupe abélien, B un sous-ensemble fini de G contenant 0, $i > 1$ un entier, N_i et N_{i-1} respectivement un i-noyau et un $(i-1)$-noyau et C_j une j-cellule. On suppose que $j \geqslant i$, $N_i \cap C_j \neq \emptyset$ et que $N_i \cup C_j \subset N_{i-1}$. Soit k l'entier tel que $N_i \cap C_j$ soit une k-cellule. Si $k \geqslant j$ et C_j vérifie la condition $E'_i(B)$, alors on a*

$$\big|(N_{i-1} + B) \smallsetminus ((N_i \cup C_j) + B)\big| > 0.$$

Démonstration. — Dans un premier temps, on remarque que l'on peut minorer $|(N_{i-1}+B) \smallsetminus (C_j+B)| = |D_B(C_j) \smallsetminus D_B(N_{i-1})|$. En effet, comme C_j vérifie la condition $E'_i(B)$,

$$\begin{aligned}\big|(N_{i-1} + B) \smallsetminus (C_j + B)\big| &= |N_{i-1} + B| - |C_j + B| \\ &= |N_{i-1} + B| - |C_j| - \lambda_j(B) \\ &\geqslant \big(\lambda_{i-1}(B) + \beta_{i-1}(B)\big) - \big(\lambda_{i-1}(B) + \beta_{i-1}(B)\big) \\ &\qquad + (\lambda_i(B) + \beta_i(B)) - \lambda_j(B) \\ &= \lambda_i(B) + \beta_i(B) - \lambda_j(B).\end{aligned}$$

Ainsi en utilisant le lemme 16 et l'inégalité précédente, on obtient

$$\begin{aligned}
&\bigl|(N_{i-1}+B)\smallsetminus((N_i\cup C_j)+B)\bigr|\\
&\quad=\bigl|(N_{i-1}+B)\smallsetminus(C_j+B)\bigr|-\bigl|(N_i+B)\smallsetminus(C_j+B)\bigr|\\
&\quad=\bigl|(N_{i-1}+B)\smallsetminus(C_j+B)\bigr|-\bigl|D_B(C_j)\smallsetminus D_B(N_i)\bigr|\\
&\quad\geqslant\lambda_i(B)+\beta_i(B)-\lambda_j(B)-(-\lambda_j(B)+\lambda_i(B)+|N_i\smallsetminus C_j|)\\
&\quad=|N_i|-|N_i\smallsetminus C_j|=|N_i\cap C_j|>0.
\end{aligned}$$

□

Ce lemme sera particulièrement utile pour montrer que l'union d'une cellule et d'un noyau ne peut être une cellule d'ordre trop petit.

Un dernier lemme sera nécessaire avant de donner un théorème de description finale :

Lemme 22. — *Soient G un groupe abélien, B un sous-ensemble fini de G contenant 0, i un entier tel que $1<i$, N_i et N_{i-1} respectivement un i-noyau et un $(i-1)$-noyau et C_j une j-cellule pour B. On suppose que $j\geqslant i$, $N_i\cap C_j\neq\emptyset$, $N_i\cup C_j\subset N_{i-1}$ et que N_i vérifie la condition $E'_i(B)$. Si C_j ne vérifie pas la condition $E'_i(B)$, alors $D_B(C_j)$ vérifie la condition $E_i(-B)$ et $|(N_{i-1}+B)\smallsetminus(C_j+B)|<\beta_i(B)$.*

Démonstration. — Par contradiction de la condition $E'_i(B)$, on a

$$|C_j|>\bigl(\lambda_{i-1}(B)+\beta_{i-1}(B)\bigr)-\bigl(\lambda_i(B)+\beta_i(B)\bigr),$$

ce que l'on peut réécrire

$$\beta_i(B)>\bigl(\lambda_{i-1}(B)+\beta_{i-1}(B)\bigr)-\bigl(\lambda_i(B)+|C_j|\bigr).$$

Ainsi, comme $j\geqslant i$, on a $\lambda_j(B)\geqslant\lambda_i(B)$ et donc

$$\beta_i(B)>\bigl(\lambda_{i-1}(B)+\beta_{i-1}(B)\bigr)-\bigl(\lambda_j(B)+|C_j|\bigr)=\bigl|(N_{i-1}+B)\smallsetminus(C_j+B)\bigr|.$$

De plus, on a $G\smallsetminus D_B(C_j)=C_j+B$, ainsi l'inégalité précédente donne

$$\bigl|G\smallsetminus D_B(C_j)\bigr|>\bigl(\lambda_{i-1}(B)+\beta_{i-1}(B)\bigr)-\beta_i(B).$$

Comme N_i vérifie la condition $E'_i(B)$, on a

$$\beta_i(B)\leqslant\bigl(\beta_{i-1}(B)+\lambda_{i-1}(B)\bigr)-\bigl(\beta_i(B)+\lambda_i(B)\bigr),$$

ce dont on déduit l'inégalité $\beta_i(B)+\lambda_i(B)\leqslant(\beta_{i-1}(B)+\lambda_{i-1}(B))-\beta_i(B)$. En combinant cette inégalité avec la précédente, on obtient

$$\bigl|G\smallsetminus D_B(C_j)\bigr|>\beta_i(B)+\lambda_i(B)=\beta_i(-B)+\lambda_i(-B).$$

Ce qui prouve que $D_B(C_j)$ vérifie la condition $E_i(-B)$. □

Le théorème suivant donne un résultat de structure pour toutes les i-cellules telles que $\lambda_i(B) < |B| - 1$. Par récurrence, on établit pour tout i qu'il existe un i-noyau inclus dans un $(i-1)$-noyau, puis on ramène l'étude des i-cellules à l'intérieur d'un $(i-1)$-noyau et on montre que les intersections des i-noyaux et des i-cellules ne peuvent être quelconques.

Théorème 23. — *Soient G un groupe abélien et B un sous-ensemble non vide fini de G, et $n > 0$ un entier tel que $\lambda_n(B) < |B| - 1 \leqslant \lambda_{n+1}(B)$. Pour tout $i \leqslant n$, il existe un sous-groupe (fini et différent de $\{0\}$) N_i de G, qui est un i-noyau et pour toute i-cellule C_i, on a $N_i \subset \pi(C_i)$. De plus la suite de sous-groupes $(N_i)_{i=1,..,n}$ est une suite strictement décroissante pour l'inclusion.*

Démonstration. — Sans perte de généralité, on peut supposer que $0 \in B$ (quitte à effectuer une translation de B). On raisonne par récurrence sur $i < n$. Pour $i = 1$, le résultat est vrai d'après le théorème 18.

Supposons que l'énoncé du théorème soit vrai jusqu'à un certain rang $i < n$ et montrons le résultat au rang $i + 1 \leqslant n$. Dans un souci de clarté, la preuve est décomposée en six assertions intermédiaires et une conclusion.

Assertion 1 : pour tout $j \leqslant i$, N_j vérifie la condition $E'_j(B)$.

En effet, remarquons d'abord que N_j est bien inclus dans un $(j-1)$-noyau, à savoir N_{j-1}. De plus, pour toute j-cellule C_j (en particulier N_j) dans N_{j-1} avec $1 < j \leqslant i$, comme $C_j + B$ est N_j-périodique (d'après l'hypothèse de récurrence) et différent de $N_{j-1} + B$ (car C_j et N_{j-1} sont deux cellules distinctes), l'ensemble $(N_{j-1} + B) \setminus (C_j + B)$ contient au moins une classe modulo N_j. Ainsi, on obtient l'inégalité :

$$2\beta_j(B) + \lambda_j(B) \leqslant \beta_{j-1}(B) + \lambda_{j-1}(B).$$

Cela signifie bien que N_j vérifie la condition $E'_j(B)$ (ce qui est une hypothèse du lemme 22, que nous utiliserons par la suite).

Assertion 2 : une $(i+1)$-cellule ne peut pas être uniquement constituée de j-noyaux avec $j \leqslant i$.

En effet, comme on a $|N_i + B| - |N_i| = \lambda_i(B) < |B| - 1 < |B| \leqslant |N_i + B|$, $|B| - 1$ est encadré par deux multiples consécutifs de $|N_i|$. Ainsi si A est une union de classes modulo N_i mais n'est pas une j-cellule avec $j \leqslant i$, l'entier $|A + B| - |A|$ est un multiple de $|N_i|$ supérieur ou égal à $|N_i + B|$ et donc $|A + B| > |A| + |B| - 1$.

Comme on a supposé que $\lambda_{i+1}(B) < |B| - 1$, une $(i+1)$-cellule ne peut donc pas être une union de classes modulo N_i. Pour $j \leqslant i$, comme N_i est un sous-groupe de N_j (d'après l'hypothèse de récurrence), une $(i+1)$-cellule ne peut donc pas être non plus une union de classes modulo les noyaux successifs de 1 à i.

Assertion 3 *: toute* $(i+1)$*-cellule ou sa duale est constituée d'une* $(i+1)$*-cellule incluse dans un* 1*-noyau et éventuellement de* 1*-noyaux.*

Soit $\mathcal{N}_1$ l'ensemble des 1-noyaux pour B. D'après l'hypothèse de récurrence, il s'agit de l'ensemble des classes modulo N_1. L'ensemble $\mathcal{N}_1$ est donc une partition de G. Soit C_{i+1} une $(i+1)$-cellule, on a alors

$$C_{i+1} = \bigcup_{N \in \mathcal{N}_1} (C_{i+1} \cap N).$$

- ▷ Si C_{i+1} vérifie la condition $E_1(B)$, soient $N \in \mathcal{N}_1$, k l'entier tel que $C_{i+1} \cap N$ soit une k-cellule non vide et ℓ tel que $P_B(N \cup C_{i+1})$ soit une ℓ-cellule. On a, d'après le corollaire 15,

  $$\lambda_k(B) + \lambda_\ell(B) \leqslant \lambda_{i+1}(B) + \lambda_1(B).$$

  Comme $\ell > 0$, d'après le lemme 20 (car C_{i+1} vérifie $E_1(B)$), ceci impose $k \leqslant i+1$. Mais comme C_{i+1} ne peut être uniquement constituée de k-cellules avec $k \leqslant i$ d'après l'assertion 2, cela implique qu'il existe $\widetilde{N} \in \mathcal{N}_1$ tel que $k = i+1$, ce qui impose que $\ell = 1$. La cellule C_{i+1} est alors constituée d'une $(i+1)$-cellule $C_{i+1} \cap \widetilde{N}$ incluse dans un 1-noyau, car $k = i+1$ et d'une éventuelle union de 1-noyaux à savoir $\bigcup_{N \in \mathcal{N}_1 \smallsetminus \{\widetilde{N}\}} C_{i+1} \cap N$: en effet l'union $C_{i+1} \cup \widetilde{N} = P_B(C_{i+1} \cup \widetilde{N})$ est une 1-cellule car $\ell = 1$ (cas d'égalité du corollaire 15), donc est N_1-périodique. Il en est donc de même pour

  $$(C_{i+1} \cup \widetilde{N}) \smallsetminus \widetilde{N} = \bigcup_{N \in \mathcal{N}_1 \smallsetminus \{\widetilde{N}\}} C_{i+1} \cap N.$$

- ▷ Si C_{i+1} ne vérifie pas la condition $E_1(B)$, d'après le lemme 19, c'est que $D_B(C_{i+1})$ vérifie la condition $E_1(-B)$ et $|D_B(C_{i+1})| < \beta_1(B)$. Ainsi on peut appliquer le raisonnement précédent à $D_B(C_{i+1})$ pour $-B$ ce qui donne le résultat. En fait on peut même remarquer que comme $|D_B(C_{i+1})| < \beta_1(B)$, $D_B(C_{i+1})$ est une $(i+1)$-cellule pour $-B$ contenue dans un 1-noyau pour $-B$, qui est aussi un 1-noyau pour B.

Assertion 4 *: toute* $(i+1)$*-cellule incluse dans un* $(j-1)$*-noyau ou sa duale est composée d'une* $(i+1)$*-cellule incluse dans un* j*-noyau et éventuellement de* j*-noyaux.*

Soit $\mathcal{N}_j$ l'ensemble des j-noyaux pour B. D'après l'hypothèse de récurrence, il s'agit de l'ensemble des classes modulo N_j. L'ensemble $\mathcal{N}_j$ est donc une partition de G. Soit C_{i+1} une $(i+1)$-cellule incluse dans un $(j-1)$-noyau $\widetilde{N}_{j-1}$. On a alors

$$C_{i+1} = \bigcup_{N\in\mathcal{N}_j} (C_{i+1}\cap N).$$

▷ Si C_{i+1} vérifie la condition $E'_j(B)$, soient $N\in\mathcal{N}_j$, k l'entier tel que $C_{i+1}\cap N$ soit une k-cellule et ℓ tel que $P_B(N\cup C_{i+1})$ soit une ℓ-cellule. On a, d'après le corollaire 15,

$$\lambda_k(B)+\lambda_\ell(B)\leqslant \lambda_{i+1}(B)+\lambda_j(B).$$

Avec $\ell > j-1$ d'après le lemme 21 (car C_{i+1} vérifie $E'_j(B)$), ce qui impose $k\leqslant i+1$. Mais comme C_{i+1} ne peut être uniquement constituée de k-cellules avec $1\leqslant k\leqslant i$ d'après l'assertion 2, cela implique qu'il existe $\widetilde{N}\in\mathcal{N}_j$ tel que $k=i+1$, ce qui impose que $\ell=j$. La cellule C_{i+1} est alors constituée d'une $(i+1)$-cellule $C_{i+1}\cap\widetilde{N}$ incluse dans un j-noyau, car $k=i+1$ et d'une eventuelle union de j-noyaux à savoir $\bigcup_{N\in\mathcal{N}_j\smallsetminus\{\widetilde{N}\}} C_{i+1}\cap N$: en effet l'union $C_{i+1}\cup\widetilde{N} = P_B(C_{i+1}\cup\widetilde{N})$ est une j-cellule car $\ell=j$ (cas d'égalité du corollaire 15), donc est N_j-périodique. Il en est donc de même pour

$$(C_{i+1}\cup\widetilde{N})\smallsetminus\widetilde{N} = \bigcup_{N\in\mathcal{N}_j\smallsetminus\{\widetilde{N}\}} C_{i+1}\cap N.$$

▷ Si C_{i+1} ne vérifie pas la condition $E'_j(B)$, d'après le lemme 22, c'est que $D_B(C_{i+1})$ vérifie $E_j(B)$ et $|D_B(C_{i+1})\smallsetminus D_B(\widetilde{N}_{j-1})|<\beta_j(B)$.

Pour $N\in\mathcal{N}_j$ intersectant $D_B(C_{i+1})\smallsetminus D_B(\widetilde{N}_{j-1})$, soit k est l'entier tel que $D_B(C_{i+1})\cap N$ soit une k-cellule pour $-B$ et ℓ tel que $P_{-B}(D_B(C_{i+1})\cup N)$ soit une ℓ-cellule pour $-B$, on a d'après le corollaire 15

$$\lambda_k(-B)+\lambda_\ell(-B)\leqslant \lambda_{i+1}(-B)+\lambda_j(-B).$$

Avec $\ell>j-1$, d'après le lemme 20 (car $D_B(C_{i+1})$ vérifie la condition $E_j(-B)$ et que $P_{-B}(D_B(C_{i+1})\cup N_j)$ contient strictement $D_B(\widetilde{N}_{j-1})$), ce ne peut donc pas être une j'-cellule pour $-B$ avec $j'<j$. On a alors $\ell\geqslant j$, ceci impose $k\leqslant i+1$. Mais comme

$$\big|D_B(C_{i+1})\smallsetminus D_B(\widetilde{N}_{j-1})\big| < \beta_j(B)$$

et que $D_B(C_{i+1})$ ne peut être uniquement constituée de k-noyaux avec $1\leqslant k\leqslant i$, il existe un $\widetilde{N}\in\mathcal{N}_j$ tel que $k=i+1$, ce qui impose $\ell=j$.

La cellule duale de C_{i+1}, $D_B(C_{i+1})$, est alors constituée d'une $(i+1)$-cellule incluse dans un j-noyau $D_B(C_{i+1}) \cap \widetilde{N}$, car $k = i+1$ et d'une union de j-noyaux, $D_B(\widetilde{N}_{j-1})$.

Assertion 5 *: toute $(i+1)$-cellule incluse dans un i-noyau vérifie nécessairement la condition $E'_{i+1}(B)$.*

On considère une $(i+1)$-cellule C_{i+1} incluse dans un i-noyau $\widetilde{N}_i$.

Montrons que $D_B(C_{i+1})$ vérifie la condition $E_{i+1}(-B)$. Si tel n'est pas le cas, d'après le lemme 19, C_{i+1} vérifie $E_{i+1}(B)$ et $|C_{i+1}| < \beta_{i+1}(-B)$, ce qui est impossible, car $\beta_{i+1}(-B) = \beta_{i+1}(B)$.

Considérons alors un $(i+1)$-noyau N_{i+1} pour $-B$ intersectant $D_B(C_{i+1}) \setminus D_B(\widetilde{N}_i)$. Si k et ℓ sont les entiers tels que $D_B(C_{i+1}) \cap N_{i+1}$ soit une k-cellule pour $-B$ et $P_{-B}(D_B(C_{i+1}) \cup N_{i+1})$ soit une ℓ-cellule pour $-B$, on a d'après le corollaire 15

$$\lambda_k(-B) + \lambda_\ell(-B) \leqslant \lambda_{i+1}(-B) + \lambda_{i+1}(-B).$$

Avec $\ell \geqslant i+1$, car $D_B(C_{i+1})$ vérifie la condition $E_{i+1}(-B)$ et que

$$P_{-B}\big(D_B(C_{i+1}) \cup N_{i+1}\big)$$

contient strictement $D_B(\widetilde{N}_i)$ (ce ne peut donc pas être une j-cellule pour $-B$ avec $j < i+1$). Ainsi, on a $\ell \geqslant i+1$, ce qui impose $k \leqslant i+1$. Mais pour tout j, tel que $1 \leqslant j \leqslant i$, N_j est de cardinal strictement supérieur à $\beta_{i+1}(B)$, donc on a $k = i+1$, ce qui implique aussi $\ell = i+1$. Ainsi $D_B(C_{i+1}) \setminus D_B(\widetilde{N}_i)$ contient au moins un $(i+1)$-noyau pour $-B$. On a alors $\beta_{i+1}(-B) \leqslant |D_B(C_{i+1}) \setminus D_B(\widetilde{N}_i)|$, ce qui peut se réécrire $\beta_{i+1}(B) \leqslant (\lambda_i(B) + \beta_i(B)) - (\lambda_{i+1}(B) + |C_{i+1}|)$. Il suffit d'échanger les termes $|C_{i+1}|$ et $\beta_{i+1}(B)$ pour obtenir

$$|C_{i+1}| \leqslant \big(\lambda_i(B) + \beta_i(B)\big) - \big(\lambda_{i+1}(B) + \beta_{i+1}(B)\big).$$

Ce qui signifie que C_{i+1} vérifie la condition $E'_{i+1}(B)$.

Assertion 6 *: il existe un sous-groupe de N_i qui est un $(i+1)$-noyau et tel que toutes les $(i+1)$-cellules incluses dans N_i soient périodiques modulo ce sous-groupe.*

On considère alors une $(i+1)$-cellule C_{i+1} et un $(i+1)$-noyau N_{i+1} inclus dans N_i. Soient k l'entier tel que l'intersection de C_{i+1} et N_{i+1} soit une k-cellule et ℓ l'entier tel que $P_B(N_{i+1} \cup C_{i+1})$ soit une ℓ-cellule. On a d'après le corollaire 15

$$\lambda_k(B) + \lambda_\ell(B) \leqslant \lambda_{i+1}(B) + \lambda_{i+1}(B).$$

Avec $\ell \geqslant i+1$ d'après le lemme 21 (car C_{i+1} vérifie $E'_{i+1}(B)$ d'après l'assertion 5), ceci impose $k \leqslant i+1$. Mais tous les j-noyaux avec $j \leqslant i$ sont de cardinaux strictement supérieurs à $\beta_{i+1}(B)$, donc $N_{i+1} \cap C_{i+1}$, qui est de cardinal inférieur à $\beta_{i+1}(B)$, ne peut être une j-cellule avec $j \leqslant i$. C'est donc que $k = i+1$ et $\ell = i+1$. Ainsi si un $(i+1)$-noyau et une $(i+1)$-cellule sont inclus dans N_i, et que leur intersection n'est pas vide, le $(i+1)$-noyau est inclus dans la $(i+1)$-cellule.

Pour un $(i+1)$-noyau contenant 0, N_{i+1}, il contient au moins deux éléments car $\lambda_{i+1}(B) < |B|-1$. Pour tout $x \in N_{i+1}$, on obtient d'après (1.5) que N_{i+1} et $x + N_{i+1}$ sont d'intersection non vide ; ainsi $N_{i+1} = x + N_{i+1}$, ce qui signifie que N_{i+1} est un sous-groupe strict de N_i, (différent de $\{0\}$, car $\lambda_{i+1}(B) < |B|-1$) et que toute $(i+1)$-cellule est une union de classes modulo N_{i+1}, donc périodique de période contenant N_{i+1}.

Conclusion : l'assertion 6 *a établi l'existence d'un sous-groupe strict* N_{i+1} *de* N_i *qui est un* $(i+1)$*-noyau. Pour démontrer l'hypothèse de récurrence au rang* $i+1$, *il ne reste plus qu'à prouver que toutes les* $(i+1)$*-cellules sont* N_{i+1}*-périodiques.*

On montre par récurrence descendante sur j allant de i à 1 que toutes les $(i+1)$-cellules incluses dans un j-noyau sont N_{i+1}-périodiques. L'assertion 6 établit déjà cette périodicité pour toutes les $(i+1)$-cellules incluses dans N_i et donc par translation à toutes les $(i+1)$-cellules incluses dans un i-noyau.

Supposons que pour un certain rang j, toutes les $(i+1)$-cellules incluses dans un j-noyau sont N_{i+1}-périodiques. Si l'on considère une $(i+1)$-cellule C_{i+1} incluse dans un $(j-1)$-noyau, d'après l'assertion 4, elle ou sa duale est composée d'une $(i+1)$-cellule incluse dans un j-noyau et d'une union éventuelle de j-noyaux. Comme tout j-noyau est N_{i+1}-périodique, car $N_{i+1} \subset N_j$, d'après l'hypothèse de récurrence C_{i+1} ou $D_B(C_{i+1})$ est N_{i+1}-périodique.

De plus, d'après (1.10), toute cellule a la même période que sa duale. Ainsi, C_{i+1} est nécessairement N_{i+1}-périodique. On a donc montré que toute $(i+1)$-cellule incluse dans un $(j-1)$-noyau est N_{i+1}-périodique, ce qui est l'hypothèse au rang $j-1$.

Cette récurrence vient d'établir que toute $(i+1)$-cellule incluse dans un 1-noyau est N_{i+1}-périodique.

Finalement, si l'on considère une $(i+1)$-cellule dans G, d'après l'assertion 3, C_{i+1} ou sa duale est composée d'une $(i+1)$-cellule incluse dans un 1-noyau et d'une union éventuelle de 1-noyaux. Comme tout 1-noyau est N_{i+1}-périodique, car $N_{i+1} \subset N_1$, C_{i+1} ou $D_B(C_{i+1})$ est N_{i+1}-périodique.

Or d'après (1.10) toute cellule a la même période que sa duale. Ainsi, toute $(i+1)$-cellule est N_{i+1}-périodique.

Cela prouve l'hypothèse de récurrence au rang $i+1$ et clôt la preuve du théorème. □

Remarque 7. — Comme pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, N_i est un i-noyau, et que la suite des $(N_i)_{i=1,\dots,n}$ est décroissante pour l'inclusion, on a :

$$|N_1+B|-|N_1| < \dots < |N_n+B|-|N_n| < |B|-1 < |N_n+B| < \dots < |N_1+B|.$$

Cela peut se comprendre comme une approximation de l'ensemble B par les ensembles N_i+B. On retrouve dans cette approximation un des éléments de la décomposition récursive de Kemperman [19].

4. Théorème de Kneser

À l'aide des éléments mis en place dans les parties précédentes, et principalement du théorème 23, nous pouvons désormais démontrer le théorème 5 énoncé en introduction.

Démonstration. — Lorsque G est fini, le cas où $A+B=G$ est trivial : en effet $A+B$ est G-périodique, et on a bien $|A+B|=|G|=|G|+|G|-|G|$.

On considère désormais le cas où $A+B \neq G$. On considère la cellule $P_B(A)$ pour B, on a $P_B(A)+B=A+B$ d'après (1.2). Par ailleurs $P_B(A)$ est fini, d'après 1.4. De plus, d'après la proposition 10,

$$\bigl|P_B(A)+B\bigr| - \bigl|P_B(A)\bigr| \leqslant |A+B|-|A| < |B|-1.$$

Ainsi $P_B(A)$ est une i-cellule avec $\lambda_i(B) < |B|-1$ pour un certain entier i. D'après le théorème 23, il existe un sous-groupe fini $N_i \neq \{0\}$, qui est un i-noyau pour B, et $P_B(A)$ est périodique, avec $N_i \subset \pi(P_B(A))$. La somme $P_B(A)+B$ est alors aussi périodique, et comme il s'agit aussi de la somme $A+B$, on a montré que $A+B$ est périodique.

De plus si H est la période de $A+B$, pour $X \subset G$ on note $\overline{X}$ l'image de X dans le groupe quotient G/H par le morphisme canonique. La somme $A+B$ étant maximalement H-périodique, la somme $\overline{A+B}$ n'est plus périodique. Par la contraposée du théorème 23, on a donc l'inégalité

$$\bigl|\overline{A+B}\bigr| \geqslant \bigl|\overline{A}\bigr| + |\overline{B}| - 1.$$

Comme $A+B$ est H-périodique, on a $|A+B| = |H| \cdot |\overline{A+B}|$. De plus $|\overline{A}| = |A+H|/|H|$ et $|\overline{B}| = |B+H|/|H|$. En multipliant par $|H|$ l'inégalité $|\overline{A+B}| \geqslant |\overline{A}|+|\overline{B}|-1$, on obtient donc $|A+B| \geqslant |A+H|+|B+H|-|H|$.

Or la première inégalité donne $|A+B| < |A+H| + |B+H| - 1$. Comme $|A+B|$ est divisible par $|H|$, on en déduit $|A+B| \leqslant |A+H| + |B+H| - |H|$, ce qui conclut la preuve. □

La méthode se base sur des outils de pivot B ; elle désymétrise la paire (A, B). Si l'on considère deux sous-ensembles A et B tels que $|A+B| < |A| + |B| - 1$, la proposition suivante établit un lien entre les outils isopérimétriques définis pour A et ceux définis pour B.

Proposition 24. — *Soient G un groupe abélien, A et B deux sous-ensembles finis non vides de G, tels que*

$$|A+B| < |A| + |B| - 1.$$

Soient $i \geqslant 1$ l'entier tel que $P_B(A)$ est une i-cellule pour B (ainsi $\lambda_i(B) < |B| - 1$) et N_i le i-noyau contenant 0 pour B. Alors $P_A(N_i)$ est aussi une j-cellule pour A avec $\lambda_j(A) < |A| - 1$. De plus, si N_j est le j-noyau contenant 0 pour A, on a $N_i \subset N_j$ ou $N_j \subset N_i$.

Démonstration. — Comme $|A+B| - |A| < |B| - 1$, alors $P_B(A)$ est une i-cellule avec $\lambda_i(B) < |B| - 1$, donc d'après le théorème 23, N_i, le i-noyau pour B contenant 0, est un sous groupe fini de G, on a $A + N_i \subset P_B(A)$. De plus, si $A + N_i \neq P_B(A)$, alors on a $|A + N_i| + |N_i| \leqslant |P_B(A)|$, ce qui impose

$$\begin{aligned}
|A+B| &\geqslant \big|P_B(A)\big| + \lambda_i(B) \\
&\geqslant |A + N_i| + |N_i| + |B + N_i| - |N_i| \\
&= |A + N_i| + |B + N_i| > |A| + |B| - 1,
\end{aligned}$$

ce qui est contraire à l'hypothèse ; ainsi $A + N_i = P_B(A)$. On déduit alors de $|A+B| - |P_B(A)| = \lambda_i(B)$, l'égalité

$$|A+B| = |A+N_i| + |B+N_i| - |N_i|.$$

De l'inégalité $|A+N_i| + |B+N_i| - |N_i| < |A| + |B| - 1$, on déduit

$$|A+N_i| - |N_i| < |A| - 1 + \big(|B| - |B+N_i|\big) \leqslant |A| - 1.$$

Ainsi $P_A(N_i)$ est aussi une j-cellule pour A avec $\lambda_j(A) < |A| - 1$. D'après le théorème 23, le j-noyau pour A contenant 0, N_j est un sous-groupe de G. On a alors aussi similairement $P_A(N_i) = N_i + N_j$ et

$$|A+N_i| = |N_i + N_j| + |A + N_j| - |N_j|.$$

Des deux égalités $|A+B| = |A+N_i| + |B+N_i| - |N_i|$ et $|A+N_i| = |N_i+N_j| + |A+N_j| - |N_j|$, on obtient

$$|A+B| = |A+N_j| + |B+N_i| + |N_i+N_j| - |N_j| - |N_i|.$$

On peut maintenant, à partir de l'inégalité $|A+B| < |A|+|B|-1$, donner une majoration de $|N_i + N_j|$:

$$\begin{aligned}|N_i + N_j| &= |A + B| - |A + N_j| - |B + N_i| + |N_j| + |N_i| \\ &< |N_j| + |N_i| + \big(|A| - |A + N_j|\big) + \big(|B| - |B + N_i|\big) - 1 \\ &\leqslant |N_j| + |N_i| - 1.\end{aligned}$$

Or N_i et N_j sont deux sous-groupes finis de G, on sait alors que

$$|N_i + N_j| = |N_i| \cdot |N_j| / |N_i \cap N_j|.$$

Si l'on suppose que $N_i \not\subset N_j$ et $N_j \not\subset N_i$, on a alors

$$|N_i + N_j| = \max\big(|N_i|, |N_j|\big) \frac{\min(|N_i|, |N_j|)}{|N_i \cap N_j|} \geqslant 2 \max\big(|N_i|, |N_j|\big).$$

Ce qui contredit l'inégalité $|N_i + N_j| < |N_j| + |N_i| - 1$. □

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. Balandraud, « Quelques résultats combinatoires en théorie additive des nombres », Thèse soutenue en mai 2006 à l'Université Bordeaux 1, `http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00172441/fr/`.

[2] L. V. Brailovsky & G. A. Freiman, « On a product of finite subsets in a torsion-free group », *J. Algebra* **130** (1990), p. 462-476.

[3] A.-L. Cauchy, « Recherches sur les nombres », *J. École Polytechnique* **9** (1813), p. 99-116.

[4] I. Chowla, « A theorem on the additions of residue classes : application to the number $\Lambda(k)$ in the Waring's problem », *Proc. Indian Acad. Sci.* **2** (1937), p. 242-245.

[5] I. Chowla, H. B. Mann & E. G. Straus, « Some applications of the Cauchy-Davenport theorem », *Norske Vid. Selsk. Forh. (Trondheim)* **32** (1959), p. 74-80.

[6] H. Davenport, « On the addition of residue classes », *J. Lond. Math. Soc.* **10** (1935), p. 30-32.

[7] ———, « A historical note », *J. Lond. Math. Soc.* **22** (1947), p. 100-101.

[8] G. T. Diderrich, « On Kneser's addition theorem in groups », *Proc. Amer. Math. Soc.* **38** (1973), p. 443-451.

[9] G. A. Freiman, « On the addition of finite sets. I », *Izv. Vysš. Učebn. Zaved. Matematika* **6** (1959), p. 202-213.

[10] J. L. Gross & Y. J. (éditeurs), *Handbook of Graph Theory*, Discrete Mathematics and its Applications (Boca Raton), CRC Press, 2004.

[11] Y. ould Hamidoune, « Sur les atomes d'un graphe orienté », *C. R. Acad. Sci. Paris* **284** (1977), p. 1253-1256.

[12] ———, « On the connectivity of Cayley digraphs », *Europ. J. Combin.* **5** (1984), p. 309-312.

[13] ———, « An isoperimetric method in additive Theory », *J. Algebra* **179** (1996), p. 622-630.

[14] ———, « Subsets with small sums in abelian groups I : the Vosper property », *Europ. J. Combin.* **18** (1997), p. 541-556.

[15] ———, « On the diophantine Frobenius problem », *Portugal. Math.* **55** (1998), p. 425-449.

[16] ———, « Some results in additive number theory I : the critical pair theory », *Acta arith.* **96** (2000), p. 97-119.

[17] Y. ould Hamidoune & A. Plagne, « A generalization of Freiman's $3k-3$ Theorem », *Acta arith.* **103** (2002), p. 147-155.

[18] ———, « A multiple set version of the $3k-3$ Theorem », *Rev. Mat. Iberoam.* **21** (2005), p. 133-161.

[19] J. H. B. Kemperman, « On small sumsets in an abelian group », *Acta Math.* **103** (1960), p. 63-88.

[20] M. Kneser, « Abschätzung der asymptotischen Dichte von Summenmengen », *Math. Z.* **58** (1953), p. 459-484.

[21] ———, « Ein Satz über abelschen Gruppen mit Anwendungen auf die Geometrie der Zahlen », *Math. Z.* **61** (1955), p. 429-434.

[22] H. B. Mann, « An addition theorem for sets of elements of an abelian group », *Proc. Amer. Math. Soc.* **4** (1953), p. 423.

[23] M. B. Nathanson, *Additive number theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 164, Springer-Verlag, New York, 1996, The classical bases, xiv+342 pages.

[24] A. Plagne, « À propos de la fonction X d'Erdős et Graham », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **54** (2004), p. 1717-1767.

[25] G. Vosper, « Addendum to "The critical pairs of subsets of a group of prime order" », *J. Lond. Math. Soc.* **31** (1956), p. 280-282.

[26] ———, « The critical pairs of subsets of a group of prime order », *J. Lond. Math. Soc.* **31** (1956), p. 200-205.

[27] G. Zémor, « A generalisation to noncommutative groups of a theorem of Mann », *Discrete Math.* **126** (1994), p. 365-372.

Manuscrit reçu le 26 novembre 2005,
révisé le 7 janvier 2007,
accepté le 7 septembre 2007.

Éric BALANDRAUD
A2X
351 cours de la Libération
33405 Talence (France)
eric.balandraud@math.u-bordeaux1.fr