

JEAN COQUET

**Mesures spectrales de Walsh associées à  
certaines suites arithmétiques**

*Annales de l'institut Fourier*, tome 35, n° 2 (1985), p. 1-12

[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1985\\_\\_35\\_2\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1985__35_2_1_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## MESURES SPECTRALES DE WALSH ASSOCIÉES À CERTAINES SUITES ARITHMÉTIQUES

par Jean COQUET

---

### 1. INTRODUCTION

$\mathcal{S}$  désigne l'ensemble, introduit par Wiener [14] des suites  $g : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{C}$  telles que

$$\phi_g(t_1 - t_2) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n < N} g(n + t_1) \overline{g(n + t_2)}$$

existe pour tout couple  $(t_1, t_2)$  d'entiers naturels.

Si  $g \in \mathcal{S}$ ,  $\phi_g : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{C}$  est une suite définie positive, appelée *corrélation de  $g$* , et est donc transformée de Fourier d'une mesure borélienne positive  $\Lambda_g$  sur le tore  $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ , appelée *mesure spectrale de  $g$* .

L'analyse spectrale des suites arithmétiques a fait l'objet de nombreux travaux ([1], [2], [5], [7], [8], [9], [10], [11], [12], etc...).

On se propose ici d'ébaucher une « analyse spectrale binaire » des suites arithmétiques, faisant intervenir au lieu de l'addition ordinaire des entiers, l'addition « sans retenue » en base 2 :

$$\text{si } n = \sum_{r=0}^{\infty} a_r 2^r \text{ et } m = \sum_{r=0}^{\infty} b_r 2^r, \quad a_r \in \{0,1\}, \quad b_r \in \{0,1\},$$

$$n \oplus m = \sum_{r=0}^{\infty} c_r 2^r \text{ où } c_r \text{ est le reste de la division euclidienne de } a_r + b_r \text{ par } 2.$$

Le choix de la base 2 est seulement destiné à simplifier l'exposé. Dans la suite,  $\mathcal{S}_2$  désigne l'ensemble des suites  $g : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{C}$  telles que,

$$\gamma_g(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n < N} g(n \oplus t) \overline{g(n)} \text{ existe pour tout } t \in \mathbf{N}.$$

*Mots-clés* : Mesures spectrales - Corrélation de Walsh - Suites multiplicatives - Suites pseudo-aléatoires.

Si  $g \in \mathcal{S}_2$ ,  $\gamma_g$  est appelée la *corrélation de Walsh de  $g$* . On montre d'abord que  $\gamma_g$  est la transformée de Fourier-Walsh d'une mesure positive borélienne  $\mu_g$  sur  $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$  appelée *mesure spectrale de Walsh de  $g$* . On étudie ensuite la mesure spectrale de Walsh de certaines suites arithmétiques classiques.

*Notations.* — 1) Pour tout réel  $x$ , on pose  $e(x) = e^{2inx}$  et  $\|x\| = d(x, \mathbf{Z})$ .

2) Le tore  $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$  est noté  $\mathbf{T}$ .

## 2. MESURE DE WALSH

### 2.1. Fonctions de Walsh [13].

Soit  $t$  un entier naturel de développement binaire  $\sum_{j=0}^{\infty} t_j 2^j$ . Tout  $x \in \mathbf{T}$  admet un développement binaire (régulier) de la forme

$$\sum_{j=0}^{\infty} x_j 2^{-1-j}.$$

La fonction de Walsh  $w_t: \mathbf{T} \rightarrow \{-1, +1\}$  est définie par

$$w_t(x) = \prod_{j=0}^{\infty} (-1)^{x_j t_j}.$$

Si  $a = (a_0, \dots, a_{K-1})$  est une suite finie de 0 et de 1 et si  $t_j = 0$  pour  $j \geq K$ , la fonction  $w_t$  est constante sur le cylindre

$$\mathcal{C}_a = \{x \in \mathbf{R}/\mathbf{Z}; \forall j < K, x_j = a_j\}$$

et sa valeur est notée  $w_t(\mathcal{C}_a)$ .

### 2.2. Existence de la mesure de Walsh.

**THÉORÈME 1.** — *Si  $g$  appartient à  $\mathcal{S}_2$ , il existe une mesure borélienne positive  $\mu_g$  sur le tore  $\mathbf{T}$  (appelée mesure spectrale de Walsh de  $g$ ) telle que,*

pour tout  $t \in \mathbb{N}$ ,

$$\gamma_g(t) = \mu_g(w_t) \left( = \int_{\mathbb{T}} w_t(x) d\mu_g(x) \right).$$

De plus, si  $g$  est de module 1,  $\mu_g$  est une mesure de probabilité.

Preuve. — 1) Avec la notation du paragraphe 2.1, on a nécessairement

$$\mu_g(\mathcal{C}_a) = \int_{\mathbb{T}} 1_{\mathcal{C}_a}(x) d\mu_g(x) = 2^{-K} \sum_{t < 2^K} \int_{\mathbb{T}} w_t(\mathcal{C}_a) w_t(x) d\mu_g(x)$$

donc

$$(1) \quad \mu_g(\mathcal{C}_a) = 2^{-K} \sum_{t < 2^K} w_t(\mathcal{C}_a) \gamma_g(t).$$

Réciproquement, la mesure  $\mu_g$  définie par (1) a bien pour transformée de Fourier-Walsh  $\gamma_g$ .

2) Si  $g \in \mathcal{S}_2$ , d'après (1),

$$\begin{aligned} \mu_g(\mathcal{C}_a) &= 2^{-K} \sum_{t < 2^K} w_t(\mathcal{C}_a) \cdot \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N 2^K} \sum_{n < N 2^K} g(n \oplus t) \overline{g(n)} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{m < N} \left( 4^{-K} \sum_{t < 2^K} \sum_{u < 2^K} w_t(\mathcal{C}_a) g(u \oplus t + m 2^K) \overline{g(u + m 2^K)} \right). \end{aligned}$$

Puisque  $w_t = w_{t \oplus u} w_u$  et que  $u \rightarrow u \oplus t$  est bijective sur  $[0, 2^K[$ ,

$$(2) \quad \mu_g(\mathcal{C}_a) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{m < N} \left| 2^{-K} \sum_{t < 2^K} g(t + m 2^K) w_t(\mathcal{C}_a) \right|^2.$$

$\mu_g$  est donc une mesure positive.

3) Si  $g$  est de module 1,  $\mu_g(\mathbb{T}) = \gamma_g(0) = 1$ . □

Remarque. —  $\gamma_g$  est une suite réelle.

### 3.3. Cas où la mesure est continue.

Le résultat suivant est à comparer à ceux obtenus pour l'analyse spectrale classique ([11], p. 48 à 53).

THÉORÈME 2. — Soit  $g$  un élément de  $\mathcal{S}_2$ .

1) Si  $\mu_g(\{0\}) = 0$ ,  $g$  a une moyenne nulle.

2)  $\mu_g$  est une mesure continue si, et seulement si,

$$0 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t < N} |\gamma_g(t)|^2.$$

*Preuve.* — 1)  $\mu_g(\{0\}) = \lim \mu_g(E_K)$  où  $E_K = \{x \in T; \forall k < K, x_k = 0\}$ .  
D'après la deuxième partie de la démonstration du théorème 1,

$$\mu_g(E_K) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{m < N} \left| \frac{1}{2^K} \sum_{t < 2^K} g(t + m2^K) \right|^2.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$\left( \limsup \frac{1}{N} \left| \sum_{n < N} g(n) \right| \right)^2 \leq \left( \limsup \frac{1}{N} \sum_{m < N} \frac{1}{2^K} \left| \sum_{t < 2^K} g(t + m2^K) \right| \right)^2 \leq \mu_g(E_K).$$

Donc  $g$  a une moyenne nulle si  $\mu_g(\{0\}) = 0$ .

$$\begin{aligned} 2) \frac{1}{2^K} \sum_{t < 2^K} |\gamma_g(t)|^2 &= \frac{1}{2^K} \sum_{t < 2^K} \int_{T^2} w_t(x) w_t(y) d(\mu_g \otimes \mu_g)(x, y) \\ &= (\mu_g \otimes \mu_g)(\Delta_K) \text{ où } \Delta_K = \{(x, y) \in T^2; \forall k < K, x_k = y_k\}. \end{aligned}$$

Par le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t < N} |\gamma_g(t)|^2 = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{2^K} \sum_{t < 2^K} |\gamma_g(t)|^2 = \mu_g \otimes \mu_g(\Delta)$$

où  $\Delta = \{(x, x); x \in T\}$  est la diagonale de  $T^2$ .

On conclut en remarquant que la relation  $(\mu_g \otimes \mu_g)(\Delta) = 0$  a lieu si et seulement si  $\mu_g$  est continue.  $\square$

**DÉFINITION.** — Si  $g \in \mathcal{S}_2$  a une mesure spectrale de Walsh continue, elle est dite, pseudo-aléatoire au sens de Walsh.

**COROLLAIRE.** — Si une suite réelle  $u$  est telle que, pour tout  $t \in \mathbf{N}^*$ , la suite  $n \rightarrow u(n \oplus t) - u(n)$  est équirépartie modulo 1, elle est elle-même équirépartie modulo 1.

Ce théorème analogue au théorème de Van der Corput ([8], [11], [12]) est une conséquence immédiate du théorème 2 et du critère de Weyl.

*Remarque.* — Notons que si  $g$  est pseudo-aléatoire au sens de Walsh, sa valeur moyenne est nulle sur toute progression arithmétique dont la

raison est une puissance de 2; ce qui implique que si  $h$  est une suite presque-périodique- $B_2$  dont le spectre est contenu dans l'ensemble des rationnels dyadiques,  $gh$  a une valeur moyenne nulle. La réciproque est fautive comme le montre l'exemple  $g(n) = e(\sqrt{n})$ .

### 3. EXEMPLES

$q$  désigne un entier  $\geq 2$ . Tout entier naturel  $n$  s'écrit de manière unique

$$n = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon_r(n)q^r \quad \text{où} \quad \varepsilon_r(n) \in \{0, 1, \dots, q-1\} \quad \text{pour tout entier } r.$$

Une suite  $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  est  $q$ -multiplicative [6] si  $g(0) = 1$  et

$$g(n) = \prod_{r=0}^{\infty} g(\varepsilon_r(n)q^r) \quad \text{pour tout entier } n.$$

On étudie ici la mesure spectrale de Walsh d'une suite  $q$ -multiplicative à valeurs dans  $U = \{z \in \mathbb{C}; |z|=1\}$ , dans les cas  $q = 2$  et  $q$  impair.

#### 3.1. Suites 2-multiplicatives.

3.1.1.  $g$  désigne une suite 2-multiplicative à valeurs dans  $U$ . On considère des entiers  $t$  et  $K$  tels que  $t < 2^K$ .

La suite  $n \rightarrow g(n \oplus t) \overline{g(n)}$  admet  $2^K$  comme période, donc  $g \in \mathcal{S}_2$  et

$$\gamma_g(t) = 2^{-K} \sum_{n < 2^K} g(n \oplus t) \overline{g(n)}.$$

De même,

$$\begin{aligned} \gamma_g(t + 2^K) &= 2^{-K-1} \sum_{n < 2^K} (g(n \oplus (t + 2^K)) \overline{g(n)} \\ &\quad + g((n + 2^K) \oplus (t + 2^K)) \overline{g(n + 2^K)}) \\ &= \left( 2^{-K} \sum_{n < 2^K} g(n + t) \overline{g(n)} \right) \left( \frac{1}{2} g(2^K) + \frac{1}{2} \overline{g(2^K)} \right). \end{aligned}$$

On obtient donc  $\gamma_g(t+2^k) = \gamma_g(t)\rho_k$  où  $\rho_k = \Re e g(2^k)$ . Ainsi  $\gamma_g$  est la suite 2-multiplicative définie par :

$$\gamma_g(2^r) = \rho_r.$$

Une vérification immédiate montre que la mesure de Walsh est définie comme suit.

**THÉORÈME 3.** — 1° Toute suite 2-multiplicative  $g$  à valeurs dans  $\mathbf{U}$  appartient à  $\mathcal{S}_2$ .

2° Si l'on pose  $\rho_r = \Re e g(2^r)$ , la mesure spectrale de Walsh  $\mu_g$  de  $g$  est le produit de convolution infini  $\ast_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1+\rho_k}{2} \delta(0) + \frac{1-\rho_k}{2} \delta(2^{-k-1}) \right)$  où  $\delta(x)$  désigne la mesure de Dirac au point  $x$ .

Il résulte du théorème 3 et de résultats classiques sur les produits de convolution de mesures discrètes que :

- si la série  $\sum_{r=0}^{\infty} (1-|\rho_r|)$  converge,  $\mu_g$  est atomique,
- si la série  $\sum_{r=0}^{\infty} (1-|\rho_r|)$  diverge,  $\mu_g$  est absolument continue ou bien singulière (continue) selon que  $\sum_{r=0}^{\infty} \rho_r^2$  converge ou diverge (théorème 1, [3]).

Notons que, d'après un résultat démontré dans [4], la convergence de  $\sum_{r=0}^{\infty} (1-|\rho_r|)$  équivaut à l'existence d'une progression arithmétique de la forme  $2^k \mathbf{N}$  sur laquelle  $g^2$  n'a pas une valeur moyenne nulle.

### 3.1.2. Exemples.

1) On considère  $g(n) = e(\alpha s(n))$  où  $\alpha$  est réel et  $s(n)$  désigne la somme des chiffres de  $n$  en base 2. De l'égalité  $\rho_r = \cos(2\pi\alpha)$ , on déduit que  $\mu_g$  est

- $\delta(0)$  si  $2\alpha \in \mathbf{Z}$ ,
- 1 mesure de Lebesgue si  $2\alpha - \frac{1}{2} \in \mathbf{Z}$ ,
- singulière si  $4\alpha \notin \mathbf{Z}$ .

On peut comparer ce résultat à ceux de [5] et [9]. De plus, dans le cas où  $\alpha = \frac{1}{2}$ ,  $g$  est pseudo-aléatoire au sens habituel mais pas au sens de Walsh.

2) On considère  $g(n) = e(\beta n)$  avec  $\beta$  réel.

De  $\rho_r = \cos(2\pi\beta 2^r)$ , on déduit que  $\mu_g$  est

– discrète à support dans le groupe fini engendré par  $\beta$  si  $\beta$  est rationnel dyadique,

– singulière dans le cas contraire (et alors  $g$  est pseudo-aléatoire au sens de Walsh mais pas au sens habituel).

3) Plus généralement, si  $g(n) = e(\alpha s(n) + \beta n)$ ,  $\mu_g$  est :

– discrète si  $\beta$  est rationnel dyadique et  $2\alpha \in \mathbf{Z}$ ,

– absolument continue si  $\beta$  est rationnel dyadique et  $2\alpha - \frac{1}{2} \in \mathbf{Z}$ ,

– singulière dans les autres cas.

### 3.2. Suites $q$ -multiplicatives.

Dans ce paragraphe,  $q$  désigne un entier *impair* et  $g$  une suite  $q$ -multiplicative à valeurs dans  $\mathbf{U}$ .

#### 3.2.1. Notations.

1) On sait que  $g$  appartient à  $\mathcal{S}$ , on note  $\phi$  sa corrélation ordinaire [5].

2) Pour  $\ell$  entier naturel,  $g_\ell$  désigne la fonction  $q$ -multiplicative « tronquée » définie par

$$g_\ell(n) = \prod_{r < \ell} g(\varepsilon_r(n) q^r) \quad \text{où} \quad (\varepsilon_r(n))_r$$

est la suite des chiffres de  $n$  en base  $q$ . Autrement dit  $g_\ell(n) = g(n')$  où  $n'$  est le reste de la division de  $n$  par  $q^\ell$ . On désigne par  $\phi_\ell$  la corrélation ordinaire de  $g_\ell$ .

3) Pour tout  $t \in \mathbf{N}$ , on pose  $D(t) = \{(n \oplus t) - n; n \in \mathbf{N}\}$ .

Si  $t = 2^{r_1} + 2^{r_2} + \dots + 2^{r_c}$  avec  $r_1 < r_2 < \dots < r_c$ , on a :

$$D(t) = \{(n \oplus t) - n; n < 2^{1+r_c}\} = \{\pm 2^{r_1} \pm 2^{r_2} \pm \dots \pm 2^{r_c}\},$$



de sorte que

Card  $D(t) = 2^c = 2^{s(t)}$  où  $s(t)$  désigne la somme des chiffres binaires de  $t$ .

### 3.2.2. Existence de la mesure de Walsh.

THÉORÈME 4. — Toute suite  $q$ -multiplicative ( $q$  impair)  $g$  appartient à  $\mathcal{S}_2$  et sa corrélation binaire  $\gamma$  est donnée par

$$\gamma(t) = 2^{-s(t)} \sum_{u \in D(t)} \phi(u), \quad \text{où } \phi \text{ est sa corrélation ordinaire.}$$

*Preuve.* — Soit  $t < 2^K$ . Pour tout  $u \in D(t)$ ,  $\{n \in \mathbb{N}; n \oplus t = n + u\}$  est une réunion de  $2^{K-s(t)}$  progressions arithmétiques modulo  $2^K$ . Il suffit donc de montrer que

$$(3) \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{\substack{n < N \\ n \equiv b \pmod{2^K}}} g(n+u) \overline{g(n)} = 2^{-K} \phi(u) \quad \text{pour } u > 0.$$

L'indépendance statistique des progressions  $2^K \mathbb{N} + b$  et  $q^\ell \mathbb{N} + c$  et la périodicité de  $g_\ell(n+u) \overline{g_\ell(n)}$  entraînent :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{\substack{n < N \\ n \equiv b \pmod{2^K}}} g_\ell(n+u) \overline{g_\ell(n)} = 2^{-K} \phi_\ell(u).$$

D'autre part, puisque  $g(n) \cdot (g_\ell(n))^{-1}$  ne dépend que de la partie entière de  $nq^{-\ell}$ , on a :

$$\begin{aligned} \sum_{n < N} |g(n+u) \overline{g(n)} - g_\ell(n+u) \overline{g_\ell(n)}| \\ \leq 2 \text{ Card } \{n \in \mathbb{N}; n < N \text{ et } [q^{-\ell}(n+u)] > [q^{-\ell}n]\} \\ < 2Nq^{-\ell}u. \end{aligned}$$

Il en résulte en passant à la limite sur  $\ell$  que :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{\substack{n < N \\ n \equiv b \pmod{2^K}}} g(n+u) \overline{g(n)} = 2^{-K} \lim_{\ell \rightarrow \infty} \phi_\ell(u) = 2^{-K} \phi(u).$$

La relation (3) est démontrée, le théorème 4 également.  $\square$

**COROLLAIRE.** — Soit  $q$  un entier impair  $\geq 2$ . Toute suite  $q$ -multiplicative  $g$  pseudo aléatoire à valeurs dans  $U$  est pseudo-aléatoire au sens de Walsh.

La démonstration repose sur le lemme suivant :

**LEMME.** — Pour  $u > 0$ , on pose  $D^*(u) = \{t \in \mathbb{N}; u \in D(t)\}$ . L'égalité suivante a lieu :

$$1 = \sum_{t \in D^*(u)} 2^{-s(t)}.$$

*Preuve.* — On pose  $p(u) = \sum_{t \in D^*(u)} 2^{-s(t)}$ . Les représentations de 1 avec des  $\pm 2^r$  sont :

$$1, 2 - 1, \dots, 2^a - \sum_{k < a} 2^k, \dots, \quad \text{donc} \quad p(1) = 1.$$

La relation  $p(2u) = p(u)$  est immédiate. Parmi les représentations de  $2u + 1$ , il y a celles de la forme  $2^{r_1} \pm 2^{r_2} \dots + 1$  et celles de la forme  $2^{s_1} \pm \dots \pm 2^{s_d} - 1$ . On en déduit que  $p(2u+1) \wedge = \frac{1}{2}(p(u) + p(u+1))$ .

La démonstration s'achève par récurrence. □

*Preuve du corollaire.* — D'après le théorème 4,

$$\begin{aligned} \sum_{t < 2^K} |\gamma(t)| &\leq \sum_{t < 2^K} 2^{-s(t)} \sum_{u \in D(t)} |\phi(u)| \\ &\leq |\phi(0)| + 2 \sum_{1 \leq u < 2^K} |\phi(u)| \cdot \sum_{t < 2^K; u \in D(t)} 2^{-s(t)} \end{aligned}$$

car  $|\phi(-u)| = |\phi(u)|$  et  $|u| \leq t$  pour  $u \in D(t)$ . Donc

$$\begin{aligned} \sum_{t < 2^K} |\gamma(t)| &\leq |\phi(0)| + 2 \sum_{1 \leq u < 2^K} |\phi(u)| \cdot \sum_{t \in D^*(u)} 2^{-s(t)} \\ &= |\phi(0)| + 2 \sum_{1 \leq u < 2^K} |\phi(u)| \quad \text{d'après le lemme.} \end{aligned}$$

Finalement,  $0 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t < N} |\gamma(t)|$  et  $g$  est pseudo-aléatoire au sens de Walsh d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

*Remarques.* — 1) Le corollaire n'est pas valable pour une suite 2-multiplicative.

2) La réciproque du corollaire est fautive comme le prouve l'exemple  $g(n) = e(\beta n)$  où  $\beta$  n'est pas un rationnel dyadique. Dans la suite, on donne une condition nécessaire et suffisante pour que  $g$  soit pseudo-aléatoire au sens de Walsh.

3) Si  $q$  est pair, l'appartenance d'une suite  $q$ -multiplicative de module 1 à  $\mathcal{S}_2$  reste vraie mais la corrélation de Walsh n'est plus donnée par la formule du théorème 4.

### 3.2.3. Nature de la mesure spectrale.

Dans le cas où  $g$  n'est pas pseudo-aléatoire, sa mesure spectrale ordinaire  $\Lambda_g$  est discrète [5] et portée par un ensemble translaté  $\alpha + \mathbf{T}_q$  de l'ensemble des rationnels  $q$ -adiques du tore ([9], prop. 3) :

$$\Lambda_g = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \delta_{\alpha+x_k} \quad \text{où les } x_k \text{ sont dans } \mathbf{T}_q \quad \text{et où} \quad \sum_{k=0}^{\infty} c_k = 1.$$

Par linéarité et convergence uniforme, on trouve d'après le théorème 4,

$$\gamma(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \left( 2^{-s(t)} \sum_{u \in \mathbf{D}(t)} e((\alpha+x_k)u) \right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \gamma_k(t)$$

où  $\gamma_k(t)$  est la transformée de Fourier-Walsh de la mesure spectrale de Walsh  $\mu_k$  de la suite  $n \rightarrow e((\alpha+x_k)n)$ .

Ainsi  $\mu = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \mu_k$  est la mesure spectrale de Walsh de  $g$ . En tenant compte du résultat du 3.1.2 concernant les suites  $n \rightarrow e(\beta n)$  et du corollaire du théorème 4, on obtient finalement :

**THÉORÈME 5.** —  $q$  désigne un entier impair  $\geq 2$ ,  $g$  une suite  $q$ -multiplicative à valeurs dans  $\mathbf{U}$ ,  $\Lambda_g$  sa mesure spectrale ordinaire.

1) Si  $\Lambda_g$  ne charge aucun rationnel dyadique (autrement dit, si le spectre de Fourier-Bohr de  $g$  ne contient aucun rationnel dyadique), la mesure spectrale de Walsh de  $g$  est continue.

2) S'il existe un rationnel dyadique  $\alpha$  tel que  $\Lambda_g(\{\alpha\}) = c > 0$ , la mesure spectrale de Walsh de  $g$  est de la forme  $c w_\alpha + (1-c) \mu'$  où  $w_\alpha$  est la mesure de Walsh discrète associée à la suite  $n \rightarrow e(\alpha n)$  et où  $\mu'$  est continue singulière.

### 3.1.3. Suites presque-périodiques.

Soit  $g$  une suite presque-périodique- $B_2$  de série de Fourier

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k e(\beta_k x).$$

Si  $\mu_k$  désigne la mesure spectrale de Walsh associée à la suite  $n \rightarrow e(\beta_k n)$  (comme au paragraphe 3.1.2), la mesure spectrale de Walsh de  $g$  est donnée par  $\mu = \sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 \mu_k$ . Elle est discrète si et seulement si le spectre de  $g$  ne contient que des rationnels dyadiques.

*Je remercie Michel Mendès-France qui a attiré mon attention sur ce problème et suis très reconnaissant à Pierre Liardet et Brigitte Mossé de m'avoir signalé une inexactitude dans le texte initial.*

### BIBLIOGRAPHIE

- [1] J.-P. BERTRANDIAS, Espaces de fonctions bornées et continues en moyenne asymptotique d'ordre  $p$ , *Bull. Soc. Math. France*, Mémoire 5 (1966), 3-106.
- [2] J. BESINEAU, Indépendance statistique d'ensembles liés à la fonction « somme des chiffres », *Acta Arithmetica*, 20 (1972), 401-416.
- [3] G. BROWN, W. MORAN, Coin tossing and powers of singular measures, *Math. Proc. Phil. Soc.*, 77 (1975), 349-364.
- [4] J. COQUET, Répartition modulo 1 des suites  $q$ -additives, *Commentationes Math.*, 21 (1979), 23-42.
- [5] J. COQUET, T. KAMAE, M. MENDÈS-FRANCE, Sur la mesure spectrale de certaines suites arithmétiques, *Bull. Soc. Math. France*, 105 (1977), 369-384.
- [6] H. DELANGE, Sur les fonctions  $q$ -additives ou  $q$ -multiplicatives, *Acta Arithmetica*, 21 (1972), 285-298.
- [7] T. KAMAE, Sum of digits to different bases and mutual singularity of their spectral measures, *Osaka J. Math.*, 15 (1978), 569-574.
- [8] T. KAMAE, M. MENDÈS-FRANCE, Van der Corput's difference theorem, *Israel J. Math.*, 31 (1978), 335-342.
- [9] M. QUEFFELEC, Mesures spectrales associées à certaines suites arithmétiques, *Bull. Soc. Math. France*, 107 (1979), 385-421.
- [10] M. QUEFFELEC, Sur la singularité des produits de Riesz et des mesures spectrales associées à la somme des chiffres, *Israel J. Math.*, 34 (1979), 337-342.
- [11] G. RAUZY, *Propriétés statistiques des suites arithmétiques*, P.U.F., Collection SUP, (1976).
- [12] I. Z. RUZSA, Connections between the uniform distribution of a sequence and its differences, *Proc. Budapest conference on number theory* (1981).

- [13] J. L. WALSH, A closed set of normal orthogonal functions, *Amer. J. Math.*, 55 (1923), 5-24.
- [14] N. WIENER, *The Fourier integral and certain of its applications*, Dover publications, (1958).

Manuscrit reçu le 19 mars 1984.

Jean COQUET,  
Université de Valenciennes  
Département de Mathématiques  
Le Mont-Houy  
59326 Valenciennes Cedex.

---