ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JEAN-PIERRE FRANCOISE

Invariants analytiques des champs de vecteurs de $\mathbb{C}^n, 0$

Annales de l'institut Fourier, tome 35, nº 3 (1985), p. 207-214

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1985__35_3_207_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
35, 3 (1985), 207-214

INVARIANTS ANALYTIQUES DES CHAMPS DE VECTEURS DE $\mathbf{C}^n$, 0

par Jean-Pierre FRANCOISE

Soit χ l'ensemble des germes de champs de vecteurs analytiques de $\mathbf{C}^n$, 0 qui fixent l'origine et $\mathcal{O}$ l'anneau local des germes de fonctions analytiques de $\mathbf{C}^n$, 0. Choisissons une fois pour toutes un système de coordonnées analytiques $\underline{x} = (x_i)$ de $\mathbf{C}^n$, 0 et identifions χ à $\mathcal{O}^n$ en associant à un élément $X \in \chi$ ses fonctions composantes $f_i(\underline{x})$ par rapport aux $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$.

Nous allons considérer un développement de Taylor $f_i(\underline{x}) = \sum_\alpha f_i^\alpha x^\alpha$ comme point (f_i^α) dans un espace vectoriel F.

On fait opérer sur χ le groupe $\mathcal{D}_n$ des germes de difféomorphismes analytiques de $\mathbf{C}^n$, 0 dans $\mathbf{C}^n$, 0.

DEFINITION – *Un invariant est une fonction* $A : \chi \longrightarrow \mathbf{C}$ *qui est constante le long des orbites de l'action de* $\mathcal{D}_n$ *sur* χ.

DEFINITION. – *On dit qu'un invariant est analytique s'il définit une fonction analytique sur l'espace des champs holomorphes en* 0.

Nous dirons qu'une famille d'invariants forme un *système complet* si elle permet de séparer les orbites.

J. Ecalle a proposé récemment [2] de construire des systèmes complets d'invariants analytiques avec sa méthode des *fonctions résurgentes.* Sa méthode repose sur l'utilisation du *champ réduit* que nous allons d'abord introduire.

Mots-clés : Singularités – Champs de vecteurs – Formes normales.

Dans la suite, nous ne considérons que les *champs génériques* de $\mathbf{C}^n, 0$ pour lesquels le jet d'ordre un $j_1(X) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ est diagonal et les valeurs propres de λ_i sont toutes différentes de 0 et pour lesquels les fonctions composantes $f_i(\underline{x})$ sont divisibles par x_i. Nous ferons opérer sur ces champs le sous-groupe $\mathcal{D}_n^a \subset \mathcal{D}_n$ des difféomorphismes qui fixent les "axes" $x_i = 0$. Bien sûr, nous pourrions traiter des cas plus généraux, mais, il nous semble, sans que cela ajoute des phénomènes de nature essentiellement différente. Nous noterons χ l'ensemble de ces champs génériques.

Notons $M \subset \mathcal{O}$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}$. Un élément $X \in \chi$ opère sur $\mathcal{O}$ comme dérivation et vérifie $X . M \subset M$. Il donne ainsi par troncation des opérateurs linéaires $X_k : \mathcal{O}/M^k \longrightarrow \mathcal{O}/M^k$. A chacun de ces endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie, on peut associer une décomposition commutative de Jordan :

$$X_k = X_k' + X_k'' , [X_k' , X_k''] = 0$$

en une partie semi-simple et une partie nilpotente. Ces décompositions sont compatibles et on obtient à la limite $k \longrightarrow \infty$ une décomposition de X lui-même $X = X' + X''$, $[X', X''] = 0$ en deux champs à coefficients dans $\hat{\mathcal{O}} = \lim\limits_{k \to \infty} \mathcal{O}/M^k$ que l'on appelle décomposition en semi-simple et nilpotent.

La partie semi-simple d'un champ X, élément de χ, peut être formellement conjuguée à $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. De plus, il ne peut exister de champ formel non linéaire X'' qui commute à $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ que si les valeurs propres ont des *résonances*, c'est-à-dire qu'il existe des relations $\sum_{i=1} \lambda_i m_i = 0$, $m_i \in \mathbf{N} \cup \{-1\}$. Les monômes $x^m (= x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n})$ invariants par $\Sigma \lambda_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ correspondent à des multi-entiers m tels que $\langle \lambda , m \rangle = 0$. Soit $m^1 , \dots , m^\mu$ une partie génératrice du module des relations $\langle \lambda , m \rangle = 0$. Soit y un système de coordonnées dans lequel X' est linéaire, nous dirons que, dans un tel système, X est dans une forme *normale,* et nous considérons les monômes $y^{m_1} , \dots , y^{m_\mu}$.

A cause précisément des résonances, il n'y a pas unicité des systèmes de coordonnées linéarisant X', mais l'anneau $R = \mathbf{C}[[y^{m^1}, \ldots, y^{m^\mu}]]$ lui est uniquement défini.

L'action de X sur cet anneau R détermine une dérivation de R que l'on appelle le *champ réduit* de X.

Soit $X_0 \in \chi$ un champ dans une forme normale :

$$X_0 = \sum_{i=1}^{n} y_i \widetilde{\psi}_i(y^{m_1}, \ldots, y^{m_\mu}) \frac{\partial}{\partial y_i} .$$

DEFINITION. — *On dit que* X_0 *vérifie la condition* $(\bar{A})$ *si il existe :*

(i) *un ensemble de multi-indices* P *tel que*

$$p, p' \in P \Longrightarrow p - p' \notin \sum_{i=1}^{\mu} \mathbf{Z}\, m^i ;$$

(ii) *une suite* α_k, $\alpha_k \in P$, $|\alpha_n| \longrightarrow \infty$, *de multi-indices pour laquelle* $\dfrac{\langle \alpha_k , \lambda \rangle}{\|\alpha\|} \longrightarrow 0$;

(iii) *un coefficient de* $\dfrac{\langle \alpha_k , \widetilde{\psi} \rangle}{\|\alpha\|}$ *ne tend pas vers zéro.*

THEOREME. — *Soit* X_0 *un élément de* χ *qui est une forme normale dans le système* $\underline{x}$, *dont le champ réduit associé est nul, et qui satisfait la condition* $(\bar{A})$. *Il ne peut exister d'invariants analytiques formant un système complet au voisinage de* X_0.

Avant d'entamer la preuve, il faut remarquer que la nullité du champ réduit se produit souvent dans la pratique.

Un champ X qui conserve le volume $\omega = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ a des valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ reliées par la résonance "trace nulle" $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 0$. Si l'on fait l'hypothèse qu'il n'existe pas d'autres résonances (situation bien sûr générique), la forme *normale* de X s'écrit $X = \sum_{i=1}^{n} \psi_i(t) y_i \dfrac{\partial}{\partial y_i}$ avec $t = y_1 \ldots y_n$. Le fait de *conserver le volume* implique la relation $\sum_{i=1}^{n} \psi_i(t) = 0$ ce qui signifie que *le champ réduit est nul* [3].

Les champs *hamiltoniens* dans $\mathbf{C}^{2m},0$ dont les valeurs propres se répartissent en paires reliées par $\lambda_{j+m} = -\lambda_j$, $j = 1,\ldots,m$, et tels qu'il n'existe pas de relations sur $\mathbf{Z}$ entre les λ_j, $j = 1,\ldots,m$, donnent un autre exemple plus classique.

Soient $(E_1,\ldots,E_s)$ une $\mathbf{Q}$-base de l'espace des champs $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ qui satisfont $\langle \lambda, m^1\rangle = \ldots = \langle \lambda, m^\mu\rangle = 0$.

Soit $m^1,\ldots,m^\mu$ un système générateur des résonances du champ X_0 ; l'hypothèse que X_0 ait un champ réduit nul équivaut à dire que X_0 conserve $x^{m^1},\ldots,x^{m^\mu}$. Choisissons s champs $E_1,\ldots,E_j,\ldots,E_s$ comme indiqué ci-dessus, alors, X_0 s'écrit :

$$X_0 = \sum_{j=1}^{s} \psi_j(x^{m^1},\ldots,x^{m^\mu})\, E_j .$$

Supposons qu'il existe un invariant analytique A au voisinage de X_0. Nous choisissons sur F un système de coordonnées centrées en X_0 et nous restreignons l'invariant à un sous-espace $F' \subset F$ que nous allons préciser ci-dessous. Nous noterons encore A cette *restriction.*

Nous choisissons pour F' l'espace vectoriel des champs qui s'expriment comme combinaison des $E_j (j = 1,\ldots,s)$, et donc qui conservent les $x^{m^1},\ldots,x^{m^\mu}$ et tels que les composantes $f_j(\underline{x}) \in M^2$ sur les $s\ E_j$, $Y = \sum_{j=1}^{n} f_j(\underline{x})\, E_j$ ne comprennent aucun élément de R dans leurs développements de Taylor.

Considérons une famille à un paramètre $X_0 + \epsilon Y$, $Y \in F'$, $\epsilon \in \mathbf{C},0$, et écrivons $A(X_0 + \epsilon Y) = A(X_0) + \epsilon^m A_m(Y) + O(\epsilon^{m+1})$, où A_m est le premier polynôme homogène non identiquement nul du développement en ϵ de A lorsque Y varie dans F'.

LEMME. – $A_m(Y) = 0$ *pour tout* $Y = \sum_{j=1}^{s} f_j(\underline{x})\, E_j$ *pour lesquels il existe des fonctions analytiques* $g_j(\underline{x})$ *telles que* $f_j = X_0 \cdot g_j$.

Supposons dans un premier temps que $Y = \sum_{j=1}^{n} f_j(\underline{x})\, E_j$, et qu'il existe des fonctions analytiques $g_j(\underline{x}\,,\epsilon)$ telles que

$$f_j(\underline{x}) = (X_0 + \epsilon\, Y)\,.\,g_j(\underline{x}\,,\epsilon)\,,$$

alors, $X_0 + \epsilon\, Y$ est analytiquement conjugué à X_0 et donc $A(X_0 + \epsilon\, Y) \equiv 0$ et $A_m(Y) \equiv 0$.

En effet, commençons par déployer le champ $X_0 + \epsilon\, Y$ sur la base $x_i \dfrac{\partial}{\partial x_i}$:

$$X_0 + \epsilon\, Y = \sum_{i=1}^{n} (\widetilde{\psi}_i(x^{m^1}, \ldots, x^{m^\mu}) + \epsilon \widetilde{f}_i(\underline{x}))\, x_i \frac{\partial}{\partial x_i}\,;$$

les fonctions composantes vérifient :

$$\langle m^1\,, \widetilde{\psi} + \epsilon \widetilde{f}\rangle = \sum_{i=1}^{n} m_i^1 (\widetilde{\psi}_i + \epsilon \widetilde{f}_i) = 0$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\langle m^\mu\,, \widetilde{\psi} + \epsilon \widetilde{f}\rangle = \sum_{i=1} m_i^\mu (\widetilde{\psi}_i + \epsilon \widetilde{f}_i) = 0\,.$$

Par hypothèse, il existe des fonctions $\widetilde{g}_i$ telles que :

$$\widetilde{f}_i = (X_0 + \epsilon\, Y)\,.\,\widetilde{g}_i\,, i = 1\,, \ldots, n\,,$$

et qui vérifient :

$$\langle m^1\,, \widetilde{g}\rangle = \ldots = \langle m^\mu\,, \widetilde{g}\rangle = 0\,. \qquad (1)$$

On fait alors le changement de coordonnées

$$x_i \longmapsto x_i' = x_i \exp(-\epsilon\, \widetilde{g}_i)\,.$$

Calculons $X_0 + \epsilon\, Y$ dans ce nouveau système de coordonnées :

$$\begin{aligned}(X_0 + \epsilon\, Y)\,.\,x_i' &= (X_0 + \epsilon\, Y)\,.\,x_i \exp - \epsilon\, \widetilde{g}_i \\ &\qquad - \epsilon\, x_i \exp(-\epsilon\, \widetilde{g}_i)\,(X_0 + \epsilon\, Y)\,.\,\widetilde{g}_i \\ &= \widetilde{\psi}_i(x^{m^1}, \ldots, x^{m^\mu})\, x_i'\,.\end{aligned}$$

Maintenant, par (1), il vient

$$x^{m^1} = x'^{m^1} \exp -\langle m^1 , \widetilde{g}\rangle = x'^{m^1}$$
$$\vdots$$
$$x^{m^\mu} = x'^{m^\mu} \exp -\langle m^\mu , \widetilde{g}\rangle = x'^{m^\mu} \ ;$$

et donc

$$(X_0 + \epsilon Y) \,.\, x_i' = \psi_i(x'^{m^1}, \ldots, x'^{m^\mu})\, x_i' ,$$

ce qui démontre que $X_0 + \epsilon Y$ est analytiquement conjugué à X_0.

Démontrons maintenant le lemme. Soit donc

$$Y = \sum_{j=1}^{s} f_j(\underline{x})\, E_j \quad \text{et} \quad X_0 = \sum_{j=1}^{s} \psi_j(x^{m^1}, \ldots, x^{m^\mu})\, E_j ,$$

et nous supposons qu'il existe des $g_j \in \mathcal{O}$ tels que $f_j(\underline{x}) = X_0 \,.\, g_j(\underline{x})$.

Dans ce cas, par le théorème des fonctions implicites, nous pouvons construire des $a_j(\underline{x}, \epsilon) \in \mathcal{O}\{\epsilon\}$ tels que :

$$a_j(\underline{x}, 0) = f_j(\underline{x})$$

et

$$a_j(\underline{x}, \epsilon) = \Big(X_0 + \epsilon \sum_{\ell=1}^{s} a_\ell(\underline{x}, \epsilon)\, E_\ell\Big) \,.\, g_j(\underline{x}).$$

Comme nous l'avons précédemment remarqué, $X_0 + \epsilon \sum_{j=1}^{s} (a_j(\underline{x}, \epsilon)\, E_j$ est alors analytiquement conjugué à X_0. Nous pouvons écrire ce champ

$$X_0 + \epsilon Y + \epsilon^2 Z(\epsilon),$$

et ainsi, $A(X_0 + \epsilon Y + \epsilon^2 Z(\epsilon)) - A(X_0)$ est nul identiquement en ϵ.

Comme $A(X_0 + \epsilon Y + \epsilon^2 Z(\epsilon)) = A(X_0) + \epsilon^m A_m(Y) + \epsilon^{m+1}(\ldots)$, on trouve que $A_m(Y) = 0$. □

Nous allons démontrer le théorème en prouvant :

(i) que la restriction d'un invariant à F' doit être nulle.

(ii) qu'il existe dans n'importe quel voisinage de X_0 dans F' des champs non analytiquement conjugués à X_0.

(i) se déduit facilement du lemme. En effet, d'après ce lemme, pour tout champ $Y \in F'$ dont le développement de Taylor en $\underline{x}$ comporte un nombre fini de termes, nous avons $A_m(Y) = 0$

car il suffit dans ce cas de prendre, si $f_j(\underline{x}) = \sum_{|\alpha| \leq N} f_j^\alpha x^\alpha$,

$$g_j(\underline{x}) = \sum_{|\alpha| \leq N} \frac{f_j^\alpha x^\alpha}{\langle \alpha, \widetilde{\psi} \rangle}.$$

De tels champs sont denses dans F' et comme A_m est continue, A_m est identiquement nulle sur F' et donc $A \equiv 0$ sur F'.

Soit α_k une suite qui satisfait la condition $(\overline{A})$. Il faut voir qu'il existe une racine de l'équation $\langle \alpha_k, \widetilde{\psi} \rangle = 0$ qui tend vers zéro.

En effet, la famille $\dfrac{\langle \alpha_k, \widetilde{\psi} \rangle}{\|\alpha_k\|}$ est normale ; on peut en extraire une sous-famille qui converge vers une fonction holomorphe limite non nulle. Cette fonction limite doit s'annuler en $\{0\}$ et donc les fonctions $\langle \alpha_k, \widetilde{\psi} \rangle$ doivent avoir un zéro dans le voisinage.

Un champ $X_0 + \epsilon Y$, avec $Y = \sum_{j=1}^{s} \sum_{\alpha \in P} f_j^\alpha x^\alpha E_j$, ne peut alors être analytiquement conjugué à X_0 pour tout $\epsilon \longrightarrow 0$, car on trouve

$$g_j(x) = \sum_{j=1}^{n-\mu} \sum_k \frac{f_j^{\alpha_k} x^\alpha}{\langle \alpha_k, \widetilde{\psi} \rangle}$$

et donc le rayon de convergence des $g_j(\underline{x})$ est inférieur à la distance du premier zéro de $\langle \alpha, \widetilde{\psi} \rangle = 0$ à l'origine. Toutes les conjugaisons formelles à la forme normale sont alors divergentes selon un argument général de Brjuno [1] qui est aussi établi différemment pour les champs isochores dans [3]. On démontre ainsi le théorème énoncé.

En considérant les réduites rationnelles successives des quotients des valeurs propres prises deux à deux, on voit que la condition $\overline{A}$ équivaut à la condition A de Martinet dans [4].

L'auteur exprime toute sa reconnaissance à B. Malgrange pour ses remarques qui permirent de préciser la rédaction.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A.D. BRJUNO , Analytical form of differential equations, *Trudy Moskov Math. Obsc.*, Tom. 25 (1971) ; *Trans. Moscow Math. Soc.*, vol. 25 (1971), 131-287.

[2] J. ECALLE, Fonctions résurgentes, *Publ. Math. d'Orsay,* tome 3 (en préparation).

[3] J.-P. FRANCOISE, Singularités de champs isochores, *Duke Mathematical Journal,* 67, n° 3 (1980), 665-685.

[4] J. MARTINET, Exposé n° 564, Séminaire Bourkabi 1980-1981, *Lecture Notes in Math.*, n° 901.

Manuscrit reçu le 13 décembre 1983
révisé le 15 mars 1985.

Jean-Pierre FRANCOISE,
L. P. 13 du CNRS
Topologie différentielle
Université Paris – Sud
Mathématiques
91405 Orsay Cedex.