ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JEAN-JACQUES LOEB

Action d'une forme réelle d'un groupe de Lie complexe sur les fonctions plurisousharmoniques

Annales de l'institut Fourier, tome 35, nº 4 (1985), p. 59-97

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1985__35_4_59_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
35, 4 (1985), 59-97.

ACTION D'UNE FORME RÉELLE D'UN GROUPE DE LIE COMPLEXE SUR LES FONCTIONS PLURISOUSHARMONIQUES

par Jean-Jacques LOEB

1. Introduction.

Il existe des exemples assez simples d'ouverts de Stein de $\mathbf{C} \times \mathbf{C}^2$ dont la projection sur $\mathbf{C}^2$ n'est pas de Stein. Néanmoins, on doit à C. O. Kiselman le théorème suivant :

THÉORÈME [5]. — *Soit Ω un ouvert de Stein de $\mathbf{C}^m \times \mathbf{C}^n$ invariant par les translations de $\mathbf{R}^m \times \{0\}$ et à fibres connexes au-dessus de $\mathbf{C}^n$. Alors la projection ω de Ω sur $\mathbf{C}^n$ est de Stein.*

B. Chafi a étudié, dans sa thèse de 3ᵉ cycle [2], ce qui se passait si on remplaçait $\mathbf{C}^m$ par un groupe de Lie complexe connexe $G_{\mathbf{C}}$ et $\mathbf{R}^m$ par une forme réelle $G_{\mathbf{R}}$ de $G_{\mathbf{C}}$. On rappelle ici qu'une forme réelle $G_{\mathbf{R}}$ de $G_{\mathbf{C}}$ est un sous-groupe de Lie connexe de $G_{\mathbf{C}}$ tel que $\mathrm{Lie}\,(G_{\mathbf{C}}) = \mathrm{Lie}\,(G_{\mathbf{R}}) \oplus i\,\mathrm{Lie}\,(G_{\mathbf{R}})$. Il a démontré les deux résultats suivants :

1ᵉʳ *résultat : Principe du Minimum.*

Soit $G_{\mathbf{C}}$ un groupe de Lie complexe et $G_{\mathbf{R}}$ une forme réelle fermée. Soit Ω un ouvert de $G_{\mathbf{C}} \times \mathbf{C}^n$ invariant par l'action à droite de $G_{\mathbf{R}}$ et à fibres connexes au-dessus de $\mathbf{C}^n$. Alors si φ est une fonction régulière invariante sur Ω, strictement plurisousharmonique et d'exhaustion sur $\Omega/G_{\mathbf{R}}$, la fonction $\varphi(x) = \inf \varphi(gx)$ définie sur la projection ω de Ω sur $\mathbf{C}^n$ est plurisousharmonique d'exhaustion sur ω.

Ce résultat a comme conséquence immédiate que ω est de Stein.

Mots-clés : Groupe de Lie complexe - Fonction p.s.h. - Espace homogène.

Dès lors, pour généraliser le théorème de C. O. Kiselman à G_C, il fallait savoir si un ouvert de Stein Ω invariant de $G_C \times \mathbf{C}^n$ admettait une fonction régulière strictement plurisousharmonique invariante et d'exhaustion sur $\Omega/G_{\mathbf{R}}$.

Le *second résultat* de B. Chafi est que cette condition est satisfaite si on prend pour G_C un groupe de la forme $GL(p,\mathbf{C}) \times \mathbf{C}^q$ et pour $G_{\mathbf{R}}$ la forme réelle $U(p) \times \mathbf{R}^q$. ($GL(p,\mathbf{C})$ est le groupe linéaire complexe d'ordre p et $U(p)$ le groupe unitaire d'ordre p).

Nous montrons dans la cinquième partie que le premier résultat de B. Chafi peut être replacé dans un cadre géométrique assez général (théorème 3).

Pour la généralisation du second résultat, nous commençons par aborder la question de l'existence pour un couple $(G_{\mathbf{R}}, G_{\mathbf{R}})$ d'une fonction φ de classe C^∞ sur G_C, strictement plurisousharmonique, invariante par l'action à droite de $G_{\mathbf{R}}$ et d'exhaustion sur $G_C/G_{\mathbf{R}}$. Si la réponse est affirmative, nous disons que le couple $(G_C, G_{\mathbf{R}})$ est *pseudo-convexe*. (Nous admettons dans la définition que $G_{\mathbf{R}}$ est fermé dans G_C). La motivation de cette définition est que l'existence de φ, triviale dans le cas $(\mathbf{C}^n,\mathbf{R}^n)$ n'est pas toujours assurée.

Pour donner un critère de pseudo-convexité, nous introduisons les définitions suivantes :

1) Une algèbre de Lie $\mathcal{G}$ (réelle) est à *spectre imaginaire pur* si pour tout $X \in \mathcal{G}$, l'endomorphisme $\mathrm{ad}X$ a toutes ses valeurs propres imaginaires pures.

2) On dit qu'un groupe de Lie G réel est à spectre imaginaire pur si son algèbre de Lie est à spectre imaginaire pur.

Rappelons ici que Jenkins [7] a démontré que G est à spectre imaginaire pur, si et seulement si il est à croissance polynomiale. Ceci signifie qu'étant donné une mesure de Haar sur G, il existe un polynôme p tel qu'à tout voisinage relativement compact U de l'élément neutre on peut associer une constante $C(U)$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad \text{mes}\, U^n \leqslant c(U)p(n).$$

Dans notre étude, nous n'utiliserons pas cette caractérisation des groupes à spectre imaginaire pur.

On peut alors énoncer le théorème 1 qui est le résultat essentiel de la 3^e et de la 4^e partie.

THÉORÈME 1. — *Soit* G_C *un groupe de Lie complexe à radical simplement connexe et* G_R *une forme réelle de* G_C. *Alors pour que* (G_C, G_R) *soit pseudo-convexe, il faut et il suffit que* G_R *soit à spectre imaginaire pur.*

Ceci permet de dire que si G_C est nilpotent simplement connexe, alors (G_C, G_R) est pseudo-convexe, tandis qu'il y a des groupes résolubles G_C tels que (G_C, G_R) ne soit pas pseudo-convexe.

On remarque que si (G_C, G_R) est pseudo-convexe (avec G_C à radical simplement connexe), alors G_C est de Stein. En effet, dans la 3ᵉ partie nous montrons que G_C est en tant que variété analytique un produit de $\mathbf{C}^n$ et d'un groupe semi-simple complexe qui est de Stein d'après un résultat de Matsushima [9].

Dans sa démonstration au deuxième résultat, B. Chafi s'est servi de la mesure de Haar sur le groupe compact $U(p)$ pour rendre invariantes des fonctions plurisousharmoniques. Le lemme 1, essentiel à la démonstration du théorème 1, généralise cette méthode en faisant jouer à un espace homogène compact le même rôle que le groupe compact. Nous utilisons encore ce lemme dans la cinquième partie, pour montrer que le théorème de Kiselman se généralise pour les couples (G_C, G_R) pseudo-convexes moyennant l'hypothèse restrictive que G_R contienne un sous-groupe discret uniforme Γ. J'ignore si cette hypothèse est nécessaire mais elle joue un rôle essentiel dans notre démonstration qui repose sur un théorème de Grauert-Docquier. Ajoutons que notre hypothèse est déjà restrictive, au niveau des groupes nilpotents, dont on sait qu'il existe un groupe de dimension 10 sans sous-groupe discret uniforme [11]. Incidemment, nous montrons également que dans le théorème de Kiselman, on peut remplacer $\mathbf{C}^n$ par une variété de Stein quelconque.

Si G_R n'est pas à spectre imaginaire pur, il n'existe pas de fonction invariante strictement plurisousharmonique sur G_C (4ᵉ partie). Nous renforçons ce résultat dans la 6ᵉ partie, en montrant que dans ce cas il n'existe même pas de structure kählérienne sur G_C invariante par G_R. Lorsque la forme réelle G_R contient un sous-groupe discret uniforme Γ, nous donnons quelques résultats sur les espaces homogènes G_C/Γ, à savoir :

Si (G_C, G_R) est pseudo-convexe, la variété G_C/Γ est de Stein. Tandis que si G_R n'est pas à spectre imaginaire pur, alors G_C/Γ n'a pas de métrique kählérienne (*). Certains groupes résolubles font partie de cette dernière catégorie.

(*) On suppose ici l'existence d'une mesure G_R invariante positive sur G_R/Γ.

La première assertion implique que si $G_{\mathbf{C}}$ est nilpotent et simplement connexe, alors $G_{\mathbf{C}}/\Gamma$ est de Stein. Ce résultat, démontré par B. Gilligan et A. Huckleberry [5], est utilisé dans notre démonstration du théorème 1.

Pour terminer cette introduction, je tiens à remercier G. Coeuré pour les nombreuses suggestions qu'il m'a faites pour cet article, ainsi que le referee de m'avoir fourni, pour la proposition 10, une démonstration notablement plus simple que ma démonstration initiale.

2. Préliminaires et propositions techniques.

On a le lemme de moyennisation suivant :

LEMME 1. — *Soit* $G_{\mathbf{C}}$ *un groupe de Lie complexe,* $G_{\mathbf{R}}$ *une forme réelle, fermée, et* Ω *un ouvert de* $G_{\mathbf{C}}$ *invariant par l'action à droite de* $G_{\mathbf{R}}$. *On suppose qu'il existe* Γ *sous-groupe fermé de* $G_{\mathbf{R}}$ *tel que :*

1° $G_{\mathbf{R}}/\Gamma$ *soit compact.*

2° *Il existe une mesure positive* $d\dot{g}_{\mathbf{R}}$ *de masse* 1 *sur* $G_{\mathbf{R}}/\Gamma$ *invariante par l'action à gauche de* $G_{\mathbf{R}}$.

Alors, on a l'équivalence entre :

i) *Il existe sur* Ω *une fonction* ψ *de classe* C^∞, *strictement plurisousharmonique, invariante par l'action de* Γ *à droite, et d'exhaustion sur* Ω/Γ.

ii) *Il existe sur* Ω *une fonction* φ *de classe* C^∞, *strictement plurisousharmonique, invariante par l'action de* $G_{\mathbf{R}}$ *à droite et d'exhaustion sur* $\Omega/G_{\mathbf{R}}$.

Remarques. — *a*) Si Γ est discret, la condition i) est équivalente à Ω/Γ de Stein.

b) Si $G_{\mathbf{C}}$ est résoluble et simplement connexe (en particulier nilpotent), alors 1° ⇒ 2° [11].

c) ii) ⇒ i) n'utilise pas la condition 2°.

Preuve. — i) ⇒ ii). On définit ψ par :

$$\psi(g) = \int_{G_{\mathbf{R}/\Gamma}} \varphi(g\dot{g}_{\mathbf{R}})\, d\dot{g}_{\mathbf{R}}\,.$$

Par dérivation sous le signe somme, on voit de suite que ψ est C^∞ et strictement plurisousharmonique. L'invariance de ψ provient de l'invariance de $d\dot{g}_{\mathbf{R}}$. Reste à montrer la propriété d'exhaustion.

On a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} G_C \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "p"'] & G_C/G_{\mathbf{R}} \\ & G_C/\Gamma \arrow[u, "r"'] \end{tikzcd}$$

p, q, r sont les projections canoniques et commutent à l'action de G_C.

On note pour $C \in \mathbf{R}$:

$$L_C = \{g \in \Omega \mid \int_{G_{\mathbf{R}}/\Gamma} \varphi(g\dot{g}_{\mathbf{R}})\, d\dot{g}_{\mathbf{R}} \leqslant C\}$$

$$K_C = \{\dot{g} \in \Omega/\Gamma \mid \varphi(\dot{g}) \leqslant C\}$$

$$M_C = \{g \in \Omega \mid \exists \dot{g}_{\mathbf{R}} \in G_{\mathbf{R}}/\Gamma \quad \text{tel que :} \quad g\dot{g}_{\mathbf{R}} \in K_C\}.$$

On voit tout de suite que L_C est inclus dans M_C.

Montrer la propriété d'exhaustion de ψ, c'est montrer que qL_C est relativement compact dans $\Omega/G_{\mathbf{R}}$. Pour ceci, il suffit que qM_C vérifie la même propriété. Mais $qM_C \subseteq rK_C$. En effet, on a évidemment :

$$M_C = \{g \in \Omega \mid \exists g_{\mathbf{R}} \in G_{\mathbf{R}} \quad \text{tel que} \quad p(gg_{\mathbf{R}}) \in K_C\}.$$

Donc pour $g \in M_C$, on a :

$$q(g) = q(gg_{\mathbf{R}}) = r \circ p(gg_{\mathbf{R}}) \in rK_C$$

et comme K_C est, par hypothèse, relativement compact dans Ω/Γ, on a le résultat annoncé.

ii) $\Rightarrow$ i). On est ramené à démontrer que l'application naturelle de Ω/Γ sur $\Omega/G_{\mathbf{R}}$ est propre. Or, on a l'assertion suivante d'où découle le résultat.

Soit G un groupe de Lie, A et B deux sous-groupes fermés, avec $A \subseteq B$. On suppose B/A compact. Soit Ω un ouvert de G invariant par l'action à droite de B. Alors l'application naturelle : $\Omega/A \xrightarrow{r} \Omega/B$ est propre.

Preuve de l'assertion. — On considère le diagramme commutatif avec les projections canoniques :

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "p"'] & G/B \\ & G/A . \arrow[u, "r"'] \end{tikzcd}$$

Soit K un compact dans Ω/B. On a $r^{-1}K = p(q^{-1}K)$.

Il suffit de montrer que $q^{-1}K = \tilde{K}.B$ avec $\tilde{K}$ compact car B/A est compact. Or, il existe des compacts $C_1, \ldots, C_n$ de G/B tels que :

1° $K = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$ et 2° pour tout C_i, il existe un ouvert U_i contenant C_i et une section continue s_i de U_i dans G. On pose alors $\tilde{K} = \bigcup_{i=1}^{n} s_i C_i$.

LEMME 1'. — *Soient* $H_{\mathbf{R}}$ *et* $F_{\mathbf{R}}$ *deux formes réelles fermées de* $H_{\mathbf{C}}$ *et* $F_{\mathbf{C}}$ *respectivement. Soit* $G_{\mathbf{C}}$ *un groupe de Lie complexe de la forme* $H_{\mathbf{C}} \underset{S}{\times} F_{\mathbf{C}}$ *(produit semi-direct au sens analytique de* $H_{\mathbf{C}}$ *avec* $F_{\mathbf{C}}$ *distingué dans* $G_{\mathbf{C}}$*). On pose* $G_{\mathbf{R}} = H_{\mathbf{R}} \underset{S}{\times} F_{\mathbf{R}}$. *C'est une forme réelle fermée de* $G_{\mathbf{C}}$. *Soient alors deux sous-groupes fermés* $\Gamma_{H_{\mathbf{R}}}$ *et* $\Gamma_{F_{\mathbf{R}}}$ *de* $H_{\mathbf{R}}$ *et* $F_{\mathbf{R}}$ *respectivement, vérifiant* 1° *et* 2° *du lemme* 1 *relativement, à* $H_{\mathbf{R}}$ *et* $F_{\mathbf{R}}$ *respectivement et le i) du lemme* 1 *relativement à* $H_{\mathbf{C}}$ *et* $F_{\mathbf{C}}$. *On suppose, de plus, que les éléments de* $\Gamma_{H_{\mathbf{R}}}$ *commutent avec* $F_{\mathbf{R}}$. *Alors le groupe* $\Gamma_{H_{\mathbf{R}}}.\Gamma_{F_{\mathbf{R}}}$ *vérifie le* 1°, 2° *relativement à* $G_{\mathbf{C}}$ *et la condition i) pour* $\Omega = G_{\mathbf{C}}$.

Preuve. — Si on pose $K = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, on voit immédiatement qu'on a un homéomorphisme des variétés : $G_K/\Gamma_{H_{\mathbf{R}}}.\Gamma_{F_{\mathbf{R}}}$ et $H_K/\Gamma_{H_{\mathbf{R}}} \times F_K/\Gamma_{F_{\mathbf{R}}}$. De plus, si $\mu_{H_{\mathbf{R}}}$ et $\mu_{F_{\mathbf{R}}}$ sont les mesures du 2° relativement à $\Gamma_{H_{\mathbf{R}}}$ et $\Gamma_{F_{\mathbf{R}}}$, la mesure $\mu_{H_{\mathbf{R}}} \otimes \mu_{F_{\mathbf{R}}}$ vérifie le 2° pour $\Gamma_{H_{\mathbf{R}}}.\Gamma_{F_{\mathbf{R}}}$. Si $\varphi_{H_{\mathbf{R}}}$ et $\varphi_{F_{\mathbf{R}}}$ vérifient i) relativement à $H_{\mathbf{C}}$ et $F_{\mathbf{C}}$ et sont positives (ce qu'on peut toujours supposer), alors $\varphi_{H_{\mathbf{R}}} + \varphi_{F_{\mathbf{R}}}$ vérifie i) relativement à $G_{\mathbf{C}}$ et $\Gamma_{H_{\mathbf{R}}}.\Gamma_{F_{\mathbf{R}}}$ (la propriété d'exhaustion utilise l'homéomorphisme de variétés défini ci-dessus).

COROLLAIRE DES LEMMES 1 ET 1'. — *Sous les hypothèses du lemme* 1', *la condition ii) du lemme* 1 *est satisfaite pour* $\Omega = G_{\mathbf{C}}$.

Le lemme de descente suivant utilise des techniques classiques pour les groupes résolubles.

LEMME 2. — *Soient* $G_{\mathbf{C}}$ *un groupe de Lie résoluble complexe simplement connexe et* $G_{\mathbf{R}}$ *une forme réelle. On considère un sous-groupe de Lie (connexe)* $L_{\mathbf{R}}$ *de* $G_{\mathbf{R}}$ *et on note* $L_{\mathbf{C}}$ *le complexifié de* $L_{\mathbf{R}}$ *dans* $G_{\mathbf{C}}$. *Alors l'application naturelle de* $L_{\mathbf{C}}/L_{\mathbf{R}}$ *dans* $G_{\mathbf{C}}/G_{\mathbf{R}}$ *est propre.*

Ce lemme implique que si $(G_{\mathbf{C}}, G_{\mathbf{R}})$ est pseudo-convexe, alors $(L_{\mathbf{C}}, L_{\mathbf{R}})$ l'est aussi.

Remarque. — On sait que $L_{\mathbf{C}}$, $L_{\mathbf{R}}$, $G_{\mathbf{R}}$ sont automatiquement fermés et simplement connexes [3].

Preuve. — Pour $L_{\mathbf{C}}$, $L_{\mathbf{R}}$, $G_{\mathbf{R}}$, $G_{\mathbf{C}}$ fixés, on va montrer qu'il existe un sous-ensemble fermé F de $G_{\mathbf{C}}$, et deux homéomorphismes φ et φ' tels que le diagramme suivant soit commutatif.

$$\begin{tikzcd}
G_{\mathbf{C}}/G_{\mathbf{R}} \arrow[r, "\varphi"] & F \\
L_{\mathbf{C}}/L_{\mathbf{R}} \arrow[u, "i"'] \arrow[r, "\varphi'"] & F \cap L_{\mathbf{C}} \arrow[u, "i'"]
\end{tikzcd}$$

i' est l'inclusion et i est l'application naturelle.

De cette propriété découle immédiatement le lemme car i' est propre.

On démontre la propriété annoncée par récurrence sur la dimension n de $G_{\mathbf{R}}$.

Pour $n = 0$, c'est évident. On suppose la propriété vraie à l'ordre $(n-1)$ et on va la démontrer à l'ordre n.

On suppose donc $G_{\mathbf{R}}$ de dimension n et $L_{\mathbf{R}}$ sous-groupe de $G_{\mathbf{R}}$.

Pour éviter les confusions, on mettra des indices à F, φ, φ', i, i' indiquant la dimension qu'on considère.

On écrit : $G_{\mathbf{R}} = V_{\mathbf{R}} \underset{s}{\times} M_{\mathbf{R}}$ (produit semi-direct) où $M_{\mathbf{R}}$ est un sous-groupe distingué simplement connexe de dimension $(n-1)$ et $V_{\mathbf{R}}$ un sous-groupe de Lie isomorphe à $\mathbf{R}$.

On note e un isomorphisme de $\mathbf{R}$ sur $V_{\mathbf{R}}$.

On a : $G_C = V_C \underset{S}{\times} M_C$, où M_C et V_C sont les complexifiés de $M_{\mathbf{R}}$ et $V_{\mathbf{R}}$ dans G_C. On note encore e le prolongement de l'isomorphisme précédent de $\mathbf{C}$ sur V_C. Plusieurs choix pour $V_{\mathbf{R}}$ sont possibles. Dans la suite, nous allons préciser le choix.

Pour se ramener à la dimension $(n-1)$, on considère deux cas, qui permettent de définir un groupe $Q_{\mathbf{R}}$.

1[er] *Cas :* $L_{\mathbf{R}} \subseteq M_{\mathbf{R}}$. On pose $Q_{\mathbf{R}} = L_{\mathbf{R}}$ et $Q_C = L_C$ et $V_{\mathbf{R}}$ quelconque.

2[e] *Cas :* $L_{\mathbf{R}} \nsubseteq M_{\mathbf{R}}$. Dans ce cas, on choisit $V_{\mathbf{R}}$ tel qu'on puisse écrire : $L_{\mathbf{R}} = V_{\mathbf{R}} \underset{S}{\times} Q_{\mathbf{R}}$, $L_C = V_C \underset{S}{\times} Q_C$ où Q_C est le complexité de $Q_{\mathbf{R}}$ et $Q_{\mathbf{R}} \subseteq M_{\mathbf{R}}$. (En fait : $Q_{\mathbf{R}} = L_{\mathbf{R}} \cap M_{\mathbf{R}}$).

On a, par hypothèse de récurrence, un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
M_C/M_{\mathbf{R}} \arrow[r, "\varphi_{n-1}", "\sim"'] & F_{n-1} \subseteq M_C \\
Q_C/Q_{\mathbf{R}} \arrow[u, "i_{n-1}"] \arrow[r, "\varphi'_{n-1}", "\sim"'] & F_{n-1} \cap Q_C \arrow[u, "i'_{n-1}"']
\end{tikzcd}$$

(Les signes $\stackrel{\sim}{\rightarrow}$ indiquent des homéomorphismes).

On définit (avec un abus d'écriture évident) F_n par :

$$F_n = e(i\mathbf{R}) \times F_{n-1}$$

(où $e(i\mathbf{R})$ est l'image de $i\mathbf{R}$ dans V_C par e).

Pour $g \in G_C$, on note $\bar{g}$ sa classe d'équivalence dans $G_C/G_{\mathbf{R}}$. On définit φ_n par :

$$\forall \lambda \in \mathbf{C}, \quad m \in M_C,$$
$$\varphi_n(\overline{e(\lambda).m}) = e(i \operatorname{Im} \lambda)\varphi_{n-1}(\overline{e(\operatorname{Re}\lambda)me(-\operatorname{Re}\lambda)}).$$

On s'assure d'abord que φ_n est bien définie (et continue).

Pour $e(\lambda_0)m_0 \in V_{\mathbf{R}} \underset{S}{\times} M_{\mathbf{R}}$, on a :

$$(e(\lambda)m)(e(\lambda_0)m_0) = e(\lambda+\lambda_0)e(-\lambda_0)me(\lambda_0)m_0.$$

Comme $e(-\lambda_0)me(\lambda_0) \in M_C$, on voit que φ_n est bien définie.

D'autre part, soit ψ_{n-1} l'application réciproque de φ_{n-1}. On vérifie que l'application réciproque (continue) ψ_n de φ_n est donnée par :

$$\begin{aligned}\psi_n : \mathrm{F}_n &\to \mathrm{G_C}/\mathrm{G_R}\\ e(i\lambda_2)x &\to e(i\lambda_2).\psi_{n-1}(x) \quad \text{pour} \quad \lambda_2 \in \mathbf{R} \text{ et } x \in \mathrm{F}_{n-1}\end{aligned}$$

(le groupe $\mathrm{V_C}$ agit sur $\mathrm{G_C}/\mathrm{G_R}$).

Pour terminer la démonstration, considérons les diagrammes.

1[er] *Cas :* $\mathrm{L_R} \subseteq \mathrm{M_R}$.

L'application φ'_n est donnée par :

$$\forall \ell \in \mathrm{L_C}/\mathrm{L_R}, \qquad \varphi'_n(\ell) = \varphi'_{n-1}(\ell)$$

et
$$\mathrm{F}_n \cap \mathrm{L_C} = \mathrm{F}_{n-1} \cap \mathrm{L_C}.$$

2[e] *Cas :* $\mathrm{L_R} \nsubseteq \mathrm{M_R}$.

L'application φ'_n est donnée par :

$$\forall q \in \mathrm{Q_C}, \qquad \lambda \in \mathbf{C},$$
$$\varphi'_n(\overline{e(\lambda)q}) = e(i\,\mathrm{Im}\,\lambda)\varphi'_{n-1}(\overline{e\,(\mathrm{Re})\,\lambda)qe(-\,\mathrm{Re}\,\lambda)}).$$

Pour la suite, on a besoin de certains résultats de plongement des algèbres de Lie résolubles.

On introduit la définition suivante :

DÉFINITION. — *Une algèbre de Lie résoluble réelle $\mathscr{R}$ est scindée si $\mathscr{R}$ est produit semi-direct d'une algèbre abélienne $\mathscr{A}$ et d'un idéal nilpotent* n, *et si, de plus, pour tout $x \in \mathscr{A}$,* ad x *est diagonalisable sur* $\mathbf{C}$.

PROPOSITION 1. — *Soit $\mathscr{L}$ une algèbre résoluble réelle à spectre imaginaire pur. Il existe une algèbre scindée $\mathfrak{s}$ produit semi-direct d'une algèbre commutative* B *et d'un idéal nilpotent* n, *ainsi qu'une base* ($\mathscr{B}$) *de* B *tels que :*

i) $\mathscr{L}$ est isomorphe à une sous-algèbre de $\mathfrak{s}$;

ii) $\mathfrak{s}$ est à spectre imaginaire pur, et les valeurs propres de ad (x) appartiennent à $2i\pi\mathbf{Z}$ *pour tout x dans* ($\mathscr{B}$). *En particulier :*

$$\mathrm{Exp}\,\mathrm{ad}_{\mathfrak{s}}(x) = \mathrm{id}_{\mathfrak{s}} \quad \textit{pour} \quad x \in (\mathscr{B}).$$

Preuve. — On reprend la construction faite par Reed [12], de l'algèbre scindée associée à une algèbre résoluble.

Soit n_1 le radical nilpotent de $\mathscr{L}$ et $\mathscr{L}_{\mathrm{C}}$ (resp. $(n_1)_{\mathrm{C}}$ le complexifié de $\mathscr{L}$ (resp. n_1). On choisit $x_1 \in \mathscr{L} \dot{-} n_1$, et on décompose la dérivation ad x_1 en sa partie semi-simple d_{x_1} et sa partie nilpotente n_{x_1}, qui sont des dérivations *réelles.*

On décompose $\mathscr{L}_{\mathrm{C}}$ en espaces propres pour d_{x_1}, et on remarque que l'espace propre correspondant à la valeur propre 0 est le complexifié de l'espace propre réel $\mathscr{L}_0$ correspondant, et que les autres espaces propres sont dans $(n_1)_{\mathrm{C}}$. On choisit ensuite x_2 dans $\mathscr{L}_0 \dot{-} n_1$, indépendant de x_1 et on remarque que $d_{x_1}(x_2) = 0$ et $d_{x_1} d_{x_2} = d_{x_2} d_{x_1}$ (où d_{x_2} est la semi-simple associée à ad x_2). En décomposant $\mathscr{L}_{\mathrm{C}}$ en sous-espaces propres par rapport à l'algèbre engendrée par d_{x_1} et d_{x_2}, et en refaisant une opération similaire à la précédente, on choisit x_3 indépendant de x_1, x_2, dans $\mathscr{L} \dot{-} n_1$ tel que : $d_{x_1}(x_3) = d_{x_2}(x_3) = 0$ et d_{x_3} commutant à d_{x_1}, d_{x_2}. De proche en proche, on définit $x_1, \ldots, x_{\mathrm{N}}$ base d'un supplémentaire de n_1 et tels que : $d_{x_i} d_{x_j} = d_{x_j} d_{x_i}$ où d_{x_i} est la partie semi-simple de ad x_i.

On définit alors une algèbre résoluble $\mathscr{R}$ produit semi-direct d'une algèbre abélienne $\mathscr{A}$ et de $\mathscr{L}$ de la façon suivante.

Une base de $\mathscr{A}$ est donnée par les éléments $d_1, \ldots, d_{\mathrm{N}}$ et on a :

$$\forall x \in \mathscr{L}, \quad \forall i = 1, \ldots, \mathrm{N}, \qquad -[x, d_i] = [d_i, x] = d_{x_i}(x)$$
$$\forall j = 1, \ldots, \mathrm{N}, \qquad [d_i, d_j] = 0 .$$

On voit immédiatement que add_i est semi-simple sur $\mathscr{R}$, et que si $\mathscr{L}$ est à spectre imaginaire pur, les valeurs propres de add_i sont toutes imaginaires pures.

On remarque que le sous-espace n de $\mathscr{R}$ engendré par n_1 et les $x_i - d_i$ $(i=1,\ldots,\mathrm{N})$ est un idéal nilpotent de $\mathscr{R}$ (ad$(x_i - d_i)$ est nilpotent et $[\mathscr{R}, n] \subset n_1$). Par conséquent, $\mathscr{R}$ est produit semi-direct de $\mathscr{A}$ et de n et donc $\mathscr{R}$ est scindée; de plus, $\mathscr{R}$ est à spectre imaginaire pur, à cause de ce qui a été dit précédemment sur les add_i.

Soit n_{C} le complexité de n, on remarque que l'algèbre $\mathscr{R}' = \mathscr{A} + n_{\mathrm{C}}$ est une algèbre réelle admettant les mêmes propriétés que $\mathscr{R}$.

On décompose n_{C} en espaces propres par rapport à l'action de $\mathscr{A}$,

$$n_{\mathrm{C}} = n_1 + \cdots + n_p .$$

Soient λ_i et λ_j les poids correspondant à n_i et n_j.

Deux cas peuvent se produire :

1) $[n_i, n_j] = (0)$;

2) $[n_i, n_j] \neq 0$. Il existe alors k (unique) tel que : $[n_i, n_j] \subseteq n_k$ et $\lambda_i + \lambda_j = \lambda_k$ (poids correspondant à k).

Montrons à présent qu'il existe un $\mathbf{R}$-espace vectoriel B contenant $\mathscr{A}$ et une base $(\mathscr{B})$ de B pour lesquels existent des formes linéaires $\tilde{\lambda}_i$ sur B à valeurs dans $i\mathbf{R}$ vérifiant :

a) $\tilde{\lambda}_i + \tilde{\lambda}_j = \tilde{\lambda}_k$ si $(0) \neq [n_i, n_j] \subset n_k$;

b) la restriction de $\tilde{\lambda}_i$ à $\mathscr{A}$ est λ_i;

c) $\tilde{\lambda}_i$ prend ses valeurs dans $2i\pi\mathbf{Z}$ sur $(\mathscr{B})$.

On considère le système d'équations linéaires suivant :

$$\text{(1)} \qquad X_i + X_j - X_k = 0$$

pour les différents (i,j,k) tels que : $0 \neq [n_i, n_j] \subseteq n_k$, les inconnues appartenant à un espace vectoriel sur $\mathbf{Q}$.

La résolution donne, en changeant les indices :

$X_1, \ldots, X_s$ arbitraires et $X_{s+1}, \ldots, X_p$ combinaisons linéaires à coefficients rationnels de $X_1, \ldots, X_s$.

On pose alors : $B = \mathscr{A} \oplus \mathbf{R}^s$. (On a : $B = \mathscr{A}$ si la seule solution du système de départ est $X_i = 0$ pour tout i).

Soient $\mu_1, \ldots, \mu_s$ les éléments d'une base du dual de $\mathbf{R}^s$. On pose : $\tilde{\lambda}_r = \lambda_r + i\mu_r$ pour $r = 1, \ldots, s$.

En complétant $i\tilde{\lambda}_1, \ldots, i\tilde{\lambda}_s$ en une base du dual de B, et en considérant la base duale $\mathscr{B}^*$, on voit que $\tilde{\lambda}_1, \ldots, \tilde{\lambda}_s$ prennent des valeurs dans $2i\pi\mathbf{Z}$ sur $2\pi . \mathscr{B}^*$. On définit $\tilde{\lambda}_i$ pour $i > s$ en résolvant le système (1). Si on note m le p.p.c.m. des dénominateurs des coefficients intervenant dans les coefficients des combinaisons linéaires des $\tilde{\lambda}_i$ en fonction des $\tilde{\lambda}_j$ (avec $i > s$ et $j \leqslant s$) et si on pose $(\mathscr{B}) = 2\pi m \mathscr{B}^*$, les formes linéaires $\tilde{\lambda}_1, \ldots, \tilde{\lambda}_p$ prennent sur $(\mathscr{B})$ des valeurs dans $2i\pi\mathbf{Z}$, et les propriétés *a)* et *b)* sont trivialement vérifiées.

On définit alors l'algèbre scindée $\mathfrak{s}$ produit semi-direct de B et $n_{\mathbf{C}}$ par la loi suivante :

$$[b, x_i] = \tilde{\lambda}_i(b) x_i \qquad \text{pour} \qquad b \in B \qquad \text{et } x_i \in n_i$$
$$[b, b'] = 0 \qquad \text{pour} \qquad b, b' \in B.$$

L'identité de Jacobi provient de la condition *a*) ci-dessus. L'algèbre $\mathscr{A}$ satisfait bien aux conditions de la proposition 1.

Remarque. — G. Coeuré a montré, toujours en s'appuyant sur [12], qu'une algèbre de Lie à spectre imaginaire pur se plonge dans l'algèbre de Lie des matrices triangulaires supérieures complexes ayant des éléments imaginaires purs sur la diagonale.

3. Résultats positifs.

Dans cette partie, on démontre la condition suffisante du théorème 1.

A. Rad $G_{\mathbf{C}} = \{1\}$.

C'est le cas semi-simple. $G_{\mathbf{R}}$ est compact (voir 4^e^ partie, C : le cas semi-simple). On démontre alors le résultat en appliquant le lemme 1 de moyennisation à $\Omega = G_{\mathbf{C}}$ et $\Gamma = \{1\}$.

B. *Cas nilpotent.*

Pour traiter le cas résoluble, on commence par le cas nilpotent :

PROPOSITION 2. — *Soit* $G_{\mathbf{C}}$ *un groupe de Lie complexe simplement connexe nilpotent, et* $G_{\mathbf{R}}$ *une forme réelle, alors le couple* $(G_{\mathbf{C}}, G_{\mathbf{R}})$ *est pseudo-convexe.*

Pour la preuve, on utilise deux propositions :

PROPOSITION A [5]. — *Si* Γ *est un sous-groupe discret de* $G_{\mathbf{R}}$ *(nilpotent), alors la variété* $G_{\mathbf{C}}/\Gamma$ *est de Stein.*

Remarque. — La démonstration de cette proposition repose essentiellement sur le théorème de Matsushima [9].

Avant d'énoncer la deuxième proposition que nous allons utiliser, introduisons quelques notations.

Pour $K = \mathbf{R}, \mathbf{C}, \mathbf{Z}$, on note N_K^p le groupe des matrices triangulaires supérieures d'ordre p, n'ayant que des 1 sur la diagonale, et à coefficients dans K. Pour $K = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, on a un groupe de Lie nilpotent simplement connexe.

PROPOSITION B (Théorème d'Ado) [1]. — *Tout groupe nilpotent simplement connexe réel est isomorphe (en tant que groupe de Lie) à un sous-groupe fermé d'un* $N_{\mathbf{R}}^p$.

Preuve de la proposition 2. — Par le lemme 2, il suffit de démontrer la proposition 2 pour $G_{\mathbf{R}} = N^p_{\mathbf{R}}$, et $G_{\mathbf{C}} = N^p_{\mathbf{C}}$. D'après la proposition A et le lemme 1 de moyennisation, il suffit de montrer que $N^p_{\mathbf{R}}/N^p_{\mathbf{Z}}$ est compact. Or soit $n \in N^p_{\mathbf{R}}$, il existe $n_0 \in N^p_{\mathbf{Z}}$ tel que les coefficients de nn_0 soient compris entre 0 et 1. Le choix de n_0 se fait de la façon suivante. On appelle a_{ij} les coefficients de la matrice n et b_{ij} les coefficients de n_0 qu'on veut déterminer. (On a : $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$ et $a_{ii} = b_{ii} = 1$). On détermine les coefficients b_{ij} par récurrence sur $k = j - i$. On appelle c_{ij} les coefficients de nn_0.

Pour $k = 1$, on doit avoir :

$$c_{i,i+1} = a_{i,i+1} + b_{i,i+1} \qquad \text{avec} \qquad 0 \leqslant c_{i,i+1} \leqslant 1,$$

d'où un choix pour les $b_{i,i+1}$.

Plus généralement, pour k quelconque :

$$c_{i,i+k} = a_{i,i+k} + b_{i,i+k} + \sum_{i<j<i+k} a_{i,j} b_{j,i+k}$$

d'où un choix pour les $b_{i,i+k}$.

C. *Le cas résoluble.*

Montrons à présent dans le cas résoluble, la condition suffisante du théorème 1.

Soit L un groupe de Lie résoluble simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathscr{L}$, à spectre imaginaire pur. D'après la proposition 1, on le plonge en tant que groupe de Lie dans un groupe de Lie S simplement connexe dont l'algèbre de Lie $\mathfrak{s}$ est scindée et à spectre imaginaire pur. Si on note $S_{\mathbf{C}}$ un complexifié de S, il suffit d'après le lemme 2 de démontrer la pseudo-convexité du couple $(S_{\mathbf{C}}, S)$.

On se reporte à présent aux notations de la proposition 1. On a une décomposition en produit semi-direct de S en un groupe abélien b (correspondant à B) et d'un groupe distingué nilpotent N. Pour $S_{\mathbf{C}}$, on a une décomposition correspondante en $b_{\mathbf{C}}$ et $N_{\mathbf{C}}$.

Soit Γ le réseau dans B engendré par $(\mathscr{B})$. Comme $\operatorname{Exp} \operatorname{ad} x = \mathrm{id}_{\mathfrak{s}}$ pour $x \in (\mathscr{B})$ et que B est commutatif, on en déduit :

$$\forall x \in \Gamma, \qquad \operatorname{Exp} \operatorname{ad} x = \mathrm{id}_{\mathfrak{s}}.$$

Soit Γ' le sous-groupe fermé de B, image de Γ par l'exponentielle (qu'on note exp). Comme $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}\,(\exp x) = \mathrm{Exp}\,\mathrm{ad}\,(x)$, on en déduit que Γ' est dans le centre de G.

On applique alors pour conclure le corollaire des lemmes 1 et 1′ à la situation suivante :

$$B = H_{\mathbf{R}}, \qquad N = F_{\mathbf{R}}, \qquad \Gamma' = \Gamma_{H_{\mathbf{R}}}, \qquad N = \Gamma_{F_{\mathbf{R}}}.$$

D. *Cas général.*

Montrons, à présent, que si $G_{\mathbf{R}}$ est à spectre imaginaire pur, et si le radical $R_{\mathbf{C}}$ de $G_{\mathbf{C}}$ est simplement connexe, alors $(G_{\mathbf{C}}, G_{\mathbf{R}})$ est pseudo-convexe.

Commençons par supposer $G_{\mathbf{R}}$ simplement connexe. Alors $G_{\mathbf{R}}$ est isomorphe d'après le théorème de Levi-Malcev [1] en tant que groupe analytique à un produit semi-direct $\mathfrak{K} \underset{s}{\times} R$ où R est le radical de $G_{\mathbf{R}}$ et $\mathfrak{K}$ est semi-simple. Mais comme $\mathfrak{K}$ est à spectre imaginaire pur, c'est un groupe compact d'après ce qui a été dit précédemment.

Soit $\mathfrak{K}_{\mathbf{C}}$ un complexifié de $\mathfrak{K}$ (on sait que $\mathfrak{K}_{\mathbf{C}}$ existe). C'est un groupe semi-simple simplement connexe et on peut définir $\mathfrak{K}_{\mathbf{C}} \underset{s}{\times} R_{\mathbf{C}}$. On peut toujours supposer que $G_{\mathbf{C}} = \mathfrak{K}_{\mathbf{C}} \underset{s}{\times} R_{\mathbf{C}}$. Comme les couples $(\mathfrak{K}_{\mathbf{C}}, \mathfrak{K})$ et $(R_{\mathbf{C}}, R)$ sont pseudo-convexes, on a par application du corollaire aux lemmes 1 et 1′ en posant $\Gamma_{\mathfrak{K}} = \{1\}$ et $\Gamma_R = R$, que $(G_{\mathbf{C}}, G_{\mathbf{R}})$ est pseudo-convexe.

Si $G_{\mathbf{R}}$ n'est pas simplement connexe, soit $\tilde{G}_{\mathbf{R}}$ un revêtement universel de $G_{\mathbf{R}}$; comme on l'a vu précédemment $\tilde{G}_{\mathbf{R}}$ admet un complexifié $\tilde{G}_{\mathbf{C}}$. L'application de revêtement p au-dessus de $G_{\mathbf{C}}$ peut être choisie telle que le diagramme suivant, dans lequel les flèches verticales sont des inclusions naturelles, soit commutatif :

$$(1) \qquad \begin{array}{ccc} \tilde{G}_{\mathbf{C}} & \xrightarrow{p} & G_{\mathbf{C}} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \tilde{G}_{\mathbf{R}} & \longrightarrow & G_{\mathbf{R}}. \end{array}$$

En effet, l'existence d'un tel diagramme au niveau des algèbres de Lie est claire, les flèches horizontales étant des isomorphismes. Comme $\tilde{G}_{\mathbf{C}}$ est simplement connexe, on peut remonter sur les groupes, et p est un revêtement. Montrons à présent que les fibres de p sont finies.

Il suffit de prouver que le groupe fondamental de G_C est fini. A cet effet, on considère la fibration : $R_C \to G_C \to G_C/R_C$ qui donne naissance à la suite exacte :

$$\pi_1(G_C/R_C) \to \pi_1(G_C) \to \pi_1(R_C).$$

Or $\pi_1(R_C)$ est trivial par hypothèse, et de plus comme le groupe G_C/R_C est semi-simple complexe, son groupe fondamental est fini, ce qui implique bien que $\pi_1(G_C)$ est fini.

Par conséquent, p est fermé. On en déduit que $G_{\mathbf{R}}$ est fermé dans G_C. Terminons la démonstration. Soit $\tilde{\varphi}$ une fonction plurisousharmonique d'exhaustion positive associée au couple pseudo-convexe $(\tilde{G}_C, \tilde{G}_{\mathbf{R}})$. On a un isomorphisme de groupes analytiques entre G_C et $\tilde{G}_C/C$ (où C est un sous-groupe fini central de $\tilde{G}_C$).

On définit une fonction φ sur G_C par :

$$\forall g \in G_C, \qquad \varphi(g) = \sum_{x|px=g} \tilde{\varphi}(x).$$

On vérifie facilement que φ est de classe C^∞, strictement plurisousharmonique sur G_C, invariante par $G_{\mathbf{R}}$ et d'exhaustion sur $G_C/G_{\mathbf{R}}$.

4. Le cas négatif.

A. *Cas particuliers.*

On commence par étudier les cas particuliers fondamentaux pour lesquels le couple $(G_C, G_{\mathbf{R}})$ n'est pas pseudo-convexe. On en déduit facilement la condition nécessaire générale. On note P l'ensemble des fonctions plurisousharmoniques sur G_C, invariantes par $G_{\mathbf{R}}$.

Notations. — Soit S^1 le cercle unité de centre O dans $\mathbf{C}$, et $d\theta$ la mesure de Haar normalisée sur S^1. On désigne par $\bar{D}$ le disque unité fermé de centre O et par $\mathscr{H}(\bar{D})$ l'espace des fonctions holomorphes au voisinage de $\bar{D}$.

Le lemme et la proposition qui suivent ont été démontrés par G. Coeuré.

Lemme 3. — *Il existe une famille* $(f_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ *de fonctions de* $\mathscr{H}(\bar{D})$ *vérifiant :*

i) $\forall \varepsilon > 0, \quad |\mathrm{Im} f_\varepsilon| \leqslant \pi;$

ii) $f_\varepsilon(0)$ *est constant, égal à* c.

iii) On pose : $b_\varepsilon = \int_{S^1} e^{\mathrm{Re} f_\varepsilon}\, d\theta$. *Alors* b_ε *est une fonction continue de* ε *et* $\lim_{\varepsilon \to +\infty} b_\varepsilon = +\infty$.

Preuve. — Soit $\mathrm{Log}\, z$ la détermination principale du logarithme dans le demi-plan : $\mathrm{Im}\, z > 0$.

On pose : $f_\varepsilon(z) = \mathrm{Log}\, i \dfrac{1+\varepsilon+z}{1+\varepsilon-z}$.

On vérifie immédiatement i) et ii), ainsi que la continuité de b_ε. De plus, d'après le lemme de Fatou

$$\varliminf_{(\varepsilon\to 0)} \int_{S^1} e^{\mathrm{Re} f_\varepsilon}\, d\theta \geqslant \int_{S^1} \varliminf e^{\mathrm{Re} f_\varepsilon}\, d\theta$$
$$= \int_{S^1} \left|\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}\right| d\theta = +\infty .$$

Définitions. — Pour $K = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, on munit K^2 d'une structure de groupe analytique G_K dont la multiplication est donnée par :

$$\forall (z,b), \qquad (z_0,b_0) \in K^2,$$
$$(z,b).(z_0,b_0) = (z+z_0, e^{z_0}b+b_0).$$

$G_{\mathbf{R}}$ est une forme réelle de $G_{\mathbf{C}}$.

Pour une fonction $\varphi(z,b)$ invariante par l'action à droite de $G_{\mathbf{R}}$, on a :

$$\varphi(z,b) = \varphi(i\,\mathrm{Im}\, z, ie^{-\mathrm{Re}\, z}.\mathrm{Im}\, b)$$

et on a un difféomorphisme entre $G_{\mathbf{C}}/G_{\mathbf{R}}$ et $\mathbf{R}^2$ donné par :

$$\overset{\bullet}{\widehat{(z,b)}} \in G_{\mathbf{C}}/G_{\mathbf{R}} \quad \to \quad (\mathrm{Im}\, z, e^{-\mathrm{Re}\, z}\,\mathrm{Im}\, b)$$

où $\overset{\bullet}{\widehat{(z,b)}}$ est la classe d'équivalence de $(z,b) \in G_{\mathbf{C}}$.

Le groupe $G_{\mathbf{R}}$ (resp. $G_{\mathbf{C}}$) est le revêtement universel du groupe affine sur $\mathbf{R}$ (resp. $\mathbf{C}$) (*). On a la proposition suivante :

Proposition 3. — *Les seules fonctions* $\varphi(z,b)$ *de* P *sont les fonctions convexes de* $\mathrm{Im}\, z$.

(*) Pour $\mathbf{R}$, on a le groupe affine lui-même.

Preuve. — Sur $\bar{D}$, et pour $\varepsilon > 0$, on définit une fonction g_ε continue sur $\bar{D}$ et holomorphe à l'intérieur par :

$$g_\varepsilon(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Im} g_\varepsilon(z) = e^{\operatorname{Re} f_\varepsilon(z)} - b_\varepsilon \qquad \text{pour} \qquad z \in S^1 .$$

La fonction g_ε est bien définie car $e^{\operatorname{Re} f_\varepsilon}$ est C^∞ sur S^1, et que d'autre part : $\displaystyle\int_{S^1} e^{\operatorname{Re} f_\varepsilon}\, d\theta = b_\varepsilon$.

Si $\varphi \in P$, alors la fonction $h_\varepsilon(z) = \varphi(f_\varepsilon(z), g_\varepsilon(z) + ib_\varepsilon)$ est semi-continue sur $\bar{D}$, et plurisousharmonique à l'intérieur. De plus, (par invariance) :

$$\varphi(f_\varepsilon(z), g_\varepsilon(z) + ib_\varepsilon) = \varphi(i \operatorname{Im} f_\varepsilon(z), ie^{-\operatorname{Re} f_\varepsilon(z)}(\operatorname{Im} g_\varepsilon(z) + b_\varepsilon)) .$$

Pour $z \in S^1$, on a : $h_\varepsilon(z) = \varphi(i \operatorname{Im} f_\varepsilon(z), i)$, et donc : $\forall z \in S^1$, $|h_\varepsilon(z)| \leqslant K$ indépendant de ε.

De plus : $h_\varepsilon(0) = \varphi(ic_2, ie^{-c_1} b_\varepsilon)$, où on pose $c_2 = \operatorname{Im} c$ et $c_1 = \operatorname{Re} c$. On a d'après l'inégalité de la moyenne

$$h_\varepsilon(0) = \varphi(ic_2, ie^{-c_1} b_\varepsilon) \leqslant \int_{S^1} h_\varepsilon \, d\theta \leqslant K .$$

Comme $\lim\limits_{\varepsilon \to +\infty} b_\varepsilon = +\infty$, et que b_ε est continu, on en déduit que $\varphi(ic_2, ib) \leqslant K'$ avec K' indépendant de b pour $b \geqslant 0$. Une telle inégalité se généralise pour $b \in \mathbf{R}$, en remplaçant $\varphi(z,b)$ par $\varphi(z,-b)$ qui appartient aussi à P, et comme on a : $\varphi(z, b + b_0) = \varphi(z,b)$ pour $b_0 \in \mathbf{R}$, on en déduit que $\varphi(ic_2, b)$ est majorée pour tout $b \in \mathbf{C}$. Or une telle fonction est constante d'après Liouville, donc :

$$\varphi(ic_2, b) = \varphi(ic_2, 0) .$$

On peut remplacer ic_2 par n'importe quel autre élément de $\mathbf{C}$, quitte à remplacer $\varphi(z,b)$ par $\varphi(z+a, b)$ qui appartient aussi à P. (Ici a est une constante arbitraire). D'où la proposition.

De la proposition 3, on déduit immédiatement le corollaire :

COROLLAIRE 3. — *Il n'existe pas de fonctions de* P *qui soit strictement plurisousharmonique, ou de fonction de* P *qui soit d'exhaustion sur* $G_{\mathbf{C}}/G_{\mathbf{R}}$.

DÉFINITION. — *Pour* $\beta \in \mathbf{R}$, et $K = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, on munit K^3 d'une structure de groupe analytique G_K^β dont la multiplication est donnée par :

$$\forall (z,b), \qquad (z_0,b_0) \in K \times K^2$$
$$(z,b)(z_0,b_0) = (z+z_0, e^{z_0 A_\beta} b + b_0),$$

où A_β est la matrice $\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} = I + \beta J$, avec $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & +1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Pour $\varphi(z,b) \in P$, on a :

$$\varphi(z,b) = \varphi(i \operatorname{Im} z, ie^{-\operatorname{Re} z . A_\beta} \operatorname{Im} b)$$

et on a un difféomorphisme entre G_C^β / G_R^β et $\mathbf{R}^3$ donné par :

$$\overset{\bullet}{\widehat{(z,b)}} \to (\operatorname{Im} z, e^{-\operatorname{Re} z . A_\beta} \operatorname{Im} b).$$

PROPOSITION 4. — *Il n'existe pas de fonction de* P *qui soit strictement plurisousharmonique sur* G_C *ou d'exhaustion sur* G_C/G_R.

Preuve. — Pour $\theta \in \mathbf{R}$ et $\varphi \in P$, on remarque que la fonction φ_θ définie par :

$$\forall (z,b) \in G_C, \qquad \varphi_\theta(z,b) = \varphi(z, e^{\theta J}.b)$$

appartient à P. En effet :

$$\forall (z,b) \in G_C^\beta, \qquad \forall (z_0,b_0) \in G_R^\beta,$$
$$\varphi_\theta(z,b) = \varphi(z, e^{\theta J} b) = \varphi(z+z_0, e^{z_0 A_\beta} e^{\theta J} b + e^{\theta J} b_0)$$

le dernier terme est égal à

$$\varphi(z+z_0, e^{\theta J}(e^{z_0 A_\beta} b + b_0)) = \varphi_\theta(z+z_0, e^{z_0 A_\beta} b + b_0);$$

d'autre part, l'application : $b \to e^{\theta J} b$ est holomorphe.

On pose alors : $\varphi^A(z,b) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \varphi(z, e^{\theta J} b)\, d\theta$.

La fonction φ^A appartient à P. De plus :

$$\begin{aligned} \varphi^A(z,b) &= \varphi^A(i \operatorname{Im} z, ie^{-\operatorname{Re} z . \beta J} e^{-\operatorname{Re} z} . \operatorname{Im} b) \\ &= \varphi^A(i \operatorname{Im} z, ie^{-\operatorname{Re} z} . \operatorname{Im} b) \end{aligned}$$

car φ^A est invariante par l'action de θ.

Soit $b \in \mathbf{R}^2$, on a :

$$\forall \lambda \in \mathbf{C}, \quad \forall z \in \mathbf{C} : \varphi^A(z,\lambda b) = \varphi^A(i \operatorname{Im} z, ie^{-\operatorname{Re} z} \operatorname{Im} \lambda . b)$$

et d'après la démonstration de la proposition 4, on voit que :

$$\varphi^A(z,ib) = \varphi^A(z,0)$$

d'où la proposition pour φ^A. Mais si φ est strictement plurisousharmonique ou d'exhaustion, φ^A l'est aussi. D'où la proposition pour φ.

Remarque. — L'amélioration suivante de la proposition 4 *m'a été proposée par le referee.*

« Les seules fonctions $\varphi(z,b)$ de P sont les fonctions convexes de $\operatorname{Im} z$ », résultat analogue à la prop. 3.

Il suffit pour cela de considérer la fonction

$$\varphi^S(z,b) = \sup_{\theta \in [0,2\pi]} \varphi(z, e^{\theta J} b).$$

Le raisonnement fait pour φ^A montre aussi que φ^S ne dépend que de z. Donc

$$\varphi^S(z,b) = \varphi^S(z,0) = \varphi(z,0) = \varphi^A(z,0) = \varphi^A(z,b).$$

Ceci implique que $\varphi(z,e^{\theta J}b) = \varphi(z,0)$ pour presque tout $\theta \in [0,2\pi]$, d'où la conclusion.

B. *Cas général.*

PROPOSITION 5. — *Si* $G_{\mathbf{R}}$ *n'est pas à spectre imaginaire pur, il existe un sous-groupe analytique complexe* H *de* $G_{\mathbf{C}}$ *sur lequel aucune fonction* f *plurisousharmonique sur* $G_{\mathbf{C}}$, *invariante par l'action de* $G_{\mathbf{R}}$ *à droite, ne soit strictement plurisousharmonique. De plus, si* $G_{\mathbf{C}}$ *est résoluble et simplement connexe, l'injection canonique de* $H/H \cap G_{\mathbf{R}}$ *dans* $G_{\mathbf{C}}/G_{\mathbf{R}}$ *est propre et* f *ne peut être d'exhaustion sur* $H/H \cap G_{\mathbf{R}}$.

Cette proposition implique évidemment la condition nécessaire du théorème 1. Au paragraphe 6, on renforcera cette proposition.

Preuve. — Il existe dans Lie $(G_{\mathbf{R}})$ un élément X tel que adX n'ait pas toutes ses valeurs propres imaginaires pures. Deux cas peuvent se présenter.

1er *Cas :* adX a une valeur propre réelle non nulle λ. Alors il existe Y non nul dans $\mathrm{Lie}(G_{\mathbf{R}})$ tel que : $[X,Y] = \lambda Y$. Les vecteurs X et Y forment la base d'une algèbre de Lie isomorphe à celle du groupe affine.

2e *Cas :* adX a une valeur propre de la forme $\lambda + i\mu$ (avec $\lambda.\mu \neq 0$). Soit Z un vecteur propre de $\mathrm{Lie}(G_{\mathbf{C}})$ associé.

On écrit : $Z = U + iV$ où $U, V \in \mathrm{Lie}(G_{\mathbf{R}})$.

On a : $[X,U] = \lambda U - \mu V$ et $[X,V] = \lambda V + \mu U$.

De plus : $[X,[U,V]] = [[X,U],V] + [U,[X,V]] = 2\lambda[U,V]$.

On peut supposer $[U,V] = 0$, car sinon on est ramené au premier cas. On vérifie immédiatement que X, U, V est une base d'une algèbre de Lie de dimension 3. Quitte à remplacer X par X/λ, on peut supposer $\lambda = 1$, et donc l'algèbre précédente est isomorphe à $\mathrm{Lie}(G_{\mathbf{R}}^{\mu})$.

On pose la définition suivante :

Définition. — *On appelle groupe du type* 1, *un groupe de Lie* (*réel*) *analytiquement isomorphe à un groupe dont le revêtement universel est un groupe* $G_{\mathbf{R}}^{\beta}$ *ou le groupe affine réel.*

Alors d'après ce qui a été vu plus haut, le groupe $G_{\mathbf{R}}$ contient un groupe $H_{\mathbf{R}}$ du type 1. Si H est le complexifié de $H_{\mathbf{R}}$ dans $G_{\mathbf{C}}$, vérifions qu'il n'existe pas de fonction strictement plurisousharmonique sur H, invariante par $H_{\mathbf{R}}$. Soit $\tilde{H}$ le revêtement universel de H. Alors il existe une forme réelle $\tilde{H}_{\mathbf{R}}$ de $\tilde{H}$ ayant même algèbre de Lie que H, tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} \tilde{H} \arrow[r, "p"] & H \\ \tilde{H}_{\mathbf{R}} \arrow[u, hook] \arrow[r, "p'"] & H_{\mathbf{R}} \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

Les flèches verticales sont les injections naturelles. L'application p est l'application de revêtement, et p' est la restriction de p.

On voit ainsi qu'on peut remplacer le couple $(H, H_{\mathbf{R}})$ par $(\tilde{H}, \tilde{H}_{\mathbf{R}})$. Or soit $A_{\mathbf{R}}$ (resp. $A_{\mathbf{C}}$) un groupe égal à $G_{\mathbf{R}}^{\beta}$ ou au groupe affine (resp. $G_{\mathbf{C}}^{\beta}$ ou au revêtement universel du groupe affine complexe), alors par simple connexité, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \tilde{H} \arrow[r, "\sim"] & A_{\mathbf{C}} \\ \tilde{H}_{\mathbf{R}} \arrow[u, hook] \arrow[r, "\sim"] & A_{\mathbf{R}} \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

(les flèches horizontales sont des isomorphismes analytiques et les flèches verticales les inclusions naturelles).

On peut donc remplacer $(\tilde{H},\tilde{H}_{\mathbf{R}})$ par $(A_{\mathbf{C}},A_{\mathbf{R}})$ mais dans ce dernier cas, on sait qu'il n'y a pas de fonction strictement plurisousharmonique sur $A_{\mathbf{C}}$, invariante par $A_{\mathbf{R}}$.

La dernière partie de la proposition se démontre en utilisant le lemme 2.

Remarque. — On a implicitement démontré (condition nécessaire et condition suffisante : le cas D) que les algèbres de Lie à spectre imaginaire pur sont les algèbres de la forme $\underline{k} \underset{s}{+} \underline{r}$ (produit semi-direct d'un idéal $\underline{r}$ et d'une algèbre $\underline{k}$) avec $\underline{r}$ résoluble et à spectre imaginaire pur et $\underline{k}$ algèbre de Lie d'un groupe compact semi-simple K. Démontrons directement ce résultat algébrique (une des conditions découlant directement du théorème de Levi-Malcev, on va simplement montrer qu'une algèbre $\mathscr{L}$ de la forme $\underline{k} \underset{s}{+} \underline{s}$ est à spectre imaginaire pur).

1° Pour $k \in \underline{k}$, $\operatorname{ad} k$ a ses valeurs propres imaginaires pures. En effet, $\mathscr{L}$ est un K-module par l'action de Ad. Comme K est compact, il existe un produit scalaire sur $\mathscr{L}$ qui rend les opérateurs $\operatorname{Ad} u\,(u \in K)$ orthogonaux, et donc les opérateurs $\operatorname{ad} k$ $(k \in k)$ antisymétriques.

2° Soit maintenant $\ell_0 \in \mathscr{L}$ se décomposant suivant $\underline{k}$ et $\underline{r}$ sous la forme $k_0 + r_0$. Soit $\mathscr{L}'$ l'algèbre résoluble $\mathbf{R}k_0 \underset{s}{+} \underline{r}$.

Alors $\mathscr{L}$ est un $\mathscr{L}'$ module. En utilisant le théorème de triangulation d'Engel [1], il suffit pour conclure de montrer que $\operatorname{ad}_{\mathscr{L}} r_0$ a ses valeurs propres imaginaires pures. Soit donc $Y \in \mathscr{L}_{\mathbf{C}}$ (complexifié de $\mathscr{L}$) et vérifiant : $[r_0,Y] = \lambda.Y$ pour un certain $\lambda \in \mathbf{C}$. Si λ est non nul, alors nécessairement Y appartient au complexifié de $\underline{r}$. Mais alors λ est imaginaire pur par hypothèse.

L'utilisation du théorème d'Engel m'a été suggérée par G. Coeuré.

C. *Le cas semi-simple.*

On va montrer pour finir que dans le cas semi-simple, on a des résultats négatifs plus forts que ceux décrits dans la proposition 5.

PROPOSITION 6. — *Soit* G_C *un groupe de Lie complexe semi-simple et* G_R *une forme réelle sans sous-groupe compact distingué de dimension positive. Alors* P *se réduit aux constantes.*

COROLLAIRE. — *Pour* G_C *semi-simple, le couple* (G_C, G_R) *est pseudo-convexe si et seulement si* G_R *est compact.*

Preuve du corollaire. — La condition suffisante a été évoquée dans l'introduction. Pour montrer la condition nécessaire, on suppose G_R non compact, il existe alors un sous-groupe de Lie simple G'_R de G_R tel que si on note G'_C le complexifié de G'_R dans G_C, le couple (G'_C, G'_R) satisfait aux hypothèses de la proposition 6. La restriction d'une fonction de P à G'_C est alors constante, et ne peut donc être strictement plurisousharmonique.

Pour la démonstration de la proposition 6, on utilisera les notations suivantes :

On note J_R l'algèbre de Lie de G_R, et soit : $J_R = k + p$ une décomposition de Cartan où k est l'algèbre de Lie d'un sous-groupe compact maximal. Soit a_R une sous-algèbre abélienne maximale dans p et η une sous-algèbre maximale abélienne de J_R contenant a_R. On sait [6] qu'on a une décomposition : $\eta = t_R + a_R$, où t_R est une sous-algèbre abélienne de k. On pose : $v = ia_R + t_R$, et on sait que le sous-groupe de Lie V de G_C correspondant à v est compact, (c'est un tore maximal). On note U_R le sous-groupe de G_C correspondant à ia_R.

Les sous-groupes de G_C correspondant à a_R et a_C (complexifié de a_R) sont notés A_R et A_C. On a le lemme suivant (connu) mais se trouvant assez peu dans la littérature.

LEMME A. — *Le groupe* U_R *est compact.*

Preuve. — On suppose d'abord G_C simplement connexe. Il existe une involution θ sur J_R telle que : $\theta X = X$ pour $X \in t_R$ et $\theta X = -X$ pour $X \in a_R$. On complexifie l'involution qu'on continue d'appeler θ. On a alors :

$$ia_R = \{X \in v | \theta X = -X\}.$$

Soit $\tilde{\theta}$ l'involution associée à θ sur G_C. Le groupe U_R est alors la composante connexe du sous-groupe fermé de V défini par :

$$\{g \in V | \tilde{\theta} g = g^{-1}\}.$$

Comme V est compact, U_R est compact.

Si G_C n'est pas simplement connexe, on passe au revêtement universel $\tilde{G}_C$ et U_R est l'image continue du sous-groupe compact de $\tilde{G}_C$ correspondant à ia_R.

Du lemme A, on déduit que si f est une fonction plurisousharmonique sur A_C invariante par l'action à droite de A_R, f est constante. En effet : $A_C = U_R . A_R$, et on applique le principe du maximum.

On se place à présent dans les hypothèses de la proposition 5.

LEMME B. — *Un sous-groupe fermé de* G_C *contenant* G_R *et* A_C *est* G_C *tout entier.*

Preuve. — Soit C l'algèbre de Lie d'un tel groupe.

On pose : $J_R = J_R^1 \oplus \ldots \oplus J_R^n$ où les J_R^i sont des idéaux simples de J_R. Pour chaque J_R^i, on choisit a_R^i sous-algèbre abélienne maximale dans la partie non compacte d'une décomposition de Cartan de J_R^i. On pose $a_R = a_R^1 \oplus \ldots \oplus a_R^n$ et on vérifie que c'est bien une sous-algèbre abélienne maximale dans la partie non compacte d'une décomposition de Cartan de J_R.

Si on note J_C, J_C^i, a_C^i les complexifiés de J_R, J_R^i, a_R^i, on a :

$$C \cap J_C^i \supseteq a_C^i + J_R^i.$$

Or $a_C^i \neq (0)$ d'après les hypothèses sur G_R, et il est bien connu que J_R^i est une sous-algèbre maximale de J_C^i. Par conséquent : $C \cap J_C^i = J_C^i$, et donc $C = J_C$, d'où le lemme.

Preuve de la proposition 6 :

On pose : $L = \{g \in G_C | \forall f \in P, f(g) = f(1)\}$.

C'est un sous-groupe de G_C car P est invariant par l'action de G_C à gauche. De plus L contient G_R et A_C. En effet, il contient G_R par hypothèse, et d'autre part si on prend la restriction d'une fonction f de P à la sous-variété complexe A_C, f est constante, égale à $f(1)$, d'après le lemme A. En appliquant le lemme B, on voit que L est dense dans G.

On a alors :

$$\forall g \in G_{\mathbf{C}}, \qquad \forall f \in P : f(g) \geqslant f(1),$$

à cause de la semi continuité des éléments de P. Mais alors soit $g_0 \in G_{\mathbf{C}}$, et $f \in P$. En considérant la fonction $f(g_0^{-1}(x))$ dans P, il vient :

$$f(1) = f(g_0^{-1} g_0) \geqslant f(g_0).$$

D'où finalement : $\forall g \in G_{\mathbf{C}}$, $f(g) = f(1)$, pour $f \in P$.

Remarque. – Montrons que $G_{\mathbf{R}}$ à spectre imaginaire pur et semi-simple équivaut à $G_{\mathbf{R}}$ compact. Tout d'abord si $G_{\mathbf{R}}$ est compact, il peut être réalisé comme sous-groupe de Lie d'un groupe orthogonal. Cela implique que pour $X \in J_{\mathbf{R}}$, $\operatorname{ad}X$ est antisymétrique et donc à valeurs propres imaginaires pures. Réciproquement, si $G_{\mathbf{R}}$ n'est pas compact, alors $a_{\mathbf{R}} \neq (0)$ et pour $X \in a_{\mathbf{R}}$ non nul, $\operatorname{ad}X$ a ses valeurs propres réelles et non toutes nulles [6].

On retrouve ainsi le corollaire de la proposition 6.

Dans le cas où $G_{\mathbf{R}}$ est un groupe de Chevalley [13], on peut renforcer la proposition 1. On appelle $b_{\mathbf{R}}$ une sous-algèbre de Borel de $J_{\mathbf{R}}$, et $B_{\mathbf{R}}$ le sous-groupe de $G_{\mathbf{R}}$ correspondant.

PROPOSITION 7. – *Les fonctions plurisousharmoniques sur* $G_{\mathbf{C}}$, *invariantes par l'action à droite de* $B_{\mathbf{R}}$ *sont constantes.*

Cette proposition repose elle-même sur la suivante (on note $B_{\mathbf{C}}$ le complexifié de $B_{\mathbf{R}}$ dans $G_{\mathbf{C}}$ et Q l'ensemble des fonctions plurisousharmoniques sur $B_{\mathbf{C}}$ invariantes par $B_{\mathbf{R}}$).

PROPOSITION 8. – *L'ensemble* Q *se réduit aux constantes.*

Preuve de la proposition 8. – On définit L sous-groupe de $B_{\mathbf{C}}$ par :

$$L = \{ b \in B_{\mathbf{C}} \mid \forall f \in Q \mid f(b) = f(1) \}.$$

Comme précédemment, L contient $B_{\mathbf{R}}$ et $A_{\mathbf{C}}$, et l'algèbre de Lie $\mathscr{L}$ de $\bar{L}$ contient $b_{\mathbf{R}}$ et $a_{\mathbf{C}}$. Soit alors e_α un vecteur propre de $b_{\mathbf{R}}$ associé à la racine positive α. On sait qu'il existe $H \in a_{\mathbf{R}}$ tel que : $0 \neq [H, e_\alpha] = \alpha(H) e_\alpha$.

Les éléments iH et e_α appartiennent à $\mathscr{L}$, donc également $[iH, e_\alpha] = \alpha(H).(ie_\alpha)$, donc $ie_\alpha \in \mathscr{L}$ car $\alpha(H) \in \mathbf{R} \dot{-} \{0\}$.

Par conséquent $\mathscr{L} = b_{\mathbf{C}}$ (complexifié de $b_{\mathbf{R}}$) et comme précédemment $\mathrm{L} = \mathrm{B}_{\mathbf{C}}$.

Preuve de la proposition 7. — Sot R l'ensemble des fonctions plurisousharmoniques sur $\mathrm{G}_{\mathbf{C}}$ invariantes par l'action à droite de $\mathrm{B}_{\mathbf{R}}$.

Pour $f \in \mathrm{R}$ et $g \in \mathrm{G}_{\mathbf{C}}$, on définit sur $\mathrm{B}_{\mathbf{C}}$ la fonction f_g vérifiant : $f_g(b) = f(gb)$ pour $b \in \mathrm{B}_{\mathbf{C}}$. C'est une fonction de Q, et donc constante. Par conséquent, f est définie sur $\mathrm{G}_{\mathbf{C}}/\mathrm{B}_{\mathbf{C}}$, qui d'après [13] est compact. D'après le principe du maximum, f est constante.

Remarque. — Soit $\mathrm{SL}(2,\mathbf{C})$ (resp. $\mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})$) le groupe des matrices carrées d'ordre deux sur $\mathbf{C}$ (resp. $\mathbf{Z}$) et de déterminant 1. Les méthodes précédentes permettent de démontrer que les seules fonctions plurisousharmoniques sur $\mathrm{SL}(2,\mathbf{C})/\mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})$ sont les constantes.

5. Le cas des ouverts.

THÉORÈME 2. — *On suppose le couple* $(\mathrm{G}_{\mathbf{C}},\mathrm{G}_{\mathbf{R}})$ *pseudo-convexe.*

Soit Ω *un ouvert de Stein de* $\mathrm{G}_{\mathbf{C}}$ *invariant par l'action de* $\mathrm{G}_{\mathbf{R}}$. *Alors il existe sur* Ω *une fonction de classe* C^{∞}, *strictement plurisousharmonique, invariante par* $\mathrm{G}_{\mathbf{R}}$, *et d'exhaustion sur* $\Omega/\mathrm{G}_{\mathbf{R}}$, *moyennant l'hypothèse supplémentaire suivante sur* $\mathrm{G}_{\mathbf{R}}$: *il existe un sous-groupe* Γ *discret de* $\mathrm{G}_{\mathbf{R}}$, *avec* $\mathrm{G}_{\mathbf{R}}/\Gamma$ *compact.*

Illustrons le théorème 2 par un exemple. On prend $\mathrm{G}_{\mathbf{R}} = \mathrm{K} \times \mathbf{R}^n$ où K est un groupe de Lie compact et $\mathrm{G}_{\mathbf{C}} = \mathrm{K}_{\mathbf{C}} \times \mathbf{C}^n$ où $\mathrm{K}_{\mathbf{C}}$ est un complexifié de K.

En posant $\Gamma = \{1\} \times \mathbf{Z}^n$, on voit que le théorème 2 est vrai pour $(\mathrm{G}_{\mathbf{C}},\mathrm{G}_{\mathbf{R}})$.

Remarque. — J'ignore si l'hypothèse supplémentaire est nécessaire.

Le théorème 2 repose sur la proposition suivante :

PROPOSITION. — *Soit* F *une variété de Stein,* E *une variété complexe, et* $p : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ *un revêtement holomorphe. Si* Ω *est un ouvert de Stein dans* E *vérifiant* $p^{-1}(p\Omega) = \Omega$, *alors* $p\Omega$ *est un ouvert de Stein.*

(*Remarque.* — D'après un théorème de Stein, E est de Stein).

Preuve. — Il suffit d'après le théorème de Grauert-Docquier [4], de montrer que $p\Omega$ est localement de Stein. Pour $x \in \mathrm{F}$, choisissons un voisinage ouvert D_x de x, qu'on suppose trivialisant et difféomorphe analytiquement à un polydisque de $\mathbf{C}^n$. Fixons, d'autre part, un élément y de la fibre au-dessus de x. Soit Δ_y la composante connexe de $p^{-1}D_x$ contenant y. L'ouvert $\Delta_y \cap \Omega$ est de Stein, comme intersection de deux ouverts de Stein, et, d'autre part, d'après les hypothèses sur Ω, on a un difféomorphisme analytique induit par p entre $\Delta_y \cap \Omega$ et $D_x \cap p\Omega$. D'où la proposition.

Preuve du théorème 2. — Le groupe $G_{\mathbf{R}}$ est unimodulaire, car à spectre imaginaire pur. Donc le 2° du lemme 1 est vérifié pour $G_{\mathbf{R}}/\Gamma$. D'après ce lemme, la variété $G_{\mathbf{C}}/\Gamma$ est de Stein. La proposition précédente appliquée au revêtement de $G_{\mathbf{C}}$ sur $G_{\mathbf{C}}/\Gamma$ montre que Ω/Γ est de Stein. En utilisant à nouveau le lemme 1, on en déduit le théorème 2.

Applications à l'étude des tubes pseudo-convexes.

Ce chapitre généralise les résultats de B. Chafi [2] dans deux directions différentes. D'une part, il donne un cadre géométrique au principe du minimum (théorème 3) et, d'autre part, il étend la classe des groupes auxquels ce principe s'applique (théorème 4).

DÉFINITION. — *On dira qu'une submersion surjective* π *de classe* C^∞ *d'une variété complexe* E *sur une variété connexe* (*réelle*) B *est totalement réelle si pour tout point* b *de* B, *il existe un point* e *de la fibre* F_b *au-dessus de* b *tel que l'espace tangent en ce point à la fibre soit une forme réelle de l'espace tangent à la variété totale* E. *On a :*

PROPOSITION 9. — *Soit* π *une submersion surjective totalement réelle de* E *sur* B, *et* f *une fonction indéfiniment différentiable de* B *dans* $\mathbf{R}$ *telle que* $f \circ \pi$ *soit strictement plurisousharmonique. Alors :*

i) En tout point critique de f, *le Hessien de* f *est strictement positif.*

ii) Si f *est de plus d'exhaustion sur* B, *alors* f *admet un point critique unique qui est un minimum global* (*en particulier* f *a un minimum local unique*).

Preuve. — La théorie de Morse [10] assure l'implication i) $\Rightarrow$ ii).

La démonstration de i) utilise quelques résultats d'algèbre linéaire que nous rappelons ici. Soit G^* le $\mathbf{C}$ espace vectoriel de $\mathbf{R}$-formes linéaires à valeurs complexes sur un espace vectoriel complexe G. On a une décomposition de G^* en somme directe : $G^* = G^*_H \oplus \overline{G^*_H}$, où G^*_H est le

C-espace vectoriel des formes C-linéaires et $\overline{G_H^*}$ le C-espace vectoriel des formes C-semi-linéaires. Soit maintenant $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ une famille libre de n formes de G^* s'annulant sur une forme réelle L de G. Alors, si on note φ'_k l'élément de G_H^* dans la décomposition de φ_k, la famille des n formes φ'_k est libre. Pour ceci, on suppose une relation de la forme : $\Sigma a_k \varphi'_k = 0$. Comme $\varphi'_k(X) = \frac{1}{2i}(\varphi_k(iX) + i\varphi_k(X))$ pour $X \in G$, on a, en prenant $X \in L$: $\Sigma a_k \varphi_k(X) = 0$ et $\Sigma a_k \varphi_k(iX) = 0$ d'où $\Sigma a_k \varphi_k = 0$, donc $a_k = 0$ pour $k = 1, \ldots, n$.

A présent, montrons i). L'assertion sur f étant locale, on peut, quitte à composer avec un difféomorphisme, supposer que B est un ouvert de $\mathbf{R}^n$, contenant l'origine, point critique pour f. Notons $x_1, \ldots, x_n$ les applications coordonnées de B dans $\mathbf{R}$, et $u_i = x_i \circ \pi$ pour $i = 1, \ldots, n$. On a : $f \circ \pi = f(u_1, \ldots, u_n)$.

D'où $\partial \bar{\partial}(f \circ \pi) = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial u_i \, \partial u_j} \partial u_i \wedge \bar{\partial} u_j + \sum_i \frac{\partial f}{\partial u_i} \partial \bar{\partial} u_i$.

Comme 0 est un point critique de f, on a :

$$\partial \bar{\partial}(f \circ \pi)(e_0) = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial u_i \, \partial u_j}(0) \, \partial u_i \wedge \bar{\partial} u_j$$

pour e_0 dans la fibre au-dessus de 0. On choisit e_0 tel que l'espace tangent à la fibre soit une forme réelle de l'espace tangent total.

Comme π est une submersion, les formes linéaires $du_1, \ldots, du_n$ sur l'espace tangent total en e_0 forment une famille libre. D'après l'hypothèse faite en e_0 et les remarques d'algèbre linéaire ci-dessus, la famille des ∂u_i est libre. Ceci joint à la stricte plurisousharmonicité de $f \circ \pi$, implique que la matrice des $\frac{\partial^2 f}{\partial u_i \, \partial u_j}(0)$ est strictement positive, ce qui signifie justement la condition i). □

On se donne à présent : $\pi : E \to B$, une submersion surjective totalement réelle et X une variété analytique complexe.

On note p la projection canonique de $X \times B$ sur X. Pour un ouvert $\dot{\Omega}$ de $X \times B$ et pour $\xi \in X$, on note $\dot{\Omega}_\xi$ l'ouvert de B défini par $\dot{\Omega} \cap p^{-1}(\{\xi\})$. On dit que c'est la fibre de $\dot{\Omega}$ au-dessus de ξ. (On ne parlera plus ici de fibres associées à π).

Par définition, un ouvert Ω de $X \times E$ est *invariant* si on a : $(\mathrm{id}_X, \pi)^{-1} \circ (\mathrm{id}_X, \pi)(\Omega) = \Omega$. On dira qu'un tel ouvert invariant Ω est un *tube* si les fibres de l'ouvert $\dot{\Omega} = (\mathrm{id}_X, \pi)(\Omega)$ au-dessus de X sont connexes. A une fonction $\dot{u}$ sur $\dot{\Omega}$, on associe naturellement une fonction u sur Ω telle que : $u(\xi, e) = \dot{u}(\xi, \pi e)$ pour $(\xi, e) \in \Omega$.

Le principe du minimum s'énonce comme suit :

THÉORÈME 3. — *On se donne un tube Ω dans $X \times E$ dont on note ω la projection sur X.*

Soit $\dot{u}$ une fonction indéfiniment différentiable sur $\dot{\Omega} = (\mathrm{id}_X, \pi)(\Omega)$ telle que la fonction u naturellement associée sur Ω vérifie les propriétés suivantes :

i) u est plurisousharmonique sur Ω;

ii) Pour tout ξ dans ω, $u(\xi, \bullet)$ est strictement plurisousharmonique sur $\Omega_\xi = \pi^{-1}\dot{\Omega}_\xi$ et $\dot{u}(\xi, \bullet)$ est d'exhaustion sur $\dot{\Omega}_\xi$.

Alors :

$$v(\xi) = \inf_b u(\xi, b)$$

est indéfiniment différentiable et plurisousharmonique sur ω.

COROLLAIRE DU THÉORÈME 3. — *On garde toutes les hypothèses du théorème* 3, *en remplaçant l'exhaustivité de $\dot{u}(\xi, \bullet)$ sur $\dot{\Omega}_\xi$ par l'exhaustivité de $\dot{u}$ sur tout $\dot{\Omega}$. On suppose, de plus, qu'il existe sur X une fonction régulière strictement plurisousharmonique.* (*Ceci est vrai, en particulier, si X est de Stein*). *Alors ω est de Stein.*

Preuve du corollaire. — Se déduit immédiatement du théorème 3 en remarquant que v est d'exhaustion sur ω.

Preuve du théorème. — Pour $\xi \in X$, la submersion $\Omega_\xi \xrightarrow{\pi} \dot{\Omega}_\xi$ est évidemment totalement réelle. On note $w(\xi)$ le point de $\dot{\Omega}_\xi$ où la fonction $\dot{u}(\xi, \bullet)$ atteint son minimum. Ce point est unique d'après le ii) de la proposition précédente. Considérons un système de coordonnées $x_1, \ldots, x_n$ au voisinage d'un point $b_0 = w(\xi_0)$ de B. Alors la fonction $w(\xi)$ est solution du système : $\dfrac{\partial \dot{u}}{\partial x_i}(\xi, w(\xi)) = 0$ pour $i = 1, \ldots, n$. Or, le Jacobien de ce système est justement le Hessien d'une fonction $\dot{u}(\xi, \bullet)$ en son point critique. Ce Hessien étant strictement positif d'après la proposition 9, on déduit du théorème des fonctions implicites que w est de classe C^∞.

Soit $\xi_0 \in \omega$. Montrons que v est plurisousharmonique en ξ_0. Quitte à faire un difféomorphisme holomorphe local, on peut supposer que X est un ouvert de $\mathbf{C}^n$ contenant 0, et que $\xi_0 = 0$. Le problème étant directionnel, on peut même supposer que X est un ouvert contenant 0 de $\mathbf{C}$. Pour $r > 0$ et assez petit, il faut donc démontrer l'inégalité :

$$\dot{u}(0,w(0)) \leqslant \frac{1}{2i\pi} \int_{|t|=1} \dot{u}(rt,w(rt)) \frac{dt}{t}.$$

Soit e_0 un élément de E vérifiant $\pi(e_0) = w(0)$ et dont l'espace tangent à la fibre soit une forme réelle de l'espace tangent total. L'inégalité est vraie si on démontre pour r assez petit l'existence d'une fonction θ du disque fermé unité dans un voisinage de e_0, continue dans le disque fermé et holomorphe à l'intérieur telle que $\pi \circ \theta(t) = w(rt)$ pour $|t| = 1$. En effet, sous cette hypothèse, on a :

$$\dot{u}(0,w(0)) \leqslant u(0,\theta(0)) \leqslant \frac{1}{2i\pi} \int_{|t|=1} u(rt,\theta(t)) \frac{dt}{t} = \frac{1}{2i\pi} \int_{|t|=1} \dot{u}(rt,w(rt)) \frac{dt}{t}.$$

En passant pour E et B à des systèmes de coordonnées locales (holomorphes pour E) et en utilisant le fait que la différentielle de π en e_0 s'annule sur une forme réelle de l'espace tangent, on est amené à la situation locale suivante : Étant donné une application π de classe C^∞, défini dans un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbf{C}^n$, à valeurs dans $\mathbf{R}^n$ vérifiant : $\pi(0) = 0$ et $\pi'(0)z = \operatorname{Im} z$ pour $z \in \mathbf{C}^n$, et une autre application w, de classe C^∞, défini dans un voisinage de 0 dans $\mathbf{C}^n$ à valeurs dans $\mathbf{R}^n$, il existe pour r positif et assez petit une fonction θ continue sur le cercle unité S^1 et se prolongeant en une fonction θ holomorphe à l'intérieur telle que : $\pi \circ \theta(t) = w(rt)$ pour $t \in S^1$.

On va résoudre ce problème par application du théorème de submersion dans les espaces de Banach.

Pour $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{C}^n$, on pose :

$$|a| = |a_1| + \cdots + |a_n|.$$

On note $C(S^1)$ l'algèbre des applications continues sur le cercle à valeurs dans $\mathbf{C}^n$ qu'on assimile à des fonctions sur $\mathbf{R}$ de période 2π. Pour $k \in \mathbf{Z}$ et $f \in C(S^1)$ on note $\hat{f}(k)$ le coefficient de Fourier associé.

On introduit les algèbres de Banach suivantes :

1° $\ell^1(S^1) = \{f \in C(S^1) | \sum_{k \in \mathbf{Z}} \hat{f}(k)| < +\infty\}$.

Cette algèbre est munie de la norme :

$$\|f\|_1 = \sum_{k \in \mathbf{Z}} |\hat{f}(k)|.$$

2° $B(S^1)$ est l'algèbre des fonctions f sur S^1 à valeurs dans $\mathbf{C}^n$ et dérivables, telles que f' appartient à $\ell^1(S^1)$. On munit $B(S^1)$ d'une norme d'algèbre de Banach en posant :

$$|||f||| = \|f\|_1 + \|f'\|_1 .$$

On note $B_{\mathbf{R}}(S^1)$ la sous-algèbre des fonctions réelles de $B(S^1)$ et $\mathscr{A}(S^1)$ la sous-algèbre des fonctions de $B(S^1)$ vérifiant : $\hat{f}(k) = 0$ pour $k < 0$. Les éléments de cette dernière algèbre se prolongent en des fonctions holomorphes à l'intérieur de S^1.

Pour une fonction $f = (f_1, \ldots, f_n)$ de $C(S^1)$, on pose :

$$\|f\|_\infty = \|f_1\|_\infty + \cdots + \|f_n\|_\infty \quad \text{où} \quad \|f_i\|_\infty = \sup_{t \in S^1} |f_i(t)|.$$

On a le lemme suivant :

LEMME. — *L'application* $f \to \pi \circ f$ *est une submersion définie d'un voisinage de* 0 *dans* $\mathscr{A}(S^1)$ *sur un voisinage de* 0 *dans* $B_{\mathbf{R}}(S^1)$. (*Dans ce lemme, on peut supposer* π *de classe* C^3).

Montrons tout d'abord comment ce lemme assure l'existence de θ.

On remarque qu'une fonction f de $B(S^1)$ est de classe C^1 et qu'on a les inégalités de normes suivantes :

$$\|f\|_\infty \leqslant \|f\|_1 \leqslant K(\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty).$$

On peut prendre $K = \dfrac{\pi}{\sqrt{3}}$.

Ceci implique, en particulier, que $\pi \circ f$ existe pour $\|f\|_1$ assez petit. D'autre part, si on pose : $w_r(t) = w(rt)$ pour $t \in S^1$, on a :

$$\|w_r(t)\|_1 \leqslant K(\|w_r(t)\|_\infty + \|w_r'(t)\|_\infty)$$

et cette dernière expression peut être rendue aussi petite que l'on veut, d'où l'existence de θ à partir du lemme.

Preuve du lemme. — Pour f assez petit dans $B(S^1)$, on a :

$$(\pi \circ f)' = (\pi' \circ f).f'.$$

La fonction $\pi' \circ f$ est de classe C^1, donc appartient à $\ell^1(S^1)$. Comme $\ell^1(S^1)$ est une algèbre, la fonction $(\pi \circ f)'$ appartient à $\ell^1(S^1)$. Par conséquent $\pi \circ f$ appartient à $B(S^1)$. Démontrons la différentiabilité de l'application : $f \to \pi \circ f$.

Pour p et q de norme assez petite dans $\mathbf{C}^n$, on a :

(1) $$\pi(p+q) - \pi(p) - \pi'(p).q = u(p,q).q.$$

La fonction matricielle $u(p,q)$ est de classe C^1 au voisinage de $(0,0)$ et vérifie : $u(p,0) = 0$.

Dans (1), on remplace p et q par f et h dans $B(S^1)$ qu'on suppose assez petits en norme. En considérant $u(f,h)$ comme élément de $\mathbf{C}^{n^2}$, il vient :

$$|||\pi(f+h) - \pi(f) - \pi'(f).h||| \leqslant 2|||u(f,h)|||.|||h|||.$$

On a :

$$\|u(f,h)\|_1 \leqslant K(\|u(f,h)\|_\infty + \|u'_1(f,h).f'\|_\infty + \|u'_2(f,h)\|_\infty\, |||h|||)$$

d'où, par uniforme continuité, pour f fixé,

$$\lim_{|||h|||\to 0} \|u(f,h)\|_1 = 0.$$

De plus :

$$\|(u(f,h))'\|_1 = \|u'_1(f,h).f' + u'_2(f,h).h'\|_1 \leqslant \|u'_1(f,h).f'\|_1 + 2\|u'_2(f,h)\|_1 |||h||$$

d'où comme précédemment :

$$\lim_{|||h||\to 0} \|(u(f,h))'\|_1 = 0.$$

On déduit la différentiabilité de l'application : $f \to \pi \circ f$. La différentielle en f est l'application linéaire : $h \to \pi'(f).h$. On vérifie également que cette différentielle est continue par rapport à f.

Pour conclure, il suffit de montrer que la différentielle $h \to \pi'(0).h$ au point 0 de l'application $f \mapsto \pi \circ f$ admet une section continue s de $\mathscr{A}(S^1)$ dans $B_{\mathbf{R}}(S^1)$. On définit une telle section s par

$$s\left(a_0 + \sum_{n>0} a_n e^{in\theta} + \sum_{n>0} \bar{a}_n . e^{-in\theta}\right) = ia_0 + 2i \sum_{n>0} a_n e^{in\theta}.$$

Retour aux groupes.

Nous allons appliquer le théorème 3 à la situation particulière suivante :

$E = G_C$ groupe de Lie complexe.
$B = G_C/G_R$ avec G_R forme réelle fermée de G_C.

Un ouvert invariant de G_C est un ouvert invariant par l'action à droite de G_R. On se pose alors la question suivante :

La projection sur X d'un tube de Stein est-elle une variété de Stein ? Une réponse affirmative à cette question a été donnée par C. O. Kiselman [8] lorsque X et G_C sont des espaces $\mathbf{C}^n$ et $G_R = \operatorname{Re} G_C$, par B. Chafi [2] lorsque X est un groupe de Lie complexe et $(G_R, G_C) = (K, G_C)$ où K est compact.

DÉFINITION. — *On dira que le tube* Ω *vérifie le principe du minimum si pour toute fonction* u, *plurisousharmonique sur* Ω *et invariante par* G_R, *on a :*

$v(\xi) = \inf\limits_{g} u(\xi, g)$ *est plurisousharmonique sur la projection* ω *de* Ω *sur* X.

Pour un objet A invariant de G_C, on note $\dot{A}$ l'objet associé à G_C/G_R.

PROPOSITION 10. — *Étant donné un tube* Ω *de* $X \times G_C$; *s'il existe sur* Ω *une fonction* φ *de classe* C^∞ *strictement plurisousharmonique, invariante par* G_R, *d'exhaustion sur* $\dot{\Omega}$, *alors* Ω *vérifie le principe du minimum.*

Ce résultat a été démontré par B. Chafi lorsque X est un groupe de Lie.

Preuve. — Pour $c \in \mathbf{R}$, on pose :

$$\dot{\Omega}^c = \{(\xi, g) \in \dot{\Omega} \,|\, \dot{\varphi}(\xi, g) < c\}.$$

Pour démontrer la proposition, on utilise simplement la propriété locale suivante sur φ :

Propriété d'exhaustivité locale : Pour tout compact K inclus dans ω et pour tout $c \in \mathbf{R}$, l'ensemble

$$\overline{\dot{\Omega}^c} \cap (K \times G_C/G_R) \text{ est compact dans } \dot{\Omega}.$$

La proposition 10 est alors conséquence du lemme suivant : (on désigne par $P_I(\Omega)$ l'ensemble des fonctions plurisousharmoniques sur Ω invariantes par $G_{\mathbf{R}}$).

LEMME. — *On suppose qu'il existe une fonction* $\varphi \in P_I(\Omega)$ *strictement plurisousharmonique et localement d'exhaustion sur* $\dot{\Omega}$. *Soit* $\omega_0 \subset \omega$ *un ouvert relativement compact dans un ouvert de coordonnées de* ω *et* $\Omega_0 = \Omega \cap (\omega_0 \times G_{\mathbf{C}})$.

Alors, pour toute fonction $u \in P_I(\Omega)$, *il existe une suite décroissante de fonctions* $u_k \in P_I(\Omega_0)$, *strictement plurisousharmoniques de classe* C^∞ *sur* Ω_0 *et localement d'exhaustion sur* $\dot{\Omega}_0$, *convergent vers* u *sur* Ω_0.

Preuve de la proposition. — On se place dans un ouvert Ω_0 tel qu'il a été défini dans le lemme. D'après le théorème 3, la fonction $v_n(\xi) = \inf_{\dot{g}} u_n(\xi,\dot{g})$ est plurisousharmonique sur ω_0. Comme v_n tend en décroissant vers v, on en déduit que Ω vérifie le principe du minimum.

Preuve du lemme. — Pour $c \in \mathbf{R}$, on pose :

$$\dot{\Omega}^c = \{(\xi,\dot{g}) \in \dot{\Omega} \mid \dot{\varphi}(\xi,\dot{g}) < c\}.$$

Comme $\dot{\varphi}$ est supposée localement d'exhaustion sur $\dot{\Omega}$, on peut choisir une suite strictement croissante d'entiers $c_k \in \mathbf{N}$ telle que

$$\overline{\dot{\Omega}_0} \cap \overline{\dot{\Omega}^{c_k}} \subset \overline{\dot{\Omega}_0} \cap \dot{\Omega}^{c_{k+1}}, \qquad k \in \mathbf{N}.$$

Désignons par u_ε et φ_ε, $0 < \varepsilon < 1$, les régularisées de u et φ par une famille de noyaux de convolution à gauche sur le groupe $\mathbf{C}^n \times G_{\mathbf{C}}$. Les fonctions u_ε et φ_ε sont invariantes à droite par l'action de $G_{\mathbf{R}}$. Choisissons une suite décroissante ε_k de réels > 0 tendant vers 0 telle que u_{ε_k} et φ_{ε_k} soient définies au voisinage de $\overline{\Omega}_0 \cap \overline{\Omega^{c_{k+2}}}$. Grâce au théorème de Dini, on peut imposer de plus que $\dot{\varphi}_{\varepsilon_k} < c_{k+1}$ sur $\overline{\dot{\Omega}_0} \cap \overline{\dot{\Omega}^{c_c}}$. On pose alors

$$u_k = u_{\varepsilon_k}\mu(\varphi_{\varepsilon_k} - c_k) + \sum_{\ell=k}^{+\infty} \chi_\ell(\varphi_{\varepsilon_\ell}),$$

où μ, $\chi_1, \chi_2, \ldots \in \mathscr{C}^\infty(\mathbf{R},\mathbf{R})$ sont telles que :

- $0 \leqslant \mu \leqslant 1$, $\mu(t) = 1$ pour $t \leqslant 0$, $\mu(t) = 0$ pour $t \geqslant 1$.
- χ_ℓ est à support dans $]c_{\ell-2}, c_{\ell+2}[$, convexe sur $]-\infty, c_{\ell+1}]$ et strictement convexe sur $[c_{\ell-1}, c_{\ell+1}]$.

On remarque que $\chi_\ell \circ \varphi_{\varepsilon_\ell}$ est plurisousharmonique sur Ω^{c_ℓ}, strictement plurisousharmonique sur $\Omega^{c_\ell} \dot{-} \Omega^{c_{\ell-1}}$ et à support dans $\Omega^{c_{\ell+2}}$; la fonction $\mu(\varphi_{\varepsilon_k} - c_k)$ est à support dans $\Omega^{c_{k+2}}$ et vaut 1 sur $\Omega^{c_{k-1}}$. Ainsi $u_k = u_{\varepsilon_k}$ sur $\Omega^{c_{k-1}}$ et converge donc en décroisant vers u. On peut donc alors, $\mathscr{L}$ désignant la forme de Levi, choisir les χ_ℓ par récurrence de telle sorte que pour tout k :

$$\mathscr{L}(\chi_k \circ \varphi_{\varepsilon_k}) > \mathscr{L}(u_{\varepsilon_k}.\mu(\varphi_{\varepsilon_k} - c_k)) \quad \text{sur} \quad \Omega^{c_k} \dot{-} \Omega^{c_{k-1}}$$
$$\mathscr{L}(\chi_{k+1} \circ \varphi_{\varepsilon_{k+1}}) > \mathscr{L}(\chi_k \circ \varphi_{\varepsilon_k}) + \mathscr{L}(u_{\varepsilon_k}.\mu(\varphi_{\varepsilon_k} - c_k)) \text{ sur } \quad \Omega^{c_{k+1}} \dot{-} \Omega^{c_k}$$
$$\mathscr{L}(\chi_\ell \circ \varphi_{\varepsilon_\ell}) > \mathscr{L}(\chi_{\ell-2} \circ \varphi_{\varepsilon_{\ell-2}}) + \mathscr{L}(\chi_{\ell-1} \circ \varphi_{\varepsilon_{\ell-1}})$$
$$\text{sur} \quad \Omega^{c_{\ell+1}} \dot{-} \Omega^{c_\ell} \quad \text{pour} \quad \ell \geqslant k+2 .$$

u_k est alors plurisousharmonique, strictement plurisousharmonique si u l'est, et dans $C^\infty(\Omega_0)$; en choisissant les χ_ℓ assez grands, $\dot{u}_k$ est d'exhaustion sur $\dot{\Omega}_0$. Lorsque u n'est pas strictement plurisousharmonique, on peut appliquer le procédé de construction précédent avec $u = \varphi$ et $k = 1$ pour obtenir une fonction $\varphi_1 \geqslant \varphi$ strictement plurisousharmonique et d'exhaustion sur $\overline{\dot{\Omega}_0}$. Il suffit alors de remplacer u_k par $u_k + \dfrac{1}{k}(\varphi_1 - A)$, où $A = \inf_{\dot{\Omega}_0} \varphi_1$.

Le théorème suivant met en évidence une classe de couples (G_C, G_R) pour lesquels tout tube de Stein satisfait au principe du minimum.

THÉORÈME 4. — *Soit* X *une variété de Stein et* (G_C, G_R) *un couple pseudo-convexe tel que* G_R *soit fermé et contienne un sous-groupe* Γ *discret uniforme. Alors pour tout tube de Stein* Ω *dans* $X \times G_C$, *on a la propriété du minimum et la projection* ω *de* Ω *sur* X *est de Stein.*

Preuve. — On reprend les idées de la démonstration du théorème 2. La variété $X \times G_C/\Gamma$ est de Stein, et on note q l'application de revêtement : $X \times G_C \to X \times G_C/\Gamma$.

On déduit du théorème de Grauert-Docquier que q est de Stein. Par moyennisation, on a l'existence d'une fonction φ de classe C^∞ satisfaisant aux hypothèses de la proposition sur Ω. On a donc le principe du minimum pour Ω. De plus, d'après le corollaire du théorème 3, l'ouvert ω est de Stein.

6. Formes différentielles invariantes.

Pour énoncer la proposition 1, on a besoin de quelques définitions et notations :

Soit X une variété réelle, on note $\Lambda^p(X)$ l'espace des formes différentielles sur X et $\Lambda(X)$ l'algèbre graduée différentielle des formes différentielles sur X munie de la différentiation extérieure d. Pour $x \in X$, on désigne par $T_x(X)$ l'espace tangent en x à X.

Soit Y une variété complexe, on note $\Lambda^{p,q}(Y)$ l'espace des formes différentielles sur Y de type (p,q) et $\Lambda^0(Y)$ l'algèbre graduée différentielle qui est (en tant qu'espace vectoriel) la somme directe des $\Lambda^{p,0}(Y)$, et dont la différentielle est ∂.

On note $R : \Lambda(Y) \to \Lambda^0(Y)$ l'homomorphisme d'algèbres graduées différentielles qui à une p-forme différentielle associe sa composante de type $(p,0)$.

Pour $y \in Y$, on désigne par $T_y^{1,0}(Y)$ l'espace tangent en y des vecteurs de type $(1,0)$.

Soit alors $G_{\mathbf{C}}$ un groupe de Lie complexe muni d'une forme réelle $G_{\mathbf{R}}$ fermée et Ω un ouvert de $G_{\mathbf{C}}$ invariant par l'action de $G_{\mathbf{R}}$ à droite. On note π la projection canonique de Ω sur $\Omega/G_{\mathbf{R}}$ et π^* l'homomorphisme (associé à π) d'algèbres graduées différentielles de $\Lambda(G_{\mathbf{C}}/G_{\mathbf{R}})$ dans $\Lambda(G_{\mathbf{C}})$.

On définit alors $\Lambda_I^{p,q}(\Omega)$ comme étant l'espace des formes différentielles de type (p,q) sur Ω invariantes par l'action de $G_{\mathbf{R}}$ à droite. On a : $\partial(\Lambda_I^{p,q}(\Omega)) \subseteq \Lambda_I^{p+1,q}(\Omega)$. De même, on définit l'algèbre graduée différentielle invariante $\Lambda_I^0(\Omega)$.

PROPOSITION 11. — *Pour $(p,q) \in \mathbf{N}^2$, on a un diagramme commutatif :*

$$\begin{array}{ccc}
\Lambda_I^{p,q}(\Omega) & \xrightarrow{\ \sim\ } & (\Lambda^p(\Omega/G_{\mathbf{R}}))^{C_n^q} \\
{\scriptstyle\partial}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle d} \\
\Lambda_I^{p+1,q}(\Omega) & \xrightarrow{\ \sim\ } & (\Lambda^{p+1}(\Omega/G_{\mathbf{R}}))^{C_n^q}
\end{array}$$

(les flèches horizontales sont des isomorphismes d'espaces vectoriels, et n est la dimension de $G_{\mathbf{R}}$).

Plus précisément, l'application $R \circ \pi^*$ est un isomorphisme d'algèbres graduées différentielles entre $\Lambda(\Omega/G_{\mathbf{R}})$ et $\Lambda_I^0(\Omega)$.

Remarque. — Si on note pour $p \geqslant 1$:

$$H_{\mathrm{I}}^{p,q}(\Omega) = \frac{\operatorname{Ker}\{\partial : \Lambda_{\mathrm{I}}^{p,q}(\Omega) \to \Lambda_{\mathrm{I}}^{p+1,q}(\Omega)\}}{\operatorname{Im}\{\partial : \Lambda_{\mathrm{I}}^{p-1,q}(\Omega) \to \Lambda_{\mathrm{I}}^{p,q}(\Omega)\}}.$$

Alors de la proposition 11, on déduit immédiatement que $H_{\mathrm{I}}^{p,q}(\Omega)$ est isomorphe à $(H^p(\Omega,\mathbf{C}))^{C_n^q}$.

Preuve de la proposition. — Démontrons d'abord l'assertion sur $R \circ \pi^*$. Il est immédiat que $R \circ \pi^*$ est un homomorphisme d'algèbres graduées différentielles. Montrons que c'est une bijection.

On remarque que pour $g \in G_{\mathbf{C}}$, l'application tangente induite par π de $T_g^{1,0}(G_{\mathbf{C}})$ sur $T_{\pi(g)}(G_{\mathbf{C}}/G_{\mathbf{R}}) \underset{\mathbf{R}}{\otimes} \mathbf{C}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels, car par translation, on peut supposer $g = 1$ et, dans ce cas, c'est clair. On en déduit l'injectivité de $R \circ \pi^*$. Il découle également de cette remarque l'existence d'un isomorphisme π_* entre l'espace des champs de vecteurs complexes sur $\Omega/G_{\mathbf{R}}$ et l'espace des champs de vecteurs $G_{\mathbf{R}}$-invariants à droite de type $(1,0)$ sur Ω. Pour $\omega \in \Lambda^{p,0}(\Omega)$, on définit α sur $\Omega/G_{\mathbf{R}}$ par :

$$\alpha(X_1,\ldots,X_p) = \omega(\pi_*^{-1}(X_1),\ldots,\pi_*^{-1}(X_p))$$

où les X_i sont des champs de vecteurs sur $\Omega/G_{\mathbf{R}}$.

On a :

$$R \circ \pi^*\alpha(\pi_*^{-1}(X_1),\ldots,\pi_*^{-1}(X_p)) = \pi^*\alpha(\pi_*^{-1}(X_1),\ldots,\pi_*^{-1}(X_p)),$$

car les $\pi_*^{-1}(X_i)$ sont de type $(1,0)$. On en déduit bien évidemment l'égalité de $R \circ \pi^*\alpha$ et ω sur les champs invariants de type $(1,0)$, donc sur tous les champs de type $(1,0)$ car ils sont engendrés par les champs invariants. Comme $R \circ \pi^*\alpha$ et ω sont de type $(p,0)$. On a : $R \circ \pi^*\alpha = \omega$, d'où la surjectivité de $R \circ \pi^*$.

Pour terminer la démonstration de la proposition, on considère une base $(\bar{\omega}_j)_{j \in J}$ de formes de type $(0,q)$ sur $G_{\mathbf{C}}$ invariantes par l'action à droite de $G_{\mathbf{C}}$. Ce sont des formes anti-holomorphes. Toute forme β de $\Lambda_{\mathrm{I}}^{p,q}(\Omega)$ s'écrit de façon unique sous la forme $\sum_{j \in J} \beta_j \Lambda \overline{\omega_j}$ où les β_j sont dans $\Lambda_{\mathrm{I}}^{p,0}(\Omega)$. De plus, par l'anti-holomorphie des $\overline{\omega_j}$, on a :

$$\partial\beta = \sum_{j \in J} \partial\beta_j \Lambda \overline{\omega_j}.$$

L'isomorphisme de $\Lambda_{\mathrm{I}}^{p,q}(\Omega)$ sur $(\Lambda^{p}(\Omega/G_{\mathbf{R}}))^{C_n^q}$ est alors donné par :

$$\beta \to (R \circ \pi^* \beta_j)_{j \in J}.$$

THÉORÈME 5. — *Soit* G_C *un groupe de Lie complexe et* $G_{\mathbf{R}}$ *une forme réelle qui n'est pas à spectre imaginaire pur. Alors pour un certain sous-groupe de Lie* $G'_{\mathbf{R}}$ *de* $G_{\mathbf{R}}$, *il n'existe pas de métrique kählérienne sur le complexifié* G'_C *de* $G'_{\mathbf{R}}$ *dans* G_C, *invariante par l'action à droite de* $G'_{\mathbf{R}}$.

En particulier, ceci implique qu'il n'existe pas de métrique kählérienne sur G_C, *invariante par l'action à droite de* $G_{\mathbf{R}}$.

Remarque. — Si, par contre $(G_{\mathbf{R}}, G_{\mathbf{R}})$ est pseudo-convexe, alors il existe une métrique kählérienne $G_{\mathbf{R}}$-invariante, construite de la façon classique à partir de la fonction φ strictement plurisousharmonique invariante.

Preuve. — Le groupe $G_{\mathbf{R}}$ contient un sous-groupe de Lie $G'_{\mathbf{R}}$ de type 1 (voir 4ᵉ Partie, B). On va montrer que le couple $(G'_C, G'_{\mathbf{R}})$ satisfait bien aux hypothèses de la proposition. On se ramène au cas G'_C simplement connexe en composant la métrique avec la projection du revêtement universel. Pour prouver la proposition, il suffit alors en vertu des résultats du IV, de montrer que pour une forme fermée $\omega \in \Lambda_{\mathrm{I}}^{1,1}(G'_C)$, il existe une fonction φ régulière sur G'_C invariante par $G'_{\mathbf{R}}$ et telle que : $\partial \bar{\partial} \varphi = \omega$. La variété $G'_C/G'_{\mathbf{R}}$ est homéomorphe à $\mathbf{R}^n$, donc $H^p(G'_C/G'_{\mathbf{R}}, C)$ est nul pour $p \geq 1$. D'après la remarque de la proposition 1, il existe $\alpha \in \Lambda_{\mathrm{I}}^{0,1}(G'_C)$ tel que : $\partial \alpha = \omega$. Comme $\bar{\partial} \omega = 0$, on a : $\partial(\bar{\partial}\alpha) = 0$. La forme $\bar{\partial}\alpha$ est dans $\Lambda_{\mathrm{I}}^{0,2}(G'_C)$ anti-holomorphe et $\bar{\partial}$ fermée.

Considérons le cas où $G'_{\mathbf{R}} = G_{\mathbf{R}}^{\beta}$ (le cas du groupe affine se traite de façon analogue) et cherchons dans G_C^{β} les formes j holomorphes invariantes de type (2,0) et ∂-fermées. Rappelons que G_C^{β} est $\mathbf{C} \times \mathbf{C}^2$ muni de la loi de composition :

$$(z,b)(z_0,b_0) = (z + z_0, e^{z_0 A_\beta} b + b_0).$$

Nous utiliserons ici simplement le fait que $\operatorname{tr}(A_\beta)$ et $\operatorname{dét}(A_\beta)$ sont non nuls. On a :

$$j = dz \wedge H . db + g \, db_1 \wedge db_2$$

où $db = \begin{pmatrix} db_1 \\ db_2 \end{pmatrix}$ et $H = (H_1, H_2)$ avec H_1 et H_2 holomorphes.

De l'invariance de j par le sous-groupe $\{0\} \times \mathbf{R}^2$ de $G_{\mathbf{R}}^{\beta}$ et de l'holomorphie de H et g, on déduit que H et g ne dépendent que de z. D'autre part, on a toujours par invariance de j par $G_{\mathbf{R}}^{\beta}$:

$$\forall (z,z_0) \in \mathbf{C} \times \mathbf{R}, \qquad H(z) = H(z+z_0)e^{z_0 A_\beta}$$

et

$$g(z) = g(z+z_0)e^{z_0 \operatorname{tr} A_\beta}.$$

Par prolongement analytique, ces égalités sont aussi vraies pour $z_0 \in \mathbf{C}$, d'où :

$$H(z) = K_1 e^{-zA_\beta} \quad \text{et} \quad g(z) = K_2 e^{-\operatorname{tr} A_\beta \cdot z}$$

avec $K_1 \in \mathbf{C}^2$ et $K_2 \in \mathbf{C}$.

Comme j est fermée, on déduit que g est identiquement nul. D'autre part :

$$H(z)\,dz = -\,\partial(K_1 A_\beta^{-1} e^{-zA_\beta}), \qquad \text{d'où :} \quad j = -\,\partial(K_1 A_\beta^{-1} e^{-zA_\beta}\,db).$$

Or, on vérifie immédiatement que la forme $K_1 A_\beta^{-1} e^{-zA_\beta}\,db$ est invariante. En revenant à notre problème de départ, on voit donc que $\partial\bar{\alpha} = \partial\,\delta$ pour $\delta \in \Lambda_I^{1,0}(G_C)$ holomorphe, d'où $\omega = \bar{\partial}\alpha_1$ avec $\alpha_1 = \bar{\alpha} - \delta \in \Lambda_I^{1,0}(G_C)$ et $\partial\alpha_1 = 0$.

En appliquant à nouveau la remarque de la proposition 10 pour α_1, (on remplace $\bar{\partial}$ par ∂, mais ceci ne change rien), on en déduit $\alpha_1 = \partial\varphi$ où $\varphi \in \Lambda_I^{0,0}$, d'où le théorème 5.

PROPOSITION 12. — *On se place dans la situation suivante :*

G_C : *groupe de Lie complexe;*
$G_{\mathbf{R}}$: *forme réelle n'étant pas à spectre imaginaire pur;*
Γ : *sous-groupe discret de* $G_{\mathbf{R}}$ *tel que* $G_{\mathbf{R}}/\Gamma$ *soit compact et muni d'une mesure* $d\dot{g}_{\mathbf{R}}$ *positive de masse* 1, *invariante par l'action de* $G_{\mathbf{R}}$ *à gauche.*

Sous ces hypothèses, la variété complexe G_C/Γ *n'admet pas de métrique kählérienne.*

Preuve. — On raisonne par l'absurde en supposant G_C/Γ muni d'une métrique kählérienne, ou ce qui revient au même G_C muni d'une métrique kählérienne K invariante par l'action de Γ à droite.

Pour $g \in G_C$, on note K_g la métrique K au point g et si X est un champ de vecteurs sur G_C, on note X_g la valeur de ce champ au point g.

D'autre part, g transforme par son action à droite sur G_C un vecteur tangent v en g_0, en un vecteur tangent $v.g_0$ en $g.g_0$.

On définit alors une métrique kählérienne $\tilde{K}$ invariante par l'action de G_R à droite (ce qui est absurde d'après le théorème 5) de la façon suivante :

Pour X et Y deux champs sur G_C, on pose :

$$\tilde{K}_g(X_g, Y_g) = \int_{G_R/\Gamma} K_{gg_R}(X_g.g_R, Y_g.g_R)\, d\dot{g}_R .$$

Cette intégrale est bien défínie car K est invariante par l'action de Γ. L'action des éléments de G_R sur G_C étant holomorphe et réelle, il s'ensuit que $\tilde{K}$ définit bien une métrique kählérienne.

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. Bourbaki, *Algèbres de Lie*, Hermann, (Chap. I).

[2] B. Chafi, Principe du Minimum pour les fonctions plurisousharmoniques, Thèse de 3e cycle, Université de Lille 1, (juin 1983).

[3] J. Dieudonne, *Éléments d'Analyse*, Gauthier-Villars, (Tome 4).

[4] F. Docquier und H. Grauert, Levisches problem und Rungeschen satz für Teilgebiete Steinscher Mannigfaltigkeiten, *Math. Ann.*, 140 (1960), 94-123.

[5] B. Gilligan, A. Huckleberry, On non compact complex nil-manifolds, *Math. Ann.*, 238 (1978), 39-49.

[6] S. Helgason, *Differential Geometry and Symmetric spaces*, Academic Press.

[7] J. W. Jenkins, Growth of connected locally compact lie groups, *Journ. of functional Analysis*, 12 (1973), 113-127.

[8] C. O. Kiselman, The partial Legendre transform for plurisubharmonic functions, *Invent. Math.*, 49 (1978), 137-148.

[9] Matsushima, Morimoto, Sur certains fibrés holomorphes sur une variété de Stein, *Bull. Soc. Math. Soc. France*, 88 (1960), 137-155.

[10] Milnor, Morse Theory, *Annals of Math. Studies*, 51, Princeton Univ. Press, 1963.

[11] M. S. Raghunathan, *Discrete subgroups of Lie groups*, Springer Verlag.

[12] B. Reed, Representations of solvable Lie algebras, *Michigan Math.*, 16 (1969), 227-233

[13] G. Warner, *Harmonic analysis on semi-simple Lie groups*, Springer Verlag, (Tome 1).

Manuscrit reçu le 2 juillet 1984.

Jean-Jacques Loeb,

Université des Sciences et Techniques
de Lille I
UER de Mathématiques Pures
et Appliquées
59655 Villeneuve d'Ascq Cedex.