ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

BERNARD KLARES
CHARLES SADLER

Réduction de Birkhoff des 1-formes différentielles à partie singulière bien adaptée et à coefficients à valeurs dans une algèbre de Lie libre

Annales de l'institut Fourier, tome 36, nº 1 (1986), p. 155-181
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1986__36_1_155_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
36, 1 (1986), 155 - 181

RÉDUCTION DE BIRKHOFF DES 1-FORMES DIFFÉRENTIELLES A PARTIE SINGULIÈRE BIEN ADAPTÉE ET A COEFFICIENTS A VALEURS DANS UNE ALGÈBRE DE LIE LIBRE

par B. KLARES et C. SADLER

Introduction.

1) Problème de Birkhoff.

En 1913, G.D. Birkhoff pose le problème suivant : Soit un système différentiel :

$$y'(x) = y(x) \cdot \frac{A(x)}{x^p} \tag{1}$$

avec $y(x) \in \mathbf{C}^n$, $A(x) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ ($\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ est l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbf{C}$), $A(x)$ holomorphe au voisinage de $x = 0$ dans $\mathbf{C}$, et $p \in \mathbf{N}$; existe-t-il une transformation $y = z \cdot P(x)$ avec $P(x) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, $P(x)$ holomorphe inversible en $x = 0$, qui transforme le système (1) en le système :

$$z'(x) = z(x) \cdot \frac{B(x)}{x^p} \tag{2}$$

avec $B(x) = B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \ldots + B_{p-1} x^{p-1}$, $B_i \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$

pour $i = 1, \ldots, p-1$, c'est-à-dire un système réduit à sa "partie polaire" ?

La réponse est oui lorsque l'on est en présence de conditions génériques : par exemple lorsque la monodromie du système en $x = 0$ est diagonalisable, ou lorsque les deux déterminants de Fredholm associés à (1) sont non nuls en $x = 0$. Sinon il faut prendre pour $B(x)$, un polynôme de degré éventuellement plus grand que $p - 1$ (cf. H.L. Turrittin dans [8]) .

Mots-clés : Réduction de Birkhoff – Partie singulière d'une 1-forme – Séries de Lie.

2) Généralisation du problème de Birkhoff à plusieurs variables.

Une telle généralisation semble, à notre connaissance, très peu étudiée. Signalons un premier élément de réponse dans [2]. On y considère les systèmes de la forme suivante : $dy = y \cdot \omega(x)$ où $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbf{C}^m$, $\omega(x)$ est une 1-forme différentielle matricielle (d'ordre n) complètement intégrable et telle que $x_1^p\, \omega(x)$ soit holomorphe au voisinage de $x = 0$. On se ramène par une transformation $y = z \cdot \mathrm{P}(x)$ avec $\mathrm{P}(x)$ holomorphe inversible en $x = 0$ à un système de la forme : $dz = z \cdot \tilde{\omega}(x_1)$ avec :

$$\tilde{\omega}(x_1) = x_1^{-p} \cdot \left(\sum_{k=1}^{p+q} \mathrm{M}_k \cdot x_1^{k-1} \right) dx_1 \ , \ q \in \mathbf{N} \text{ et } \mathrm{M}_k \in \mathfrak{M}_n(\mathbf{C}).$$

En particulier, lorsque la monodromie relative à $x_1 = 0$ est diagonalisable, on a $q = 0$ et on est ramené à une forme à une variable réduite à sa "partie polaire" (comme dans le cas "générique" du problème de Birkhoff à une variable).

Un deuxième élément de réponse est donné dans le travail de Gérard-Sibuya (cf. [1]) sur les systèmes : $dy = y \cdot \omega(x)$, où $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbf{C}^m$, $\omega(x)$ est une 1-forme différentielle matricielle (d'ordre n) complètement intégrable telle que :

$$\omega(x) = \sum_{1 \leq i \leq m} \alpha_i(x)\, dx_i \, ,$$

avec $x_i^{p_i} \cdot \alpha_i(x)$ holomorphe au voisinage de $x = 0$ et non nul en $x = 0$, $p_i \in \mathbf{N}$, tout ceci pour $i = 1, \dots, m$. Si les matrices $(x_i^{p_i} \cdot \alpha_i(x))_{x=0}$ ont leurs valeurs propres deux à deux distinctes, il existe une transformation $y = z \cdot \mathrm{P}(x)$, avec $\mathrm{P}(x)$ holomorphe inversible en $x = 0$, qui transforme le système de départ en le système : $dz = z \cdot \tilde{\omega}(x)$ avec

$$\tilde{\omega}(x) = \sum_{1 \leq i \leq m} \tilde{\omega}_i(x_i)$$

et

$$\tilde{\omega}_i(x_i) = \left(\sum_{1 \leq k \leq p_i} \frac{\mathrm{M}_k^i}{x_i^k} \right) \cdot dx_i \, , \ \mathrm{M}_k^i \in \mathfrak{M}_n(\mathbf{C}) \, ,$$

$$k = 1, \dots, p_i \, , \quad i = 1, \dots, m \, ,$$

et $\tilde{\omega}(x)$ complètement intégrable. On est de nouveau ramené (analytiquement) à une forme $\tilde{\omega}(x)$ réduite à sa "partie polaire". Remarquons que la singularité étudiée ici :

$$S = \bigcup_{i=1}^{m} S_i \text{ avec } S_i = \{x \in \mathbf{C}^m \mid x_i = 0\}$$

est à croisement normal et que dans $\omega(x)$ c'est $\alpha_i(x)$ (i.e. le coefficient de dx_i) qui a $x_i = 0$ comme pôle d'ordre p_i.

Nous avons repris la même situation (dans [3]) et avons montré que la même réduction était possible mais sous d'autres conditions : si les déterminants de Fredholm associés sont non nuls. De plus, dans la deuxième partie de ce travail, l'utilisation des séries de matrices, c'est-à-dire de séries non commutatives, permet de montrer que la réduction est toujours possible, lorsque les matrices considérées sont voisines de 0 . On y voit apparaître un cadre d'étude qui semble bien intéressant : celui des séries non commutatives. Cette idée est développée de façon plus systématique dans notre travail suivant (cf. [4]). Avant d'y revenir plus en détail, signalons encore les travaux de B. Malgrange sur les déformations des systèmes différentiels et micro-différentiels (cf. [7]). On y considère les systèmes de la forme : $dy = y \cdot \omega(x, t), x \in \mathbf{C}$, $t \in \mathbf{C}$, avec $\omega(x, t)$ 1-forme matricielle (d'ordre n) complètement intégrable et de la forme : $\omega(x, t) = \alpha(x, t)\, dx + \beta(x, t)\, dt$ où $x^2 \cdot \alpha(x, t)$ et $x \cdot \beta(x, t)$ sont holomorphes non nuls au voisinage de $(0, 0)$. Sous certaines conditions, on se ramène, en posant $y = z \cdot P(x, t)$ avec $P(x, t) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ holomorphe inversible au voisinage de $(0, 0)$, à : $dz = z \cdot \tilde{\omega}(x, t)$ où $\tilde{\omega}(x, t)$ est de la forme : $\tilde{\omega}(x, t) = \left(\frac{A(t)}{x^2} + \frac{C}{x}\right) dx + \frac{B(t)}{x} dt$, avec $A(t)$, $B(t)$ holomorphes au voisinage de $t = 0$, et $\tilde{\omega}(x, t)$ complètement intégrable. Là encore, la forme $\tilde{\omega}(x, t)$ est réduite à sa "partie polaire". Remarquons, aussi, que la singularité $x = 0$ apparaît non seulement dans le coefficient de dx mais aussi dans celui de dt, ce qui représente une situation nouvelle par rapport aux cas cités précédemment. Voilà l'essentiel des résultats obtenus sur le sujet dans le cas de plusieurs variables.

3) Sur l'emploi des séries non commutatives.

L'utilité des séries de matrices, et plus généralement des séries non commutatives, dans l'étude des systèmes d'équations différentielles a été mise en évidence dès 1906 par F. Hausdorff pour la démonstration de la formule dite de Baker-Hausdorff. De nombreux mathématiciens ont continué dans cette voie ; citons notamment Magnus, Chen, Schützenberger (dans le domaine de l'automatisme) Fliess (dans le domaine du contrôle optimal). Toutes ces études portent sur des problèmes qui se posent dans le domaine réel. Dans le domaine complexe, cette voie apparamment prometteuse n'a été que peu suivie ; citons néanmoins J.A. Lappo-Danilevsky (cf. [5]) qui s'est servi des séries de matrices pour étudier les systèmes d'équations différentielles linéaires à une variable. Nous avons donc décidé de reprendre cette voie (cf. [4]), en utilisant des méthodes un peu plus générales et plus récentes : celles des séries formelles non commutatives et des séries formelles de Lie (qui apparaissent naturellement cf. Magnus [6]). Nous avons, ainsi, pu montrer que de nombreuses séries considérées par Lappo-Danilevsky étaient en fait des séries de Lie. Quant au problème de Birkhoff, il semble avoir trouvé dans les séries formelles non commutatives et les séries formelles de Lie, un cadre d'étude particulièrement bien adapté, comme on le constate dans [4] . Nous y reprenons l'étude des systèmes différentiels de la forme :

$$dy = y \cdot \omega(x)\,,\; x = (x_1\,,\ldots,x_m) \in \mathbf{C}^m\,,$$

$\omega(x)$ 1-forme différentielle complètement intégrable dont les coefficients sont à valeurs dans une algèbre de séries formelles de Lie $\hat{\mathrm{L}}(\omega)$ et de degré 1 , avec de plus $\omega(x) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i(x)\,dx_i$ et $x_i^{p_i} \cdot \alpha_i(x)$ holomorphe non nul en $x = 0$, $p_i \in \mathbf{N}$, pour $i = 1\,,\ldots,m$. On se ramène en posant $y = z \cdot \mathrm{P}(x)$, $\mathrm{P}(x)$ holomorphe inversible dans $\hat{\mathrm{A}}(\omega)$ en $x = 0$, à un système différentiel de la forme : $dz = z \cdot \widetilde{\omega}(x)$ où

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^{m} \widetilde{\omega}_i(x_i) \text{ et } \widetilde{\omega}_i(x_i) = \Big(\sum_{k=1}^{p_i} \frac{m_k^i}{x_i^k}\Big)\,dx_i\,,\; m_k^i \in \hat{\mathrm{L}}(\omega)\,,$$

$$k = 1\,,\ldots,p_i\,,\quad i = 1\,,\ldots,m\,.$$

La forme $\widetilde{\omega}(x)$, ainsi obtenue, est bien réduite à sa "partie polaire". La singularité étudiée est identique à celle de [3], c'est-à-dire à croisement normal.

Une question se pose naturellement : que se passe-t-il dans des situations plus compliquées que celles étudiées jusqu'ici ? Par exemple :

– si la singularité n'est plus à croisement normal ?

– ou si la singularité $x_i = 0$ ne concerne plus seulement le coefficient de dx_i mais aussi les autres coefficients (comme dans l'article de Malgrange cité précédemment) ?

Nous nous proposons dans la suite d'apporter quelques éléments de réponse inédits.

Cet article comporte deux parties. La première est essentiellement composée d'exemples de formes différentielles à partie singulière bien adaptée. La deuxième montre comment on peut, dans le cadre des séries formelles non commutatives et des séries formelles de Lie, ramener analytiquement un système différentiel associé à une forme à partie singulière bien adaptée, à un système différentiel associé à une forme réduite à sa partie singulière. Plus précisément :

4) Présentation des résultats.

Soient U un ouvert d'une variété analytique complexe M de dimension m et S un sous ensemble analytique de M de codimension 1 . On note :

Ω_1 (U – S) l'espace des 1-formes différentielles holomorphes sur U – S.

Ω_1 (U) l'espace des 1-formes différentielles holomorphes sur U .

$\mathcal{H}$ (U) l'espace des fonctions holomorphes sur U .

On appelle espace de 1-formes *à partie singulière bien adaptée (sur S)* un couple $(\mathcal{E}, p)$ où $\mathcal{E}$ est un sous espace vectoriel de Ω_1 (U – S) et p un projecteur de $\mathcal{E}$ tels que :

1) $\operatorname{Ker} p = \Omega_1(\mathrm{U})$

2) $d(\operatorname{Im} p) = \{0\}$

3) Si $h_i \in \mathcal{H}(\mathrm{U})$ et $\omega_i \in \mathcal{E}$ pour $i = 1, 2, \ldots, k$ alors

$$d\left(\sum_{i=1}^{k} h_i\omega_i\right) = 0 \quad \text{entraine} \quad \sum_{i=1}^{k} h_i\omega_i \in \mathcal{E}$$

4) Si $\omega_i \in \mathcal{E}$ pour $i = 1, 2, \ldots, k$ alors $\sum_{i<j} \omega_i \wedge \omega_j = 0$

entraine $\sum_{i<j} p(\omega_i) \wedge p(\omega_j) = 0$.

Si $\omega \in \mathcal{E}$ on appelle $p(\omega)$ *la partie singulière de* ω .

De nombreux exemples de tels espaces sont donnés dans le paragraphe I. On y retrouve les situations étudiées par les différents auteurs cités en 2) et d'autres beaucoup plus générales.

Soient $X = \{a_1 , \ldots , a_r\}$ un ensemble fini, $A(X)$ l'algèbre associative libre sur X à coefficients dans $\mathbf{C}$, $L(X)$ l'algèbre de Lie libre sur X à coefficients dans $\mathbf{C}$, $\hat{A}(X)$ l'algèbre des séries formelles non commutatives en $a_1 , \ldots , a_r$ à coefficients dans $\mathbf{C}$, $\hat{L}(X)$ l'algèbre des séries formelles de Lie en $a_1 , \ldots , a_r$ à coefficients dans $\mathbf{C}$.

On définit de manière évidente les fonctions holomorphes sur U à valeurs dans $\hat{A}(X)$ (resp. $\hat{L}(X)$) et on note $\mathcal{H}(U, \hat{A}(X))$ (resp. $\mathcal{H}(U, \hat{L}(X))$ l'ensemble de ces fonctions.

On définit de même les 1-formes holomorphes sur U à valeurs dans $\hat{A}(X)$ (resp. $\hat{L}(X)$) et on note $\Omega_1(U, \hat{A}(X))$ (resp. $\Omega_1(U, \hat{L}(X)))$ l'ensemble de ces formes.

On note $\Omega_{1,\mathcal{E}}((U - S), \hat{A}(X))$, $\Omega_{1,\mathcal{E}}((U - S), \hat{L}(X))$ (resp. $\Omega_{1,p(\mathcal{E})}(U - S, \hat{A}(X))$, $\Omega_{1,p(\mathcal{E})}((U - S), \hat{L}(X))$ les 1-formes différentielles à valeurs dans $\hat{A}(X)$ et $\hat{L}(X)$ et dont les coefficients sont des éléments de $\mathcal{E}$ (resp. $p(\mathcal{E})$).

Soit $\omega \in \Omega_{1,\mathcal{E}}(U - S), L(X))$ et $df = f \cdot \omega$ (I), le système de Pfaff associé. On suppose que $d\omega = 0$. La complète intégrabilité de (I) s'écrit alors $\omega \wedge \omega = 0$ et est équivalente à un nombre fini de la forme :

$$\Sigma\, m_{ij}\, [a_i , a_j] = 0 , \; m_{ij} \in \mathbf{C}$$

$$\Sigma\, m_{i_1, i_2, i_3}\, [a_{i_1}, [a_{i_2}, a_{i_3}]] = 0 , \; m_{i_1, i_2, i_3} \in \mathbf{C}$$

$$\Sigma\, m_{i_1, \ldots, i_n}\, [a_{i_1}, [a_{i_2}, \ldots [a_{i_{n-1}}, a_{i_n}] \ldots] = 0 , \; m_{i_1, \ldots, i_n} \in \mathbf{C}$$

Soient $\mathcal{R}$ (resp. $\mathcal{S}$) l'idéal de $L(X)$ (resp. $A(X)$) engendré par ces relations dans $L(X)$ (resp. $A(X)$). On pose :

$$L(\omega) = L(X)/\mathcal{R} \quad \text{et} \quad A(\omega) = A(X)/\mathcal{S}$$

et on leur associe de façon naturelle $\hat{L}(\omega)$ et $\hat{A}(\omega)$. On définit alors comme précédemment : $\mathcal{H}(U, \hat{A}(\omega))$, $\mathcal{H}(U, \hat{L}(\omega))$, $\Omega_1(U, \hat{A}(\omega))$, $\Omega_1(U, \hat{L}(\omega))$, $\Omega_{1,\mathcal{E}}(U - S, \hat{A}(\omega))$, $\Omega_{1,\mathcal{E}}(U - S, \hat{L}(\omega))$,

$\Omega_{1,p(\mathscr{E})}(\mathrm{U}-\mathrm{S}, \hat{\mathrm{A}}(\omega))$, $\Omega_{1,p(\mathscr{E})}(\mathrm{U}-\mathrm{S}, \hat{\mathrm{L}}(\omega))$. Supposons enfin U simplement connexe. On a :

THEOREME FONDAMENTAL. – *Soit* $\omega \in \Omega_{1,\mathscr{E}}(\mathrm{U}-\mathrm{S}, \mathrm{L}(\mathrm{X}))$ *avec* $d\omega = 0$. *Soit* $df = f \cdot \omega$ (I), *le système de Pfaff associé. Il existe* $\mathrm{P} \in \mathscr{H}(\mathrm{U}, \hat{\mathrm{A}}(\omega))$ *tel que* $\log \mathrm{P} \in \mathscr{H}(\mathrm{U}, \hat{\mathrm{L}}(\omega))$, *et il existe* $\tilde{\omega} \in \Omega_{1,p(\mathscr{E})}(\mathrm{U}-\mathrm{S}, \hat{\mathrm{L}}(\omega))$ *vérifiant* $d\tilde{\omega} = 0$, $\tilde{\omega} \wedge \tilde{\omega} = 0$, *tels que si l'on pose* $f = \mathrm{Z} \cdot \mathrm{P}$, *le système* (I) *devient* : (II) $d\mathrm{Z} = \mathrm{Z} \cdot \tilde{\omega}$.

Remarquons que P est holomorphe sur U et que dans le système (II) : $p(\tilde{\omega}) = \tilde{\omega}$ c'est-à-dire que $\tilde{\omega}$ est réduite à sa partie singulière. On a effectué une réduction analytique de "Birkhoff" du système (I).

On montre ensuite comment à partir de ce théorème on retrouve les résultats obtenus dans [4] et aussi des résultats analogues à ceux obtenus par B. Malgrange (le cadre d'étude et les hypothèses étant bien sûr différents).

On donne aussi un exemple d'application à un système du même type que celui associé à la fonction hypergéométrique F_1 (cf. [0]).

On étudie enfin, l'aspect convergent en prenant pour $a_1, \ldots, a_r$ des éléments d'une algèbre normée complète. On montre que toutes les séries considérées convergent si les $a_1, \ldots, a_r$ sont suffisamment proches de 0.

I. 1 – Forme à partie singulière bien adaptée.

Les notations et définitions étant celles données dans l'introduction, voici quelques propriétés et exemples de 1-formes à partie singulière bien adaptée :

1) *Propriétés.* – Soit $\mathscr{P} = \operatorname{Im} p$.

a) Si $\omega \in \mathscr{E}$ alors $\omega - p(\omega) \in \Omega_1(\mathrm{U})$

b) Si $\pi \in \Omega_1(\mathrm{U})$ et $\omega \in \mathscr{E}$

alors $\omega + \pi \in \mathscr{E}$ et $p(\omega + \pi) = p(\omega)$

c) Si $\omega \in \mathscr{P}$ alors $p(\omega) = \omega$ et $d\omega = 0$.

Toutes ces propriétés sont des conséquences triviales des hypothèses 1) 2) 3) 4), prises pour la définition des 1-formes à partie singulière bien adaptée.

2) DEFINITION. – *$p(\omega)$ est appelée la partie singulière de ω.*

Remarque. – Si $\omega \in \mathcal{E}$ est méromorphe sur S, on dit que ω est à partie polaire bien adaptée et on appelle $p(\omega)$ la partie polaire de ω.

3) *Exemples.* – Les démonstrations qui prouvent que les exemples suivants constituent bien des espaces de 1-formes à partie singulière bien adaptée, ne sont pas données ici. Elles sont relativement simples et faites en détail dans [10].

Exemple 1. – Soient $m = 1$, $S = 0$, $M = \mathbf{C}$, U un ouvert connexe contenant 0. On prend pour $\mathcal{E}$: $\mathcal{E} = \Omega_1(U - S)$.

Si $\omega \in \mathcal{E}$, on a : $\omega(x) = \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_k x^k\right) dx$ avec $f_k \in \mathbf{C}$. On pose alors pour $\omega \in \mathcal{E} : p(\omega) = \left(\sum_{k=-\infty}^{-1} f_k x^k\right) dx$. $(\mathcal{E}, p)$ est un espace de 1-formes à partie singulière bien adaptée.

Exemple 2. – Soient $m = 2$, $M = \mathbf{C}^2$,

$$S = \{(x\,,y) \in \mathbf{C}^2 \mid x = 0 \text{ ou } y = 0 \text{ ou } x + y = 0\}\,,$$

U un ouvert convexe contenant $(0,0)$. On prend pour $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{E} = \left\{ \omega(x\,,y) = \frac{a}{x}\,dx + \frac{b}{y}\,dy + \frac{c}{x+y}\,d(x+y) + \pi(x\,,y) \right.$$
$$\left. \text{tels que } a\,,b\,,c \in \mathbf{C} \text{ et } \pi(x\,,y) \in \Omega_1\,(U) \right\}.$$

On pose alors pour $\omega \in \mathcal{E}$: $p(\omega) = \dfrac{a}{x}\,dx + \dfrac{b}{y}\,dy + \dfrac{c}{x+y}\,d(x+y)$.

$(\mathcal{E}, p)$ est un espace de 1-formes à partie singulière bien adaptée.

Exemple 3. – Soient $m = 2$, $M = \mathbf{C}^2$, $S = \{(x\,,y) \in \mathbf{C}^2 \mid y = 0\}$, U un ouvert convexe contenant $(0\,,0)$. On prend pour $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{E} = \left\{ \omega(x\,,y) = \frac{a(x)}{y}\,dx + \frac{xb(x)}{y^2}\,dy + \pi(x\,,y) \text{ tels que } \pi(x\,,y) \in \Omega_1(\mathrm{U})\,, a(x) \text{ et } b(x) \text{ holomorphes sur } \{x \mid (x\,,0) \in \mathrm{U}\} \text{ et vérifiant } a(x) + (xb(x))' = 0 \right\}$$

On pose alors pour $\omega \in \mathcal{E}$: $p(\omega) = \dfrac{a(x)}{y}\,dx + \dfrac{xb(x)}{y^2}\,dy$.

$(\mathcal{E}, p)$ est un espace de 1-formes à partie singulière bien adaptée. Remarquons que le type de singularité obtenu ici ressemble à celui étudié par Malgrange dans [7].

En s'inspirant de cet exemple, on peut en trouver d'autres en augmentant le nombre de variables, ainsi :

Exemple 4. – Soient $m = 3$, $\mathrm{M} = \mathbf{C}^3$,

$$\mathrm{S} = \{(x\,,y\,,z) \in \mathbf{C}^3 \mid y = 0 \text{ ou } z = 0\}\,,$$

U un ouvert convexe contenant $(0, 0, 0)$. On prend pour $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{E} = \left\{ \omega(x\,,y\,,z) = \left(\frac{a(x)}{y} + \frac{b(x)}{z}\right)dx + \frac{xc(x)}{y^2}\,dy + \frac{xe(x)}{z^2}\,dz + \pi(x\,,y\,,z) \right.$$

tels que $\pi(x\,,y\,,z) \in \Omega_1(\mathrm{U})\,, a(x)\,, b(x)\,, c(x)\,, e(x)$ holomorphes sur $\{x \mid (x\,,0\,,0) \in \mathrm{U}\}$ et vérifiant $a(x) + (xc(x))' = 0\,, b(x) + (xe(x))' = 0\}$.

On pose alors pour $\omega \in \mathcal{E}$:

$$p(\omega) = \left(\frac{a(x)}{y} + \frac{b(x)}{z}\right)dx + \frac{xc(x)}{y^2}\,dy + \frac{xe(x)}{z^2}\,dz\,.$$

$(\mathcal{E}, p)$ est un espace de 1-formes à partie singulière bien adaptée.

Exemple 5. – Soient $m = 2$, $\mathrm{M} = \mathbf{C}^2$,

$$\mathrm{S} = \{(x\,,y) \in \mathbf{C}^2 \mid x = 0 \text{ ou } y = 0\}\,,$$

U un ouvert convexe contenant $(0\,,0)$. On prend pour $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{E} = \left\{ \omega(x\,,y) = a\left(\frac{1}{x}\right)dx + b\left(\frac{1}{y}\right)dy + \pi(x\,,y) \text{ tels que } \pi(x\,,y) \in \Omega_1(\mathrm{U}) \; a(t) \text{ et } b(t) \text{ étant des fonctions entières de } t \text{ telles que } a(0) = b(0) = 0 \right\}.$$

On pose alors pour $\omega \in \mathcal{E}$: $p(\omega) = a\left(\dfrac{1}{x}\right)dx + b\left(\dfrac{1}{y}\right)dy$.

$(\mathcal{E}, p)$ est un espace de 1-formes à partie singulière bien adaptée.

Exemple 6. – Soient $M = \mathbf{C}^2$,

$D_i = \{(x, y) | f_i(x, y) = u^i x + v^i y = 0, u^i$ et v^i appartenant à $\mathbf{C}\}$ $i = 1, \ldots, k$. On suppose que pour tous i, j tels que $1 \leqslant i, j \leqslant k$, $i \neq j$, on a : $df_i \wedge df_j \neq 0$ et on pose $S = \bigcup_{i=1}^{k} D_i$. Soit U un ouvert convexe contenant l'origine de $\mathbf{C}^2$. On prend pour $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{E} = \left\{ \omega(x, y) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{r=1}^{n_i} \frac{a^i_{r-1}}{f_i^{n_i - r + 1}} df_i + \pi(x, y) \text{ tels que} \right.$$
$$\left. a^i_{r-1} \in \mathbf{C} \quad \text{pour} \quad r = 1, \ldots, n_i, \quad i = 1, \ldots, k \quad \text{et} \quad \pi(x, y) \in \Omega_1(U) \right\}.$$

On pose alors pour $\omega \in \mathcal{E}$:

$$p(\omega) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{r=1}^{n_i} \frac{a^i_{r-1}}{f_i^{n_i - r + 1}} df_i .$$

$(\mathcal{E}, p)$ est un espace de 1-formes à partie singulière bien adaptée et est une généralisation de l'exemple 2, au cas de k droites singulières passant par l'origine de $\mathbf{C}^2$.

Exemple 7. – Soient $m = 2$, $M = \mathbf{C}^2$,

$$S = \{(x, y) \in \mathbf{C}^2 \mid x = 0 \text{ ou } y = 0\},$$

U un ouvert convexe contenant $(0, 0)$. On prend pour $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{E} = \left\{ \omega(x, y) = a\left(\frac{dy}{x} - y\frac{dx}{x^2}\right) + b\frac{dy}{y} + c\frac{d(x+y)}{x+y} + \pi(x, y) \right.$$
$$\left. \text{tels que } a, b, c \in \mathbf{C} \text{ et } \pi(x, y) \in \Omega_1(U) \right\}.$$

On pose alors pour $\omega \in \mathcal{E}$:

$$p(\omega) = a\left(\frac{dy}{x} - y\frac{dx}{x^2}\right) + b\frac{dy}{y} + c\frac{d(x+y)}{x+y} .$$

$(\mathcal{E}, p)$ est un espace de 1-formes à partie singulière bien adaptée. Cet exemple est intéressant, puisque l'on a en même temps un croisement non normal et la singularité $x = 0$ qui apparait dans le coefficient de dx et dans celui de dy.

II. Réduction de Birkhoff.

1) Notations.

a) Soient $X = \{a_1, \ldots, a_r\}$ un ensemble fini, $A(X)$ l'algèbre associative libre sur X à coefficients dans $\mathbf{C}$, et $L(X)$ l'algèbre de Lie libre sur X. Les algèbres $A(X)$ et $L(X)$ sont munies respectivement d'une graduation totale $(A^n(X))_{n \geq 0}$ et $(L^n(X))_{n \geq 1}$ où $L^n(X)$ est engendré par les alternants de degré n. De plus $A(X)$ (resp. $L(X)$) s'identifie aux polynômes (resp. polynômes de Lie) en les indéterminées $a_1, \ldots, a_r$ à coefficients complexes non commutatifs.

b) Soit $\hat{A}(X) = \prod_{n \geq 0} A^n(X)$ le module produit dans lequel on définit une multiplication par $(a.b)_n = \sum_{0 \leq i \leq n} a_i . b_{n-i}$. On munit $\hat{A}(X)$ de la topologie produit des topologies discrètes sur les facteurs $A^n(X)$. On obtient ainsi une algèbre topologique séparée complète ($\mathbf{C}$ étant muni de la topologie discrète) dans laquelle on a la propriété : si $b = (b_n)_{n \geq 0} \in \hat{A}(X)$, la famille $(b_n)_{n \geq 0}$ est sommable et $b = \sum_{n \geq 0} b_n$; de plus $A(X)$ est dense dans $\hat{A}(X)$. On appelle $\hat{A}(X)$ l'algèbre de Magnus associée à X. On définit de même $\hat{L}(X)$ complété de $L(X)$ pour la topologie définie plus haut.

c) On peut interpréter $\hat{A}(X)$ comme l'algèbre des séries formelles non commutatives en $a_1, \ldots, a_r$ à coefficients complexes et $\hat{L}(X)$ comme l'algèbre des séries formelles de Lie en $a_1, \ldots, a_r$ à coefficients complexes.

d) Soient M une variété analytique complexe, U un ouvert de M.

DEFINITION 1. – $f : U \longrightarrow \hat{A}(X)$ *est holomorphe sur* U *si*

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} f_n(x), \; f_n(x) \in A^n(X),$$

$$f_n(x) = \sum_{1 \leq i_1, \ldots, i_n \leq r} f_{i_1, \ldots, i_n}(x) \, a_{i_1} \ldots a_{i_n}$$

avec $f_{i_1,\ldots,i_n}(x)$ *holomorphe sur* U. *On note* $\mathrm{H}(\mathrm{U}, \hat{\mathrm{A}}(\mathrm{X}))$ *l'ensemble de ces fonctions.*

DEFINITION 2. – *Soit* $f: \quad \mathrm{U} \longrightarrow \hat{\mathrm{L}}(\mathrm{X}), \quad f(x) = \sum_{n \geq 1} f_n(x)$ *avec* $f_n(x) \in \mathrm{L}^n(\mathrm{X})$. *Si pour tout* n *il existe une base de* $\mathrm{L}^n(\mathrm{X})$ *sur laquelle* $f_n(x)$ *se décompose avec des coefficients holomorphes, on dit que* f *est holomorphe. On note* $\mathrm{H}(\mathrm{U}, \hat{\mathrm{L}}(\mathrm{X}))$ *l'ensemble de ces fonctions.*

DEFINITION 3. – *On appelle forme de Pfaff holomorphe à valeurs dans* $\hat{\mathrm{A}}(\mathrm{X})$ *toute forme*

$$\omega = \sum_{n \geq 0} \omega_n(x), \ \omega_n(x) = \sum_{1 \leq i_1,\ldots,i_n \leq r} \omega_{i_1,\ldots,i_n}(x)\, a_{i_1} \ldots a_{i_n}$$

avec $\omega_{i_1,\ldots i_n}(x) \in \Omega_1(\mathrm{U})$. *On note* $\Omega_1(\mathrm{U}, \hat{\mathrm{A}}(\mathrm{X}))$ *l'ensemble de ces* 1*-formes ainsi définies. On définit de même* $\Omega_1(\mathrm{U}, \hat{\mathrm{L}}(\mathrm{X}))$.

DEFINITION 4. – *Si* $f \in \mathrm{H}(\mathrm{U}, \hat{\mathrm{A}}(\mathrm{X}))$, *on pose* $df = \sum_{n \geq 0} df_n$ *avec* $df_n = \sum_{1 \leq i_1,\ldots,i_n \leq r} df_{i_1,\ldots,i_n}(x)\, a_{i_1} \ldots a_{i_n}$. *On définit de même* df *pour* $f \in \mathrm{H}(\mathrm{U}, \hat{\mathrm{L}}(\mathrm{X}))$, $d\omega$ *pour* $\omega \in \Omega_1(\mathrm{U}, \hat{\mathrm{A}}(\mathrm{X}))$ (resp. $\Omega_1(\mathrm{U}, \hat{\mathrm{L}}(\mathrm{X}))$ *et la notion de produit extérieur.*

On note $\Omega_{1,\mathcal{E}}(\mathrm{U}-\mathrm{S}, \hat{\mathrm{A}}(\mathrm{X}))$ (resp. $\Omega_{1,\mathcal{E}}(\mathrm{U}-\mathrm{S}, \hat{\mathrm{L}}(\mathrm{X}))$ les formes de Pfaff dont les coefficients sont des éléments de $\mathcal{E}$, c'est-à-dire $\omega_{i_1,\ldots,i_n} \in \mathcal{E}\ \forall n, \forall i_1, \ldots, i_n$. De même on note $\Omega_{1,p(\mathcal{E})}(\mathrm{U}-\mathrm{S}, \hat{\mathrm{L}}(\mathrm{X}))$ les formes de Pfaff dont les coefficients sont dans $p(\mathcal{E})$.

2) Algèbre d'holonomie associée à $\omega \in \Omega_{1,\mathcal{E}}(\mathrm{U}-\mathrm{S}, \mathrm{L}(\mathrm{X}))$.

Soit $\omega \in \Omega_{1,\mathcal{E}}(\mathrm{U}-\mathrm{S}, \mathrm{L}(\mathrm{X}))$, c'est-à-dire $\omega = \sum_{1 \leq i \leq n} \omega_i$. On cherche les fonctions $f \in \mathrm{H}(\mathrm{U}-\mathrm{S}, \hat{\mathrm{A}}(\mathrm{X}))$ qui vérifient :

$$(\mathrm{A})\ df = f\,\omega\,.$$

On dit que (A) est le système de Pfaff associé à ω. La condition de complète intégrabilité (qui exprime le fait que $d^2 f = 0$) s'écrit

$d\omega + \omega \wedge \omega = 0$. *On suppose dorénavant que* $d\omega = 0$. La relation de complète intégrabilité donne alors :

$$\omega_1 \wedge \omega_1 = 0 \,,\ \omega_1 \wedge \omega_2 + \omega_2 \wedge \omega_1 = 0 \,, \dots ,$$
$$\omega_1 \wedge \omega_n + \dots + \omega_n \wedge \omega_1 = 0 \,,$$

ce qui équivaut à un certain nombre *fini* de relations de la forme (R) :

$$\Sigma\, m_{i,j}\, [a_i\,, a_j] = 0 \,,\ \Sigma\, m_{i,j,k}\, [a_i\,, [a_j\,, a_k]] = 0 \,, \dots$$
$$\Sigma\, m_{i_1,\dots,i_{n+1}}\, [a_{i_1}\,, [a_{i_2}\,, \dots . [a_{i_n}\,, a_{i_{n+1}}] \dots] = 0 \,.$$

Soit $\mathcal{R}$ (resp. $\mathcal{S}$) l'idéal de $L(X)$ (resp. $A(X)$) engendré par ces relations.

Ce sont des idéaux gradués. Posons :

$L(\omega) = L(X)/\mathcal{R}$, $A(\omega) = A(X)/\mathcal{S}$ et $\pi : A(X) \longrightarrow A(\omega)$ la projection canonique. L'algèbre $L(\omega)$ (resp. $A(\omega)$) est appelée l'algèbre de Lie (resp. l'algèbre) d'holonomie associée à ω.

$L(\omega)$ (resp. $A(\omega)$) est graduée par $L^n(\omega) = L^n(X)/\mathcal{R} \cap L^n(X)$, $n \geqslant 1$ (resp. $A^n(\omega) = A^n(X)/\mathcal{S} \cap A^n(X)$, $n \geqslant 0$).

3) Algèbres et groupe de Magnus.

On définit comme plus haut $\hat{A}(\omega) = \prod_{n \geqslant 0} A^n(\omega)$ et $\hat{L}(\omega)$. On appelle $\hat{A}(\omega)$ l'algèbre de Magnus associée à $a_1, \dots, a_r$ et ω. On peut interpréter $\hat{A}(\omega)$ comme étant l'algèbre des séries formelles non commutatives en $a_1, \dots, a_r$ où les $a_1, \dots, a_r$ sont liées par les relations (R). De même $\hat{L}(\omega)$ s'interprète comme l'algèbre des séries formelles de Lie en $a_1, \dots, a_r$ où les $a_1, \dots, a_r$ sont liées par les relations (R).

On appelle *groupe de Magnus* associé à $a_1, \dots, a_r$ et ω le groupe

$$\Gamma(\omega) = \left\{ b = \sum_{n \geqslant 0} b_n \,,\ b_0 = 1 \,,\ b \in \hat{A}(\omega) \right\}.$$

PROPOSITION. – *Soit* $\mathcal{M} = \bigcup_{n \geqslant 1} A^n(\omega)$. *Alors l'application exponentielle est un homéomorphisme de* $\mathcal{M}$ *sur* $\Gamma(\omega)$ *et l'application logarithme en est l'application réciproque.*

$$\left(\exp(x) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{x^n}{n!}\,,\ x \in \mathfrak{M} \text{ et} \right.$$

$$\left. \log(y) = \sum_{n \geqslant 1} (-1)^{n-1} \frac{(y-1)^n}{n}\ \ y \in \Gamma(\omega)\right).$$

Preuve. – On remarque que $A(\omega)$ est une algèbre associative, unifère, séparée, complète pour la filtration $A_m(\omega) = \bigcup_{k \geqslant m} A^k(\omega)$ et on applique Bourbaki ([9]).

4) Groupe de Hausdorff.

Soient $B(X) = A(X) \otimes A(X)$, $B^n(X) = \sum_{i+j=n} A^i(X) \otimes A^j(X)$ et $\hat{B}(X)$ l'algèbre complète associée. On sait ([9]) qu'il existe un unique coproduit c faisant de $B(X)$ une bigèbre et tel que les éléments de X soient primitifs. En particulier $c : A(X) \longrightarrow B(X)$ est un homomorphisme gradué de degré 0, donc se prolonge en un homomorphisme continu de $\hat{A}(X)$ dans $\hat{B}(X)$. De plus il passe au quotient.

D'après ([9]) on sait que

$$L^n(X) = \{b_n \in A^n(X) / c(b_n) = b_n \otimes 1 + 1 \otimes b_n\}.$$

En remarquant que $\mathcal{R}^n = \{r_n \in \mathcal{S}^n / c(r_n) = r_n \otimes 1 + 1 \otimes r_n\}$ on en deduit que $L^n(\omega) = \{x_n \in A^n(\omega) / c(x_n) = x_n \otimes 1 + 1 \otimes x_n\}$.

Définissons

$$\Delta(X) = \left\{ b \in \hat{A}(X) / b = \sum_{n \geqslant 0} b_n\,,\ b_0 = 1\,,\ c(b_n) = \sum_{i+j=n} b_i \otimes b_j \right\}$$

et

$$\Delta(\omega) = \left\{ x \in \hat{A}(\omega) / x = \sum_{n \geqslant 0} x_n\,,\ x_0 = 1\,,\ c(x_n) = \sum_{i+j=n} x_i \otimes x_j \right\}.$$

Remarquons que $\Delta(\omega) = \hat{\pi}(\Delta(X))$ où $\hat{\pi} : \hat{A}(X) \longrightarrow \hat{A}(\omega)$ est l'épimorphisme canonique prolongeant π. On montre comme dans ([9]) le

THEOREME. – *La restriction à $\hat{L}(\omega)$ de l'application exponentielle de $\hat{A}(\omega)$ est une bijection de $\hat{L}(\omega)$ sur le sous-groupe fermé $\Delta(\omega)$ de $\Gamma(\omega)$.*

On peut ainsi transporter par l'application exponentielle la loi de groupe de $\Delta(\omega)$ à $\hat{L}(\omega)$ et définir une structure de groupe topologique complet sur $\hat{L}(\omega)$ pour la loi H définie par $a\mathrm{H}b = \log(\exp(a).\exp(b))$. Le groupe $(\hat{L}(\omega), \mathrm{H})$ est appelé le groupe de Hausdorff associé à $a_1, \ldots, a_r$ et ω.

5) Fonctions et formes holomorphes à valeurs dans $\hat{A}(\omega)$ *et* $\hat{L}(\omega)$.

DEFINITION. – $f \in \mathrm{H}(\mathrm{U}, \hat{A}(\omega))$ (*resp.* $\mathrm{H}(\mathrm{U}, \hat{L}(\omega))$) *si* $f = \sum_{n \geq 0} f_n$ $\left(\textit{resp. } f = \sum_{n \geq 1} f_n\right)$, f_n *se décomposant sur une base de* $A^n(\omega)$ (*resp.* $L^n(\omega)$) *en composantes holomorphes sur* U.

DEFINITION. – $\alpha \in \Omega_{1,\mathcal{E}}(\mathrm{U}-\mathrm{S}, \hat{A}(\omega))$ (*resp.* $\Omega_{1,\mathcal{E}}(\mathrm{U}-\mathrm{S}, \hat{L}(\omega))$ *resp.* $\Omega_{1,p(\mathcal{E})}(\mathrm{U}-\mathrm{S}, \hat{L}(\omega))$ *si* $\alpha = \sum_{n \geq 0} \alpha_n \left(\textit{resp. } \alpha = \sum_{n \geq 1} \alpha_n\right)$, α_n *se décomposant sur une base de* $A^n(\omega)$ (*resp.* $L^n(\omega)$) *en composantes appartenant à* $\mathcal{E}$ (*resp.* $\mathcal{E}$, *resp.* $p(\mathcal{E})$).

6) Enoncé du théorème fondamental.

Supposons U simplement connexe. On a alors le

THEOREME 1. – *Soient* $\omega \in \Omega_{1,\mathcal{E}}(\mathrm{U}-\mathrm{S}, \mathrm{L}(\omega))$, $d\omega = 0$ *et*

$$(\mathrm{I}) \quad df = f\omega.$$

Il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{H}(\mathrm{U}, \hat{A}(\omega))$ *tel que* $\log \mathrm{P} \in \mathrm{H}(\mathrm{U}, \hat{L}(\omega))$, *il existe* $\tilde{\omega} \in \Omega_{1,p(\mathcal{E})}(\mathrm{U}-\mathrm{S}, \hat{L}(\omega))$ $d\tilde{\omega} = 0$, $\tilde{\omega} \wedge \tilde{\omega} = 0$, *tels que la transformation* $f = \mathrm{Z}\,\mathrm{P}$ *transforme* (I) *en*

$$(\mathrm{II}) \quad d\mathrm{Z} = \mathrm{Z}\tilde{\omega}.$$

7) Preuve du théorème fondamental.

1) Si P et $\tilde{\omega}$ existent, alors

$$df = d\mathrm{Z}\,\mathrm{P} + \mathrm{Z}\,d\mathrm{P} = \mathrm{Z}\,\tilde{\omega}\,\mathrm{P} + \mathrm{Z}\,d\mathrm{P} = \mathrm{Z}\mathrm{P}\omega$$

et

$$d\mathrm{P} = \mathrm{P}\,\omega - \tilde{\omega}\mathrm{P}.$$

Posons $P = \sum_{n \geqslant 0} P_n$, $\tilde{\omega} = \sum_{n \geqslant 1} \tilde{\omega}_n$.

On doit avoir nécessairement

$$P_0 = 1 ,$$

$$dP_n = \sum_{\substack{i+j=n \\ i \geqslant 0 \\ j \geqslant 1}} P_i \, \omega_j - \sum_{\substack{i+j=n \\ i \geqslant 1 \\ j \geqslant 0}} \tilde{\omega}_i \, P_j \qquad n = 1, 2, \ldots$$

$$\sum_{\substack{i+j=n \\ i \geqslant 1 \\ j \geqslant 1}} \tilde{\omega}_i \wedge \tilde{\omega}_j = 0 \qquad n = 1, 2, \ldots$$

$$d\,\tilde{\omega}_n = 0 \qquad n = 1, 2, \ldots$$

On va successivement définir P_0 , $\tilde{\omega}_1$, P_1 , $\tilde{\omega}_2, \ldots, P_{n-1}$, $\tilde{\omega}_n$, $P_n \ldots$, et montrer que ces expressions satisfont aux conditions imposées ci-dessus. On vérifiera ensuite que $\log P \in H(U, \hat{L}(\omega))$ et $\tilde{\omega} \in \Omega_{1,p(\mathcal{E})}(U - S, \hat{L}(\omega))$.

2) On pose $P_0 = 1$.

3) Soit $\omega_1 = \sum_{1 \leqslant k \leqslant r} \omega_1^k \, a_k \quad (\omega_1^k \in \mathcal{E} \;\; k = 1, \ldots, r)$.

On définit $p(\omega_1) = \sum_{1 \leqslant k \leqslant r} p(\omega_1^k)\, a_k$ et $\tilde{\omega}_1 = p(\omega_1)$.

Alors $\omega_1 - \tilde{\omega}_1$ est holomorphe sur U à valeurs dans $L^1(X)$. De plus $d\tilde{\omega}_1 = 0$ (propriété de $\mathcal{E}$) et $d\omega_1 = 0$, d'où $d(\omega_1 - \tilde{\omega}_1) = 0$.

Soit $\ell(x)$ un chemin d'origine e (fixée une fois pour toutes) et d'extrémité x dans U. On pose $P_1 = \int_{\ell(x)} \omega_1 - \tilde{\omega}_1$. Comme $\omega_1 - \tilde{\omega}_1$ est fermée, holomorphe et U simplement connexe, $\int_{\ell(x)} \omega_1 - \tilde{\omega}_1$ est indépendant du choix du chemin d'origine e et d'extrémité x dans U et il vient $dP_1 = \omega_1 - \tilde{\omega}_1$. On a d'autre part $\tilde{\omega}_1 \wedge \tilde{\omega}_1 = 0$. En effet, sur une base de $A^2(\omega)$ les coefficients de $\omega_1 \wedge \omega_1$ sont de la forme $\sum_{i<j} \omega_1^i \wedge \omega_1^j$ $(\omega_1^i \in \mathcal{E}$, $\omega_1^j \in \mathcal{E})$.

Comme $\sum_{i<j} \omega_1^i \wedge \omega_1^j = 0$, il vient $\sum_{i<j} p(\omega_1^i) \wedge p(\omega_i^j) = 0$ (propriété iv) de $\mathcal{E}$), ce qui signifie que $\widetilde{\omega}_1 \wedge \widetilde{\omega}_1 = 0$.

4) Considérons $P_1\, \omega_1 + \omega_2 - \widetilde{\omega}_1\, P_1$.

A – Montrons que $P_1\, \omega_1 + \omega_2 - \widetilde{\omega}_1\, P_1 \in \Omega_{1,\mathcal{E}}\,(U - S\,,\, A^2(\omega))$.

a – On a $d(P_1\, \omega_1 + \omega_2 - \widetilde{\omega}_1\, P_1) = 0$ car $\omega_1 \wedge \omega_1 = 0$ par hypothèse et $\widetilde{\omega}_1 \wedge \widetilde{\omega}_1 = 0$ d'après 3).

b – Cette condition s'exprime sur une base de $A^2(\omega)$ de la façon suivante :

$d(\Sigma\, h_i\, \pi^i) = 0$ où $h_i \in H(U)$, $\pi^i \in \mathcal{E}$, puisque $d(P_1\, \omega_1 - \widetilde{\omega}_1\, P_1) = 0$ ($d(\omega_2) = 0$ par hypothèse). Par la propriété iii) de $\mathcal{E}$ il vient $\Sigma\, h_i\, \pi^i \in \mathcal{E}$, c'est-à-dire $P_1\, \omega_1 - \widetilde{\omega}_1\, P_1 \in \Omega_{1,\mathcal{E}}\,(U - S\,,\, A^2(\omega))$. Comme $\omega_2 \in \Omega_{1,\mathcal{E}}\,(U - S\,,\, L^2(\omega))$, on a donc

$$P_1\, \omega_1 + \omega_2 - \widetilde{\omega}_1\, P_1 \in \Omega_{1,\mathcal{E}}\,(U - S\,,\, A^2(\omega)).$$

B – Soit $\mathcal{B}_2$ une base de $A^2(\omega)$. Si

$$P_1\, \omega_1 + \omega_2 - \widetilde{\omega}_1\, P_1 = \sum_{b \in \mathcal{B}_2} q_b\, b\,,\quad q_b \in \mathcal{E}\,,$$

on définit $p(P_1\, \omega_1 + \omega_2 - \widetilde{\omega}_1\, P_1) = \sum_{b \in \mathcal{B}_2} p(q_b)\, b$.

Posons $\widetilde{\omega}_2 = p(P_1\, \omega_1 + \omega_2 - \widetilde{\omega}_1\, P_1)$. On a alors $d\widetilde{\omega}_2 = 0$ (propriété i) de $\mathcal{E}$), donc $d(P_1\, \omega_1 + \omega_2 - \widetilde{\omega}_1\, P_1 - \widetilde{\omega}_2) = 0$ et $P_1\, \omega_1 + \omega_2 - \widetilde{\omega}_1\, P_1 - \widetilde{\omega}_2 \in H(U\,,\, A^2(\omega))$, ce qui permet de définir P_2 par $P_2 = \int_{\ell(x)} P_1\, \omega_1 + \omega_2 - \widetilde{\omega}_1\, P_1 - \widetilde{\omega}_2$.

On a immédiatement $dP_2 = P_1\, \omega_1 + \omega_2 - \widetilde{\omega}_1\, P_1 - \widetilde{\omega}_2$ et on vérifie sans peine que $\widetilde{\omega}_1 \wedge \widetilde{\omega}_2 + \widetilde{\omega}_2 \wedge \widetilde{\omega}_1 = 0$. (Pour plus de détails voir ([10]).

5) On montre par récurrence sur n (cf. ([10]) que

$$\widetilde{\omega}_n = p\Big(\sum_{\substack{k+i=n \\ k \geq 0 \\ i \geq 1}} P_k\, \omega_i - \sum_{\substack{k+i=n \\ k \geq 1 \\ i \geq 1}} \widetilde{\omega}_k\, P_i \Big)$$

$$\mathrm{P}_n = \int_{\ell(x)} \Big(\sum_{\substack{k+i=n \\ k \geq 0 \\ i \geq 1}} \mathrm{P}_k \, \omega_i - \sum_{\substack{k+i=n \\ i \geq 1 \\ k \geq 1}} \widetilde{\omega}_k \, \mathrm{P}_i - \widetilde{\omega}_n \Big)$$

répondent à la question.

6) Il reste à voir que $\widetilde{\omega} \in \Omega_{1,p(\mathfrak{s})} (\mathrm{U} - \mathrm{S} , \hat{\mathrm{L}}(\omega))$, $\log \mathrm{P} \in \mathrm{H}(\mathrm{U} , \hat{\mathrm{L}}(\omega))$ car a priori $\widetilde{\omega} \in \Omega_{1,p(\mathfrak{s})} (\mathrm{U} - \mathrm{S} , \hat{\mathrm{A}}(\omega))$, $\log \mathrm{P} \in \mathrm{H}(\mathrm{U} , \hat{\mathrm{A}}(\omega))$.

Soient U un ouvert d'une variété analytique complexe M de dimension m, $\omega_k \in \Omega_1 (\mathrm{U} , \mathrm{A}^k(\omega))$. On écrit $\omega_k = \sum_{1 \leq i \leq m} \omega_k^i \, dx_i$ et on définit $c(\omega_k)$ par $c(\omega_k) = \sum_{1 \leq i \leq m} c(\omega_k^i) \, dx_i$ où c est le coproduit considéré dans 4 —. On vérifie alors (cf. ([10])) que pour tout entier n :

$$c(\widetilde{\omega}_n) = 1 \otimes \widetilde{\omega}_n + \widetilde{\omega}_n \otimes 1 \, , \, c(\mathrm{P}_n) = \sum_{\substack{i+j=n \\ i,j \geq 0}} \mathrm{P}_i \otimes \mathrm{P}_j \, .$$

8) Aspect convergent.

A — Notations.

Soient A une algèbre filtrée, normée, complète de dimension finie sur $\mathbf{C}$, $\mathfrak{G}$ une sous-algèbre de Lie de A, normée, complète.

On note $\mathrm{P}(\mathfrak{G}^r , \mathrm{A})$ l'espace vectoriel des polynômes continus sur $\mathfrak{G}^r$ à valeurs dans A, $\hat{\mathrm{P}}(\mathfrak{G}^r , \mathrm{A})$ l'espace vectoriel des séries formelles à composantes continues (complèté de $\mathrm{P}(\mathfrak{G}^r , \mathrm{A})$ pour la topologie associée à la filtration naturelle de $\mathrm{P}(\mathfrak{G}^r , \mathrm{A})$).

Dans $\hat{\mathrm{A}}(\omega)$ on peut substituer aux éléments $a_1 , \ldots , a_r$ liés par les relations (R)) des éléments $(b_1 , \ldots , b_r) \in \mathfrak{G}^r$, d'où un morphisme de $\hat{\mathrm{A}}(\omega)$ dans $\hat{\mathrm{P}}(\mathfrak{G}^r , \mathrm{A})$.

On note par $\Gamma(\mathfrak{G}^r , \mathfrak{G}) = \Big\{ b \in \hat{\mathrm{P}}(\mathfrak{G}^r , \mathrm{A}) \, , \, b = \sum_{n \geq 0} b_n \, , \, b_0 = 1 \Big\}$.

DEFINITIONS. — 1) *Soient* $b \in \hat{\mathrm{P}}(\mathfrak{G}^r , \mathrm{A})$ *et* Ω *un ouvert de* $\mathfrak{G}^r$ *contenant* $0 \in \mathfrak{G}^r$. *Si la série formelle* b *est absolument convergente dans* A *pour tout* $(a_1 , \ldots , a_r) \in \Omega$, *alors* $b(a_1 , \ldots , a_r)$ *définit une fonction analytique sur* Ω *qu'on appelle* $\mathfrak{G}$ *-analytique sur* Ω.

2) Plus généralement soit M une variété analytique complexe. On dit qu'une fonction $F : M \times \mathfrak{G}^r \longrightarrow A$ est $\mathfrak{G}$ -analytique au voisinage de $x_1 \times 0 \in M \times \mathfrak{G}^r$ s'il existe un ouvert $0(x_1)$ contenant x_1, un ouvert Ω de $\mathfrak{G}^r$ contenant $0 \in \mathfrak{G}^r$ et une série formelle $b : M \times \mathfrak{G}^r \longrightarrow \hat{P}(\mathfrak{G}^r, A)$, $b(x ; a_1, \ldots, a_r) = \sum_{n \geqslant 0} b_n(x ; a_1, \ldots, a_r)$ avec les propriétés suivantes :

(i) $b_n(x : a_1, \ldots, a_r)$ est une fonction holomorphe sur $0(x_1)$ à valeurs dans A

(ii) la série est absolument convergente dans A sur Ω pour tout $x \in 0(x_1)$ et uniformément convergente par rapport à $x \in 0(x_1)$ sur Ω

(iii) $F(x ; a_1, \ldots, a_r) = b(x ; a_1, \ldots, a_r)$ pour tout $(x, a_1, \ldots, a_r) \in 0(x_1) \times \Omega$.

B – Théorème (aspect convergent)

Soient $e \in M - S$ fixé et U ouvert simplement connexe de M tel que tout $x \in U$ puisse être joint à e par un chemin $\ell(x)$ d'origine e et d'extrémité x dans U (resp. contenu dans $U - S$ si $x \in U - S$) de longueur L au plus.

Considérons $\omega(x ; a_1, \ldots, a_r)$ fermée. On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des $(a_1, \ldots, a_r) \in \mathfrak{G}^r$ tels que ω soit complètement intégrable. On a alors le théorème suivant, version convergente du théorème 1 de 6 :

THEOREME 2. – *La fonction* P *définie dans le théorème* 1 *est* $\mathfrak{G}$ *-analytique sur* $U \times \Omega$ *où* Ω *est un ouvert dans* $\mathcal{C}$ *contenant* 0.

Preuve. – 1) Supposons tout d'abord que $x \in U - S$.

Soient $\omega_n(y, a_1, \ldots, a_r) = \sum_{1 \leqslant i_1, \ldots, i_n \leqslant r} \omega_{i_1, \ldots, i_r}(y)\, a_{i_1} \ldots a_{i_n}$,

$\omega_{i_1, \ldots, i_n}(y) = \sum_{1 \leqslant j \leqslant m} \omega^j_{i_1, \ldots, i_n}(y)\, dy_j$ où les $\omega^j_{i_1, \ldots, i_n}(y)$ sont des fonctions à valeurs dans $\mathbf{C}$, holomorphes pour $y \in \ell(x)$. Posons $\sum_{1 \leqslant j \leqslant m} |dy_j| = ds$ et $\sum_{1 \leqslant j \leqslant r} \|a_j\| = \widetilde{A}$. Il existe alors $\alpha_n \geqslant 0$ tel que

$$|\omega_{i_1,\dots,i_n}(y)| \leqslant \alpha_n \sum_{1 \leqslant j \leqslant m} |dy_j| = \alpha_n\, ds.$$

On en déduit que

$$\|\omega_n(y)\| \leqslant \sum_{1 \leqslant i_1,\dots,i_n \leqslant r} \alpha_n\, ds\, \|a_{i_1}\| \dots \|a_{i_n}\| = \alpha_n\, ds\, \widetilde{\mathrm{A}}^n.$$

De plus les ω_n sont toutes nulles à partir d'une valeur $n_0 \left(\text{car } \omega = \sum_{n \geqslant 1} \omega_n \text{ est un polynôme de Lie en } a_1, \dots, a_r\right)$, donc tous les α_n sont nuls à partir de n_0. Considérons alors $d\mathrm{P}_n = \sum_{\substack{i+j=n\\ i \geqslant 0\\ j \geqslant 1}} \mathrm{P}_i \omega_j - \sum_{\substack{i+j=n\\ i \geqslant 0\\ j \geqslant 1}} \widetilde{\omega}_j \mathrm{P}_i$.

On a :

$$\|d\mathrm{P}_1\| \leqslant \|\omega_1\| + \|\widetilde{\omega}_1\| \leqslant 2\alpha_1\, ds\, \widetilde{\mathrm{A}} = p_1'(s)\, ds\, \widetilde{\mathrm{A}}$$

$$\|\mathrm{P}_1\| \leqslant p_1(s)\, \widetilde{\mathrm{A}}, \; p_1(0) = 0.$$

D'autre part il vient

$$\begin{aligned}
\|d\mathrm{P}_2\| &\leqslant \|\mathrm{P}_1\| \left(\|\omega_1\| + \|\widetilde{\omega}_1\|\right) + \|\omega_2\| + \|\widetilde{\omega}_2\| \\
&\leqslant \|\mathrm{P}_1\|\, \|d\mathrm{P}_1\| + \|\omega_2\| + \|\widetilde{\omega}_2\| \\
&\leqslant p_1(s)\, \widetilde{\mathrm{A}}\, p_1'(s)\, ds\, \widetilde{\mathrm{A}} + \alpha_2\, ds\, \widetilde{\mathrm{A}}^2 + \|\widetilde{\omega}_2\| \\
&\leqslant 2(p_1(s)\, p_1'(s) + \alpha_2)\, ds\, \widetilde{\mathrm{A}}^2 = p_2'(s)\, ds\, \widetilde{\mathrm{A}}^2 \\
\|\mathrm{P}_2\| &\leqslant p_2(s)\, \widetilde{\mathrm{A}}^2, \; p_2(0) = 0, \; p_2'(s) = 2(p_1(s)\, p_1'(s) + \alpha_2).
\end{aligned}$$

Supposons donc par récurrence que :

$$\|d\mathrm{P}_i\| \leqslant p_i'(s)\, ds\, \widetilde{\mathrm{A}}^i, \; \|\mathrm{P}_i\| \leqslant p_i(s)\, \widetilde{\mathrm{A}}^i, \; p_i(0) = 0,$$

$$p_i'(s) = 2\Bigl(\sum_{1 \leqslant k \leqslant i-1} p_k'\, p_{i-k} + \alpha_i\Bigr), \quad \text{pour } i = 2, \dots, n-1$$

et montrons que :

$$\|d\mathrm{P}_n\| \leqslant p_n'(s)\, ds\, \widetilde{\mathrm{A}}^n, \; \|\mathrm{P}_n\| \leqslant p_n(s)\, \widetilde{\mathrm{A}}^n, \; p_n(0) = 0$$

$$p_n'(s) = 2\Bigl(\sum_{1 \leqslant k \leqslant n-1} p_k'\, p_{n-k} + \alpha_n\Bigr).$$

On a :

$$\|dP_n\| \leqslant \sum_{1 \leqslant i \leqslant n-1} \|P_i\| \left(\|\omega_{n-i}\| + \|\widetilde{\omega}_{n-i}\|\right) + \|\omega_n\| + \|\widetilde{\omega}_n\| \ (n \geqslant 2)$$

$$\leqslant \sum_{1 \leqslant i \leqslant n-1} \|P_i\| \, \|dP_{n-i}\| + \|\omega_n\| + \|\widetilde{\omega}_n\|$$

$$\leqslant \sum_{1 \leqslant i \leqslant n-1} p_i(s) \widetilde{A}^i \, p'_{n-i}(s) \, ds \, \widetilde{A}^{n-i} + \alpha_n \, ds \, \widetilde{A}^n + \|\widetilde{\omega}_n\|$$

$$\leqslant 2\left(\sum_{1 \leqslant i \leqslant n-1} p_i(s) \, p'_{n-i}(s) + \alpha_n\right) ds \, \widetilde{A}^n = p'_n(s) \, ds \, \widetilde{A}^n .$$

Considérons maintenant la série formelle

$$p(s, \widetilde{A}) = -1 + \sum_{n \geqslant 1} p_n(s) \widetilde{A}^n .$$

On a $p(0, \widetilde{A}) = -1$, les coefficients $p_n(s)$ sont positifs et la série vérifie l'équation différentielle

$$(1) \quad \frac{dx}{ds} + 2x \frac{dx}{ds} + 2 \sum_{n \geqslant 1} \alpha_n \widetilde{A}^n = 0$$

où $\sum_{n \geqslant 1} \alpha_n \widetilde{A}^n$ est polynôme en $\widetilde{A}$. Ainsi p est la solution de (1) telle que $x(0) = -1$. Or (1) s'intègre en :

$$x^2 + x + 2 \sum_{n \geqslant 1} \alpha_n \widetilde{A}^n s = 0, \qquad \text{et } p = \frac{-1 - \sqrt{1 - 8 \sum_{n \geqslant 1} \alpha_n \widetilde{A}^n s}}{2} .$$

Cette fonction admet un développement en série entière en $\widetilde{A}$ convergent, pourvu que $\sum_{n \geqslant 1} \alpha_n \widetilde{A}^n s < \frac{1}{8}$. Or

$$\sum_{1 \leqslant n \leqslant n_0 - 1} \alpha_n \widetilde{A}^n s \leqslant \sum_{1 \leqslant n \leqslant n_0 - 1} \alpha_n \widetilde{A}^n L .$$

Donc si $\sum_{1 \leqslant n \leqslant n_0 - 1} \alpha_n \widetilde{A}^n < \frac{1}{8L}$ (ce qui est vérifié dès que $\widetilde{A}$ est assez petit), la série $\sum_n p_n(s) \widetilde{A}^n$ converge.

Finalement $\|P_n\| \leqslant p_n(s)\, \widetilde{A}^n\ (n \geqslant 1)$, donc $1 + \sum_{n \geqslant 1} P_n$ est absolument convergente dans A, et uniformément par rapport à x dans $U - S$ (puisque pour tout x, la longueur de $\ell(x)$ est majorée par L).

2) Si $x \in S$ alors le chemin $\ell(x)$ rencontre S.

Mais $P = 1 + \sum_{n \geqslant 1} P_n$ avec

$$P_n(x) = \sum_{1 \leqslant i_1, \ldots, i_n \leqslant r} f_{i_1, \ldots, i_n}(x)\, a_{i_1} \ldots a_{i_n}$$

et $f_{i_1, \ldots, i_n}(x)$ est holomorphe. Soit V un domaine contenant x et tel que la frontière ∂V ne rencontre pas S. On a alors d'après le principe du maximum $|f_{i_1, \ldots, i_n}(x)| \leqslant |f_{i_1, \ldots, i_n}(y)|$ où $y \in \partial V$. On est ainsi ramené au cas précédent.

9) Applications.

A – La situation décrite dans l'exemple 6 se généralise à m variables. Prenons $p = \ell$, $\ell \leqslant m$. On a $S = D_1 \cup D_2 \cup \ldots \cup D_\ell$ et l'on peut supposer que, quitte à se restreindre à un voisinage ouvert de 0 simplement connexe que

$$D_i = \{(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbf{C}^m \,/\, x_i = 0\}$$

$i = 1, \ldots, \ell$. Soit $\omega = \sum_{1 \leqslant j \leqslant r} \omega_j a_j$ avec $\omega_j(x) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant m} \omega_i^j(x)\, dx_i$ et $\omega_j(x) \in \mathcal{E}$ $(j = 1, \ldots, r)$, c'est-à-dire :

$$\omega_i^j(x) = \frac{a_{p_i}^{j,i}}{x_i^{p_i}} + \ldots + \frac{a_1^{j,i}}{x_i} + \alpha_i(x), \; i = 1, \ldots, \ell$$

$$\omega_i^j(x) = \alpha_i(x) \qquad\qquad i = \ell + 1, \ldots, m \text{ (si } \ell < m)$$

avec $\alpha_i(x)$ holomorphe au voisinage de 0.

Alors ω_i^j admet un pôle d'ordre p_i par rapport à x_i en $x_i = 0$, est holomorphe par rapport aux autres variables pour $i = 1, \ldots, \ell$ et ω_i^j est holomorphe pour $i = \ell + 1, \ldots, m$ (si $\ell < m$). On est ainsi dans la situation décrite dans [3] ou [4]. On montre aisément (cf [10]) qu'on réobtient le théorème de séparation des variables.

Le théorème 2 permet en outre d'affirmer que la transformation P est $\mathfrak{G}$ -analytique si $(a_1, \ldots, a_r)$ est dans un voisinage suffisamment petit de 0 dans une algèbre normée complète.

B – Retrouvons un résultat qui se rapproche de celui de B. Malgrange déjà cité (cf. [7]). Pour cela considérons $\omega = \sum_{1 \leq i \leq r} \omega_i a_i$ avec $\omega_i \in \mathcal{E}$

$$\mathcal{E} = \left\{ \alpha(x, y) = \frac{a(x)}{y} dx + \frac{xb(x)}{y^2} dy + \pi(x, y)/a(x) + (xb(x))' = 0 \right\}$$

(exemple 3). Appliquons le théorème précédent. Il existe P holomorphe inversible tel que si $f = \mathrm{ZP}$ on a $d\mathrm{Z} = \mathrm{Z}\widetilde{\omega}$ avec $\widetilde{\omega} \in \Omega_{1, p(\mathcal{E})}(\mathrm{U} - \mathrm{S}, \hat{\mathrm{L}}(\omega))$, c'est-à-dire

$$\widetilde{\omega} = \sum_{n \geq 1} \sum_{1 \leq i_1, \ldots, i_n \leq r} \widetilde{\omega}_{i_1, \ldots, i_n} a_{i_1} \ldots a_{i_n}$$

(qui est en fait une série de Lie) avec

$$\widetilde{\omega}_{i_1, \ldots, i_n}(x, y) \in \Omega_{1, p(\mathcal{E})}(\mathrm{U} - \mathrm{S}, \mathbf{C}),$$

ou encore

$$\widetilde{\omega}_{i_1, \ldots, i_n}(x, y) = \frac{a_{i_1, \ldots, i_n}(x)}{y} dx + \frac{xb_{i_1, \ldots, i_n}(x)}{y^2} dy,$$

soit $\quad \widetilde{\omega} = \dfrac{a(x)}{y} dx + \dfrac{xb(x)}{y^2} dy \quad$ avec $\quad a(x) + (xb(x))' = 0,$

$a(x) \in \hat{\mathrm{L}}(\omega)$, $b(x) \in \hat{\mathrm{L}}(\omega)$ et holomorphes, c'est-à-dire une forme réduite comme dans Malgrange.

C. Equation de "type F_1".

Rappelons que si $z(x, y)$ est solution du système d'équations aux dérivées partielles vérifiées par la fonction F_1 dans $\mathbf{C}^2$, et que si l'on pose

$$\mathrm{Y}(x, y) = \begin{pmatrix} z \\ x \dfrac{\partial z}{\partial z} \\ y \dfrac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix}$$

alors Y satisfait à :

$$dY = \left(A_1 \frac{dx}{x} + A_2 \frac{dy}{y} + A_3 \frac{d(x-y)}{x-y} + A_4 \frac{dx}{x-1} + A_5 \frac{dy}{y-1} \right) Y$$

où A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 sont des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients constants. Soient alors $X = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ et $\omega = a_1 \dfrac{dx}{x} + a_2 \dfrac{dy}{y} + a_3 \dfrac{d(x-y)}{x-y} + a_4 \dfrac{dx}{x-1} + a_5 \dfrac{dy}{y-1}$.

On peut encore écrire ω sous la forme $\omega = \sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant 5} \omega_i a_i$, où les ω_i sont fermées et appartiennent à

$$\mathcal{E} = \left\{ \alpha(x,y) = \frac{a}{x} dx + \frac{b}{y} dy + c \frac{d(x-y)}{x-y} + \pi(x,y) \right\}$$

(ω_1 correspondant à $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$, etc.).

Les relations (R) qui définissent $\hat{A}(\omega)$ et $\hat{L}(\omega)$ sont les suivantes :

$$[a_1, a_2 + a_3] = [a_2, a_1 + a_3] = [a_3, a_4 + a_5]$$
$$= [a_4, a_2] = [a_1, a_5] = 0.$$

Le théorème 1 montre alors qu'il existe $\widetilde{\omega} \in \Omega_{1,p(\mathcal{E})}(U - S, \hat{L}(\omega))$ et P holomorphe inversible tel que si $f = ZP$, on ait $dZ = Z\widetilde{\omega}$ avec $d\widetilde{\omega} = 0$, $\widetilde{\omega} \wedge \widetilde{\omega} = 0$,

$$\widetilde{\omega} = \sum_{n \geqslant 1} \sum_{1 \leqslant i_1, \ldots, i_n \leqslant r} \widetilde{\omega}_{i_1, \ldots, i_n}(x, y)\, a_{i_1} \ldots a_{i_n}$$

(qui est une série de Lie)

$$\widetilde{\omega}_{i_1, \ldots, i_n}(x, y) \in \Omega_{1,p(\mathcal{E})}(U - S, \mathbf{C}),$$

c'est-à-dire que

$$\widetilde{\omega}_{i_1, \ldots, i_n}(x, y) = \alpha_{i_1, \ldots, i_n} \frac{dx}{x} + \beta_{i_1, \ldots, i_n} \frac{dy}{y}$$
$$+ \gamma_{i_1, \ldots, i_n} \frac{d(x-y)}{x-y}, \alpha_{i_1, \ldots, i_n} \in \mathbf{C}, \beta_{i_1, \ldots, i_n} \in \mathbf{C}, \gamma_{i_1, \ldots, i_n} \in \mathbf{C}.$$

D'où

$$\widetilde{\omega} = \Big(\sum_{n\geqslant 1}\ \sum_{1\leqslant i_1,\ldots,i_n\leqslant r} \alpha_{i_1,\ldots,i_n}\, a_{i_1}\cdots a_{i_n}\Big)\frac{dx}{x}$$

$$+\Big(\sum_{n\geqslant 1}\ \sum_{1\leqslant i_1,\ldots,i_n\leqslant r} \beta_{i_1,\ldots,i_n}\, a_{i_1}\cdots a_{i_n}\Big)\frac{dy}{y}$$

$$+\Big(\sum_{n\geqslant 1}\ \sum_{1\leqslant i_1,\ldots,i_n\leqslant r} \gamma_{i_1,\ldots,i_n}\, a_{i_1}\cdots a_{i_n}\Big)\frac{d(x-y)}{x-y},$$

soit $\widetilde{\omega} = \widetilde{a}\,\dfrac{dx}{x} + \widetilde{b}\,\dfrac{dy}{y} + \widetilde{c}\,\dfrac{d(x-y)}{x-y}$ avec $\widetilde{a}, \widetilde{b}, \widetilde{c}$ dans $\hat{\mathrm{L}}(\omega)$.

Comme $\widetilde{\omega}\wedge\widetilde{\omega} = 0$, on vérifie aisément que :

$$[\widetilde{a}\,,\widetilde{b}+\widetilde{c}] = [\widetilde{b}\,,\widetilde{a}+\widetilde{c}] = 0\,.$$

Posons $\mathrm{Z} = \mathrm{T}\,x^{\widetilde{a}+\widetilde{b}+\widetilde{c}}$ et remarquons que

$$[\widetilde{a},\ \widetilde{a}+\widetilde{b}+\widetilde{c}] = [\widetilde{b},\ \widetilde{a}+\widetilde{b}+\widetilde{c}] = [\widetilde{c},\ \widetilde{a}+\widetilde{b}+\widetilde{c}] = 0\,,$$

et donc $x^{\widetilde{a}+\widetilde{b}+\widetilde{c}}$ commute avec $\widetilde{a}, \widetilde{b}, \widetilde{c}$.

Il vient

$$d\mathrm{Z} = d\mathrm{T}\,x^{\widetilde{a}+\widetilde{b}+\widetilde{c}} + \mathrm{T}\,\frac{\widetilde{a}+\widetilde{b}+\widetilde{c}}{x}\,dx\,x^{\widetilde{a}+\widetilde{b}+\widetilde{c}}$$

$$= \mathrm{T}x^{\widetilde{a}+\widetilde{b}+\widetilde{c}}\Big(\widetilde{a}\,\frac{dx}{x} + \widetilde{b}\,\frac{dy}{y} + \widetilde{c}\,\frac{d(x-y)}{x-y}\Big),$$

soit en simplifiant à droite par $x^{\widetilde{a}+\widetilde{b}+\widetilde{c}}$:

$$d\mathrm{T} = \mathrm{T}\Big(-\frac{\widetilde{b}+\widetilde{c}}{x}\,dx + \widetilde{b}\,\frac{dy}{y} + \widetilde{c}\,\frac{d(x-y)}{x-y}\Big).$$

On est ainsi ramené à un système de Fuchs sur $\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$, donc à une seule variable, qui est donné dans $\mathbf{C}^2$ sous forme homogène (cf [0]). Ce système de Fuchs sur $\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$ a $0\,,1\,,\infty$ comme singularités. On est donc ramené à un système "hypergéométrique" dans $\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$.

BIBLIOGRAPHIE

[0] R. GERARD et A.H.M. LEVELT, Etude d'une classe particulière de Systèmes de Pfaff du type de Fuchs sur l'espace projectif complexe, *J. Math. Pures et Appl.*, 51 (1972), 189-217.

[1] R. GERARD et Y. SIBUYA, Etude de certains systèmes de Pfaff avec singularités, *Lecture Notes*, 712, Springer Verlag.

[2] B. KLARES, Déformations localement iso-irrégulières de connexions linéaires complètement intégrables sur $P_m(C)$, *Lecture Notes, Springer Verlag*, 1015, 323-410.

[3] B. KLARES et C. SADLER, Study of a linear connection of several variables in the neighbourhood of an irregular singularity, *Analysis*, 2 (1982), 65-102.

[4] B. KLARES et C. SADLER, Systèmes de Pfaff et Algèbres de Lie libres. Etude d'une singularité polaire normale. Sém. Lelong, Dolbeault, Skoda (analyse 22° et 23° année, 1983), *Lecture Notes Springer Verlag*, 1028, 163-218.

[5] J.A. LAPPO-DANILEVSKY, Systèmes des Equations Différentielles Linéaires, *Chelsea Publ. Comp.* 1953, Mémoire VIII, 5-43.

[6] W. MAGNUS, On the exponential solution of a differential equation for linear operator, *Comm. in Pures and Applied Math.*, vol. VII (1954), 649-673.

[7] B. MALGRANGE, Déformation des Systèmes différentiels et microdifférentiels, *Séminaire E.N.S. 1979-1980*, 353-379.

[8] H.L. TURRITIN, Reduction of ordinary differential equations to the Birkhoff canonical form, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 107 (1963), 485-507.

[9] N. BOURBAKI, *Groupes et Algèbres de Lie*, Chap. 2 et 3, Hermann, Paris.

[10] B. Klares et C. Sadler, Réduction de Birkhoff des 1-formes différentielles à partie singulière bien adaptée et à coefficients à valeurs dans une Algèbre de Lie libre, *Publ. de l'I.R.M.A.*, Strasbourg (Préprint)

Manuscrit reçu le 21 juin 1984
révisé le 27 janvier 1985.

B. Klares & C. Sadler,
Equipe de Recherche
Associée au C.N.R.S.
ERA n° 399
Université de Metz
Faculté des Sciences, Mathématiques
Ile du Saulcy
57000 Metz.