ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

MICHEL ZISMAN

Quelques propriétés des fibrés au sens de Kan

Annales de l'institut Fourier, tome 10 (1960), p. 345-457
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1960__10__345_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
10 (1960), 345-457.

QUELQUES PROPRIÉTÉS DES FIBRÉS AU SENS DE KAN

par Michel ZISMAN

INTRODUCTION

Dès que la notion d'homologie singulière a été dégagée avec assez de clarté par S. Eilenberg [4], la notion d'ensemble simplicial s'est imposée peu à peu à tous les topologues. Un ensemble simplicial X n'est rien d'autre en effet, qu'une famille d'ensembles $X_n (n \geqslant 0)$ munie d'opérateurs de « faces » et de « dégénérescences » satisfaisants aux mêmes relations formelles que les opérateurs de faces et de dégénérescences définis classiquement sur l'ensemble $S(\mathbf{X})$ des simplexes singuliers d'un espace topologique **X**. On sait que la connaissance de $S(\mathbf{X})$ permet de trouver non seulement l'homologie singulière de **X** (par définition même de l'homologie !) mais encore les groupes d'homotopie de **X**. Dès lors il était intéressant d'étudier systématiquement la structure dont était doué l'ensemble $S(\mathbf{X})$, abstraction faite de son origine géométrique, c'est-à-dire d'étudier les ensembles simpliciaux.

Deux faits importants venaient renforcer ce point de vue d'ordre général :

1. Il est possible de construire des ensembles simpliciaux $K(\pi, n)$ qui ont même homologie que les espaces d'Eilenberg Mac-Lane de type (π, n) (cf. [5] et [2]). $K(\pi, n)$ est un groupe simplicial auquel on peut appliquer des constructions d'origine algébrique comme la $\overline{W}$-construction ([2]).

2. Si K est le foncteur *représentation géométrique* (cf. [14]) et S le foncteur des simplexes singuliers, ces deux foncteurs sont

adjoints au sens de Kan ([11]). L'étude de l'homologie dans la catégorie des espaces topologiques et fonctions continues est donc ramenée à l'étude de l'homologie dans la catégorie des ensembles simpliciaux et applications simpliciales. C'est ce qu'on fait en particulier pour définir les opérations cohomologiques et étudier leurs propriétés (cf. [2] et [3]).

Signalons encore que l'introduction de méthodes purement algébriques étant facilitée par le contexte simplicial, plusieurs notions se trouvent simplifiées par ce point de vue, en particulier celle de décomposition de Postnikov d'un fibré [15].

* * *

Ainsi donc, le point de vus simplicial a-t-il de nombreux avantages en topologie algébrique. Malheureusement, en contre partie, la technique interne de cette théorie est beaucoup moins « souple » que la technique des espaces topologiques (par exemple, si $\Delta[n]$ est le simplexe géométrique de dimension n, et P un point de $\Delta[n]$, l'application identique $\Delta[n] \to \Delta[n]$ et l'application $\Delta[n] \to$ P sont homotopes; mais si $\Delta[n]$ est le n-modèle de la catégorie $\mathcal{S}$ des ensembles simpliciaux, cela n'est vrai que si P est le O-ième ou le n-ième sommet de $\Delta[n]$); d'où de nombreuses difficultés dans la démonstration des théorèmes de base. En fait, plusieur de ces théorèmes (théorème d'extension des homotopies, existence d'une suite spectrale d'homologie des fibrés, obstruction à la construction d'une section d'un fibré...) ont été utilisés sans démonstration par de nombreux auteurs se fiant à juste titre à leur intuition mathématique. Étant donné l'importance du développement que prenait la théorie, il devenait nécessaire de revenir à la source, et de démontrer une fois pour toute tous ces théorèmes : tel a été le but de ce travail.

* * *

Le chapitre I donne des définitions élémentaires de la théorie. Il contient une démonstration simple du théorème d'extension des homotopies (théorème (2-3)) et du fait que si X est un complexe de Kan, la relation homotopie entre applications Y $\to$ X est une relation d'équivalence (théorème (2-5)). On n'a pas donné de démonstration du fait que Hom (Y, X) est un complexe de Kan si X est un complexe de Kan, car ce résultat n'est pas utilisé dans la suite, et car il en existe une excellente démonstration dans [13].

Pour définir les groupes d'homotopie d'un complexe de Kan, on a choisi la définition originelle de D. Kan [9] mieux adaptée à la démonstration du « lemme d'addition » (3-6) que la définition de J. C. Moore [15]. (On montre l'équivalence de ces deux définitions). Le lemme d'addition signalé par S. Eilenberg dans [4], n'a semble-t-il jamais été démontré dans la littérature.

On termine (1) ce chapitre en montrant que, comme dans le cas topologique, on peut définir les groupes d'homotopie en utilisant des applications définies sur des « sphères ». Cette définition est utile pour étudier le cocycle obstruction (chapitre IV).

*
* *

Le chapitre II est un préliminaire aux chapitres III et IV. La théorie des catégories avec modèles due à S. Eilenberg et S. Mac-Lane [6] a pour but, grâce au théorème des *modèles acycliques* ((6-1)* et (6-1)$_*$) de montrer que certains foncteurs à valeurs dans la catégorie des modules différentiels gradués, ont même homologie : ainsi montre-t-on que les foncteurs chaînes singulières et chaînes singulières cubiques, chaînes singulières et chaînes singulières normalisées, etc... ont même homologie. Cette théorie a été utilisée pour résoudre un problème de suite spectrale pour la première fois par V. K. A. M. Gugenheim et J. C. Moore [12]. Il leur a fallu pour cela enrichir la structure des Catégories avec Modèles en introduisant des « fonctions de dégénérescence ». C'est cette dernière théorie qui est exposée ici. Cependant dans [12] il n'est question que d'homologie; on a donc étendu tous les résultats de [12] au cas de la cohomologie. Les démonstrations (souvent absentes dans [12]) sont complètes; elles ont été données de préférence en cohomologie, ce cas étant légèrement plus compliqué que celui de l'homologie déjà traitée dans [12].

(1) Au moment de publier ce travail, je viens de m'apercevoir que ce point de vue a déjà été développé par BARCUS [16] dans un séminaire de J. C. Moore. Cependant Barcus ne donne pas explicitement de procédés pour additionner des classes d'homologie entre applications $(\dot{\Delta}[n+1], 0) \to (X, x_0)$ (cf. (4-6)).

Pour traiter divers problèmes d'homologie relative, on a introduit des sous-catégories $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$ d'une catégorie donnée $\mathcal{A}$, et des catégories $\mathcal{A}_{\mathcal{I}}$ et $\mathcal{A}_{\mathcal{J}}$ qui permettent de ramener des problèmes relatifs dans $\mathcal{A}$ à des problèmes absolus dans $\mathcal{A}_{\mathcal{I}}$ ou $\mathcal{A}_{\mathcal{J}}$.

Le chapitre se termine par la démonstration d'un théorème général d'Eilenberg-Zilber en homologie et cohomologie relative à cœfficients locaux quelconques dont un cas particulier est utilisé dans le chapitre IV, et par l'illustration des rapports existant entre la théorie des coefficients locaux donnée plus haut et la théorie habituelle.

*
* *

Le chapitre III est réservé à la démonstration de l'existence de suites spectrales d'homologie et de cohomologie des fibrés au sens de Kan. La méthode suivie est celles donnée dans [12] par V. K. A. M. Gugenheim et J. C. Moore.

*
* *

Dans le chapitre IV, on montre que la théorie classique de l'obstruction à la construction d'une section d'un fibré (de Serre, dont la base est un C. W. complexe) est valable sans restriction pour les fibrés au sens de Kan. Comme pour de nombreuses raisons la belle théorie de Barcus [1] n'a pu être étendue au cas qui nous intéresse, il a fallu revenir à la définition initiale de N. Steenrod [18]. La définition du cocycle obstruction ne présente aucune difficulté compte tenu du chapitre I. La définition de la cochaîne différence s'est avérée au contraire relativement plus difficile. Chez N. Steenrod elle est aisée car le produit cartésien d'une n-cellule par le segment [O, 1] est une $(n+1)$-cellule, alors que le produit cartésien d'un n-simplexe par un 1-simplexe n'a pas de sens. Il a donc fallu introduire le produit tensoriel des complexes normalisés de la base B du fibré et de $\Delta[1]$, et utiliser ensuite le théorème d'Eilenberg-Zilber. Notons une dernière différence entre le cas topologique et le cas simplicial : la définition du système local d'homotopie de la fibre est plus compliquée dans ce dernier cas, mais, contrairement au premier cas, si la base est connexe, les diverses fibres ont même type d'homotopie. De même, si X est un complexe de Kan, les opérations de $\pi_1(X, x_0)$ sur $\pi_n(X, x_0)$ sont induites par des applications $X \rightarrow X$, contrairement à ce qui se passe en général dans le cas topologique.

*
* *

Je suis heureux de pouvoir exprimer ici toute ma reconnaissance à M. A. Lichnérowicz sans lequel ce travail n'aurait pas vu le jour, pour l'intérêt qu'il lui a constamment porté, pour les nombreux entretiens qu'il a bien voulu m'accorder.

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE PREMIER

GROUPES D'HOMOTOPIE

1. — Généralités sur les ensembles simpliciaux.

1. 1. *Définitions.* — *a.* Soit Δ la catégorie dont les *objets* forment une suite $\Delta_0, \Delta_1, \ldots, \Delta_n, \ldots$, où Δ_n désigne la suite des entiers $(0, \ldots, n)$ et les *morphismes* $\Delta_p \to \Delta_q$ sont les applications croissantes (au sens large). Tout morphisme s'obtient par composition des morphismes identiques $\Delta_n \to \Delta_n$, et des morphismes du type suivant :

$$\begin{aligned} \delta_i : \quad & \Delta_n \to \Delta_{n+1} \quad (0 \leqslant i \leqslant n+1), \\ \sigma_i : \quad & \Delta_{n+1} \to \Delta_n \quad (0 \leqslant i \leqslant n) \end{aligned}$$

où δ_i désigne l'application strictement croissante qui ne prend pas la valeur i, et σ_i l'application surjective qui prend deux fois la valeur i.

b. Soit $\mathcal{E}$ la catégorie des ensembles et applications ensemblistes, et $\mathcal{S}$ la catégorie des foncteurs contravariants de Δ dans $\mathcal{E}$. Soit X un *objet* de $\mathcal{S}$. On pose

$$X(\Delta_n) = X_n, \qquad X(\delta_i) = d_i, \qquad X(\sigma_i) = s_i.$$

les éléments de X_n sont appelés *n-simplexes* de X; les d_i (resp. s_i) sont les *opérateurs de faces* (resp. de *dégénérescences*) de X. Si α est un morphisme de Δ, $X(\alpha)$ sera appelé *opérateur simplicial* de X; tout opérateur simplicial s'obtient par composition des d_i et s_j. De plus tout opérateur simplicial s'écrit toujours de manière unique :

$$s_{i_1} \ldots s_{i_k} d_{j_1} \ldots d_{j_l} \qquad \text{avec} \qquad i_1 > \cdots > i_k, \quad j_1 < \cdots < j_l$$

on dit alors qu'il a été écrit sous la *forme canonique*. Des relations évidentes entre δ_i et σ_i on tire les relations entre les d_i et s_i :

$$\begin{aligned} d_i d_j &= d_{j-1} d_i \quad \text{pour} \quad i < j, \\ s_i s_j &= s_{j+1} s_i \quad \text{pour} \quad i \leqslant j, \\ d_i s_j &= \begin{cases} s_{j-1} d_i & \text{pour} \quad i < j, \\ \text{identité} & \text{pour} \quad i = j \quad \text{et pour} \quad i = j+1 \\ s_j d_{i-1} & \text{pour} \quad i > j+1. \end{cases} \end{aligned}$$

Soient X et Y deux objets de $\mathcal{S}$; un morphisme de $\mathcal{S}$ est une transformation naturelle de foncteurs $X \to Y$, c'est-à-dire une suite d'applications ensemblistes $f_n : X_n \to Y_n$ assujetties aux conditions

$$\begin{aligned} d_i f_n &= f_{n-1} d_i \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant i \leqslant n, \qquad n \geqslant 1 \\ s_i f_n &= f_{n+1} s_i \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant i \leqslant n, \qquad n \geqslant 0. \end{aligned}$$

Les objets de $\mathcal{S}$ sont appelés *ensembles simpliciaux*, et les morphismes de $\mathcal{S}$ *applications simpliciables* (¹). On désignera par $\mathcal{H}(X, Y)$ l'ensemble des applications simpliciables $X \to Y$.

c. Soit X un ensemble simplicial et $x \in X$ (*i.e* x est un élément de l'un des ensembles X_n); si $x = s_i x'$, on dit que x est *dégénéré*, si x n'appartient pas à l'image des s_i on dit qu'il est *non dégénéré*. Tout $x \in X$ s'écrit d'une manière unique $s_{i_1} \dots s_{i_k} y$ avec y non dégénéré, et $i_1 > \dots > i_k$ (k peut être égal à zéro).

d. On dit qu'un ensemble simplicial Y est un sous-ensemble simplicial de X, et on écrit $Y \subset X$, si $Y_n \subset X_n$ pour chaque n, et si les d_i et s_i de Y sont induits par ceux de X. L'injection $Y \to X$ est alors une application simpliciale. En particulier soit X^n le sous-ensemble simplicial de X engendré par X_n; X^n est le *n-squelette* de X et l'on a la suite d'injections :

$$X^0 \to X^1 \to \cdots \to X^n \to X.$$

Si A est un sous-ensemble de X, on désignera par S(A) le sous-ensemble simplicial de X engendré par A.

e. Soit $\Delta[n]$ l'ensemble simplicial défini par

$$\Delta[n]_p = \mathrm{Hom}(\Delta_p, \Delta_n)$$

(¹) Afin de simplifier le langage, le terme « application » désignera toujours les applications simpliciales. Toute autre application sera désignée par le mot « fonction ».

où Hom est rapporté aux morphismes de Δ, avec, si $a \in \Delta[n,]$

$$d_i a = a \circ \delta_i, \qquad s_i a = a \circ \sigma_i.$$

Soit $\delta^n \in \text{Hom}\ (\Delta_n, \Delta_n)$ l'identité. On dit que δ^n est le *n-simplexe fondamental du n-modèle* $\Delta[n]$.

On peut aussi interpréter $\Delta[n]$ de la façon suivante : les éléments de $\Delta[n]$ s'écrivent $\varphi\delta^n$, où φ est un opérateur simplicial. Disons que φ est de poids q si $k - l = q$ lorsque φ est écrit sous la forme canonique (1-1) *b*. Alors $\Delta[n]_p = \{\varphi\delta^n | \varphi$ de poids $p - n\}$ et

$$d_i(\varphi\delta^n) = (d_i\varphi)\delta^n, \qquad s_i(\varphi\delta^n) = (s_i\varphi)\delta^n.$$

On désignera souvent par $\dot{\Delta}[n]$, (resp $\ddot{\Delta}[n]$) le (n-1)-squelette [resp (n-2)-squelette] de $\Delta[n]$.

f. Soit X un ensemble simplicial et $s \in X_n$. On définit $\tilde{x} \in \mathcal{H}(\Delta[n], X)$ par $\tilde{x}(\varphi\delta^n) = \varphi x$. $\tilde{x}$ est la seule application $\Delta[n] \to X$ telle que $\tilde{x}(\delta^n) = x$. Réciproquement si f est une application $\Delta[n] \to X$, et si on pose $f(\delta^n) = x$, on a $f = \tilde{x}$. Autrement dit $X_n = \mathcal{H}(\Delta[n], X)$. Soit $x \in X_n$ et φ un opérateur simplicial de poids $p - n$. On a

$$\tilde{\varphi x} = \tilde{x} \circ \widetilde{\varphi\delta^p}.$$

g. Les zéro-simplexes de X seront souvent appelés *sommets* de X. Si $x \in X_0$ est un sommet, on désignera toujours par le même symbole x le sous-ensemble simplicial de X engendré par x. Ce sous-ensemble simplicial ne contient qu'un seul n-simplexe pour chaque n, à savoir $s_0^n x$, et $d_i s_0^n x = s_0^{n-1} x$, $s_i s_0^n x = s_0^{n+1} x$.

On appelle $\mathcal{S}^*$ la catégorie des ensembles et applications simpliciaux *avec points bases*, dont les objets sont les couples (X, x) ou $X \in \mathcal{S}$ et x est un sommet de X, et les morphismes les applications de $\mathcal{S}$ qui transforment point base en point base.

On prendra pour point base de $\Delta[n]$ le sommet $d_1 \dots d_n\delta^n$ (« o-ième sommet de n » qui sera souvent désigné par O ou O_n).

Si (X, x) est un ensemble simplicial avec point de base et $Y \subset X$ on définit l'ensemble simplicial avec point de base quotient $(X/Y, x)$, par $(X/Y)_n = X_n/Y_n$, Y_n étant identifié à x, les opérateurs faces et dégénérescences étant définis par passage au quotient à partir de ceux de X.

h. Soient X et Y deux ensembles simpliciaux. *Le produit cartésien* X × Y de X et Y est l'ensemble simplicial défini par

$$(X \times Y)_n = X_n \times Y_n,$$
$$d_i(x, y) = (d_i x, d_i y); \qquad s_i(x, y) = (s_i x, s_i y) \quad (x \in X_n, y \in Y_n).$$

Si $f: X \to X'$ et $g: Y \to Y'$ sont des applications,

$$f \times g : X \times Y \to X' \times Y'$$

est l'application définie par

$$(f \times g)_n(x, y) = (f_n(x), g_n(y)) \quad (x \in X_n, y \in Y_n).$$

1. 2. *Homotopies.* — On pose pour simplifier $I = \Delta[1]$, $0 = d_1\delta^1$, $1 = d_0\delta^1$.

1^re^ *définition de l'homotopie.* — Deux applications $f, g : X \to Y$ sont homotopes s'il existe une application $k : I \times X \to Y$ telle que $f = k \circ \varepsilon_0$, $g = k \circ \varepsilon_1$, où ε_e est l'application $X \to I \times X$ définie par $\varepsilon_e(x) = (e, x)$ $(e = 0{,}1)$. On note $f \sim g$.

2^e^ *définition de l'homotopie.* — Deux applications $f, g : X \to Y$ sont homotopes s'il existe, pour chaque n, $n+1$ fonctions k_i $X_n \to Y_{n+1}$ $(i = 0, \ldots, n)$ telles que

$$\begin{array}{lll}
s_{j+1}k_i = k_i s_j & \text{pour} & i \leqslant j, \\
k_{j+1}s_i = s_i k_j & \text{pour} & i \leqslant j, \\
d_{j+1}k_i = k_i d_j & \text{pour} & i < j, \\
d_{i+1}k_{i+1} = d_{i+1}k_i & \text{pour} & i < n, \\
d_i k_{j+1} = k_j d_i & \text{pour} & i \leqslant j,
\end{array}$$
$$d_0 k_0 = g, \qquad d_{n+1}k_n = f,$$

ces deux définitions sont équivalentes, en effet il suffit de poser

$$k(s_{n-1} \ldots \hat{s}_i \ldots s_0\delta^1 x) = d_{i+1}k_i x$$

pour définir k connaissant les k_i et réciproquement

$$k_i x = k(s_n \ldots \hat{s}_i \ldots s_0, s_i x)$$

pour définir les k_i connaissant k.

Remarque 1. — La relation $\sim$ n'est pas en général une relation d'équivalence.

Remarque 2. — La deuxième définition de l'homotopie fait intervenir la « décomposition d'un prisme en simplexes élémentaires ».

(1. 3). *Homotopies relatives.* — Soient f et g deux applications $(X, A) \to (Y, B)$ *i.e* $A \subset X$, $B \subset Y$ et $f, g | A : A \to B$. On dit qu'elles sont homotopes rel (A, B) ($f \sim g$ rel (A, B)) s'il existe une application $k : (I \times X,\ I \times A) \to (Y, B)$ telle que $f = k_0 \varepsilon_0$ et $g = k_0 \varepsilon_1$.

En utilisant les k_i au lieu de k, cela revient à dire que les k_i sont des fonctions $A_n \to B_{n+1}$.

On dit qu'elles sont homotopes rel A ($f \sim g$ rel A) s'il existe une application $k : (I \times X, I \times A) \to (Y, B)$ telle que $f = k \circ \varepsilon_0$, $g = k \circ \varepsilon_1$ et si de plus $k(\alpha, a) = f(a) = g(a)$ pour tout $\alpha \in I$, $a \in A$. En utilisant les k_i au lieu de k, cela revient à dire que $k_i a = s_i f(a) = s_i g(a)$ pour $a \in A$. On dit aussi que l'homotopie k est *stationnaire* sur A.

1. 4. Lemme. — *Soient* $a_i = (s_n s_{n-1} \ldots \hat{s}_i \ldots s_0 \delta^1,\ s_i \delta^n) \in I \times \Delta[n]$ $(i = 0, \ldots, n)$ *et* f *une fonction définie sur les* a_i, *à valeurs dans un ensemble simplicial* X *telle que* $d_{i+1} f(a_{i+1}) = d_{i+1} f(a_i)$ *pour* $i \geqslant 0$. *Alors* f *peut se prolonger de façon unique ou une homotopie notée encore* $f : I \times \Delta[n] \to X$.

Ce lemme dont la démonstration ne présente aucune difficulté est souvent utile pour construire des homotopies entre applications $\Delta[n] \to X$. Ainsi, pour démontrer la proposition :

Proposition. — *Il existe une homotopie* ω_n :

$$(I \times \Delta[n],\ I \times 0) \to (\Delta[n], 0)$$

et une homotopie ω'_n :

$$(I \times \Delta[n],\ I \times d_0 \ldots d_{n-1}\delta^n) \to (\Delta[n],\ d_0 \ldots d_{n-1}\delta^n)$$

telle que

$$\begin{array}{llll}
\text{(i)} & \omega_n \circ \varepsilon_1 = \text{identité}, & \omega_n \circ \varepsilon_0 : \Delta[n] \to 0, & \\
 & \omega'_n \circ \varepsilon_0 = \text{identité}, & \omega'_n \circ \varepsilon_1 : \Delta[n] \to d_0 \ldots d_{n-1}\delta^n & \\
\text{(ii)} & \widetilde{d_i\delta^n} \circ \omega_{n-1} = \omega_n \circ \left(\text{id} \times \widetilde{d_i\delta^n}\right) & \text{pour} & i > 0 \\
 & \widetilde{d_i\delta^n} \circ \omega'_{n-1} = \omega'_n \circ \left(\text{id} \times \widetilde{d_i\delta^n}\right) & \text{pour} & i < n \\
\text{(iii)} & \widetilde{s_i\delta^n} \circ \omega_{n+1} = \omega_n \circ \left(\text{id} \times \widetilde{s_i\delta^n}\right), & & \\
 & \widetilde{s_i\delta^n} \circ \omega'_{n+1} = \omega'_n \circ \left(\text{id} \times \widetilde{s_i\delta^n}\right) & &
\end{array}$$

il suffit de poser

$$\omega_n(a_0) = \omega_n(a_1) = s_0\delta^n,$$
$$\omega_n(a_i) = s_{i-1} \ldots s_0 d_1 \ldots d_{i-1}\delta^n \quad (i > 0)$$

et
$$\omega'_n(a_n) = \omega'_n(a_{n-1}) = s_n\delta^n,$$
$$\omega'_n(a_i) = s_n \ldots s_{i+1}d_{i+1} \ldots d_{n-1} \quad (i < n-1)$$

et de vérifier les relations (i) (ii) (iii), par un calcul purement mécanique.

1. 5. *Complexes de Kan, fibrés.* — *a.* On dit qu'un ensemble simplicial X satisfait à la condition d'extension de Kan, ou que X est un complexe de Kan, si X possède la propriété suivante : quels que soient les entiers n et k, et les $n+1$ n-simplexes x_i, $(i = 0, \ldots, \hat{k}, \ldots, n+1)$ de X tels que $d_ix_j = d_{j-1}x_i$ pour i, $j \neq k$ et $i < j$, il existe un $(n+1)$ — simplexe x tel que $d_ix = x_i$ pour $i \neq k$.

Si $\Lambda^k[n]$ désigne le sous-ensemble simplicial de $\Delta[n]$ engendré par les $(n-1)$ — faces $d_i\delta^n$ avec $i \neq k$, on peut énoncer la condition précédente sous la forme : quels que soient les entiers n et k et l'application $f : \Lambda^k[n] \rightarrow X$, il existe une application $g : \Delta[n] \rightarrow x$ qui prolonge f.

b. Un fibré est un triple (E, $\underline{p}$, B) où E et B sont des ensembles simpliciaux et p : E $\rightarrow$ B une application, satisfaisant à la condition suivante : quels que soient les entiers n et k; et les $n+1$ n-simplexes x_i $(i = 0, 1 \ldots, \hat{k}, \ldots n+1)$ de E_n tels que (i) $d_i\,x_j = d_{j-1}x_i$ pour i, $j \neq k$ et $i < j$ (ii) $\underline{p}\,(x_i) = d_iy$ pour $i \neq k$ et $y \in B_{n+1}$, il existe un $(n+1)$-simplexe x de E tel que (i) $d_ix = x_i$ pour $i \neq k$ (ii) $\underline{p}(x) = y$.

Il revient au même de dire que quels que soient les entiers n et k et les applications f, g telles que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \Lambda^k[n] \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{inj}"'] & E \arrow[d, "\underline{p}"] \\ \Delta[n] \arrow[r, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

soit commutatif, il existe une application $h : \Delta[n] \rightarrow E$ qui prolonge f et qui vérifie $\underline{p} \circ h = g$. On dira que « *h prolonge f au-dessus de g* ».

On passe de l'une à l'autre de ces définitions en utilisant (1. 1) f.

c. Si (E, $\underline{p}$, B) est un fibré et $b \in B_0$, on pose $\underline{p}^{-1}(b) = F_b$. F_b *est la fibre au-dessus* de b. C'est un complexe de Kan.

Réciproquement si X est un complexe de Kan, et b un ensemble simplicial réduit au seul sommet b et ses dégénérés, l'unique application $\underline{p} : X \rightarrow b$ fait de (X, $\underline{p}$, b) un fibré.

d. Fibré induit par une application. — Soit (E, $\underline{p}$, B) un fibré et f: X B une application. On désigne par f^*E le sous-ensemble simplicial de $X \times E$ formé par les couples (x, e) tels que $f(e) = p(e)$ $(x \in X,\ e \in E)$. Il existe deux applications canoniques $P : f^*E \rightarrow X$, $Q : f^*E \rightarrow E$ définies par $P(X, e) = x$, $Q(x, e) = e$ pour $(x, e) \in f^*E$. (f^*E, P, X) est aussi un fibré : *le fibré induit par f*, et on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} f^*E \arrow[r, "Q"] \arrow[d, "P"'] & E \arrow[d, "\underline{p}"] \\ X \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

e. Plus généralement soient (E, p, B) et (E′, p', B′) deux fibrés; un *morphisme* de fibrés est un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} E' \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\underline{p}'"'] & E \arrow[d, "\underline{p}"] \\ B' \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

où toutes les flèches sont des applications de $\mathcal{S}$. La catégorie dont les objets sont les fibrés et les morphismes de fibrés sera désignée par $\mathcal{F}$. Dans cette catégorie, on appellera *modèle* un fibré dont la base est un $\Delta[n]$.

2. — Propriétés élémentaires des fibrés.

On se propose d'énoncer un certain nombre de propositions [théorèmes (2. 3) et (2. 5)] plus ou moins connus ou démontrés dans la littérature, d'un usage constant dans la suite. Les lemmes 2. 4 ne seront utilisés que dans le chapitre 4.

2. 1. Proposition. — Soient (E, $\underline{p}$, B) *un fibré*, $\Lambda^{k_1, \dots, k_p}[n]$ *le sous-ensemble simplicial de* $\Delta[n]$ *engendré par les faces* $d_i\delta^n$,

($i \neq k_1, \ldots, k_p$), avec $0 \leqslant k_1 < \cdots < k_p \leqslant n$ et $p \leqslant n$, et f, g *deux applications, tels que le diagramme*

$$\begin{tikzcd} \Lambda^{k_1, \ldots, k_p}[n] \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{inj}"] & E \arrow[d, "p"] \\ \Delta[n] \arrow[r, "g"] & B \end{tikzcd}$$

soit commutatif. Il existe alors une application $h : \Delta[n] \rightarrow E$ *qui prolonge f au-dessus de g.*

La démonstration se fait par récurrence sur p. Si $p = 1$ la proposition se réduit à la définition des fibrés. Supposons la propriété vraie pour $p < m$ et soit $p = m$. On considère le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \Lambda^{k_1, \ldots, k_m}[n-1] \arrow[r, "\widetilde{d_{k_m}\delta^n}"] \arrow[d, "\mathrm{inj}"] & \Lambda^{k_1, \ldots, k_m}[n] \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{inj}"] & E \arrow[d, "p"] \\ \Delta[n-1] \arrow[r, "\widetilde{d_{k_m}\delta^n}"] & \Delta[n] \arrow[r, "g"] & B \end{tikzcd}$$

D'après l'hypothèse de récurrence, il existe $h' : \Delta[n-1] \rightarrow E$ qui prolonge $f \circ \widetilde{d_{k_m}\delta^n}$ au-dessus de $g \circ \widetilde{d_{k_m}\delta^n}$. Posons

$$h_1(\varphi d_{k_m}\delta^n) = h'\ (\varphi\delta^{n-1})$$

pour tout opérateur simplicial φ. Comme h_1 et f coïncident sur $S(d_{k_m}\delta^n) \cap \Lambda^{k_1, \ldots, k_m}[n]$ on peut prolonger f à f_1 :

$$\Lambda^{k_1, \ldots, k_{m-1}}[n] \rightarrow E$$

au-dessus de g en posant $f_1 | S(d_{k_m}\delta^n) = h_1$. En appliquant encore une fois l'hypothèse de récurrence, on arrive au résultat désiré.

2. 2. Proposition. — *Soient* (E, p, B) *un fibré et f, g deux applications, tels que le diagramme* :

$$\begin{tikzcd} \Lambda^{k_1, \ldots, k_p}[n] \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{inj}"] & E \arrow[d, "p"] \\ \Lambda^{k_r}[n] \arrow[r, "g"] & B \end{tikzcd}$$

soit commutatif ($1 \leqslant r \leqslant p$). *Il existe alors une application h :* $\Lambda^{k_r}[n] \rightarrow E$ *qui prolonge f au-dessus de g.*

Démonstration par récurrence sur p, le cas $p = 1$ étant évident. Si $r \neq p$ on considère le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} \Lambda^{k_1, \dots, k_{p-1}}[n-1] & \xrightarrow{\widetilde{d_{k_p}\delta^n}} & \Lambda^{k_1, \dots, k_p}[n] & \xrightarrow{f} & \mathrm{E} \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{inj}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{inj}} & & \downarrow{\scriptstyle \underline{p}} \\ \Delta[n-1] & \xrightarrow{\widetilde{d_{k_p}\delta^n}} & \Lambda^{k_r}[n] & \xrightarrow{g} & \mathrm{B} \end{array}$$

d'après 2. 1, il existe une application $h' : \Delta[n-1] \to \mathrm{E}$ qui prolonge $f \circ d_{k_p}\delta^n$ au-dessus de $g \circ d_{k_p}\delta^n$. On pose

$$h_1(\varphi d_{k_p}\delta^n) = h'(\varphi\delta^{n-1})$$

pour tout opérateur simplicial φ. h_1 permet de prolonger f à $f_1 : \Lambda^{k_1, \dots, k_{p-1}}[n] \to \mathrm{E}$ au-dessus de g. Donc f_1 est prolongeable à $h : \Lambda^{k_r}[n] \to \mathrm{E}$ au-dessus de g d'après l'hypothèse de récurrence. Si $r = p$, alors $p > 1$ entraîne que $r \neq 1$. On conclut dans ce cas en utilisant un diagramme dont la première ligne est

$$\Lambda^{k'_1, \dots, k'_{p-1}}[n-1] \xrightarrow{\widetilde{d_k\delta^n}} \Lambda^{k_1, \dots, k_p}[n] \xrightarrow{f} \mathrm{E}$$

où $\quad k'_i = k_i \quad$ si $\quad k_i = k_1 + i - 1, \quad k'_i = k_{i+1}$

si non.

Théorème 2. 3. — *La condition nécessaire et suffisante pour que* $(\mathrm{E}, \underline{p}, \mathrm{B})$ *soit un fibré est que, quels que soient les ensembles simpliciaux* X *et* Y *avec* $\mathrm{Y} \subset \mathrm{X}$, *les applications* f, g *et* $e = 0$ *ou* 1, *tels que le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} (\mathrm{I} \times \mathrm{Y}) \cup (e \times \mathrm{X}) & \xrightarrow{f} & \mathrm{E} \\ {\scriptstyle \mathrm{inj}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \underline{p}} \\ \mathrm{I} \times \dot{\mathrm{X}} & \xrightarrow{g} & \mathrm{B} \end{array}$$

soit commutatif, il existe une application $h : \mathrm{I} \times \mathrm{X} \to \mathrm{E}$ *qui prolonge* f *au-dessus de* g.

Démonstration. — *a. Condition suffisante.* — Soit un diagramme commutatif

$$(1) \qquad \begin{array}{ccc} \Lambda^0[n] & \xrightarrow{f} & \mathrm{E} \\ {\scriptstyle \mathrm{inj}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \underline{p}} \\ \Delta[n] & \xrightarrow{g} & \mathrm{B} \end{array}$$

et considérons la suite d'applications (notations de 1. 4)

$$(2) \qquad \Lambda^0[n] \xrightarrow{\widetilde{d_1 a_0}} (\mathrm{I} \times \Lambda^0[n]) \cup (0 \times \Delta[n]) \xrightarrow{\omega_n} \Lambda^0[n]$$

dont la composition est l'identité puisque

$$\omega_n \circ \widetilde{d_1 a_0}(\delta^n) = \omega_n d_1(a_0) = d_1 \omega_n(a_0) = d_1 s_0 \delta^n = \delta^n.$$

Le diagramme

$$\begin{tikzcd} (\mathrm{I} \times \Lambda^0[n]) \cup (0 \times \Delta[n]) \arrow[r, "f \circ \omega_n"] \arrow[d, "\mathrm{inj}"] & \mathrm{E} \arrow[d, "p"] \\ \mathrm{I} \times \Delta[n] \arrow[r, "g \circ \omega_n"] & \mathrm{B} \end{tikzcd}$$

est commutatif; donc par hypothèse, il existe $h : \mathrm{I} \times \Delta[n] \to \mathrm{E}$ qui prolonge $f \circ \omega_n$ au-dessus de $g \circ \omega_n$. Comme $\omega_n \circ \widetilde{d_1 a_0}$ est l'identité, on en déduit que $\widetilde{d_1 a_0} \circ h$ prolonge f au-dessus de g. Si $\Lambda^0[n]$ est remplacé par $\Lambda^n[n]$ dans le diagramme (1), on utilise, au lieu de (2) la suite d'applications :

$$\Lambda^n[n] \xrightarrow{\widetilde{d_n a_n}} (\mathrm{I} \times \Lambda^n[n]) \cup (1 \times \Delta[n]) \xrightarrow{\omega_n'} \Lambda^n[n].$$

Enfin, si dans (1) figure $\Lambda^i[n]$ avec $i \neq 0$, n on utilise l'application $\omega_n\,(\mathrm{i}) = \mathrm{I} \times \Delta[n] \to \Delta[n]$, « intermédiaire » entre ω_n et ω_n' donnée par :

$$\omega_n\,(\mathrm{i})\,(a_j) = s_j\delta^n \quad \text{pour} \quad j \leqslant i, \qquad \omega_n\,(\mathrm{i})\,(a_{i+1}) = s_i\delta^n$$
$$\omega_n\,(\mathrm{i})\,(a_j) = s_{j-1} \ldots s_i\, d_{i+1} \ldots d_{j-1}\delta^n \quad \text{pour} \quad j > i+1,$$
$$i = 0,1, \ldots, n-1;$$

on a $\omega_n\,(0) = \omega_n$. De plus on remarque que $\mathrm{I} \times \Lambda^i[n] \xrightarrow{\omega_n(\mathrm{i})} \Lambda^i[n]$ et que l'application composée

$$\Lambda^i[n] \xrightarrow{\widetilde{d_1 a_0}} (\mathrm{I} \times \Lambda^i[n]) \cup (0 \times \Delta[n]) \xrightarrow{\omega_n(\mathrm{i})} \Lambda^i[n]$$

est l'identité. c.q.f.d.

b. *Condition nécessaire.* — On considère le diagramme, où f et g sont donnés :

$$\begin{tikzcd} \Lambda^1[n+1] \arrow[r, "\tilde{a}_0"] \arrow[d, "\mathrm{inj}"'] & (\mathrm{I} \times \dot{\Delta}[n]) \cup (1 \times \Delta[n]) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{inj}"] & \mathrm{E} \arrow[d, "p"] \\ \Delta[n+1] \arrow[r, "\tilde{a}_0"] & \mathrm{I} \times \Delta[n] \arrow[r, "g"] & \mathrm{B} \end{tikzcd}$$

et où $\dot\Delta[n]$ représente le (n-1)-squelette de $\Delta[n]$. Par hypothèse, il existe une application $h'_0 : \Delta[n+1] \to E$ qui prolonge $f \circ \tilde a_0$ au-dessus de $g \circ \tilde a_0$. On pose $h_0(a_0) = h'_0(\delta^{n+1})$. On a $\underline{p}h_0(a_0) = g(a_0)$ et, pour $i \neq 1$,

$$d_i h_0(a_0) = d_i h'_0(\delta^{n+1}) = h'_0(d_i\delta^{n+1}) = f \circ \tilde a_0(d_i\delta^{n+1}) = d_i f(a_0).$$

On a donc prolongé f à $S(a_0)$ au-dessus de g. Supposons que l'on ait prolongé f à $S(a_0), \ldots, S(a_{k-1})$, et soit h_{k-1} l'application ainsi obtenue. Considérons alors le diagramme :

$$\begin{tikzcd} \Lambda^{k+1}[n+1] \arrow[r, "\tilde a_k"] \arrow[d, "\mathrm{inj}"'] & (I \times \dot\Delta[n]) \cup S(d_k a_{k-1}) \arrow[r, "h_{k-1}"] \arrow[d, "\mathrm{inj}"'] & E \arrow[d, "\underline{p}"] \\ \Delta[n+1] \arrow[r, "\tilde a_k"] & I \times \Delta[n] \arrow[r, "g"] & B \end{tikzcd}$$

il existe une application $h'_k : \Delta[n+1] \to E$ qui prolonge $h_{k-1} \circ \tilde a_k$ au-dessus de $g \circ \tilde a_k$. On pose $h_k(a_k) = h'_k(\delta^{n+1})$. h_k prolonge h'_k au-dessus de g. Le théorème est donc démontré par récurrence pour $X = \Delta[n]$, $Y = \dot\Delta[n]$, $e = 1$. Pour les mêmes X, Y, $e = 0$, la démonstration se fait par récurrence descendante, en construisant d'abord un prolongement de f à a_n.

Passons maintenant au cas général :

Supposons que l'on ait déjà déterminé h sur le (n-1)-squelette de X et soit $x \in X^n$, x non dégénéré, $x \notin Y$; soit $S(x)$ l'ensemble simplicial engendré par x, $\dot S(x) = S^{n-1}(x)$. On a alors le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} (I \times \dot\Delta[n]) \cup (e \times \Delta[n]) \arrow[r, "\tilde x"] \arrow[d, "\mathrm{inj}"'] & (I \times \dot S(x)) \cup (e \times S(x)) \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\mathrm{inj}"'] & E \arrow[d, "\underline{p}"] \\ I \times \Delta[n] \arrow[r, "\tilde x"] & I \times S(x) \arrow[r, "g"] & B \end{tikzcd}$$

d'après ce qui précède, il existe une application $h' : I \times \Delta[n] \to E$ qui prolonge $h \circ \tilde x$ au-dessus de $g \circ \tilde x$. On pose $h(\alpha, \varphi x) = h'(\alpha, \varphi\delta^n)$ pour tout $\alpha \in I$, tout opérateur simplicial φ. h est ainsi prolongé à $S(x)$ au-dessus de g, quelque soit $x \in X^n$, donc h est prolongé à $I \times X^n$, même démonstration pour $n = 0$ ($\dot\Delta[n]$ et $\dot S(x)$ sont alors vides) ce qui démarre la récurrence.

Corollaire 1. — (Théorème d'extension des homotopies). — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble* *simplicial* E *soit un complexe de Kan, est que, quels que soient les ensembles simpliciaux* X *et* Y *avec* $Y \subset X$, *l'application* $f : X \to E$ *et l'homotopie* $k : I \times Y \to E$ *telle que* $k \circ \varepsilon_e = f|Y$ $(e = 0$ ou $1)$, *il existe une homotopie* $h : I \times X \to E$ *qui prolonge* k, et *telle que* $k \circ \varepsilon_e = f$.

Il suffit en effet de prendre pour B l'ensemble simplicial réduit au seul sommet b et d'appliquer le théorème 2. 3.

Corollaire 2. — *Soit* $(E, \underline{p}, B)$ *un fibré,* E', B' *des ensembles simpliciaux* $\underline{p}'$, f, g, *des applications telles que le diagramme*

$$\begin{tikzcd} E' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\underline{p}'"] & E \arrow[d, "\underline{p}"] \\ B' \arrow[r, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

soit commutatif. Soit $k : I \times B' \to B$ *une homotopie telle que* $k \circ \varepsilon_e = g$ $(e = 0$ *ou* $1)$. *Il existe alors une homotopie* $h : I \times E' \to E$ *telle que* (i) $p \circ h = k$ (ii) $h \circ \varepsilon_e = f$ (iii) h *est stationnaire sur* $\underline{p}'^{-1}(A') \subset E'$ *si* k *est stationnaire sur* $A' \subset B'$.

Il suffit en effet d'appliquer le théorème 2. 3 au diagramme

$$\begin{tikzcd} (I \times \underline{p}'^{-1}(A')) \cup (e \times E') \arrow[r, "l"] \arrow[d, "\mathrm{inj}"] & E \arrow[d, "\underline{p}"] \\ I \times E' \arrow[r, "k \circ (id \times \underline{p}')"'] & B \end{tikzcd}$$

où l est l'application définie par $l(\alpha, x) = f(x)$, $(x \in \underline{p}'^{-1}(A'), \alpha \in I)$, $l(e, x) = f(x)$ $(x \in E')$.

2. 4. Soient de nouveau $Y \subset X$ deux ensembles simpliciaux, $(E, \underline{p}, B)$ un fibré, et un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{inj}"] & E \arrow[d, "\underline{p}"] \\ X \arrow[r, "g"'] & B \end{tikzcd} .$$

Lemme 1. — *Si*

$$X = I \times \Delta[n], \qquad Y = (0 \times \Delta[n]) \cup (1 \times \Delta[n]) \cup (I \times \Lambda^k[n])$$

il existe une application $h : X \to E$ *qui prolonge* f *au-dessus de* g.

Démonstration analogue à celle du théorème 2. 3 *b*: on utilise des diagrammes dont les lignes supérieures sont:

$$\Lambda^{1,k+1}[n+1] \xrightarrow{\tilde{a}_0} (1 \times \Delta[n]) \cup (\mathrm{I} \times \Lambda^k[n]) \xrightarrow{f} \mathrm{E},$$
$$i < k, \quad \Lambda^{i+1,k+1}[n+1] \xrightarrow{\tilde{a}_i} (\mathrm{I} \times \Lambda^k[n]) \cup \mathrm{S}(d_i a_{i-1}) \xrightarrow{h_{i-1}} \mathrm{E}.$$

Il existe alors $h'_i : \Delta[n+1] \to \mathrm{E}$ au-dessus de $g \circ \tilde{a}_i$ qui prolonge $h_{i-1} \circ \tilde{a}_i$ d'après 2. 1; d'où la définition de h_i.

Pour $i = k$ on utilise

$$\Lambda^{k+1}[n+1] \xrightarrow{\tilde{a}_k} (\mathrm{I} \times \Lambda^k[n]) \cup \mathrm{S}(d_k a_{k-1}),$$

on repart ensuite de $i = n$:

$$\Lambda^{n,k}[n+1] \xrightarrow{\tilde{a}_n} (0 + \Delta[n]) \cup (\mathrm{I} \times \Lambda^k[n]) \xrightarrow{f} \mathrm{E},$$
$$i > k+1, \quad \Lambda^{i,k}[n+1] \xrightarrow{\tilde{a}_i} (\mathrm{I} \times \Lambda^k[n]) \cup \mathrm{S}(d_{i+1} a_{i+1}) \xrightarrow{h_{i+1}} \mathrm{E}$$

ce qui permet de définir les h_i pour $i > k+1$ de proche en proche. Enfin h_{k+1} est défini par

$$\Lambda^k[n+1] \xrightarrow{\tilde{a}_{k+1}} (\mathrm{I} \times \Lambda^k[n]) \cup \mathrm{S}(d_{k+1} a_k, d_{k+2} a_{k+2}) \xrightarrow{l} \mathrm{E}$$

ou

$$l|\mathrm{I} \times \Lambda^k[n] = f|\mathrm{I} \times \Lambda^k[n], \qquad l|\mathrm{S}(d_{k+1} a_k) = h_k|\mathrm{S}(d_{k+1} a_k),$$
$$l|\mathrm{S}(d_{k+2} a_{k+2}) = h_{k+2}|\mathrm{S}(d_{k+2} a_{k+2}),$$

la démonstration précédente doit être légèrement modifiée si $k = 0$ ou n, $n - 1$.

LEMME 2. — *Si*

$$\mathrm{X} = \mathrm{I} + \Delta[n],$$
$$\mathrm{Y} = (0 \times \Delta[n]) \cup (1 \times \Delta[n]) \cup (\mathrm{I} \times \mathrm{S}^{i_1, \dots, i_p}(\sigma_q))$$

où σ_q *est un q-simplexe non dégénéré de* $\Delta[n]$, *et* $\mathrm{S}^{i_1, \dots, i_p}(\sigma_q)$ *l'ensemble simplicial engendré par les* $(q-1)$*-faces* $d_i \sigma_p$ *avec* $i \neq i_1, \dots, i_p$, $0 \leqslant i_1 < \cdots < i_p \leqslant q$, *il existe une application* $h : \mathrm{X} \to \mathrm{E}$ *qui prolonge* f *au-dessus de* g.

Démonstration par récurrence sur n. Si $n = 1$, l'énoncé est exactement celui du lemme 1; de toutes façons, la démonstration est évidente dans ce cas.

Supposons le lemme vrai pour $n - 1$.

1er *cas.* $q < n.\sigma_q$ est alors un simplexe de $S(d_k\delta^n)$ pour un certain k. Soit σ'_q le q-simplexe de $\Delta[n-1]$ tel que $\widetilde{d_k\delta^n}(\sigma'_p) = \sigma_q$. L'application $S^{i_1,\dots,i_p}(\sigma'_q) \xrightarrow{\widetilde{d_k\delta^n}} S^{i_1,\dots,i_p}(\sigma_q)$ est surjective et on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
(0\times\Delta[n-1])\cup(1\times\Delta[n-1])\cup(I\times S^{i_1,\dots,i_p}(\sigma'_q)) & \xrightarrow{id\times\widetilde{d_k\delta^n}} & Y & \xrightarrow{f} & E \\
\downarrow{\scriptstyle inj} & & \downarrow{\scriptstyle inj} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\
I\times\Delta[n-1] & \xrightarrow[id\times\widetilde{d_k\delta^n}]{} & I\times\Delta[n] & \xrightarrow{g} & B
\end{array}$$

L'hypothèse de récurrence permet de définir

$$h' : I \times \Delta[n-1] \to E$$

qui prolonge $f\circ(\widetilde{d_k\delta^n} \times \mathrm{id})$ au-dessus de $g\circ(\widetilde{d_k\delta^n} \times \mathrm{id})$; on définit $f_1 : S(d_k\delta^n) \to E$ qui prolonge f au-dessus de g par $f_1(\alpha, \varphi d_k\delta^n) = h'(\alpha, \varphi\delta^{n-1})$ pour tout opérateur simplicial φ et tout $\alpha \in I$.

On est donc ramené au cas où $q = n$, $S^{i_1,\dots,i_p}(\sigma_q) = \Lambda^{i_1,\dots,i_p}[n]$.

2e *Cas.* — $q = n$; Si $p = 1$, le lemme 2 résulte du lemme 1. Supposons que le lemme soit vrai pour $p - 1$, $p > 1$. Le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
(0\times\Delta[n-1])\cup(1\times\Delta[n-1])\cup(I\times\Lambda^{i_1,\dots,i_{p-1}}[n-1] & \xrightarrow{id\times\widetilde{d_{i_p}\delta^n}} & Y & \xrightarrow{f} & E \\
\downarrow{\scriptstyle inj} & & \downarrow{\scriptstyle inj} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\
I\times\Delta[n-1] & \xrightarrow[id\times\widetilde{d_{i_p}\delta^n}]{} & I\times\Delta[n] & \xrightarrow[g]{} & B
\end{array}$$

et l'hypothèse de récurrence (pour n) permet de définir $h' : I \times \Delta[n-1] \to E$ qui prolonge $f\circ(\mathrm{id} \times \widetilde{d_{i_p}\delta^n})$ au-dessus de $g\circ(\mathrm{id} \times \widetilde{d_{i_p}\delta^n})$.

Donc on peut définir $f_1 : I \times S(d_{i_p}\delta^n) \to E$ qui prolonge f au-dessus de g par $f_1(\alpha, \varphi d_{i_p}\delta^n) = h'(\alpha, \varphi\delta^{n-1})$ pour tout $\alpha \in I$, tout opérateur simplicial φ. D'après l'hypothèse de récurrence sur p, on peut alors définir une application h cherchée.

Lemme 3. — *Si*

$$X = I \times \dot{\Delta}[n+1],$$
$$Y = (0 \times \dot{\Delta}[n+1]) \cup (1 \times \Lambda^1[n+1]) \cup (I \times 0_{n+1})$$

il existe une application $h : \mathrm{X} \to \mathrm{E}$ *qui prolonge* f *au-dessus de* g.

En effet, on considère le diagramme

$$\begin{tikzcd}
(0 \times \Delta[n]) \cup (1 \times \Delta[n] \cup (\mathrm{I} \times 0_n) \arrow[r, "id \times \widetilde{d_{n+1}\delta^{n+1}}"] \arrow[d, "\mathrm{inj}"] & \mathrm{Y} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{inj}"] & \mathrm{E} \arrow[d, "p"] \\
\mathrm{I} \times \Delta[n] \arrow[r, "id \times \widetilde{d_{n+1}\delta^{n+1}}"] & \mathrm{I} \times \dot{\Delta}[n+1] \arrow[r, "g"] & \mathrm{B}
\end{tikzcd}$$

le lemme 2 permet de définir $h' : \mathrm{I} \times \Delta[n] \to \mathrm{E}$, donc

$$f_1 : \mathrm{Y}_1 = (0 \times \dot{\Delta}[n+1]) \cup (1 \times \Lambda^1[n+1]) \cup (\mathrm{I} \times \mathrm{S}(d_{n+1})) \to \mathrm{E}$$

qui prolonge f au-dessus de g.

Soit

$$\mathrm{Y}_i = (0 \times \dot{\Delta}[n+1]) \cup (1 \times \Lambda^1[n+1]) \cup (\mathrm{I} \times \Lambda^{0,1,2,\dots,i})[n+1]\ (i \geqslant 1)$$

et supposons que l'on ait étendu f à $f_{p+1} : \mathrm{Y}_{p+1} \to \mathrm{E}$ au-dessus de g $(p \geqslant 1)$. On considère le diagramme

$$\begin{tikzcd}
(0 \times \Delta[n]) \cup (1 \times \Delta[n]) \cup (\mathrm{I} \times \Lambda^{0,1,\dots,p}[n] \arrow[r, "id \times \widetilde{d_{p+1}\delta^{n+1}}"] \arrow[d] & \mathrm{Y}_{p+1} \arrow[r, "f_{p+1}"] \arrow[d, "\mathrm{inj}"] & \mathrm{E} \arrow[d, "p"] \\
\mathrm{I} \times \Delta[n] \arrow[r, "id \times \widetilde{d_{p+1}\delta^{n+1}}"] & \mathrm{I} \times \Delta[n+1] \arrow[r, "g"] & \mathrm{B}
\end{tikzcd}$$

l'hypothèse de récurrence et le lemme 2 permettent alors de définir

$$f_p : \mathrm{Y}_p \to \mathrm{E} \qquad \text{au-dessus de } g, \text{ prolongeant } f_{p+1}.$$

On arrive ainsi à $f_2 : \mathrm{Y}_2 \to \mathrm{E}$. En considérant $\widetilde{d_0\delta^{n+1}}$ et un diagramme analogue au précédent, on étend f_2 à $f' : (0 \times \dot{\Delta}[n+1) \cup (\mathrm{I} \times \Lambda^1[n+1]) \to \mathrm{E}$, au-dessus de g. Le théorème 2. 3 permet alors de conclure.

Remarque. — Le lemme 3 est encore vrai si on remplace $\Lambda^1[n+1]$ par $\Lambda^k[n+1]$ et si l'on échange le rôle de 0 et 1. Cependant, étant donné son caractère barbare, et le fait qu'il ne sera utilisé dans la suite que sous la forme énoncée ci-dessus il a semblé peu intéressant d'en donner une démonstration plus générale.

2. 5. Proposition. — *Soient* (E, $\underline{p}$, B) *un fibré,* X et Y *des ensembles simpliciaux avec* $Y \subset X$, f, h_1, h_2, g *des applications, tels que le diagramme*

$$\begin{tikzcd}
(I \times Y) \cup (e \times X) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{inj}"'] & E \arrow[d, "\underline{p}"] \\
I \times X \arrow[ur, shift left, "h_1"] \arrow[ur, shift right, "h_2"'] \arrow[r, "g"'] & B
\end{tikzcd}$$

soit commutatif. Il existe alors une application $h : I \times X \to E$ *qui prolonge* f *au-dessus de* g *stationnaire sur* Y, *et telle que* $h : h_1(1 - e,\ ) \sim h_2(1 - e,\ )$.

Démonstration. — Posons $Y_1 = (e \times X) \cup (1 - e \times X)$, $Y_2 = I \times Y$, $Y' = Y_1 \cup Y_2$, $X' = I \times X$, et considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd}
(I \times Y') \cup (e \times X') \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\mathrm{inj}"'] & E \arrow[d, "\underline{p}"] \\
I \times X \arrow[r, "G"'] & B
\end{tikzcd}$$

où

$$\begin{array}{llllll}
G(\alpha, x') = g(\alpha, x) & \text{pour} & \alpha \in I, & x' = (\beta, x), & \beta \in I, & x \in X, \\
F(e, x') = f(e, x) & \text{pour} & x' \in X', & x' = (\beta, x), & \beta \in I, & x \in X.
\end{array}$$

Sur $I \times Y_1$ on définit F par

$$\begin{array}{lll}
F(\alpha, e, x) = h_1(\alpha, x) & \alpha \in I, & x \in X \\
F(\alpha, 1 - e, x) = h_2(\alpha, x) & \alpha \in I, & x \in X
\end{array}$$

et sur $I \times Y_2$ par

$$F(\alpha, \beta, y) = f(\alpha, y) \qquad \alpha, \beta \in I, \quad y \in Y$$

on vérifie que F définit une application simpliciale, et que le diagramme (1) est commutatif. Le théorème 2. 3 donne une application $H : I \times X' \to E$ qui prolonge F au-dessus de G. $h = H \circ \varepsilon_{1-e} : X' \to E$ est alors l'application cherchée.

Corollaire. — *Soient* E *un complexe de Kan,* F, X, Y, *des ensembles simpliciaux tels que* $F \subset E$, $Y \subset X$. *La relation* $\sim$ (resp $\sim$ rel Y) *entre applications* $X \to E$ (resp $(X, Y) \to (E, F)$) *est une relation d'équivalence. Si de plus* F *est un complexe de Kan, la relation* $\sim$ rel (Y, F) *est aussi une relation d'équivalence.*

On prend pour B un point, alors $E \to B$ est un fibré. La proposition 2. 5 signifie alors ceci (où les f_i désignent des applications $(X, Y) \to (E, F)$); si $h_1 : f_0 \sim f_1$ rel Y et $h_2 : f_1 \sim f_2$ rel Y alors $f_1 \sim f_2$ rel Y. Mais, en échangeant le rôle de h_1 et h_2, on a aussi, dans les mêmes conditions, $f_2 \sim f_1$ rel Y. Enfin en changeant e en 1-e, on voit que l'hypothèse $f_1 \sim f_0$ rel Y et $f_2 \sim f_0$ rel Y entraîne $f_1 \sim f_2$ rel Y et $f_2 \sim f_1$ rel Y.

Comme $f \sim f$ rel Y (il suffit de poser $h(\alpha, x) = f(x)$ pour $\alpha \in I$, $x \in X$) on voit que $f_0 \sim f_1$, rel Y et $f_1 \sim f_1$ rel Y entraînent $f_1 \sim f_0$ rel Y, et que $f_0 \sim f_1$ rel Y et $f_1 \sim f_2$ rel Y entraînent $f_0 \sim f_1$ rel Y et $f_2 \sim f_1$ rel Y, soit $f_0 \sim f_2$ rel Y. $\sim$ rel Y est bien une relation d'équivalence.

En prenant $Y = \emptyset$, on voit que $\sim$ est une relation d'équivalence.

Supposons que F soit un complexe de Kan, et soit un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
(e \times X, e \times Y) \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, "\text{inj}"'] & (E, F) \\
(I \times X, I \times Y) \arrow[ur, shift left, "h_1"] \arrow[ur, shift right, "h_2"'] &
\end{tikzcd}$$

Ce diagramme permet de construire une application $((I \times Y_1) \cup (e \times X'), (I \times Y_2) \cup (e \times Y')) \to (E, F)$ (où l'on a posé $Y_1 = (e \times X) \cup (1-e \times X), Y_2 = (e \times Y) \cup (1-e \times Y), X' = I \times X$, $Y' = I \times Y$) par le procédé de la proposition 2. 5. F étant un complexe de Kan, on peut, en utilisant 2. 3 corrollaire 1, prolonger la restriction de l'application précédente aux sous-espaces, en une application $I \times Y' \to F$. On obtient ainsi une application : $(I \times (Y_1 \cup Y')) \cup (e \times X') \to E$ qui se prolonge d'après le même corollaire en une application $H : I \times X' \to E$ c'est-à-dire, vu la construction même de H, en une application $H : (I \times X', I \times Y') \to (E, F)$. Mais alors

$$H \circ \varepsilon_{1-e} : h_1 \circ \varepsilon_{1-e} \sim h_2 \circ \varepsilon_{1-e} \text{ rel } (Y, F).$$

On conclut alors comme précédemment.

Remarque. — Si $Z \subset Y \subset X$, $G \subset F \subset E$, et si on considère des homotopies : $k : I \times X \to E$ telles que $k : I \times Y \to F$ et $k : I \times Z \to G$ (homotopies rel (Y, Z, F, G)) et si G, F, E sont des complexes de Kan, la relation $\sim$ rel (Y, Z, F, G) est encore une relation d'équivalence. La démonstration est la même que dans le cas $Z = G = \emptyset$, à la différence près qu'elle comporte une étape de plus.

3. — Groupes d'homotopies (1re définition).

Dans tout ce paragraphe, les ensembles simpliciaux seront, sauf mention expresse du contraire, des complexes de Kan avec point base, et les applications, des morphismes de $\mathcal{S}^*$ (cf. (1-1)-g).

3. 1. Proposition. — *Soit* $(E, \underline{p}, B)$ *un fibré; si* B *est un complexe de Kan,* E *l'est aussi. Si* E *est un complexe de Kan, et si* p *est surjective,* B *est un complexe de Kan.*

C'est évident.

3. 2. *a.* Soit (X, x_0) un complexe de Kan avec point base x_0. on pose $E(X, x_0)_n = \{x \in X_{n+1} | d_1 \dots d_{n+1} x = x_0\}$ et on définit $\tilde{d}_i : E(X, x_0)_n \to E(X, x_0)_{n-1}$, $\tilde{s}_i : E(X, x_0)_n \to E(X, x_0)_{n+1}$ $\underline{p} : E(X, x_0)_n \to X_n$ par :

$$\tilde{d}_i x = d_{i+1} x, \tilde{s}_i x = s_{i+1} x, \qquad px = d_0 x.$$

Muni de d_i et s_i, $E(X, x_0)$ est un complexe de Kan, où l'on prend pour point de base le O-simplexe $s_0 x_0$. De plus $(E(X, X_0)$ $\underline{p}$, X) est un fibré dont la fibre au-dessus de x_0 est désigné par $\Omega(X, x_0)$. Soit A un complexe de Kan contenu dans X tel que $x_0 \in A$. On pose $\underline{p}^{-1}(A) = \Omega(X, A, x_0)$. C'est un complexe de Kan, et $(\Omega(X, A, x_0), \underline{p}, A)$ est un fibré. Si f est une application $(X, x_0) \to (Y, y_0)$ (resp. $(X, A, x_0) \to (Y, B, y_0)$) f induit de façon évidente des applications $E(f) : E(X, x_0) \to E(Y, y_0)$, $\Omega(f) : \Omega(X, x_0) \to \Omega(Y, y_0)$ ((resp. $\Omega(X, A, x_0) \to \Omega(Y, B, y_0)$). On voit que Ω et E sont des foncteurs $\mathcal{S}^* \to \mathcal{S}^*$. Ces foncteurs jouent le rôle d'espaces de lacets et d'espaces de chemins de la théorie de la théorie des espaces topologiques.

b. Si (X, x_0) et $(Y, y_0) \in \mathcal{S}^*$, $(X \times Y, (x_0, y_0)) \in \mathcal{S}^*$ et l'on a $\Omega(X \times Y, (x_0, y_0)) = \Omega(X, x_0) \times \Omega(Y, y_0)$.

c. Si $(E, \underline{p}, B)$ est un fibré, de fibre $F = \underline{p}^{-1}(b_0)$, $b_0 \in B_0$, et si $e_0 \in F_0$, $(\Omega(E, e_0), \Omega(\underline{p}), \Omega(B, b_0))$ est un fibré dont la fibre au-dessus de $s_0 b_0$ est $\Omega(F, e_0)$.

3. 3. *Le foncteur* π_0.

a. Dans (X_0, x_0) on considère la relation $x \sim y$ s'il existe un 1-simplexe $\sigma \in X_1$ tel que $d_1\sigma = x$, $d_0\sigma = y$. On voit immédiatement que *si* X *est un complexe de Kan*, $\sim$ *est une relation d'équivalence.* On désigne par π_0 (X, x_0) l'ensemble des classes d'équivalence. C'est un ensemble avec *point base*, le point base étant la classe d'équivalence de x_0. Si $f: (X, x_0) \to (Y, y_0)$ est une application, on voit que f est compatible avec la relation $\sim$, et définit par passage aux quotients une application $\pi_0(f) : \pi_0(X, x_0) \to \pi_0(Y, y_0)$ compatible avec les points bases. Une telle application peut être appelée un *homomorphisme* d'ensembles avec points bases. On voit enfin que π_0 est un foncteur qui prend ses valeurs dans la catégorie des ensembles.

b. Les applications d'injection $x \to (x, y_0)$, $y \to (x_0, y)$ et les projections $(x, y) \to x$, $(x, y) \to y$, définissent, vu la fonctorialité de π_0 des homomorphismes.

$$\pi_0(X, x_0) \to \pi_0(X \times Y, (x_0. y_0)), \ \pi_0(Y, y_0) \to \pi_0(X \times Y, (x_0, y_0))$$
$$\pi_0(X \times Y, (x_0, y_0)) \to \pi_0(X, x_0) \times \pi_0(Y, y_0)$$

qui montrent que le dernier homomorphisme est une *bijection* d'ensembles avec points bases.

c. Soit $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$, une suite d'ensembles avec points bases et d'homomorphismes. On dit que cette suite est exacte si $Im(f) = Ker(g)$, où l'on définit $Ker(g)$ comme étant le sous-ensemble de B dont l'image par g est le point base de C. Avec les notations de 3. 2 *c* on voit alors que la suite $\pi_0(F, e_0) \to \pi_0(E, e_0) \xrightarrow{\pi_0(p)} \pi_0(B)$ est exacte, où la première flèche désigne l'homomorphisme induit par l'injection de la fibre F dans E.

d. Soient x et y deux éléments de $\Omega_0(X, x_0)$. x et y sont donc des 1-simplexes de X tels que, $d_0x = d_1x = d_0y = d_1y = x_0$. X étant un complexe de Kan, il existe un 2-simplexe $\sigma \in K_2$ tel que $d_2\sigma = x\, d_0\sigma = y$. On pose $d_1\sigma = x + y$. $d_1\sigma$ est un élément de $\Omega_0(X, x_0)$ qui dépend bien entendu du choix de σ.

Convention. — Si $x \in X_0$, on désignera par $\bar{x}$ sa classe d'équivalence dans $\pi_0(X, x)$.

On pose alors $\bar{x} + \bar{y} = \overline{x + y}$, on vérifie cf. ([9], que cette opération est indépendante du choix de σ, et du choix de $\bar{x}$ et

$\bar{y}$ dans x et y, et que *muni de cette opération*, $\pi_0(\Omega(X, x_0), s_0x_0)$ *est un groupe* (non commutatif en général) dont l'élément neutre *est le point base*, et que

$$\pi_0\Omega(f) : \pi_0(\Omega(X, x_0), s_0x_0) \to \pi_0(\Omega(Y, y_0), s_0y_0)$$

est un homomorphisme de groupes.

3. 4. *Groupes d'homotopie.* — On pose

$$\Omega^{n+1}(X, x_0) = \Omega(\Omega^n(X, x_0), s_0^n x_0) \quad (n \geqslant 0),$$
$$\Omega^0(X, x_0) = X; \qquad \Omega^{n+1}(X, A, x_0) = \Omega(\Omega^n(x, A, X_0)) \quad (n \geqslant 1).$$

a. Définition. On pose

$\pi_n(X, x_0) = \pi_0(\Omega^n(X_0, x_0), s_0{}^n x_0),$
$(n \geqslant 0) = n^{\text{ième}}$ groupe d'homotopie absolue
$\pi_n(X, A, x_0) = \pi_0(\Omega^n(X, A, x_0), s_0{}^n x_0),$
$(n \geqslant 1) = n^{\text{ième}}$ groupe d'homotopie relatif

$\pi_n(f) = \pi_0\Omega^n(f)$ pour $f: (X, x_0) \to (Y, y_0)$ ou $(X, A, x_0) \to (Y, B, y_0)$.

On voit alors que $\pi_n(X, x_0) = \pi_p(\Omega^q(X, x_0), s_0{}^q x)$ pour $p + q = n$ et que $\pi_n(X, A, x_0) = \pi_p(\Omega^q(X, A, x_0)\ s_0{}^q x)$ pour $d + q = n$; $q > 0$.

De plus $\pi_n(X, x_0, x_0) = \pi_n(X, x_0)$.

b. Théorème. — $\pi_n(X, x_0)$ *est un groupe pour* $n \geqslant 1$, $\pi_n(X, T, x_0)$ *est un groupe pour* $n \geqslant 2$. *Les homomorphismes* $\pi_n(f)$ *sont des homomorphismes de groupes pour* $n \geqslant 1$ *dans le cas absolu, pour* $n \geqslant 2$ *dans le cas relatif.*

π_n *est un foncteur du couple* (X, x_0) *dans le cas absolu, du triples* (X, A, x_0) *dans le cas relatif.*

De plus $\pi_n(X \times Y, (x_0, y_0) \approx \pi_n(X, x_0) \times \pi_n(Y, y_0)$.

Ce théorème est une conséquence immédiate des définitions et de 3. 3-*d*, 3. 3-*b*.

c. Suite exacte d'homotopie. — Soit A un complexe de Kan contenue dans X et $x_0 \in A \subset X$.

Soit i l'injection $(A, x_0) \to (X, x_0)$ et j l'injection

$$(X, x_0, x_0) \to (X, A, x_0).$$

On a vu dans 3. 2-*a* que $(\Omega(X, A, x_0), \underline{p}, A)$ est un fibré. La fibre de ce fibré (au-dessus de x_0) est $\Omega(X, x_0)$ et l'injection de la fibre dans l'espace total est $\Omega(j)$. Appliquons le foncteur

Ω^n à ce fibré : d'après 3. 2-*c* on a encore un fibré. Appliquons alors ce foncteur π_0 : d'après (3-2)*c* on a une *suite exacte :*

$$\pi_0(\Omega^{n+1}(X, x_0), s_0^{n+1}x_0) \xrightarrow{\pi_0\Omega^{n+1}(j)} \pi_0(\Omega^{n+1}(X, A, x_0), s_0^{n+1}x_0) \xrightarrow{\pi_0\Omega^n(\underline{p})} \pi_0(\Omega^n(A, x_0), s_0^n x_0)$$

c'est-à-dire, vu la définition des π_n : pour $n \geqslant 0$

$$\pi_{n+1}(X, x_0) \xrightarrow{\pi_{n+1}(j)} \pi_{n+1}(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_n(A, x_0)$$

où l'on a posé $\pi_0\Omega^n(\underline{p}) = \partial$ (*homomorphisme « bord »*).

Soit (Δ) la suite de groupes (ou d'ensembles avec points bases) et d'homomorphismes :

$$\cdots \pi_{n+1}(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_n(A, x_0) \xrightarrow{\pi_n(i)} \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{\pi_n(j)} \pi_n(X, A, x_0) \to \cdots$$
$$\to \pi_1(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_0(A, x_0) \xrightarrow{\pi_0(i)} \pi_0(X, x_0).$$

THÉORÈME. — *La suite* (Δ) *est exacte, et est un foncteur covariant du couple* (X, A).

Le caractère fonctoriel est évident. Le fait que la suite est exacte résulte d'un calcul explicite sans grandes difficultés. La définition même de ∂ fournit d'ailleurs directement une partie de la démonstration.

d. Suite exacte d'homotopie des fibrés. — Soit (E, $\underline{p}$, B) un fibré, F la fibre au-dessus de b_0, et $e_0 \in F_0$. Soit $\underline{p}'$ l'application (E, F) $\to$ (B, b_0) définie par $\underline{p}$.

PROPOSITION. — $\pi_n(\underline{p}') : \pi_n(E, F, e_0) \to \pi_n(B, b_0)$ *est un isomorphisme* pour $n \geqslant 1$.

Pour la démonstration voir [16].

Soit ∂' l'homomorphisme « bord » du couple (E, F). On définit $\partial : \pi_{n+1}(B, b_0) \to \pi_n(F, e_0)$ par $\partial = \partial' \circ \pi_n(\underline{p}')^{-1}$ on considère alors la suite des groupes (ou d'ensembles avec points bases) et d'homomorphismes

$$(\Delta) : \cdots \pi_{n-1}(B, b_0) \xrightarrow{\partial} \pi_n(F, e_0) \xrightarrow{\pi_n(i)} \pi_n(E, e_0) \xrightarrow{\pi_n(p)} \pi_n(B, b_0) \to \cdots$$
$$\to \pi_1(B, b_0) \xrightarrow{\partial} \pi_0(F, e_0) \xrightarrow{\pi_0(i)} \pi_0(E, e_0) \xrightarrow{\pi_0(\underline{p})} \pi_0(B, b_0).$$

où i désigne l'injection F $\to$ E.

Le théorème 3. 4-*c* appliqué au couple (E, F) et ce qui précède démontre le :

THÉORÈME. — *La suite* (Δ) *est exacte et est un foncteur covariant du fibré* (E, $\underline{p}$, B).

3. 5. On voit immédiatement sur les définitions que $\Omega_0^n(X, x_0)$ est l'ensemble des éléments $x \in X_n$ tels que $d_i x = s_0^{n-1} x_0$ pour $i = 0, \ldots, n$, et que $\Omega_1^n(X, x_0)$ est l'ensemble des éléments $x \in X_{n+1}$ tels que $d_0 x = d_1 x = \cdots = d_{n-1} x = s_0^n x_0$, $d_n d_{n+1} x = s_0^{n-1} x_0$. La relation $x \sim y$ dans $\Omega_0^n(X, x_0)$ s'exprime alors comme suit dans X : Soient x et $y \in X_n$ tels que $d_i x = d_i y = s_0^{n-1} x_0$ pour $0 \leqslant i \leqslant n$. On dit que $x \underset{n}{\sim} y$ s'il existe un élément $\sigma \in X_{n+1}$ tel que $d_{n+1}\sigma = x$, $d_n \sigma = y$, $d_i \sigma = s_0^n x_0$ pour $0 \leqslant i \leqslant n-1$.

$\pi_n(X, x_0)$ est alors défini comme ensemble quotient de l'ensemble des $x \in X_n$ tels que $d_i x = s_0^{n-1} x_0$ pour $0 \leqslant i \leqslant n$ par la relation d'équivalence $\underset{n}{\sim}$.

La somme dans $\pi_n(X, x_0)$ est définie par passage au quotient par $\underset{n}{\sim}$ à partir de $(x, y) \to x + y$, où $x + y = d_n \sigma$, et où $\sigma \in X_{n+1}$ est tel que $d_{n+1}\sigma = x$, $d_{n-1}\sigma = y$, $d_i \sigma = s_0^n x_0$ pour $0 \leqslant i \leqslant n-1$.

Pour définir $\pi_n(X, x_0)$, il suffit donc de considérer les éléments de X dont le $(n-1)$-squelette est réduit à $s_0^{n-1} x_0$.

DÉFINITION. — *Soit* $\mathcal{E}(X, x_0, n)$ *le sous-ensemble simplicial de* X *formé des éléments dont le* $(n-1)$*-squelette est réduit à* $s_0^{n-1} x_0$. $\mathcal{E}(X, x_0, n)$ *est le* n-ième *ensemble d'Eilenberg de* (X, x_0).

Si X est un complexe de Kan, il en est de même de $\mathcal{E}(X, x_0, n)$, et ce qui précède montre que :

PROPOSITION. — $\pi_n(X, x_0) = \pi_n(\mathcal{E}(X, x_0, n), x_0)$.

Pour étudier π_n, on peut donc supposer que $X = \mathcal{E}(X, x_0, n)$ *cette convention sera toujours appliquée dans la suite.*

3. 6. *Le lemme d'addition.*

LEMME 1. — *Soient* $X (= \mathcal{E}(X, x_0, n))$ *un complexe de Kan,* $x \in X_{n+1}$ *et* $y_i \in X_n$ $(0 \leqslant i \leqslant n+1)$ *tels que* $d_i x \underset{n}{\sim} y_i$. *Il existe alors un élément* $y \in X_{n+1}$ *tel que* $d_i y = y_i$ *pour tout* i.

DÉMONSTRATION. — Il suffit de démontrer le lemme dans le cas où $d_i x = y_i$ sauf pour un entier k, $0 \leqslant k \leqslant n+1$. Par hypothèse, il existe $Y_k \in X_{n+1}$ tel que $d_{n+1} Y_k = d_k x$, $d_n Y_k = y_k d_i Y_k = s_0^n x_0$ pour $i < n$.

Si $k \neq n+1$ on pose $z_i = d_i s_{n+1} x$ pour $i = 0, 1, \ldots, \hat{k}, \ldots, \widehat{n+1}, n+2$ et $z_k = Y_k$. Comme $d_i z_j = d_{j-1} z_i$ pour $i < j$, $i, j \neq k$, il existe un $z \in X_{n+2}$ tel que $d_i z = z_i$ pour $i \neq n+1$. $y = d_{n+1} z$ à la propriété demandée.

Si $k = n+1$ on pose $z_i = d_i s_n x$ pour $i = 0, \ldots, n-1$, $n+1$ et $z_{n+2} = Y_{n+1}$. Il existe encore une fois un $z \in X_{n+2}$ tel que $d_i z = z_i$ pour $i \neq n$. $y = d_n z$ à la propriété demandée.

Lemme 2. — *Soit $x \in X_{n+1}$ $(= \mathcal{E}_{n+1}(X, x_0, n))$ un élément tel que $d_{p+1} x = d_p x$ pour un entier $p < n-1$ $(n \geqslant 2)$ et $d_i x = s_0^n x_0$ pour $i \neq n+1$ n, $p+1$, p, alors $d_{n+1}\, x \underset{n}{\sim} d_n x$.*

Démonstration. — On pose $x_{n+2} = d_{n+2} s_n x$, $x_n = x$, $x_{p+1} = x_p = d_p s_{n-1} x$, $d_i x = s_0^n x_0$ pour $i \neq n+2$, $n+1$, $p+1$, p et, si $p < n-2$, $x_{n-1} = d_p s_{p+1} x$. On vérifie que $d_i x_j = d_{j-1} x_i$ pour $i < j$ et $i, j \neq n+1$. Il existe donc $y \in X_{n+2}$ tel que $d_i y = x_i$ pour $i \neq n+1$. Soit $z = d_{n+1} y$. $d_{n+1} z = d_{n+1} x$, $d_n z = d_n x$, $d_i z = s_0^{n-1} x_0$ pour $i < n$. Donc $d_{n+1} x \underset{n}{\sim} d_n x$.

Lemme 3. — *Soient $x \in X_{n+1} (= \mathcal{E}_{n+1}(X, x_0, n))$ et p un entier $< n-1$, $(n \geqslant 2)$. Il existe un $(n+1)$-simplexe $\tau \in X_{n+1}$ tel que $d_i \tau = d_i x$ pour $i \neq p$, $p+1$, $d_p \tau = s_0^n x_0$, $d_{p+1} \tau \in \overline{d_{p+1} x} - \overline{d_p x}$ (où, suivant la convention 3. 3-d $\bar{\alpha}$ désigne la classe d'équivalence de $\alpha \in X_n$ dans $\pi_n(X, x_0)$).*

Démonstration. — Soit $\sigma_0 \in X_{n+1}$ tel que $d_{n+1} \sigma_0 = d_p x$, $d_n \sigma_0 = s_0^n x_0$, $d_i \sigma_0 = x_0$ pour $i < n-1$. Par définition $d_{n-1} \sigma_0 \in -\overline{d_p x}$.

Soit $\sigma_1 \in X_{n+1}$ tel que $d_{n+1} \sigma_1 = d_{p+1} x$, $d_{n-1} \sigma_1 = d_{n-1} \sigma_0$, $d_i \sigma_1 = s_0^n x_0$ pour $i < n-1$. Par définition $d_n \sigma_1 \in \overline{d_{p+1} x} - \overline{d_p x}$.

On pose alors :

$$y_{n+2} = x, \qquad y_{p+1} = \sigma_1, \qquad y_p = \sigma_0, \qquad y_i = s_n d_i x$$

pour $i \neq p$, $p+1$, n, $n+1$, $n+2$.

Entre ces y_j, $j \neq n$, $n+1$ on a les relations $d_i y_j = d_{j-1} y_i$ pour $i < j$, $i, j \neq n$, $n+1$. On cherche un y_n tel que $d_{n+1} y_n = d_n y_{n+2}$, $d_i y_n = d_{n-1} y_i$ pour $i < n$. Un tel y_n existe d'après la condition de Kan, puisque les simplexes du second membre ont leurs faces toutes égales (puisque $X = \mathcal{E}(X, x_0, n)$). Comme $d_{n-1} y_i = s_0^n x_0$ pour $i \neq p$, $p+1$, n, $n+1$, $n+2$ et que $d_p y_n = d_{p+1} y_n$ puisque $d_p y_n = d_{n-1} y_p = d_{n-1} \sigma_0$, $d_{p+1} y_n = d_{n-1} y_{p+1} = d_{n-1} \sigma_1$

et que $d_{n-1}\sigma_0 = d_{n-1}\sigma_1$, on peut appliquer le lemme 2 à y_n : $d_{n+1}y_n \underset{n}{\sim} d_n y_n$. C'est-à-dire : $d_n x \underset{n}{\sim} d_n y_n$; d'après le lemme 1, on peut alors choisir y_n de façon que $d_n y_n = d_n x$. Finalement, les $n+2$ simplexes y_i $i \neq n+1$ vérifient les relations $d_i y_j = d_{j-1} y_i$ pour $i < j$, $i, j, \neq n+1$ et $d_{n+1} y_n = d_n y_n = d_n x$. Il existe donc $z \in X_{n+2}$ tel que $d_i z = y_i$ pour $i \neq n+1$. On pose $\tau = d_{n+1} z$. τ à la propriété demandée.

THÉORÈME 1. — *Pour $n \geqslant 2$, $\pi_n(X, x_0)$ et $\pi_{n+1}(X, A, x_0)$ sont des groupes commutatifs.*

DÉMONSTRATION. — Il suffit de vérifier que $\pi_2(X, x_0)$ est commutatif.

Soient x et $y \in X_2$ $(= \mathcal{E}_2(X, x_0, 2))$. Il existe un simplexe $\sigma \in X_3$ dont les faces sont $d_2\sigma = x$, $d_1\sigma = x$, $d_0\sigma = y$, et un simplexe $\sigma' \in X_3$ dont les faces sont $d_3\sigma' = x$, $d_1\sigma' = y$, $d_0\sigma' = x$.

D'après le lemme 3, il existe un simplexe $\tau \in X_3$ tel que $d_3\tau = d_3\sigma$, $d_2\tau = d_2\sigma = x$, $d_1\tau \in \overline{x} - y$, $d_0\tau = s_0^2 x_0$. Par définition de l'addition, on a donc $\overline{d_3\sigma} + \overline{x} - \overline{y} = \overline{x}$, soit

$$\overline{d_3\sigma} = \overline{x} + \overline{y} - \overline{x}.$$

En appliquant le lemme 3 à σ', on voit que $\overline{d_2\sigma'} = \overline{x} + \overline{y} - \overline{x}$. On en déduit l'égalité $\overline{d_3\sigma} = \overline{d_2\sigma'}$, c'est-à-dire $d_3\sigma \sim d_2\sigma'$. D'après le lemme 1, on peut choisir σ' de façon que $d_2\sigma' = d_3\sigma$.

Soit alors $z \in X_3$ un simplexe tel que $d_3 z = x$, $d_1 z = y$, $d_0 z = s_0^2 x_0$ (on a : $d_2 z \in \overline{x} + \overline{y}$) et $z' \in X_3$ tel que $d_3 z' = y$, $d_1 z' = x$, $d_0 z' = s_0^2 x_0$ (on a $d_2 z' = \overline{y} + \overline{x}$). On pose $\mu_0 = z$, $\mu_1 = z'$, $\mu_2 = \sigma$, $\mu_4 = \sigma'$ on a $d_i u_j = d_{j-1}\mu_i$ pour $i < j$, i, j, $\neq 3$. Il existe donc $\mu \in X_4$ tel que $d_i\mu = \mu_i$ pour $i \neq 3$. On pose $\lambda = d_3\mu$. $d_0\lambda = d_0 d_3\mu = d_2 d_0\mu = d_2\mu_0 = d_2 z$; de même $d_1\lambda = d_2 z'$, $d_2\lambda = d_3\lambda = x$; en appliquant le lemme 3 à λ on voit que $\overline{x} + \overline{d_2 z} - \overline{d_2 z'} = \overline{x}$, c'est-à-dire $\overline{d_2 z} = \overline{d_2 z'}$ soit $\overline{x} + \overline{y} = \overline{y} + \overline{x}$ C.Q.F.D.

THÉORÈME 2 (Lemme d'addition). — *Soit $x \in X_{n+1}$ un $(n+1)$-simplexe dont les $(n-1)$-faces sont égales à $s_0^{n-1} x_0$. Alors*

$$\sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \overline{d_i x} = 0 \quad si \quad n > 1$$

et

$$\overline{d_2 x} + \overline{d_0 x} - \overline{d_1 x} = 0 \quad si \quad n = 1.$$

Démonstration. — Si $n = 1$, le théorème ne fait qu'exprimer la définition de l'addition dans $\pi_1(X, x_0)$. Supposons donc $n > 1$. On applique à x le lemme 3 avec $p = 0$, puis au résultat le lemme 3 avec $p = 1$, et ainsi de suite jusqu'à $p = n - 2$. Le théorème s'en déduit par définition même de l'addition dans $\pi_n(X, x_0)$ en utilisant le théorème 1.

PROPOSITION 1 (Réciproque du théorème 2). — *Soient* x_i, $(i = 0, \ldots, n+1)$ *des n-simplexe de* X *dont les* $(n-1)$-*faces sont égales à* $s_0^{n-1}x_0$ *tels que*

$$\sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \bar{x}_i = 0 \text{ (resp. } \bar{x}_2 + \bar{x}_0 - \bar{x}_1 = 0) \quad si \quad n > 1 (\text{resp. } n = 1).$$

Il existe alors un $(n+1)$-*simplexe* x *tel que* $d_i x = x_i$ *quel que soit* i.

Démonstration. — Il existe un $(n+1)$-simplexe x' tel que $d_i x' = x_i$ pour $i > 0$ (puisque $d_i x_j = d_{j-1} x_i = s_0^{n-1}x_0$ *quels que soient* i *et* j) en appliquant le théorème 2 à x' on voit que $\overline{d_0 x'} = \bar{x}_0$ donc $d_0 x' \underset{n}{\sim} x_0$. On applique alors le lemme 1.

THÉORÈME 3. — *Soient* f *et* g *deux applications* $(X, x_0) \to (X, y_0)$. *Si* $f \sim g$ rel. x_0, *alors* $\pi_n(f) = \pi_n(g)$.

Démonstration. — Soit $x \in X_n (= \mathcal{E}_n(X, x_0, n))$. Désignons par k_i les fonctions qui définissent l'homotopie $f \sim g$ rel. x_0 (cf. 1. 2) les relations de commutation entre les d_i et les k_j montrent que si on pose formellement $d = \sum(-)^i d_i$, $k = \sum(-)^i k_i$, on a formellement $dk + kd = g - f$.

On remarque que $k_i d_j x = s_0^n y_0$ puisque k_i est une homotopie rel. x_0 et que $d_j x = s_0^{n-1}x_0$ (tout i, tout j). Pour la même raison $d_i d_j k_r x = s_0^{n-1}y_0$) (tout i, tout j, tout r); $d_j k_r x$ est donc un générateur de $\pi_n(Y, y_0)$. D'après le théorème 2, $\sum_{i=0}^{i=n+1} (-1)^i \overline{d_i k_j x} = 0$ d'autre part $k_i d_j x = s_0^n y_0$ signifie que $\overline{k_i d_j x} = 0$. L'identité $dk + kd = g - f$ donne alors $\overline{g(x)} - \overline{f(x)} = 0$.

C.Q.F.D.

3. 7. Les générateurs de $\pi_n(X, x_0)$ sont d'après 3. 5 les $x \in X_n$ tels que $d_i x = s_0^{n-1}x_0$ pour $i = 0, \ldots, n+1$. D'après 1. 1 f il revient au même de dire que les applications

$$(\Delta[n], \dot{\Delta}[n]) \to (X, x_0)$$

engendrent $\pi_n(X, x_0)$. De même, on peut dire que les générateurs de $\pi_n(X, A, x_0)$ sont les applications $(\Delta[n], \dot{\Delta}[n], \Lambda^0[n] \to (X, A, x_0)$. On a vu (2. 5 *corollaire*) que la relation homotopie rel. $\dot{\Delta}[n]$, ou rel. $(\dot{\Delta}[n], A, \Lambda^0[n], x_0)$ est une relation d'équivalence. *Cette relation coïncide en fait avec la relation introduite dans* 3. 3 en effet :

THÉORÈME. — *Soit $k : f \sim g$ rel. $\dot{\Delta}[n]$ une homotopie entre applications $(\Delta[n], \dot{\Delta}[n]) \to (X, x_0)$. Alors $f(\delta^n) \underset{n}{\sim} g(\delta^n)$. Réciproquement si x et $y \in X_n$ sont tels que $x \underset{n}{\sim} y$, alors $\tilde{x} \sim \tilde{y}$ rel. $\dot{\Delta}[n]$.*

Démonstration. — Soient k_i les fonctions qui définissent l'homotopie k. Un raisonnement analogue à celui qui a été fait dans la démonstration du théorème 3 3. 6 montre que $\overline{k_i d_j \delta^n} = 0$, et que $d_j k_r \delta^n$ est un générateur de $\pi_n(X, x_0)$. Le lemme d'addition montre que $\sum_{i=1}^{n+1} \overline{(-1)^i d_i k_j \delta^n} = 0$ et l'identité $dk + kd = g - f$ entraîne alors $\overline{g(\delta^n)} - \overline{f(\delta^n)} = 0$ c'est-à-dire $g(\delta^n) \underset{n}{\sim} f(\delta^n)$.

Réciproquement supposons que $x \underset{n}{\sim} y$ c'est-à-dire qu'il existe $\sigma \in X_{n+1}$ tel que $d_{n+1}\sigma = x$, $d_n\sigma = y$ $d_i\sigma = s_0{}^n x_0$ pour $i < n$. On pose $k(a_i) = s_i y$ pour $i < n$ et $k(a_n) = \sigma$. On définit ainsi une homotopie $k : I \times \Delta[n] \to (X, x_0)$ d'après 1. 4. On vérifie sans difficulté que $k : \tilde{x} \sim \tilde{y}$ rel. $\dot{\Delta}[n]$.

REMARQUE 1. — On définit souvent les groupes d'homotopie en utilisant la relation rel $\dot{\Delta}[n]$, au lieu de celle qui a été introduite ici. Ce procédé à l'avantage de faire du théorème 3 3. 6 une évidence. Il a aussi l'inconvénient de supprimer la définition recurrente des groupes d'homotopie $\pi_n(X) = \pi_{n-1}(\Omega X)$ obligeant ainsi de faire les démonstrations pour tous les n, et de ne pas montrer que les groupes d'homotopie relatifs sont les groupes d'homotopie absolus du complexe $\Omega(X, A, x_0)$.

REMARQUE 2. — On voit facilement que si f et g :

$$(X, x_0) \to (Y, y_0)$$

sont $\sim$ rel x_0 alors $\pi_0(f) = \pi_0(g)$. Il est au contraire difficile de montrer que $\Omega(f)$ et $\Omega(g)$ sont homotopes rel s_0x_0. Comme cette démonstration ne permet pas d'avoir facilement le lemme d'addition, on a préféré ne pas la donner et obtenir le théorème 3 3. 6 comme corollaire immédiat de ce lemme fort utile dans la suite.

4. — Groupes d'homotopie (2e définition).

L'équivalent topologique de la 1re définition des groupes d'homotopie est bien entendu le suivant : si (E_n, S_{n-1}) désigne le couple formé par une n-boule et son bord, $\pi_n(X, x_0)$ est l'ensemble quotient de l'ensemble des applications continues $(E_n, S_{n-1}) \to (X, x_0)$ par la relation d'équivalence définie par l'homotopie rel S_{n-1}. On sait que l'on peut aussi définir $\pi_n(X, x_0)$ comme le quotient de l'ensemble des applications continues $(S_n, y_0) \to (X, x_0)$ par la relation d'équivalence définie par l'homotopie rel y_0 (y_0 point base de la n-sphère S_n).

Un équivalent simplicial de cette propriété peut être défini : c'est le but de ce paragraphe. X désignera un complexe de Kan, et x_0 un point base.

4. 1. Définition. — *Soit $\tilde{\pi}_n(X, x_0)$ l'ensemble des classes d'équivalences d'applications $(\dot{\Delta}[n+1], 0) \to (X, x_0)$ pour la relation $\sim$ rel 0. (C'est une relation d'équivalence d'après* 2. 5 *corollaire).*

4. 2. Lemme. — *Toute application $f : (\dot{\Delta}[n+1], 0) \to (X, x_0)$ est homotope* rel 0 *à une application*

$$\lambda(f) : (\dot{\Delta}[n+1], \Lambda^0[n+1]) \to (X, x_0).$$

Démonstration. — L'application $\omega_{n+1} : I \times \Delta[n+1] \to \Delta[n+1]$ induit une application encore notée

$$\omega_{n+1} : I \times \Lambda^0[n+1] \to \Lambda^0[n+1]$$

considérons alors l'application composée

$$I \times \Lambda^0[n+1] \xrightarrow{\omega_{n+1}} \Lambda^0[n+1] \xrightarrow{f} X$$

d'après le théorème d'extension des homotopies (2. 3 corollaire 1) il existe une homotopie $K : I \times \dot{\Delta}[n+1] \to X$ qui prolonge $f\circ\omega_{n+1}$, et telle que $K\circ\varepsilon_1 = f$. On pose $\lambda(f) = K\circ\varepsilon_0 :$ $\dot{\Delta}[n+1] \to X$. On a :

$K(\alpha,\ 0) = f\circ\omega_{n+1}\ (\alpha,\ 0) = f(0) = x_0$ pour $\alpha \in I$ car $0 \in \Lambda^0[n+1]$ de plus :

$\lambda(f)\ (\beta) = K(0,\ \beta) = f\circ\omega_{n+1}\ (0,\ \beta) = f(0) = x_0$ pour $\beta \in \Lambda^0[n+1]$

donc K : $\lambda(f) \sim f$ rel 0 et

$$\lambda(f) : (\dot{\Delta}[n+1],\ \Lambda^0[n+1]) \to (X,\ x_0).$$

C.Q.F.D.

4. 3. Lemme. — *Soient f et f' deux applications* $(\dot{\Delta}[n+1],$ $\Lambda^0[n+1]) \to (X,\ x_0)$; *S'il existe une homotopie* $k : f \sim f'$ rel 0, *il existe une homotopie* $f \sim f'$ *rel* $\Lambda^0[n+1]$.

Démonstration. — Soit $k' : I \times \dot{\Delta}[n+1] \to X$ l'homotopie définie par $k'\ (\alpha,\ \beta) = f(\beta)$ pour $\alpha \in I$, $\beta \in \dot{\Delta}[n+1]$. k et k' coïncident sur $Y = (I \times \Lambda^0[n+1]) \cup (0 \times \dot{\Delta}[n+1])$ et induisent donc une application $f : Y \to X$ $(f = k|Y = k'|Y)$. On a donc un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[d] & X \\ I \times \dot{\Delta}[n+1] \arrow[ur, shift left, "k'"] \arrow[ur, shift right, "k"'] & \end{tikzcd}$$

La proposition (2-5) (avec B réduit à un point) montre qu'il existe une homotopie $h : k'\circ\varepsilon_1 \sim k\circ\varepsilon_1$, stationnaire sur $\Lambda^0[n+1]$; comme $k'\circ\varepsilon_1 = f$, $k\circ\varepsilon_1 = f'$, et que $h(\alpha,\ \beta) = f(\beta) = f'(\beta) = x_0$ pour $\beta \in \Lambda^0[n+1]$, le lemme est démontré.

4. 4. Soit f une application $(\dot{\Delta}[n+1],\ 0) \to (X,\ x_0)$ et $\lambda(f)$ une application homotope à f rel 0 satisfaisant à la condition du lemme 4. 2. L'application $\lambda(f)\circ\widetilde{d_0\partial^{n+1}} : \Delta[n] \to X$ est en fait une application $(\Delta[n],\ \dot{\Delta}[n]) \to (X,\ x_0)$ car

$$\lambda(f)\ \widetilde{(d_0\partial^{n+1}\ d_i\partial^n)} = \lambda(f)\ (d_i d_0\partial^{n+1}) = \lambda(f)\ d_0 d_{i+1}\ \partial^{n+1}) = x_0.$$

Si $\lambda'(f)$ est une autre application satisfaisant à la condition du lemme 4. 2, $\lambda'(f)$ et $\lambda(f)$ sont homotopes rel 0 puisque $\sim$ rel 0 est une relation d'équivalence (cf. 2. 5 corollaire).

D'après 4. 3, on a $\lambda'(f) \sim \lambda(f)$ rel Λ^0 $[n+1]$ et finalement $\lambda'(f) \circ \widetilde{d_0\delta^{n+1}} \sim \lambda(f) \circ \widetilde{d_0\delta^{n+1}}$ rel $\dot{\Delta}[n+1]$.

Autrement dit, compte tenu du théorème 3. 7, on a défini une correspondance qui a f fait correspondre un élément de π_n (X, x_0) à savoir

$$f \rightarrow \overline{\lambda(f)\ (d_0\delta^{n+1})}$$

cette correspondance ne dépendant pas du choix particulier de l'application f.

Soient f et f' : $(\dot{\Delta}[n+1], 0) \rightarrow (X, x_0)$ deux applications homotopes rel 0. $\lambda(f)$ et $\lambda(f')$ sont aussi homotopes rel 0, et le raisonnement précédent prouve que f et f' ont même image dans $\pi_n(X, x_0)$.

On a donc définit une application $\mu : \tilde{\pi}_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n$ (X, x_0).

4. 5. Théorème. — *L'application* $\mu : \tilde{\pi}_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(X, x_0)$ *est bijective.*

Démonstration. — *a.* μ *est injective. Soient* f *et* f' :

$$(\dot{\Delta}[n+1], 0) \rightarrow (X, x_0)$$

deux applications telles que $\overline{\lambda(f)\ (d_0\delta^{n+1})} = \overline{\lambda(f')\ (d_0\delta^{n+1})}$. Il existe donc une homotopie k : $(I \times \Delta[n], I \times \dot{\Delta}[n]) \rightarrow (X, x_0)$ telle que $k \circ \varepsilon_0 = \lambda(f)$, $k \circ \varepsilon_1 = \lambda(f')$. Les deux applications

$$I \times \Lambda^0[n+1] \rightarrow x_0 \quad \text{et} \quad I \times \Lambda^{1,\ldots,n+1}[n+1] \rightarrow X$$

où la seconde est égale à $k \circ (\mathrm{id} \times d_0\delta^{n+1})$, coïncident sur l'intersection de leurs domaines de définition, et définissent donc une application h : $I \times \dot{\Delta}[n+1] \rightarrow X$. On voit immédiatement que $h : \lambda(f) \sim \lambda(f')$ rel 0. Comme $\sim$ rel 0 est une relation d'équivalence, on a aussi $f \sim f'$ rel 0.

b. μ *est surjective.* Soit $u : (\Delta[n], \dot{\Delta}[n]) \rightarrow (X, x_0)$ une application. On définit une application f : $(\dot{\Delta}[n+1], 0) \rightarrow (X, x_0)$ en posant $f(d_i\delta^{n+1}) = x_0$ pour $i > 0$, $f(d_0\delta^{n+1}) = u(\delta^n)$.

On peut prendre $\lambda(f) = f$. Alors $\lambda(f) \circ \widetilde{d_0\delta^{n+1}} = u$.

Convention. — On identifiera toujours les éléments de $\tilde{\pi}_n(X, x_0)$ avec les éléments correspondants de $\pi_n(X, x_0)$ à l'aide de μ. En particulier, si f désigne une application

$\dot{\Delta}([n+1], 0) \to (X, e)$, $\bar{f}$ désignera sa classe d'homotopie dans π_n (ou $\tilde{\pi}_n$).

4. 6. Soit f une application $(\dot{\Delta}[n+1], \ddot{\Delta}[n+1]) \to (X, x_0)$; pour $i = 0, \ldots, n+1$, $f \circ \widetilde{d_i\delta^{n+1}}$ est une application

$$(\Delta[n], \dot{\Delta}[n]) \to (X, x_0),$$

donc un générateur de $\pi_n(X, x_0)$. Comme $0 \in \ddot{\Delta}[n+1]$, f est aussi un générateur de $\pi_n(X, x_0)$.

Lemme.

$$\bar{f} = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \overline{f \circ d_i\delta^{n+1}} \qquad pour \qquad n > 1$$

$$et \qquad \bar{f} = \overline{f(d_2\delta^2)} + \overline{f(d_0\delta^2)} - \overline{f(d_i\delta^2)} \qquad pour \qquad n = 1.$$

Démonstration. — On reprend l'homotopie K du lemme 4. 2, qui prolonge $f \circ \omega_{n+1}$, et on considère les fonctions K_i associée à l'homotopie K.

On a alors $d_0K_0d_0\delta^{n+1} = f(d_0\delta^{n+1})$, $d_{i+1}K_0d_0\delta^{n+1} = f(d_{i+1}\delta^{n+1})$ pour $i > 0$; $d_0K_1d_0\delta^{n+1} = f(d_1\delta^{n+1})$, $d_1K_1d_0\delta^{n+1} = d_1K_0d_0\delta^{n+1}$, $d_{i+1}K_1\,d_0\delta^{n+1} = x_0$ pour $i > 1$.

Si $n = 1$ on en tire $\overline{dK_0d_0\delta^2} = \overline{f(d_2\delta^2)} + \overline{f(d_0\delta^2)}$,

$$\overline{d_1K_1d_0\delta^2} = \overline{d_2K_1d_0\delta^{n+1}} + \overline{f(d\delta^2)} = \bar{f} + \overline{f(d_1\delta^2)}$$

puisque $d_2K_1\,d_0\delta^{n+1} = \lambda(f)d_0\delta^{n+1}$; d'où le lemme puisque

$$d_1K_1 = d_1K_0.$$

Si $n > 1$, on continue et on voit que pour $q > 1$,

$$d_qK_qd_0\delta^{n+1} \underset{n}{\sim} d_{q+1}K_qd_0\delta^{n+1}.$$

Comme $d_qK_q = d_qK_{q-1}$ on en déduit que

$$\bar{f} = \overline{d_{n+1}K_{n+1}d_0\delta^{n+1}} = \overline{d_2K_1d_0\delta^{n+1}}$$

le lemme d'addition appliqué à $K_1\,(d_0\delta^{n+1})$ et à $K_0(d_0\delta^{n+1})$ donne alors le résultat.

Proposition. — *Soient* $f\colon (\ddot{\Delta}[n+2],\ 01) \to (X,\ x_0)$ *une application* (*où* 01 *désigne le* 1-*simplexe* $d_2 \ldots d_{n+2}\delta^{n+2}$, *et* $\bar{f}_i = f \circ \widetilde{d_i\delta^{n+2}} : (\dot{\Delta}[n+1],\ 0) \to (X, x_0)$; *alors*

$\sum_{i=0}^{n+2} (-1)^i\bar{f}_i = 0$ pour $n > 1$ *et* $\bar{f}_3 + \bar{f}_1 - \bar{f}_2 - \bar{f}_0 = 0$ *pour* $n = 1$.

Démonstration. — Soit Λ l'ensemble simplicial engendré par les n-faces $d_i d_j \delta^{n+2}$ où $0 < i \leqslant j \leqslant n+2$. Il existe une homotopie $K : I \times \ddot{\Delta}[n+2] \to X$ qui prolonge $f \circ \omega_{n+2} : I \times \Lambda \to X$ et telle que $K \circ \varepsilon_1 = f$ (cf. 2. 3 corollaire 1). Posons alors $\lambda(f) = K \circ \varepsilon_0 : \ddot{\Delta}[n+2] \to X$. En comparant la construction qui vient d'être faite à celle du lemme 4. 2. on voit que

$$\lambda(f) \circ \widetilde{d_{i+1}\delta^{n+2}} = \lambda(f_{i+1}) \qquad \text{pour} \qquad i \geqslant 0.$$

Rappelons que, par définition, on a : $f_{i+1} = \overline{\lambda(f_{i+1}) \circ \widetilde{d_0\delta^{n+1}}}$ et que $d_0 d_{i+1} = d_i d_0$ pour $i \geqslant 0$. Alors $f_{i+1} = g \circ \widetilde{d_i \delta^{n+1}}$ où $g = \lambda(f) \circ \widetilde{d_0\delta^{n+2}} : (\dot{\Delta}[n+1], \ddot{\Delta}[n+1]) \to (X, x_0)$. D'après le lemme 4. 6 on a (si $n > 1$) $\bar{g} = \Sigma(-1)^i f_{i+1}$; pour démontrer la proposition, il suffit donc de montrer que $\bar{g} = \bar{f_0}$, ce qui est bien vrai puisque $K \circ \left(\mathrm{id} \times \widetilde{d_0\delta^{n+2}}\right) : I \times \dot{\Delta}[n+1] \to X$ est une homotopie $g \sim f$ rel 0.

4. 7. Proposition. — *La condition nécessaire et suffisante pour que* $f : (\dot{\Delta}[n+1], 0) \to (X, x_0)$ *soit prolongeable à* $\Delta[n+1]$ *est que* $\bar{f} = 0$.

Démonstration. — Supposons que f soit prolongeable à $\Delta[n+1]$. Alors $f \circ \omega_{n+1}$ est une homotopie $(I \times \Delta[n+1], I \times 0) \to (X, x_0)$, et $f \circ \omega_{n+1} \circ \varepsilon_0 : \Delta[n+1] \to x_0$. Donc

$$\lambda(f) = f \circ \omega_{n+1} \circ \varepsilon_0 | \dot{\Delta}[n+1] : \dot{\Delta}[n+1] \to x_0.$$

Autrement dit $\bar{f} = 0$.

Supposons que $\bar{f} = 0$ comme $\lambda(f) \sim f$ rel 0, on a aussi $\overline{\lambda(f)} = 0$. D'après 3. 6 (proposition 1) $\lambda(f)$ est prolongeable à $\Delta[n+1]$. Soit $F : (I \times \dot{\Delta}[n+1]) \cup (0 \times \Delta[n+1]) \to X$ l'application égale à $\lambda(f)$ sur $0 \times \Delta[n+1]$ et à K (notation du lemme 4. 2.) sur $I \times \dot{\Delta}[n+1]$. D'après 2. 3 corollaire 1, on peut prolonger F en une application $H : I \times \Delta[n+1] \to X$. Alors $H \circ \varepsilon_1 : \Delta[n+1] \to X$ prolonge f.

CHAPITRE II

CATÉGORIES AVEC MODÈLES

5. — Définitions et exemples.

5. 1. *a*. Soit $\mathcal{A}$ une catégorie, et $\mathcal{M}$ une sous catégorie pleine de $\mathcal{A}$ (*i-e* les objets de $\mathcal{M}$ sont des objets de $\mathcal{A}$, les morphismes de $\mathcal{M}$ sont les morphismes de $\mathcal{A}$ entre objets de $\mathcal{M}$). Les objets de $\mathcal{M}$ sont appelés des *modèles*, et le couple $(\mathcal{A}, \mathcal{M})$ est une *catégorie avec modèles.*

b. Fonctions de dégénérescence. Soit $(\mathcal{A}, \mathcal{M})$ une catégorie avec modèles. Soient α et β deux fonctions qui à tout morphisme dont la source est un modèle font correspondre un morphisme dont la source est un modèle. On dira que α et β sont des fonctions de dégénérescence si

$$(0) \qquad \alpha(1_M) = \beta(1_M) = 1_M$$

pour tout modèle M.

$$(1) \qquad \beta(u)\alpha(u) = u$$

pour tout morphisme u dont la source est un modèle (en particulier on veut que le but de $\alpha(u)$ soit aussi un modèle).

$$(2) \qquad \alpha(\beta(u)) = \beta(\alpha(u)) = 1_{M'}$$

où M′ est le but de $\alpha(u)$ et la source de $\beta(u)$.

$$(3) \qquad \beta(fu) = \beta(f\beta(u))$$

pour tout morphisme f dont la source est le but de u.

$$(4) \qquad \alpha(fu) = \alpha(f\beta(u))\alpha(u).$$

On peut exprimer les conditions (1, 3, 4) en disant que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & M' \arrow[rr, "\alpha(f\beta(u))"] \arrow[d, "\beta(u)"'] & & M'' \arrow[d, "\beta(fu) = \beta(f\beta(u))"] \\
M \arrow[ur, "\alpha(u)"] \arrow[urrr, "\alpha(fu)"'] \arrow[r, "u"'] & A \arrow[rr, "f"] & & B
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

Ces conditions entrainent que $\beta(\beta(u)) = \beta(u)$ et que $\alpha(\alpha(u) = \alpha(u)$.

Un morphisme $u : M \to A$ ou $M \in \mathfrak{M}$ est dit *non dégénéré* si $\beta(u) = u$ (et donc $\alpha(u) = 1_M$), *dégénéré* dans le cas contraire.

Convention et notation. — Soit A un objet quelconque de $\mathcal{A}$ on supposera toujours que les morphismes non dégénérés dont la source est un objet de $\mathfrak{M}$ et dont le but est A. forment un *ensemble* que l'on notera S(A) (ceci est toujours vérifié si les objets de $\mathfrak{M}$ forment un ensemble).

c. Soit Λ un anneau commutatif à élément unité. On désigne par $\mathcal{G}_\Lambda$: la catégorie des Λ-modules et des homomorphismes de Λ-modules.

$\mathcal{G}_\Lambda^*$ ou $\mathcal{G}_{*\Lambda}$: la catégorie des Λ-modules gradués par des degrés $\geqslant 0$ et des homomorphismes de degré zéro.

$d\mathcal{G}_\Lambda^*$(resp. $d\mathcal{G}_{*\Lambda}$) la catégorie des Λ-modules différentiels gradués dont la différentielle est de degré $+ 1$ (resp $- 1$) et des homomorphismes de degré zéro qui commutent à la différentielle.

H^* (resp H_*) le foncteur cohomologie $d\mathcal{G}_\Lambda^* \to \mathcal{G}_\Lambda^*$ (resp. le foncteur homologie $d\mathcal{G}_{*\Lambda} \to \mathcal{G}_{*\Lambda}$).

d. Si K est un foncteur dont la source est $\mathcal{A}$ et le but l'une des catégories précédentes, on définit, pour tout $A \in \mathcal{A}$, $M \in \mathfrak{M}$, $u : M \to A \in S(A)$, l'ensemble $K(M, u)$ comme étant l'ensemble des couples (x, u) où $x \in K(M)$. Les deux bijections $i(u) : K(M) \to K(M, u)$; $j(u) : K(M, u) \to K(M)$ définies par $i(u)x = (x, u)$; $j(u)\ (x, u) = x$ permettent de donner à $K(M, u)$ la structure de $K(M)$.

5. 2. *Le foncteur* $\hat{K}$ *et la transformation naturelle* Γ_K.

a^*. Soit K un foncteur contravariant $\mathfrak{A} \to \mathcal{G}_\Lambda$. On pose :

$$\hat{K}(A) = \prod_{u \in S(A)} K(M, u) \quad \text{pour} \quad A \in \mathfrak{A},\ M \in \mathfrak{M},\ u : M \to A \in S(A),$$

et on note $\tau(u)$ la projection $\hat{K}(A) \to K(M, u)$. Soit

$$\hat{K}(f) : \hat{K}(B) \to \hat{K}(A)$$

l'application définie par

$$\hat{K}(f)\varphi = (i(u)K(\alpha(fu))j(\beta(fu))\tau(\beta(fu)\varphi)_{u \in S(A)})$$

pour tout f: $A \to B \in \mathfrak{A}$, tout $\varphi \in \hat{K}(B)$.

$\hat{K}$ est un foncteur contravariant $\mathfrak{A} \to \mathcal{G}_\Lambda$.

On définit une transformation naturelle de foncteurs $\Gamma_K : K \to \hat{K}$ en posant $\Gamma_K(A)x = \big((i(u)K(u)x)_{u \in S(A)}\big)$ pour $x \in K(A)$.

Soit $T : K \to L$ une transformation naturelle de $\mathcal{G}_\Lambda$-foncteurs. On pose, pour tout objet $A \in \mathfrak{A}$, tout $\varphi \in \hat{K}(A)$.

$\hat{T}(A)\varphi = \big((i(u)T(M)j(u)\tau(u)\varphi)_{u \in S(A)}\big)$ ou M est la source de u. $\hat{T}(A)$ est un homomorphisme $\hat{K}(A) \to \hat{L}(A)$ et T une transformation naturelle $\hat{K} \to \hat{L}$. De plus

$$\hat{T}\Gamma_K = \Gamma_L T.$$

b^*. Soit K^* un foncteur contravariant $\mathfrak{A} \to \mathcal{G}^*_\Lambda$ et $K^n : \mathfrak{A} \to \mathcal{G}_\Lambda$ le foncteur induit par K^* en degré n.

La collection $(\hat{K}^n)$ est un foncteur contravariant $\mathfrak{A} \to \mathcal{G}^*_\Lambda$ que l'on désignera par $\hat{K}^*$.

La collection (Γ_{K^n}) est une transformation naturelle $\hat{K}^* \to \hat{L}^*$ que l'on désignera par Γ_{K^*}.

Si K^* est un foncteur contravariant $\mathfrak{A} \to d\mathcal{G}^*_\Lambda$, la différentielle $d : K^n \to K^{n+1}$ est une transformation naturelle de $\mathcal{G}_\Lambda$-foncteurs. Donc $\hat{d} : \hat{K}^n \to \hat{K}^{n+1}$ est une transformation naturelle de $\mathcal{G}_\Lambda$-foncteurs. Donc $\hat{d}$: $\hat{K}^n \to \hat{K}^{n+1}$ est une transformation naturelle telle que $\hat{d}\Gamma_{K^n} = \Gamma_{K^{n+1}}d$, et par conséquent $\hat{K}$ *est un* $d\mathcal{G}^*_\Lambda$*-foncteur et* Γ_{K^*} une *transformation naturelle de* $d\mathcal{G}^*_\Lambda$*-foncteurs.*

a_*. Soit de même K un foncteur covariant $\mathfrak{A} \to \mathcal{G}_\Lambda$. On pose

$$\hat{K}(A) = \sum_{u \in S(A)} K(M, u), \quad \hat{K}(f)|K(M, u) = i(\beta(fu))K(\alpha(fu))j(u)$$

pour $f: A \to B \in \mathcal{A}$, $u: M \to A \in S(A)$ et

$$\Gamma_K(a)|K(M, u) = K(u)j(u).$$

$\hat{K}$ est un foncteur covariant $\mathcal{A} \to \mathcal{G}_\Lambda$ et $\Gamma_K: \hat{K} \to K$ une transformation naturelle. Si $T: K \to L$ est une transformation naturelle, on pose $\hat{T}(A)|K(M, u) = i(u)T(M)j(u)$. $\hat{T}$ est alors une transformation naturelle $\hat{K} \to \hat{L}$. de plus $T\Gamma_K = \Gamma_L\hat{T}$.

b_*. On définit $\hat{K}_*$ et Γ_{K_*} comme dans b^*. On voit encore que si K_* est un $d\mathcal{G}_{*\Lambda}$-foncteur il en est de même de $\hat{K}_*$, et Γ_{K_*} est une transformation naturelle de $d\mathcal{G}_{*\Lambda}$-foncteurs.

5. 3. *Foncteurs représentables.* — On dit qu'un foncteur contravariant $K^*: \mathcal{A} \to \mathcal{G}^*_\Lambda$ (resp. covariant $K_*: \mathcal{A} \to \mathcal{G}_{*\Lambda}$) est *représentable* s'il existe une transformation naturelle χ_{K^*}: $\hat{K}^* \to K^*$ telle que $\chi_{K^*}\Gamma_{K^*} = \text{identité}$ (resp. $\chi_{K_*}: K_* \to \hat{K}_*$ telle que $\Gamma_{K^*}\chi_{K_*} = \text{identité}$).

Si K^* est un $d\mathcal{G}^*_\Lambda$-foncteur (resp. $d\mathcal{G}_{*\Lambda}$) on dit qu'il est représentable, s'il est représentable en tant que $\mathcal{G}^*_\Lambda$-foncteur (resp. $\mathcal{G}_{*\Lambda}$).

5. 4. *Foncteurs acycliques, foncteurs acycliques sur les modèles.*

a^*. Soit K^* un foncteur contravariant $\mathcal{A} \to d\mathcal{G}^*_\Lambda$. On dit qu'il est acyclique s'il existe des transformations naturelles de $\mathcal{G}_\Lambda$-foncteurs $U^n: K^n \to K^{n-1}$ $(n > 0)$; $\eta: K^0 \to H^0K$ telles que

$$dU^n + U^{n+1}d = \text{identité} \quad (n > 0)$$
$$U^1d = id - \varepsilon\eta$$

où ε est la transformation naturelle $H^0K \to K^0$.

On note que $\varepsilon \circ \eta \circ \varepsilon = (1 - U^1d) \circ \varepsilon = \varepsilon$ car $d \circ \varepsilon = 0$. Comme ε est injectif ou en déduit que $\eta \circ \varepsilon = \text{identité}$.

a_*. Soit K_* un foncteur covariant $\mathcal{A} \to d\mathcal{G}_{*\Lambda}$. On dit qu'il est acyclique s'il exite des transformations naturelles de $\mathcal{G}_\Lambda$-foncteurs $U_n: K_n \to K_{n+1}$ $(n \geqslant 0)$, $\eta: H \circ K \to K_0$ telles que

$$dU_n + U_{n-1}d = \text{identité} \ (n > 0)$$
$$dU_0 = id - \eta\varepsilon$$

où ε est la transformation naturelle $K_0 \to H_0K$. Comme $\varepsilon \circ \eta \circ \varepsilon = \varepsilon(1 - dU_0) = \varepsilon$ car $\varepsilon d = 0$ et comme ε est surjectif, on a $\varepsilon\eta = \text{identité}$.

b. Soit $\mathfrak{M}^\alpha$ la sous catégorie de $\mathfrak{M}$ dont les objets sont ceux de $\mathfrak{M}$ et les morphismes sont du type $\alpha(u)$ où u est un morphisme dont la source est dans $\mathfrak{M}$.

On dit que K^* (resp. K_*) est acyclique sur les modèles, si la restriction de K^* (resp. K_*) à la catégorie $\mathfrak{M}^\alpha$ est acyclique.

5. 5. Un exemple. — Soit $\mathfrak{M}$ la sous catégorie pleine de $\mathcal{S}$ (cf. 1. 1. — *g*) dont les objets sont les $\Delta[n]$ ($n \geqslant 0$). On pose, pour toute application $u: \Delta[n] \to X \in \mathcal{S}$:

$$\alpha(u) = \widetilde{s_{i_1} \ldots s_{i_k} \delta^{n-k}}, \quad \beta(u) = \tilde{y}, \quad \text{si} \quad u(\delta^n) = s_{i_1} \ldots s_{i_k}\, y$$

avec y non dégénéré et $i_1 > \cdots > i_k$ (cf. 1. 1. *c*). En particulier $u \in S(X)$ si et seulement si $u(\delta^n) = y$. α et β sont des fonctions de dégénérescence.

Soit C_* le foncteur $\mathcal{S} \to d\mathcal{G}_*$ des chaînes normalisées, *i.e.* $C_*(X)$ est le quotient du groupe gradué abelien libre engendré par X par le sous groupe engendré par les éléments dégénérés de X; la différentielle d de $C_*(X)$ est définie par passage au quotient à partir de la différentielle $\Sigma(-1)^i d_i$ du groupe abelien libre engendré par X; si $f: X \to Y \in \mathcal{S}$ on définit $C_*(f)$: $C_*(X) \to C_*(Y)$ comme étant l'application naturelle induite par f.

$C_*(X)$ est le groupe abelien libre engendré par les éléments non dégénérés de X. Si $x \in X$ est non dégénéré, on représentera encore par x l'élément de $C_*(X)$ qu'il définit.

Soient f et g deux applications $X \to Y$ homotopes par une homotopie k : $I \times X \to Y$ et soient k_i : $X_p \to Y_{p+1}$ les fonctions associées à k. Les k_i induisent des fonctions encore notées k_i de $C_p(X)$ dans $C_{p+1}(Y)$. On pose $U_p = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i k_i$ On a alors $dU_p + U_{p-1}\, d = C_p(g) - C_p(f)$ pour $p > 0$ et $dU_0 = C_0(g) - C_0(f)$ donc

Lemme. — *Si f et g sont homotopes dans $\mathcal{S}$, $C_*(f)$ et $C_*(g)$ sont homotopes dans $d\mathcal{G}_{*Z}$ où Z désigne l'anneau des entiers.*

Proposition. — C_* *est représentable et acyclique sur les modèles.*

Démonstration. — *a.* On pose $\chi_{C_n} x = (\delta^n, \tilde{x})$ pour tout $x \in X_n$ non dégénéré. χ_{C_*} est une transformation naturelle

$C_* \to C_*$ et $\Gamma_{C_n}\chi_{C_n}x = \Gamma_{C_n}(\delta^n, \tilde{x}) = C_n(\tilde{x})j(\tilde{x})(\delta^n, \tilde{x}) = C_n(\tilde{x})\delta^n = x$. Donc $\Gamma_{C_*}\chi_{C_*} =$ identité et C est représentable.

b. Soit ω_n l'homotopie $I \times \Delta[n] \to \Delta[n]$ de 1. 4; comme $\omega_n \circ \varepsilon_0 : \Delta[n] \to O_n$ et $\omega_n \circ \varepsilon_1 =$ identité, le lemme 5. 5 montre que

$$dU_p(\Delta[n]) + U_{p-1}(\Delta[n])d = 1_{C_p(\Delta[n])} \quad \text{pour} \quad p < 0$$
$$dU_0(\Delta[n])x = x - \varkappa(x)O_n \quad \text{pour} \quad x \in C_0(\Delta[n])$$

en désignant par $\varkappa(x)$ l'indice de Kronecker de x. Si z est une 1-chaîne, alors $dU_1(\Delta[n])z + U_0(\Delta[n]dz = z$ donc $dU_0(\Delta[n])dz = dz$. Autrement dit, $\varkappa(dz) = 0$. On définit alors

$$\eta(\Delta[n]) : H_0C_*(\Delta[n]) \to C_0(\Delta[n])$$

par $\eta\varepsilon x = \varkappa(x)O_n$. On a alors

$$dU_0(\Delta[n]) = 1_{C_0(\Delta[n])} - \eta(\Delta[n])\varepsilon(\Delta[n]).$$

D'autre part on voit immédiatement que η est une transformation naturelle $H_0C_*|\mathfrak{M}^\alpha \to C_0|\mathfrak{M}^\alpha$, et on remarque que la relation 1. 4 iii se traduit par le fait que U_p est une transformation naturelle $C_p|\mathfrak{M}^\alpha \to C_{p+1}|\mathfrak{M}^\alpha$.

5. 6. *Catégories indicées.* — Soient $(\mathcal{A}, \mathfrak{M}, \alpha, \beta)$ une catégorie avec modèles et fonctions de dégénérescences, et A un objet de $\mathcal{A}$. On appellera catégorie indicée la catégorie $\mathcal{A}_A$ dont les objets sont des couples (B, x) où $B \in \mathcal{A}$ et $x : B \to A \in \mathcal{A}$, et les morphismes des diagrammes commutatifs dans $\mathfrak{A}$:

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] B \arrow[dr, "x"] \arrow[dd, "f"'] & \\ & A \\ C \arrow[ur, "y"'] & \end{tikzcd} : (B, x) \to C, y)$$

un tel morphisme sera désigné par (f, x, y).

$\mathfrak{M}_A$ est la sous catégorie pleine de $\mathcal{A}_A$ dont les objets sont les couples (M, x) où $M \in \mathfrak{M}$. Si (u, x, y) est un morphisme tel que la source de u soit un modèle, on pose $\alpha_A(u, x, y) = (\alpha(u), x, y \circ \beta(u))$ et $\beta_A(u, x, y) = (\beta(u), y \circ \beta(u), y)$. $\mathcal{A}_A$ est alors une catégorie avec modèles $\mathfrak{M}_A$ et fonctions de dégénérescence α_A et β_A.

Soit K un foncteur dont la source est $\mathcal{A}$. On définit un foncteur K_A dont la source est $\mathcal{A}_A$ et le but, le but de K, en posant :

$$K_A(B, x) = K(B), \quad K_A(f, x, y) = K(f)$$

on vérifie sans peine que l'on a la

PROPOSITION. — *Si* K *est représentable (resp. acyclique, resp. acyclique sur les modèles), il en est de même pour* K_A.

6. — Le théorème des modèles acycliques.

(6-1)* THÉORÈME. — *Soit* $\mathcal{A}$ *une catégorie avec modèles et fonctions de dégénérescence. Soient* K^* *et* L^* *deux foncteurs contravariants* $\mathcal{A} \to d\mathcal{G}^*_\Lambda$, K^* *étant représentable et* L^* *acyclique sur les modèles, et* T *une transformation naturelle* $H^0L^*|\mathfrak{M}^\alpha \to H^0K^*|\mathfrak{M}^\alpha$. *Il existe alors une transformation naturelle* $\Phi^* : L^* \to K^*$ *qui induit* T *sur* $H^0L^*|\mathfrak{M}^\alpha$. *On dit que* Φ^* *est une extension de* T. *Si* Φ'^* *est une autre extension de* T, Φ^* *et* Φ'^* *sont naturellement homotopes.*

La démonstration du théorème utilise les lemmes suivants.

LEMME 1. — *Si* L^* *est acyclique sur les modèles* $\hat{L}^*$ *est acyclique.*

En effet soient U^n et η les transformations naturelles qui définissement l'acyclicité de L^* sur $\mathfrak{M}^\alpha$. Alors

$$\hat{U}^n : \hat{L}^n \to \hat{L}^{n-1}, \qquad \hat{\eta} : \hat{L}^0 \to \widehat{H^0L^*}$$

peuvent être définis par le procédé de (5. 2) *a* bien que U^n et η ne soient définis que sur $\mathfrak{M}^\alpha$, puisque seules les valeurs prises par U^n et η sur $\mathfrak{M}^\alpha$ interviennent dans la définition de $\hat{U}^n$ et $\hat{\eta}$. Ce sont encore des transformations naturelles. On a : $\hat{d}\hat{U}^n + \hat{U}^{n-1}\hat{d} = \mathrm{id}$ pour $n > 0$ et $\hat{U}^1\hat{d} = \mathrm{id} - \hat{\varepsilon}\hat{\eta}$. Comme $\widehat{H^0L^*}$ et $H^0\hat{L}^*$ sont naturellement isomorphes, le lemme est démontré.

Soit alors $T : H^0L|\mathfrak{M}^\alpha \to H^0K|\mathfrak{M}^\alpha$ une transformation naturelle.

On pose $\Phi^0 = \chi_{K^0}\hat{\varepsilon}_K\hat{T}\hat{\eta}\Gamma_{L^0}$ où ε_K (resp. ε_L) désigne la transformation naturelle $H^0K^* \to K^0$ (resp. $H^0L \to L^0$) Φ^0 est une transformation naturelle $L^0 \to K^0$.

LEMME 2. — $\hat{d}\hat{\Phi}^0\hat{\varepsilon}_L = 0$ *et* $\Phi^0\varepsilon_L|\mathfrak{M}^\alpha = \varepsilon_K T$.

Démonstration. — Conformément à 5.2 a^*, sur $\mathfrak{M}^\alpha$, les transformations naturelles $\hat{\varepsilon}_K$, $\hat{T}$, $\hat{\eta}$, commutent aux Γ correspondants donc

$$\Phi^0|\mathfrak{M}^\alpha = \chi_{K^0}\hat{\varepsilon}_K\hat{T}\hat{\eta}\Gamma_{L^0}|\mathfrak{M}^\alpha = \chi_{K^0}\hat{\varepsilon}_K\hat{T}\Gamma_{H^0L^0}\eta$$
$$= \chi_{K^0}\hat{\varepsilon}_K\Gamma_{H^0K^0}T\eta = \chi_{K^0}\Gamma_{K^0}\varepsilon_K T\eta = \varepsilon_K T\eta.$$

Donc $\Phi^0\varepsilon_L|\mathfrak{M}^\alpha = \varepsilon_K T\eta\varepsilon_L = \varepsilon_K T$ puisque $\eta\varepsilon_L = id$. D'autre part : $\hat{d}\hat{\Phi}^0\hat{\varepsilon}_L = \widehat{d\Phi^0\varepsilon_L}$. Comme $d\Phi^0\varepsilon_L|\mathfrak{M}^\alpha = d\varepsilon_K T = 0$ (car $d\varepsilon_K = 0$), $\widehat{d\Phi^0\varepsilon_L} = 0$.

Démonstration du théorème. — On pose $\Phi^1 = \chi_{K^1}\hat{d}\hat{\Phi}^0\hat{U}^1\hat{d}\Gamma_{L^1}$ alors

$$\Phi^1 d = \chi_{K^1}\hat{d}\hat{\Phi}^0\hat{U}^1\Gamma_{L^1}d = \chi_{K^1}\hat{d}\hat{\Phi}_0\hat{U}^1\hat{d}\Gamma_{L^0} = \chi_{K^1}\hat{d}\hat{\Phi}^0(id - \hat{\varepsilon}_L\hat{\eta})\Gamma_{L^0}$$
$$= \chi_{K^1}\hat{d}\hat{\Phi}^0\Gamma_{L^0} = \chi_{K^1}\hat{d}\Gamma_{K^0}\Phi^0 = \chi_{K^1}\Gamma_{K^1}d\Phi^0 = d\Phi^0,$$

puisque $\hat{d}\hat{\Phi}^0\hat{\varepsilon}_L = 0$ d'après le lemme 2 et que $\hat{U}_1\hat{d} = id - \hat{\varepsilon}_L\hat{\eta}$ d'après le lemme 1.

Supposons que l'on ait déjà déterminé $\Phi^k : L^k \to K^k$. On pose $\Phi^{k+1} = \chi_{K^{k+1}}\hat{d}\hat{\Phi}^k\hat{U}^k\Gamma_{L^{k+1}} : L^{k+1} \to K^{k+1}$. On a

$$\Phi^{k+1}d = \chi_{K^{k+1}}\hat{d}\hat{\Phi}^k\hat{U}^k\Gamma_{L^{k+1}}d = \chi_{K^{k+1}}\hat{d}\hat{\Phi}^k\hat{U}^k\hat{d}\Gamma_{L^k}$$
$$= \chi_{K^{k+1}}\hat{d}\hat{\Phi}^k(id - \hat{d}\hat{U}^{k+1})\Gamma_{L^k} = \chi_{K^{k+1}}\hat{d}\hat{\Phi}^k\Gamma_{L^k} = \chi_{K^{k+1}}\Gamma_{L^{k+1}}d\Phi^k = d\Phi^k$$

puisque $\hat{d}\hat{\Phi}^k\hat{d} = \hat{d}\hat{d}\hat{\Phi}^{k-1} = 0$ d'après l'hypothèse de recurrence.

De plus, comme $\Phi^0\varepsilon_L|\mathfrak{M}^\alpha = \varepsilon_K T$, l'application Φ^* induit bien T sur $H^0L|\mathfrak{M}^\alpha$.

Soit Φ'^* une autre extension de T. On a donc

$$(1) \qquad \hat{\Phi}^0\hat{\varepsilon}_L = \hat{\Phi}'^0\hat{\varepsilon}_L = \hat{\varepsilon}_K\hat{T}.$$

On pose $V^1 = \chi_{K^0}(\hat{\Phi}^0 - \hat{\Phi}'^0)\hat{U}^1\Gamma_{L^1} : L^1 \to K^0$ on a

$$V^1 d = \chi_{K^0}(\hat{\Phi}^0 - \hat{\Phi}'^0)\hat{U}^1\Gamma_{L^1}d = \chi_{K^0}(\hat{\Phi}^0 - \hat{\Phi}'^0)\hat{U}_1\hat{d}\Gamma_{L^0}$$
$$= \chi_{K^0}(\hat{\Phi}^0 - \hat{\Phi}'^0)(id - \hat{\varepsilon}_L\hat{\eta})\Gamma_{L^0} = \chi_{K^0}(\hat{\Phi}^0 - \hat{\Phi}'^0)\Gamma_{L_0}$$

d'après (1).

Donc $V^1 d = \chi_{K^0}\Gamma_{K^0}(\Phi^0 - \Phi'^0) = \Phi^0 - \Phi'^0$.

Supposons alors que l'on ait déjà déterminé $V^1, \dots, V^k$; on a $(\Phi^k - \Phi'^k - dV^k)d = d(\Phi^{k-1} - \Phi'^{k-1} - V^k d) = ddV^{k-1} = 0$ donc

$$(2) \qquad (\hat{\Phi}^k - \hat{\Phi}'^k - \hat{d}\hat{V}^k)\hat{d} = 0$$

on pose alors $V^{k+1} = \chi_{K^k}(\hat{\Phi}^k - \hat{\Phi}'^k - \hat{d}\hat{V}^k)\Gamma_{L^{k+1}}$ en utilisant (2) on voit sans peine que

$$V^{k+1}d = \Phi^k - \Phi'^k - dV^k$$

l'homotopie naturelle V est donc bien déterminée par récurrence.

6-1_* THÉORÈME. — *Soit* $\mathcal{A}$ *une catégorie avec modèles et fonctions de dégénérescence. Soient* K_* *et* L_* *deux foncteurs covariants* $\mathcal{A} \to d\mathcal{G}_{*\Lambda}$, K_* *étant représentable et* L_* *acyclique sur les modèles, et* T *une transformation naturelle*

$$H_0K_*|\mathfrak{M}^\alpha \to H_0L_*|\mathfrak{M}^\alpha.$$

Il existe alors une transformation Φ_*: $K_* \to L_*$ *qui induit* T *sur* $H_0K_*|\mathfrak{M}^\alpha$. *On dit que* Φ_* *est une extension de* T. *Si* Φ'_* *est une autre extension de* T, Φ *et* Φ'_* *sont naturellement homotopes.*

Démonstration analogue à celle du théorème 6-1^*

7. — Systèmes locaux.

La notion de système local sur un ensemble simplicial a été dégagée pour la première fois par Eilenberg et Zilber [7]. On indique ici une généralisation due à J. C. Moore et V. K. A. M. Gugenheim [12] qui utilise la notion de foncteur covariant fortement représentable 7. 7. On peut définir une notion analogue pour les foncteurs contravariants mais elle s'avère jusqu'à présent de peu d'utilité. Si K_* est un foncteur fortement représentable et G un système local, on peut définir deux foncteurs $K_* \divideontimes G$ et *Hom** (K_*, G) qui généralisent les notions connues de complexes de chaînes (resp. cochaines) à valeur dans un système local. On fait le lien entre cette théorie et la théorie classique dans le paragraphe 10, en utilisant les catégories indécées. Les théorèmes 7. 10^* et 7. 10_* constituent la clef de la démonstration de l'existence des suites spectrales des fibrés.

7. 7. *Foncteurs fortement représentables.* — Soit K_* un foncteur covariant $\mathcal{A} \to d\mathcal{G}_{*\Lambda}$, et supposons que K_* soit représentable. On désigne par $\tau(u)$ la projection $\hat{K}_*(A) \to K(M, u)$ où u: $M \to A \in S(A)$, et on pose

$$\theta(u) = j(u)\tau(u), \qquad \psi_*(u) = K_*(u)\theta(u)\chi_{K^*}(u).$$

Définition. — On dit qu'un foncteur covariant $K_* : \mathcal{A} \to d\mathcal{G}_{*\Lambda}$ *est fortement représentable* s'il est représentable et si de plus

(i) $\tau(u)\chi_{K_*} = \chi_{K_*}\psi(u)$ pour tout $u : M \to A \in S(A)$

(ii) $\theta(u)\chi_{K_*} = \psi_*(1_M)\theta(u)\chi_{K_*}$.

Si K_* est fortement représentable on pose

$$K_{*u}(A) = \psi_*(u)K_*(A) \quad \text{et} \quad K_{n,u}(A) = \psi_n(u)K_n(A)$$

pour tout $A \in \mathcal{A}$ et $u \in S(A)$.

Proposition 1. — *Si* K_* *est fortement représentable, on a*

(i) $\psi_*(u)\psi_*(u) = \psi_*(u)$, $\psi_*(u)\psi_*(v) = 0$ pour $u \neq v$

(ii) $K_*(A) = \sum_{u \in S(A)} K_{*u}(A)$

(iii) si $f : A \to B \in \mathcal{A}$, $K_*(f)\psi_*(u) = \psi_*(\beta(fu))K_*(f)\psi_*(u)$

Démonstration. — (*i*) Comme $\tau(u)\tau(v) = \begin{cases} \tau(u) & \text{si } u = v \\ 0 & \text{si } u \neq v, \end{cases}$

on voit que

$$\psi_*(u)\psi_*(v) = \Gamma_{K_*}\tau(u)\chi_{K_*}\psi_*(v) = \Gamma_{K_*}\tau(u)\tau(v)\chi_{K_*} = \begin{cases} \psi_*(u) & \text{si } u = v \\ 0 & \text{si } u \neq v \end{cases}$$

en utilisant le (i) de la définition

(ii) il résulte de (i) que $K_{*u}(A) \cap K_{*v}(A) = \{0\}$ si $u \neq v$ il suffit donc de démontrer que tout $x \in K_*(A)$ peut s'écrire comme une somme d'éléments de $K_{*u}(A)$ où u parcourt un ensemble fini de valeurs. Or $\chi_{K_*}x \in \hat{K}_*(A) = \sum_{u \in S(A)} K_*(M, u)$; il n'y a qu'un nombre fini de morphismes, soient

$$u_1, \ldots, u_p \in S(A)$$

tels que la composante de $\chi_{K_*}x$ dans $K_*(M, u_i)$ soit non nulle $(i = 1, \ldots, p)$. Donc $\chi_{K_*}x = \sum_{i=1}^{p} \tau(u_i)\chi_{K_*}x$ et

$$x = \Gamma_{K_*}\chi_{K_*}x = \sum_{i=1}^{p} \Gamma_{K_*}\tau(u_i)\chi_{K_*}x = \sum_{i=1}^{p} \psi_*(u_i)x$$

(iii) $K_*(f)\psi_*(u) = K_*(f)\Gamma_{K_*}\tau(u)\chi_{K_*} = \Gamma_{K_*}\hat{K}_*(f)\tau(u)\chi_{K_*}$
$= \Gamma_{K_*}i\,(\beta(fu))K_*(\alpha(fu))j(u)\tau(u)\chi_{K_*}$

$\psi_*(\beta(fu))K_*(f)\psi_*(u) = \Gamma_{K_*}\tau(\beta(fu))\chi_{K_*}K_*(f)\psi_*(u)$
$= \Gamma_{K_*}\tau(\beta(fu))\hat{K}_*(f)\chi_{K_*}\psi_*(u) = \Gamma_{K_*}i(\beta(fu))K_*(\alpha(fu))j(u)\tau(u)\chi_{K_*}$

Proposition 2. — *Le foncteur* C_* (cf. 5. 5) *est fortement représentable.*

On voit que si x est non dégénéré, $x \in C_n(X)$ alors $C_{n, \bar{x}}(X)$ est le module libre engendré par x. La décomposition en somme directe donnée par la proposition 1 n'est rien d'autre que la définition de $C_*(X)$.

7. 2. *Système local contravariant.* — Soit G un foncteur contravariant : $\mathfrak{M} \to \mathcal{G}_\Lambda$. On dit que G est un *système local contravariant :* si $G(u)$ est un isomorphisme pour tout morphisme u non dégénéré.

7. 3. *Le foncteur* $Hom^*(K_*, G)$. Soit K_* un foncteur covariant $\mathfrak{A} \to \mathcal{G}_{*\Lambda}$ fortement représentable, et G un système local contravariant. On pose, pour tout objet $A \in \mathfrak{A}$

$$Hom^n(K_*, G)(A) = \prod_{u \in S(A)} \mathrm{Hom}(K_{n,u}(A), G(M_u))$$

où M_u désigne la source de u, et Hom est pris au sens de la catégorie $\mathcal{G}_V$. Si f est un morphisme $A \to B$, on définit l'homomorphisme

$$Hom^n\,(K_*, G)\,(f) : Hom^n(K, G)\,(B) \to Hom^n\,(K_*, G)\,(A)$$

de la manière suivante :

Soit $\varphi \in Hom^n\,(K_*, G)(B)$ et $\varphi = (\varphi_v)$ où $\varphi_v \in Hom(K_{n,v}(B), G(M_v))$. Si $u \in S(A)$, $G(\alpha(fu))\varphi_{\beta(fu)}K_n(f) \in \mathrm{Hom}\,(K_{u,n}(A), G(M_u))$. On pose alors

$$Hom^n(K_*, G(f))\varphi = ((G(\alpha(fu))\varphi_{\beta(fu)}K_n(f))_{u \in S(A)})$$

La collection $Hom\,(K_*, G) = Hom^n\,(K_*, G)$ est un foncteur contravariant.

7. 4. **Proposition.** — *Le foncteur* $Hom^*(K, G)$ *est représentable.*

Démonstration. — Pour simplifier les notations, on écrit $L = Hom^n(K, G)$, K au lieu de K_n, $K_u(A)$ au lieu de $K_{n,u}(A)$, ψ au lieu de ψ_n, χ au lieu de χ_K, Γ au lieu de Γ_K ; i' et j' désignent les applications i et j relatives au foncteur L.

D'après 7. 1. Définition (ii) on a

$$\theta(u)\,\chi\psi(u) = \psi(1_M)\,\theta(u)\,\chi\psi(u) = \psi(1_M)\,\theta(u)\,\chi$$

donc :

(1) $$\theta(u)\chi K_u(A) \subset \psi(1_M)\, K(M) = K_{1_M}(M)$$

pour $u : M \to A \in S(A)$.

Par définition on a :

$$\hat{L}(A) = \prod_{u \in S(A)} L(M_u,\ u) = \prod_{\substack{u \in S(A)\\ v \in S(M_u)}} i'(u)\, \underline{\mathrm{Hom}}\,(K_v(M_u),\ G(M_{v,u}))$$

où M_u est la source de u, $M_{v,u}$ la source de v.

Si $\varphi \in \hat{L}(A)$, on désigne par φ_u sa composante dans $L(M_u,\ u)$ et par $\varphi_{v,u}$ sa composante dans $\mathrm{Hom}(K_v(M_u),\ G(M_{v,u}))$.

Considérons maintenant un morphisme $u : M \to A \in S(A)$. D'après la relation (1),

$$(\varphi_{1_M,u}) \circ \theta(u)\chi \in \mathrm{Hom}\,(K_u(A),\ G(M_u)).$$

La transformation naturelle $\chi_L : \hat{L} \to L$ définie par

$$\chi_L\varphi = ((\varphi_{1_M,u}) \circ (\theta(u)\chi)_{u \in S(A)})$$

pour $\varphi \in \hat{L}(A)$ vérifie $\chi_L\Gamma_L =$ identité. En effet, si $\mu \in L(A)$, $\varphi = \Gamma_L\mu = ((i'(u)\, L(u)\,\mu)_{u \in S(A)}$ et $\varphi_{v,u} = G(\alpha(uv))\,\mu_{\beta(uv)}\,K(u)$; en particulier $\varphi_{1_M,u} = G(\alpha(u))\,\mu_{\beta(u)}K(u) = \mu_u K_{(u)}$ car $\alpha(u) = 1_M$, $\beta(u) = u$ puisque $u \in S(A)$. Par conséquent

$$(\chi_L\varphi)_u = (\chi_L\Gamma_L\mu)_u = \mu_u K(u)\,\theta(u)\,\chi = \mu_u\psi(u) = \mu_u.$$

(La dernière égalité résulte du fait que $\psi(u)\psi(u) = \psi(u)$ puisque μ_u est un homomorphisme dont la source est $K_u(A) = \psi(u)K(A)$).

7. 5. Proposition. — *Si K_* est un foncteur $\mathcal{A} \to d\mathcal{G}_*\Lambda$, $Hom^*(K_*,\ G)$ est un foncteur $\mathcal{A} \to d\mathcal{G}_*\Lambda$.*

Démonstration. — Soit $\mathrm{Hom}^*(K_*,\ G) : \mathfrak{M} \to d\mathcal{G}^*\Lambda$ le foncteur contravariant défini par :

$$\mathrm{Hom}^n(K_*,\ G)(M) = \mathrm{Hom}\,(K_n(M),\ G(M)) \quad \text{pour} \quad M \in \mathfrak{M}$$
$$\mathrm{Hom}^n(K_*,\ G)(u) = \mathrm{Hom}\,(K(u),\ G(u)) \quad \text{pour} \quad u : M \to M'$$

et dont la différentielle ∂_1 est définie par transposition à partir de celle de K_*.

On a :

$$\mathrm{Hom}^n(K_*,\ G)(M) = \mathrm{Hom}\Big(\sum_{v \in S(M)} K_{n,v}(M),\ G(M)\Big) = \prod_{v \in S(M)} \mathrm{Hom}\,(K_{n,v}(M),\ G(M)).$$

Si $x \in \mathrm{Hom}^n(\mathrm{K}, G)(\mathrm{M})$, on désigne par x_v sa projection dans $\mathrm{Hom}(\mathrm{K}_{n,v}(\mathrm{M}), G(\mathrm{M})$. Alors $G(\nu) \circ x_v \in \mathrm{Hom}(\mathrm{K}_{n,v}(\mathrm{M}), G(\mathrm{M}_\nu))$ où M_v est la source de ν. On pose $\mathrm{T}(\mathrm{M}) = ((\mathrm{G}(\nu) \circ x_v)_{v \in \mathrm{S}(\mathrm{M})})$. T est une transformation naturelle

$$\mathrm{Hom}^*(\mathrm{K}_*, G) \to Hom^*(\mathrm{K}_*, G)|\mathfrak{M}$$

et même une équivalence naturelle puisque, ν appartenant à $\mathrm{S}(\mathrm{M})$, $G(\nu)$ est un isomorphisme. $\delta' = \mathrm{T}\delta_1\mathrm{T}^{-1}$ est une différentielle sur $Hom^*(\mathrm{K}_*, G)|\mathfrak{M}$, $\hat{\delta}'$ une différentielle sur $\widehat{Hom}^*(\mathrm{K}_*, G)$.

Finalement on pose, pour le degré n,

$$\delta = \chi_{\mathrm{K}^{n+1}}\hat{\delta}'\Gamma_{\mathrm{K}^n}$$

où l'on a écrit K^i au lieu de $Hom^i(\mathrm{K}_*, G)$, $i = n, n+1$.

δ est une transformation naturelle : $\mathrm{K}^n \to \mathrm{K}^{n+1}$ puisque c'est un produit de transformation naturelle. Donc ((5.2)a^*)

$$\hat{\delta}\Gamma_{\mathrm{K}^n} = \Gamma_{\mathrm{K}^{n+1}}\delta$$

mais δ' étant une transformation naturelle, on a sur $\mathfrak{M}$:

$$\hat{\delta}'\Gamma_{\mathrm{K}^n} = \Gamma_{\mathrm{K}^{n+1}}\delta'$$

d'après 5. 2. a^*, donc, sur $\mathfrak{M}$, $\delta = \chi_{\mathrm{K}^{n+1}}\hat{\delta}'\Gamma_{\mathrm{K}^n} = \chi_{\mathrm{K}^{n+1}}\Gamma_{n+1}\delta' = \delta'$: de l'égalité $\delta|\mathfrak{M} = \delta'$ on déduit par passage au chapeau, $\hat{\delta} = \hat{\delta}'$ et finalement, $\hat{\delta}'\Gamma_{\mathrm{K}^n} = \Gamma_{\mathrm{K}^{n+1}}\delta$.

Mais alors $\delta\delta = \chi_{\mathrm{K}^{n+2}}\hat{\delta}'\Gamma_{\mathrm{K}^{n+1}}\delta = \chi_{\mathrm{K}^{n+2}}\hat{\delta}'\hat{\delta}'\Gamma_{\mathrm{K}^n} = 0$.

Finalement, δ est une différentielle, dont la restriction à $\mathfrak{M}$ est δ', et qui induit $\hat{\delta}'$ sur $\hat{\mathrm{K}}^*$.

7. 6. *. Proposition. — *Si* K_* *est un foncteur* $\mathfrak{A} \to d\mathcal{G}_{*\Lambda}$ *acyclique sur les modèles,* $Hom^*(\mathrm{K}_*, G)$ *est acyclique sur les modèles.*

Démonstration. — Soient U_n, η les transformations naturelles qui définissent l'acyclicité de K_* sur $\mathfrak{M}^*$. Soit $\mathrm{U}_1{}^{n+1} : \mathrm{Hom}^{n+1}(\mathrm{K}_*, G) \to \mathrm{Hom}^n(\mathrm{K}, G)$ le transposé de U_n, et $\mathrm{U}^{n+1} = \mathrm{TU}_1{}^{n+1}\mathrm{T}^{-1}$ ou T désigne l'équivalence naturelle induite dans 7. 5. D'après 7. 5* on a $\delta\mathrm{U}^n + \mathrm{U}^{n-1}\delta = id$ pour $n > 0$.

Soit $\varphi \in \mathrm{Hom}^0(\mathrm{K}_*, G)(\mathrm{M})$. $\varphi \circ \eta \circ \varepsilon$ est un homomorphisme $\mathrm{K}_0(\mathrm{M}) \to G(\mathrm{M})$, donc un élément de $\mathrm{Hom}^0(\mathrm{K}_*, G)(\mathrm{M})$

tel que $\delta_1(\varphi \circ \eta \circ \varepsilon) = \varphi \circ \eta \circ \varepsilon \circ d = 0$, donc un cocycle. On définit $\eta_1 : \mathrm{Hom}^0(\mathrm{K}_*, G) \to \mathrm{H}^0(\mathrm{Hom}^*(\mathrm{K}_*, G))$ par $\eta_1\varphi =$ classe de cohomologie de $\varphi \circ \eta \circ \varepsilon$, et $\eta' : Hom^0(\mathrm{K}_*, G) \to \mathrm{H}^0 Hom^*(\mathrm{K}_*, G)$ par $\eta' = (\mathrm{H}^0\mathrm{T})\eta_1\mathrm{T}^{-1}$.

Si ε' désigne l'application naturelle

$$\mathrm{H}^0 Hom^*(\mathrm{K}_*, G) \quad \to \quad Hom^0(\mathrm{K}_*, G)$$

il résulte des définitions que

$$\mathrm{U}^1\delta = id - \varepsilon'\eta'.$$

7. $2._*$ *Système local covariant.* — Soit G un foncteur covariant $\mathfrak{M} \to \mathcal{G}_\Lambda$ on dit que G est un système local covariant si $G(u)$ est un isomorphisme pour tout morphisme u non dégénéré.

7. $3._*$ *Le foncteur* $\mathrm{K}_* \divideontimes G$.

Soit K_* un foncteur covariant fortement représentable. $\mathfrak{A} \to d\mathcal{G}_{*\Lambda}$, et G un système local covariant on pose, pour tout objet $\mathrm{A} \in \mathfrak{A}$, et tout morphisme $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B} \in \mathfrak{A}$,

$$\mathrm{K}_* \divideontimes G(\mathrm{A}) = \sum_{u \in \mathrm{S(A)}} \mathrm{K}_{*,u}(\mathrm{A}) \otimes_\Lambda G(\mathrm{M}_u)$$

$$\mathrm{K}_* \divideontimes G(f) | \mathrm{K}_{*,u}(\mathrm{A}) \otimes_\Lambda G(\mathrm{M}_u) = (\mathrm{K}_*(f) | \mathrm{K}_{*,u}(\mathrm{A})) \otimes_\Lambda G(\alpha(fu)$$

$\mathrm{K}_* \divideontimes G$ est un foncteur covariant.

7. $4._*$ Proposition. — *Le foncteur* $\mathrm{K}_* \divideontimes G$ *est fortement représentable.*

7. $5._*$ Proposition. — *Si* K_* *est un foncteur* $\mathfrak{A} \to d\mathcal{G}_{*\Lambda}$, $\mathrm{K}_* \divideontimes G$ *est un foncteur* $\mathfrak{A} \to d\mathcal{G}_{*\Lambda}$.

7. $6._*$ Proposition. — *Si* K *est un foncteur* $\mathfrak{A} \to d\mathcal{G}_{*\Lambda}$ *acyclique sur les modèles,* $\mathrm{K}_* \divideontimes G$ *est acyclique sur les modèles.*

Les démonstrations sont analogues à celles des propositions 7. 4*, 7. 5*, 7. 6*. Pour définir la différentielle de $\mathrm{K}_* \divideontimes G$ on introduit le foncteur $\mathrm{K}_* \circ G : \mathfrak{M} \to d\mathcal{G}_{*\Lambda}$ défini par

$$\mathrm{K}_* \circ G(\mathrm{M}) = \mathrm{K}_*(\mathrm{M}) \otimes_\Lambda G(\mathrm{M})$$

pour $\mathrm{M} \in \mathfrak{M}$ et $\mathrm{K}_* \circ G(u) = \mathrm{K}_*(u) \otimes G(u)$ pour les morphismes $u \in \mathfrak{M}$, et dont la différentielle d_1 est $d \otimes 1_{G(\mathrm{M})}$. $\mathrm{K} \circ G$ est naturellement équivalent à $\mathrm{K}_* \divideontimes G | \mathfrak{M}$, qui est ainsi muni d'une différentielle d'. $\hat{d}'$ est une différentielle de $\widehat{\mathrm{K}_* \divideontimes G}$. En utilisant les transformations naturelles γ et Γ relatives au foncteur de $K_* \ast G$, on a la différentielle $d = \Gamma \hat{d}' \gamma$ cherchée d induit $\hat{d}'$ sur $\widetilde{K_* \ast G}$ et d' sur $K_* \ast G | \mathfrak{M}$.

7. 7. Proposition. — *Soient F et G deux systèmes locaux contravariants* (resp. *covariants*), *et* K_* *un foncteur fortement représentable. Si $\xi : F \to G$ est une transformation naturelle, il existe une transformation naturelle* $Hom^*(K_*, \xi)$:

$Hom^*(K_*, F) \to Hom^*(K_*, G)$ (*resp.* $K_* \ast F : K_* \ast F \to K_* \ast G$)

Démonstration. — On pose

$$Hom^n(K_*, \xi)(A) = \prod_{u \in S(A)} \mathrm{Hom}(\mathrm{id}, \xi(M_u))$$
$$K_* \ast \xi(A) | K_{*,u}(A) \otimes_\Lambda F(M_u) = \mathrm{id} \otimes \xi(M_u).$$

7. 8. Définitions. — *a.* Un système local $G : \mathfrak{M} \to \mathcal{G}_\Lambda$ est *constant* si $G(M)$ est un Λ-module indépendant de M et $G(u)$ l'application identique pour tout morphisme $u \in \mathfrak{M}$. Un système local est *simple* s'il est naturellement équivalent à un système local constant.

b. Un foncteur contravariant $K^* : \mathfrak{A} \to d\mathcal{G}^*_\Lambda$ (resp. covariant $K_* : \mathfrak{A} \to d\mathcal{G}_{*\Lambda}$) est *augmentable* si $H^0 K^* | \mathfrak{M}$ (resp. $H_0 K_* | \mathfrak{M}$) est un système local.

c. Un foncteur covariant $K_* : \mathfrak{A} \to d\mathcal{G}_{*\Lambda}$ est *singulier* s'il est fortement représentable, acyclique sur les modèles, et si $H_0 K_* | \mathfrak{M}$ est un système local simple, de module Λ.

7. 9. Proposition. — *Soit* K_* *un foncteur covariant* : $\mathfrak{A} \to d\mathcal{G}_{*\Lambda}$ *fortement représentable et augmentable, alors* $Hom^*(K_*, G)$ *et* $K_* \ast G$ *sont augmentables.*

Démonstration. — Pour tout $M \in \mathfrak{M}$, on a

$$H^0\,\mathrm{Hom}^*(K_*, G(M)) = \mathrm{Hom}_\Lambda(H_0\,K_*(M), G(M))$$

et pour tout morphisme u de $\mathfrak{M}$ on a

$$H^0\,\mathrm{Hom}^*(K_*, G)(u) = \mathrm{Hom}_\Lambda(H_0 K_*(u), G(u))$$

Comme $\mathrm{Hom}^*(K, G)$ et $Hom^*(K_*, G) | \mathfrak{M}$ sont naturellement équivalents, $Hom^*(K, G)$ est augmentable. Même démonstration pour $K_* \ast G$.

7. 10*. Soient $K_* : \mathcal{A} \to d\mathcal{G}_{*\Lambda}$ un foncteur singulier, L_* un foncteur covariant $\mathcal{A} \to d\mathcal{G}_{*\Lambda}$, fortement représentable, augmentable et acyclique sur les modèles. $L^* = Hom^*(L_*, G)$ où G est un système local contravariant, est acyclique sur les modèles, représentable et augmentable. Soit F le système local $H^0L^*|\mathfrak{M}$.

Théorème. — *Les deux foncteurs* H^*L^* *et* $H^* Hom^*(K, F)$ *sont naturellement équivalents.*

Démonstration. — D'après 6. 1*. il suffit de démontrer que $H^0L^*|\mathfrak{M}^\alpha$ est naturellement équivalent à $H^0\, Hom^*(K^*, F)|\mathfrak{M}^\alpha$.

Or $H^0L^*|\mathfrak{M} = F$ et d'après 7. 9. $H^0 Hom^*(K_*, F)|\mathfrak{M}$ est naturellement équivalent à $\mathrm{Hom}_\Lambda(H_0K_*, F)$. K_* étant singulier, $H_0K_*|\mathfrak{M}$ est naturellement équivalent au système local constant de module Λ, et $H^0\mathrm{Hom}^*(K_*, F)|\mathfrak{M}$ est naturellement équivalent à $\mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda, F) = F$ C.Q.F.D.

7. 10_*. On conserve les mêmes hypothèses que dans (7. 10)* $L^1_* = L_* \ast G$ où G est un système local covariant, est acyclique sur les modèles, représentable et augmentable. Soit F le système local $H_0L^1_*|\mathfrak{M}$.

Théorème. — *Les deux foncteurs* H_*L_* *et* $H_*(K_* \ast F)$ *sont naturellement équivalents.*

7. 11. Proposition. — *Le foncteur* C_* (cf. 5. 5.) *est singulier.* C'est évident à partir des définitions.

8. — Le cas relatif.

Pour permettre d'étendre à l'homologie et à la cohomologie relative les théories précédentes, on introduit dans une catégorie $\mathcal{A}$, de sous catégories $\mathfrak{I}$ et $\mathfrak{J}$ qui *grosso modo* donnent une notion de « sous-objet » dans $\mathcal{A}$. Moyennant certaines hypothèses de compatibilité, les problèmes relatifs dans $\mathcal{A}$ sont ramenés à des problèmes absolus dans de nouvelles catégories $\mathcal{A}_\mathfrak{I}$ et $\mathcal{A}_\mathfrak{J}$.

8. 1. Soit $(\mathcal{A}, \mathfrak{M}, \alpha, \beta)$ une catégorie avec modèles et fonctions de dégénérescences. Supposons qu'il existe une sous

catégorie $\mathcal{J}$ de $\mathcal{A}$ dont les objets sont les objets de $\mathcal{A}$, et dont les morphismes $B \to A \in \mathcal{J}$, s'ils exitent, sont uniques. Supposons de plus qu'il existe un objet $\emptyset \in \mathcal{A}, \emptyset \notin \mathcal{M}$, tel que pour tout objet $A \in \mathcal{A}$, il existe un morphisme unique,

$$\emptyset_A : \emptyset \to A \in \mathcal{A}, \quad \emptyset_A \in \mathcal{J}.$$

Définition 1. — On dit que α et β sont *compatibles* avec $\mathcal{J}$ si pour tout : $M \to B \in$, $\mathcal{A}M \in \mathcal{M}$ et tout $\mu \in \mathcal{J}$ on a

$$(1) \qquad \begin{cases} \beta(\mu u) = \mu\beta(u) \\ \alpha(\mu u) = \alpha(u). \end{cases}$$

ceci entraîne que si $\mu : B \to A \in \mathcal{J}$, et si $u \in S(B)$, $\mu u \in S(A)$.

Définition 2. — On définit une catégorie $(\mathcal{A}$, $\mathcal{M}_{\mathcal{J}}$, α, $\beta)$ comme suit :

les objets de $\mathcal{A}_{\mathcal{J}}$, sont des couples (A, B) tels qu'il existe un morphisme (unique par conséquent) $\mu : B \to A \in \mathcal{J}$.

Les morphismes de $\mathcal{A}_{\mathcal{J}}$, $(A, B) \xrightarrow{(f, f')} (A', B')$ sont des carrés commutatifs

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & A' \\ {\scriptstyle\mu}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\mu'} \\ B & \xrightarrow{f'} & B' \end{array}$$

où les flèches verticales sont dans $\mathcal{J}$ et les flèches horizontales dans $\mathcal{A}$.

Les modèles de $\mathcal{M}_{\mathcal{J}}$ sont des couples $(M, \emptyset)$ où $M \in \mathcal{M}$. Si $(u, \emptyset_B) : (M; \emptyset) \to (A, B)$, on pose

$$\alpha(u, \emptyset_B) = (\alpha(u), 1_{\emptyset}), \qquad \beta(u, \emptyset_B) = (\beta(u), \emptyset_B)$$

$(\mathcal{A}_{\mathcal{J}}, \mathcal{M}_{\mathcal{J}}, \alpha, \beta)$ est une catégorie avec modèles et fonctions de dégénérescence.

Si K est un foncteur covariant (resp. contravariant) on définit le foncteur $K_{\mathcal{J}} : \mathcal{A}_{\mathcal{J}} \to \mathcal{G}_{\Lambda}$ par

$$K_{\mathcal{J}}(A, B) = \text{coker } K(\mu) \ (\text{resp. } K_{\mathcal{J}}(A, B) = \text{Ker } K(\mu))$$

pour un objet $(A, B) \in \mathcal{A}_{\mathcal{J}}$, où μ est l'unique application $B \to A \in \mathcal{J}$,

$K_{\mathfrak{J}}(f, f')$ étant l'application canonique induite par le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} K(A) & \xrightarrow{K(f)} & K(A') \\ {\scriptstyle K(\mu)}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle K(\mu')} \\ K(B) & \xrightarrow{K(f')} & K(B') \end{array} \qquad \left(\text{resp.}\ \begin{array}{ccc} K(A) & \longleftarrow & K(A') \\ \downarrow & & \downarrow \\ K(B) & \longleftarrow & K(B') \end{array}\right)$$

Si K est un $d\mathcal{G}_{\mathcal{J}*\Lambda}$-foncteur (resp. $d\mathcal{G}^*_{\mathcal{J}\Lambda}$-foncteur), on définit canoniquement une structure de $d\mathcal{G}_{\mathcal{J}*\Lambda}$-foncteur (resp. $d\mathcal{G}^*_{\mathcal{J}\Lambda}$) pour $K_{\mathfrak{J}}$.

Convention. — On suppose que $K(\emptyset) = \{0\}$ (K covariant ou contravariant) et que α et β sont compatibles avec $\mathfrak{J}$.

8. 2. Proposition. — *Soit* K *un foncteur covariant* $\mathfrak{A} \to d\mathcal{G}_{\mathcal{J}*\Lambda}$ *fortement représentable* (resp. *acyclique sur les modèles*, resp. *augmentable*, resp. *singulier*) *alors* $K_{\mathfrak{J}}$ *est fortement représentable* (*resp. singulier*).

Démonstration. — On remarque que si $(A, B) \in \mathfrak{A}_{\mathfrak{J}}$, $(u, \emptyset) \in S(A, B)$ si et seulement si $u \in S(A)$. Comme $K_{\mathfrak{J}}(M, \emptyset) = K(M)$, on voit que $\hat{K}_{\mathfrak{J}}(A, B) = \hat{K}(A)$ en convenant d'identifier $K((M, \emptyset), (u, \emptyset))$ à $K(M, u)$.

D'autre part si $u \in S(B)$, $\mu u \in S(A)$, un calcul simple montre que $K(\mu) K_u(B) = K_{\mu u}(A)$. Par conséquent

$$(1) \qquad K_{\mathfrak{J}}(A, B) = \sum_{u \in S'(A,\ B)} K_u(A)$$

en désignant par $S'(A, B)$ l'ensemble des $u \in S(A)$ qui ne s'écrivent pas $\mu u'$ où $u' \in S(B)$. $\chi_{K_{\mathfrak{J}}}$ est alors défini par $\chi_{K_{\mathfrak{J}}} = \chi_K | \sum_{u \in S'(A,\ B)} K_u(A)$. On a bien $\Gamma_{K_{\mathfrak{J}}}\chi_{K_{\mathfrak{J}}} =$ identité, de plus $\psi(u, \emptyset) = \psi(u)$ si $u = \mu u'$ avec $u' \in S(B)$. Donc $K_{\mathfrak{J}}$ est fortement représentable et $(K_{\mathfrak{J}})_{(u,\emptyset)} = K_u(A)$ ou O suivant que $u \in S'(A, B)$ ou non. Enfin les autres affirmations de la proposition découlent immédiatement du fait que $K_{\mathfrak{J}} | \mathfrak{M}_{\mathfrak{J}} = K | \mathfrak{M}$.

8. 3. Soient G un système local covariant (resp. contravariant) et K un foncteur covariant fortement représentable $\mathfrak{A} \to d\mathcal{G}_{\mathcal{J}*\Lambda}$. G est aussi un système local pour $\mathfrak{A}_{\mathfrak{J}}$ en posant $G(M, \emptyset) = G(M)$, $G(f, 1_\emptyset) = G(f)$; puisque $K(\mu) : K_u(B) \to K_{\mu u}(A)$ est surjectif pour $\mu : B \to A \in \mathfrak{J}$, on a :

$$(K \star G)_{\mathfrak{J}} = K_{\mathfrak{J}} \star G \qquad \text{et} \qquad Hom^*(K, G)_{\mathfrak{J}} = Hom(K_{\mathfrak{J}}, G)$$

en particulier, si on suppose que $K(\mu)$ est injectif pour on a des suites exactes :

$$0 \to K * G(B) \to K * G(A) \to K_{\mathcal{J}} * G(A, B) \to 0$$
$$0 \to Hom^*(K_{\mathcal{J}}, G)(A, B) \to Hom^*(K, G)(A) \to Hom^*(K, G)(B) \to 0$$

qui donnent les suites exactes classiques d'homologie et de cohomologie. Cette situation est en particulier réalisée dans la catégorie des ensembles simpliciaux, en disant que $\mu \in \mathcal{J}$ si $\mu : B \to A$ est l'application canonique induite par l'inclusion $B \subset A$ et en prenant pour foncteur K le foncteur C_*.

8. 4. Soient $(\mathcal{A}, \mathfrak{M}, \alpha, \beta)$ une catégorie avec modèles et fonctions de dégénérescence et $\mathcal{J}$ une sous-catégorie de $\mathcal{A}$ dont les objets sont les objets de $\mathcal{A}$, et dont les morphismes $B \to A \in \mathcal{J}$, s'ils existent sont uniques.

DÉFINITION 1. — On dit que α et β sont compatibles avec $\mathcal{J}$ si

1° quel que soit le diagramme commutatif

$$(1) \qquad \begin{tikzcd} M \arrow[r, "u"'] & A \\ M' \arrow[u, "\lambda"] \arrow[r, "u'"'] & B \arrow[u, "\mu"'] \end{tikzcd}$$

où M et M′ sont des modèles, et où les flèches verticales sont dans $\mathcal{J}$ il existe une application (qui est donc unique) $\lambda' : N' \to N \in \mathcal{J}$ où N′ et N sont les buts de $\alpha(u')$ et $\alpha(u)$ telle que le diagramme

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\alpha(u)"] & N \arrow[r, "\beta(u)"] & A \\ M' \arrow[u, "\lambda"] \arrow[r, "\alpha(u')"'] & N' \arrow[u, "\lambda'"] \arrow[r, "\beta(u')"'] & B \arrow[u, "\mu"] \end{tikzcd}$$

commute.

2°) L'application $S(B) \to S(A)$ donnée par $u' \to \beta(\mu . u')$ est bijective, et de plus $\alpha(\mu . u') \in \mathcal{J}$ pour $u' \in S(B)$.

DÉFINITION 2. — On définit une catégorie $(\mathcal{A}_{\mathcal{J}}, \mathfrak{M}_{\mathcal{J}}, \alpha, \beta)$ avec modèles $\mathfrak{M}_{\mathcal{J}}$ et fonctions de dégénérescence α, β comme suit : $\mathcal{A}_{\mathcal{J}}$ est la catégorie définie dans 8. 1. (en utilisant $\mathcal{J}$ au lieu de $\mathcal{J}$) $\mathfrak{M}_{\mathcal{J}}$ est la sous-catégorie pleine de $\mathcal{A}_{\mathcal{J}}$ dont les objets sont les couples (M, M′) avec M et $M' \in \mathfrak{M}$.

Si (u, u') est un morphisme $(M, M') \to (A, B)$ on pose

$$\alpha(u, u') = (\alpha(u), \alpha(u')) \qquad \text{et} \qquad \beta(u, u') = (\beta(u), \beta(u')).$$

Cette dernière définition n'a de sens que si α et β sont compatibles avec $\mathcal{J}$, puisqu'il faut que $(N, N') \in \mathcal{A}_{\mathcal{J}}$, et que $\beta(u, u')\ \alpha(u, u') =$ identité : c'est ce qu'exprime la première condition de la définition 1.

Si donc α et β sont compatibles avec $\mathcal{J}$ ce que l'on suppose dans la suite, $(\mathcal{A}_{\mathcal{J}}, \mathcal{M}_{\mathcal{J}}, \alpha, \beta)$ est une catégorie avec modèles et fonctions de dégénérescence.

Si K est un foncteur défini sur $\mathcal{A}$, on définit $K_{\mathcal{J}}$ de la même façon de $K_{\mathcal{J}}$.

Dans le paragraphe suivant on suppose remplies, les conditions de la définition 1, et on suit les notations de la définition 2.

8. 5. Proposition. — *Soit* K *un foncteur covariant*

$$\mathcal{A} \to d\mathcal{G}_{*\Lambda}.$$

Si K *est fortement représentable,* $K_{\mathcal{J}}$ *est fortement représentable.*

Démonstration. — Il résulte de la deuxième condition de la définition 1 que l'application $S(B) \to S(A)$ donnée par $u' \to \beta(\mu u')$ est une bijection. Soit M' la source de u', posons $u = \beta(\mu u')$ et soit M la source de u.

Alors $K(\mu) : K_{u'}(B) \to K_u(A)$, $\hat{K}(\mu) : K(M', u') \to K(M, u)$, si bien que

$$K_{\mathcal{J}}(A, B) = \sum_{u \in S(A)} K_u(A)/K(\mu)\, K_{u'}(B)$$

et que $\hat{K}_{\mathcal{J}} = (\hat{K})_{\mathcal{J}}$, à condition d'identifier

$$K(M, u)/K(\mu)\, K(M', u') \qquad \text{et} \qquad (K(M)/K(\alpha(\mu u'))\, K(M'), (u, u'))$$

on définit alors $\chi_{K_{\mathcal{J}}}$ par passage au quotient à partir de χ_K, et $\Gamma_{K_{\mathcal{J}}}\chi_{K_{\mathcal{J}}} = \mathrm{id}$ puisque $\Gamma_K\chi_K = \mathrm{id}$.

Soit ρ la projection $K(A) \to K_{\mathcal{J}}(A, B)$. On a $\psi(u, u') = \rho\psi(u)$ et $(K_{\mathcal{J}})_{(u, u')}(A, B) = K_u(A)/K(\mu)\, K_{u'}(B)$. On en déduit immédiatement que $K_{\mathcal{J}}$ est fortement représentable.

8. 6. Soit K un foncteur covariant $\mathcal{A} \to d\mathcal{G}_{*\Lambda}$; on définit un foncteur $K'_{\mathcal{J}} : \mathcal{A}_{\mathcal{J}} \to d\mathcal{G}_{*\Lambda}$ en posant $K'_{\mathcal{J}}(A, B) = K(A)$ pour

tout objet $(A, B) \in \mathcal{C}_{\mathcal{J}}$ et $K'_{\mathcal{J}}(f, f') = K(f)$ pour tout morphisme $(f, f') \in \mathcal{C}_{\mathcal{J}}$.

Proposition. — *Si* α *et* β *sont compatibles avec* $\mathcal{J}$, *et si* K *est représentable* (resp. *fortement représentable*, resp. *acyclique sur les modèles*, resp. *augmentable*, resp. *singulier*) $K'_{\mathcal{J}}$ *est représentable* (resp. *fortement représentable*, resp. *acyclique sur les modèles*, resp. *augmentable*, resp. *singulier*).

8. 7. Soit $(\mathcal{C}, \mathcal{M}, \alpha, \beta)$ une catégorie avec modèles et fonctions de dégénérescences.

Soient $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$ deux sous-catégories de $\mathcal{C}$ définies comme dans 8. 1. et 8. 4. On suppose que α et β sont compatibles avec $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$. On considère la catégorie $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}$, $\mathcal{M}_{\mathcal{I}}$, α, β de 8. 1. Soit $\mathcal{J}'$, la sous-catégorie de $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}$, définie comme suit : un morphisme

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & A' \\ {\scriptstyle\mu}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\mu'} \\ B & \xrightarrow{f'} & B' \end{array}$$

est dans $\mathcal{J}'$ si μ et $\mu' \in \mathcal{I}$ (c'est la définition d'un morphisme dans $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}$) et si de plus $f' \in \mathcal{I}$ et $f \in \mathcal{J}$. $\mathcal{J}'$ a alors les propriétés exigées d'une sous-catégorie $\mathcal{J}$ 8. 4., et de plus, les fonctions de dégénérescences α et β de $\mathcal{C}_{\mathcal{I}}$ sont compatibles avec $\mathcal{J}'$, au sens de 8. 4. On peut alors définir comme dans 8. 4., une nouvelle catégorie $(\mathcal{C}_{\mathcal{I}})_{\mathcal{J}'}$, $(\mathcal{M}_{\mathcal{I}})_{\mathcal{J}'}$, α, β.

Si K est un foncteur $\mathcal{C} \to d\mathcal{G}_{*\Lambda}$, on obtient un foncteur $(K_{\mathcal{I}})_{\mathcal{J}'} : (\mathcal{C}_{\mathcal{I}})_{\mathcal{J}'} \to d\mathcal{G}_{*\Lambda}$ en appliquant successivement les constructions de 8. 1. et 8. 4. à K et $K_{\mathcal{I}}$. Les propositions 8. 2., 8. 5., 8. 6., donnent les propriétés de $(K_{\mathcal{I}})_{\mathcal{J}'}$ et de $(K_{\mathcal{I}})'_{\mathcal{J}'}$.

9. — Le théorème d'Eilenberg-Zilber.

9. 1. Définition. — On considère de nouveau la catégorie $(\mathcal{S}, \mathcal{M}, \alpha, \beta)$ définie dans 5. 6. On définit une nouvelle catégorie $(\mathcal{S}^p, \mathcal{M}^p, \alpha^p, \beta^p)$ comme suit :

$\mathcal{S}^p$ est la catégorie dont les objets sont des suites ordonnées de p objets $X_1, \ldots, X_p$ avec $X_i \in \mathcal{S}$ pour $i = 1, \ldots, p$ et dont les morphismes sont les suites ordonnées de p morphismes $f = (f_1, \ldots, f_p)$, avec $f_i \in \mathcal{S}$ pour $i = 1, \ldots, p$.

$\mathfrak{M}^p$ est la sous-catégorie pleine de $\mathcal{S}^p$ dont les objets sont des suites ordonnées de p-modèles de $\mathfrak{M}$.

Si $u = (u_1, \ldots, u_p)$ est un morphisme dont la source appartient à $\mathfrak{M}^p$, on pose

$$\alpha(u) = (\alpha(u_1), \ldots, \alpha(u_p)) \quad \text{et} \quad \beta(u) = (\beta(u_1), \ldots, \beta(u_p).)$$

En particulier u est dégénéré si l'un quelconque des u_i est dégénéré.

Pour tout objet $X = (X_1, \ldots, X_p)$ et tout morphisme $f = (f_1, \ldots, f_p)$ se $\mathcal{S}^p$, on pose (le produit tensoriel étant pris sur Z)

$$\begin{aligned} K_*(X) &= C_*(X_1) \otimes \ldots C_*(X_p),\ K_*(f) = C_*(f_1) \otimes \ldots \otimes C_*(f_p) \\ L(X) &= C\ (X_\times \ldots {}_\times X_p),\ L_*(f) = C_*\ (f_1 \times \ldots . \times f_p) \end{aligned}$$

K_* et L_* sont deux foncteurs covariants $\mathcal{S}^p \to \mathcal{C}_{\mathcal{G}_* Z}$.

9. 2. Proposition. — K_* *est fortement représentable.*

Démonstration. — Comme dans 5. 5., on désigne par le même symbole un élément non dégénéré de $X_i \in \mathcal{S}$, et l'élément qu'il engendre dans $C_*(X_i)$. On désignera par $r(x_i)$ le degré de l'élément $x_i \in X_i \in \mathcal{S}$. Donc $\tilde{x}_i : \Delta[r(x_i)] \to X_i$.

Si $x = x_1 \otimes \ldots \otimes x_p \in K_*(X)$ (où $x_i \in X_i$), on pose

$$\chi_{K_*} x = (\delta^{r(x_1)} \otimes \ldots \otimes \delta^{r(x_p)},\ \ \tilde{x})$$

en désignant par $\tilde{x}$ le morphisme $(\tilde{x}_1 \ldots, \tilde{x}_p)$.

On vérifie que $\Gamma_{K_*} \chi_{K_*} =$ identité. K est donc représentable. La formule qui donne $\chi_{K_*} x$ montre aussi que si

$$u = (u_1, \ldots, u_p) \in S(X)$$

alors

$$\psi_*(u) x = \Gamma_{K_*} \tau(u) \chi_{K_*} x = \begin{cases} o \text{ si } u \neq \tilde{x} \\ x \text{ si } u = \tilde{x} \end{cases}$$

on en déduit que K_* est fortement représentable, et que $K_{*\tilde{x}}(X)$ est le module engendré par l'unique élément x.

9. 3. Proposition. — K_* *est un* $d\mathcal{C}_{\mathcal{G}_* Z}$ *foncteur acyclique sur les modèles.*

DÉMONSTRATION. — On définit une différentielle dans $K_*(X)$ en posant

$$d(x_1 \otimes \cdots \otimes x_p) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^{r(x_1)+\cdots+r(x_{i-1})} x_1 \otimes \cdots \otimes x_{i-1} \otimes dx_i \otimes x_{i+1} \ldots \otimes x_p.$$

Soit $M = (\Delta[n_1], \ldots, \Delta[n_p]) \in \mathfrak{M}^p$. On désigne par $U(n_i)$ l'homotopie définie dans la proposition 5. 5. relative à $\Delta[n_i]$, par ε_i et η_i les applications ε et η relative à $\Delta[n_i]$. On considère de plus ε_i comme une application $C_*(\Delta[n_i]) \to H_0C_*(\Delta[n_i])$ en convenant que ε_i est nulle sur les n-chaînes avec $n > 0$.

On pose alors, pour $x = x_1 \otimes \cdots \otimes x_p \in K_*(M)$

$$U(M)x = \sum_{i=0}^{p} (-1)^{r(x_1)+\cdots+r(x_{i-1})} \eta_1 \varepsilon_1(x_1) \otimes \cdots \otimes \eta_{i-1}\varepsilon_{i-1}(x_{i-1}) \otimes U(n_i)x_i \otimes x_{i+1} \otimes \cdots \otimes x_p$$

et on vérifie que $dU + Ud = id - \eta_1\varepsilon_1 \otimes \cdots \otimes \eta_p\varepsilon_p$; en particulier, si x est une zéro-chaîne,

$$dUx = x - \varkappa x$$

en posant
$$\varkappa = \eta_1\varepsilon_1 \otimes \cdots \otimes \eta_p\varepsilon_p.$$

Comme dans 5. 5. on voit que pour toute 1-chaîne z, $\varkappa\, dz = 0$ c'est-à-dire que $\varepsilon(x) = \varepsilon(\varkappa x)$. On pose alors

$$\eta\varepsilon x = \varkappa x$$

et par conséquent $dU_0 = id - \eta\varepsilon$.

On vérifie enfin sans difficulté que U et η sont des applications naturelles de $(\mathfrak{M}^p)^{\alpha p}$.

9. 4. PROPOSITION. — L_* *est fortement représentable.*

DÉMONSTRATION. — Soit $x = x_1 \times \cdots \times x_p \in L_n(X)$ (en désignant encore par le même symbole l'élément x non dégénéré de $X_1 \times \cdots \times X_p$ et l'élément qu'il engendre dans $C_*(X_1 \times \cdots \times X_p) = L_*(X)$ les x_i sont donc des éléments de degré n de X_i, et, puisque $x_1 \times \cdots \times x_p \in X_1 \times \cdots \times X_p$ est non dégénéré $x_i = s_{l_1^i} \ldots s_{l_{a_i}^i} \ldots s_{l_{p_i}^i} x_i'$ où x_i' est non dégénéré, $r(x_i') = n - p_i$ les $l_{a_i}^i$ étant tels que

(i) $$l_1^i > \cdots > l_{p_i}^i$$

(ii) Il n'existe pas de suite $a_i (1 \leqslant a_i \leqslant p_i)$, $i = 1, \ldots, p$ telle que $l_{a_1}^1 = l_{a_2}^2 = \cdots = l_{a_p}^p$.

On pose alors :

$$\chi_{L_*}x = \left(\prod_{i=1}^{p} s_{l_1^i} \ldots s_{l_{p_i}^i}\delta^{r(x'_i)}, \tilde{x}'\right)$$

où $\tilde{x}'$ est le morphisme $(\tilde{x}'_1, \ldots, \tilde{x}'_p)$.

On vérifie que $\Gamma_{L_*}\chi_{L_*} =$ identité. L_* est donc représentable. La formule qui donne χ_{L_*} montre de plus que si $u \in S(X)$

$$\psi_*(u)x = \Gamma_{L_*}\tau(u)\chi_{L_*}x = \begin{cases} 0 \text{ si } u \neq \tilde{x}' \\ x \text{ si } u = \tilde{x}' \end{cases}$$

On en déduit que L_* est fortement représentable, et que $L_{n}, {}_{\tilde{x}'}(X)$ est le groupe commutatif libre engendré par les éléments $\sum_{i=1}^{p} s_{l_1^i} \ldots s_{l_{p_i}^i}x'_i$ avec $p_i + r(x'_i) = n$ et où les $l^i_{a_i}$ vérifient les relations (i) et (ii).

9. 5. Proposition. — L_* *est un* $d\mathcal{G}_{*Z}$ *foncteur acyclique sur les modèles.*

Le fait que L est un $d\mathcal{G}_{*Z}$ foncteur est évident. On note que si f_i est une application $I \times X_i \rightarrow Y_i$ alors l'application $f\colon\ I \times X_1 \times \cdots \times X_p \rightarrow Y_1 \times \cdots \times Y_p$ définie par $f(\alpha, x_1, \ldots, x_p) = f_1(\alpha, x_1) \times \cdots \times f_p(\alpha, x_p)$ est telle que

$$f \circ \varepsilon_e = (f_1 \circ \varepsilon_e, \ldots, f_p \circ \varepsilon_e) \qquad \text{pour} \qquad e = 0{,}1.$$

Si M est le modèle $\Delta[n_1] \times \cdots \times \Delta[n_p]$ et si on prend pour application f_i les homotopies ω_{n_i} de (1. 4.), on définit par le procédé précédent une homotopie ω :

$$1 \times \Delta[n_1] \times \cdots \times \Delta[n_p] \rightarrow \Delta[n_1] \times \cdots \times \Delta[n_p].$$

telle que $\omega \circ \varepsilon_0 :\ M \rightarrow O_{n_1} \times \cdots \times O_{n_p}$ et $\omega \circ \varepsilon_1 =$ identité.

Appliquons alors le lemme 5. 5. on obtient une homotopie U sur $L_*(M)$ telle que $dU + Ud = \text{id} - \eta_1\varepsilon_1 \times \cdots \times \eta_p\varepsilon_p$ (notations de 9. 3.) on conclut alors comme dans 9. 3.

9. 6. Proposition. — $H_0\, L_*|(\mathfrak{M}^p)^{\alpha p}$ *et* $H_0K_*|(\mathfrak{M}^p)^{\alpha p}$ *sont naturellement équivalents.*

Démonstration. — Soit T la transformation naturelle $L_0 \rightarrow K_0$ définie par

$$T(x_1 \times \cdots \times x_p) = x_1 \otimes \cdots \otimes x_p$$

(x_i de degré zéro à appartenant X_i) $\varepsilon_K T \eta_L$ est une équivalente naturelle.

9. 7. Théorème. — *Soit G un système local covariant* (resp. *contravariant*) $\mathfrak{M}^p \to \mathcal{G}_Z$; *les foncteurs* $H_*(K_* \ast G)$ *et* $H_*(L_* \ast G)$ (resp. H^* *Hom** (K_*, G) *et* H^* *Hom** $(L_*, \underline{G})$ *sont naturellement équivalents.*

Démonstration. — *Hom*$^*(K_*, G)$ *et Hom*$^*(L_* \; G)$ sont des foncteurs représentables et acycliques sur les modèles puisque K_* et L_* sont fortement représentables et acycliques sur les modèles (cf. 7. 4.*, 7. 6.*, 9. 2., 9. 3., 4. 9., 9. 5.); pour démontrer le théorème il suffit donc de montrer que H^0 *Hom*$^*(K_*, G)$ et H^0 *Hom*$^*(L_*, G)$ sont naturellement équivalents sur les modèles (cf. 6. 1.*). Or (cf. 7. 9.) pour tout $M \in (\mathfrak{M}^p)^{\alpha p}$, on a

$$\begin{aligned} H^0\,\mathrm{Hom}^*(K_*, \; G)(M) &= \mathrm{Hom}_Z(H_0K_*(M), \; G(M)) \\ H^0\,\mathrm{Hom}^*(L_*, \; G)(M) &= \mathrm{Hom}_Z(H_0L_*(M), \; G(M)) \end{aligned}$$

et pour tout morphisme $u \in (\mathfrak{M}^p)^{\alpha p}$ on a

$$\begin{aligned} H^0\,\mathrm{Hom}^*(K_*, \; G)(u) &= \mathrm{Hom}_Z(K_0K_*(u), \; G(u)) \\ H^0\,\mathrm{Hom}^*(L_*, \; G)(u) &= \mathrm{Hom}_Z(H_0L_*(u), \; G(u)). \end{aligned}$$

Comme $\mathrm{Hom}^*(K_*, \; G)$ et *Hom*$^*(K_*, \; G) | (\mathfrak{M}^p)^{\alpha p}$ (resp. K_* remplacé par L_*) sont naturellement équivalents, le théorème résulte de 9. 6. Même démonstration pour $K_* \ast G$ et $L_* \ast G$.

9. 8. Soit $\mathfrak{J}$ la sous-catégorie de $\mathfrak{S}$ (cf. 8. 1.) dont les objets sont ceux de $\mathfrak{S}$ et dont les morphismes $\mu : Y \to X \in \mathfrak{J}$ si et seulement si $Y \subset X$ et si μ est l'injection canonique. α et β sont compatibles avec $\mathfrak{J}$, et $C_*(\mu)$ est injectif si $\mu \in \mathfrak{J}$. Soit $\mathfrak{J}^p$ la sous-catégorie de $\mathfrak{S}^p$ dont les objets sont ceux de $\mathfrak{S}^p$ et, dont les morphismes $\mu : (Y_1 \ldots, Y_p) \to (X_1, \ldots X_p) \in \mathfrak{J}^p$ si et seulement si $Y_i \subset X_i$ pour $i = 1, \ldots, p$ et si $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_p)$ est tel que $\mu_i \in \mathfrak{J}$. α^p et β^p sont compatibles avec $\mathfrak{J}^p$. On peut alors considérer la catégorie $(\mathfrak{S}^p_{\mathfrak{J}^p}, \mathfrak{M}^p_{\mathfrak{J}^p}; \alpha^p, \beta^p)$ et les foncteurs $K_{\mathfrak{J}^p}$, $L_{\mathfrak{J}^p}$ (où l'on écrit $K_{\mathfrak{J}^p}$ et $L_{\mathfrak{J}^p}$ au lieu de $K_{*\mathfrak{J}^p}$ et $L_{*\mathfrak{J}^p}$). $K_{\mathfrak{J}^p}(\mu)$ et $L_{\mathfrak{J}^p}(\mu)$ sont injectifs si $\mu \in \mathfrak{J}^p$. 8. 2. et 8. 3. permettent alors d'énoncer :

Théorème. — *Soit G un système covariant* (resp. *contravariant*) $\mathfrak{M}^p \to \mathcal{G}_Z$; *les foncteurs* $H_*(K_{\mathfrak{J}^p} \ast G)$ *et* $H_*(L_{\mathfrak{J}^p} \ast G)$, (resp. H^* *Hom*$^*(K_{\mathfrak{J}^p}, \; G)$ et H^* *Hom*$^*(L_{\mathfrak{J},p} \; G)$) *sont naturellement équivalents.*

9. 9. Soit X un objet de $\mathcal{J}^p$, et considérons la catégorie $(\mathcal{J}^p_X, \mathcal{M}^p_X, \alpha^p_X, \beta^p_X)$ (cf. 5. 6.) et les foncteurs K_X, L_X (où l'on a supprimé les $*$ pour simplifier l'écriture). D'après la proposition 5. 6., K_X et L_X sont représentables et acycliques sur les modèles. Ils sont aussi fortement représentables, comme on le voit sans peine. Soit μ un morphisme de $\mathcal{J}^p_X$ *i-e* un triangle commutatif

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[d] \arrow[dr] & \\ Y \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

on dira que $\mu \in \mathcal{J}^p_X$ si la flèche verticale est dans $\mathcal{J}^p$.

α^p_X et β^p_X sont alors compatibles avec $\mathcal{J}^p_X$ et on peut énoncer :

Théorème. — *Soit G un système local covariant* (resp. *contravariant* $\mathcal{M}^p_X \to \mathcal{G}_Z$; *les foncteurs* $H_*((K_X)_{\mathcal{J}^p_X} \ast G)$ *et* $H_*((L_X)_{\mathcal{J}^p_X} \ast G)$ (resp. $H^* Hom^*((K_X)_{\mathcal{J}^p_X}, G)$ et $H^* Hom^*(L_X)_{\mathcal{J}^p_X}, G))$ *sont naturellement équivalents.*

9. 10. Remarque. — Soit $T : K \to L$ est une transformation naturelle de foncteurs fortement représentables $\mathcal{A} \to d\mathcal{G}_{\mathcal{J}*\Lambda}$ telle que $T : K_u(A) \to L_u(A)$, pour tout $A \in \mathcal{A}$ et $u \in S(A)$. Notons (τ) cette propriété.

Si T a la propriété (τ), T induit une transformation naturelle $T \ast G : K \ast G \to L \ast G$ et une transformation naturelle $Hom^*(T, G) : Hom^*(L, G) \to Hom^*(K, G)$. T induit aussi une transformation naturelle $T_{\mathcal{J}} : K_{\mathcal{J}} \to L_{\mathcal{J}}$, et il résulte de 8. 2. que $T_{\mathcal{J}}$ à la propriété (τ). Enfin T induit une transformation naturelle $T_A : K_A \to L_A$ pour tout objet $A \in \mathfrak{A}$, qui a la propriété (τ).

Supposons de plus que T soit une extension (donnée par le théorème 6. $1._*$) d'une transformation naturelle

$$H_0K|\mathcal{M}^\alpha \to H_0L|\mathcal{M}^\alpha.$$

Il résulte alors de ce qui précède et de $(6.\ 1.)^*$ $(6.\ 1.)_*$ que les transformations naturelles $H(T \ast G)$, etc... sont les transformations naturelles $H_*(K \ast G) \to H_*(L \ast G)$ etc..., déduites du théorème des modèles acycliques.

Or on sait que dans le cas $p = 2$, l'isomorphisme du théorème 9. 7. appliqué à l'homologie, et au système local constant Z, est donné par les transformations naturelles d'Eilenberg

$$\nabla : K_* \to L_* \qquad \text{et} \qquad f : L_* \to K_*$$

(cf. [2] et [8]) que l'on obtient explicitement en appliquant directement la construction donnée dans 6. 1*. pour démontrer le théorème des modèles acycliques. On voit immédiatement sur les formules explicites que ∇ et f ont la propriété (τ). On en déduit en particulier ceci : l'isomorphisme (en cohomologie) donné par le théorème 9. 9. est induit par les deux transformations naturelles

$$Hom^*((\nabla_A)_{\mathfrak{J}^*}, G) \qquad \text{et} \qquad Hom^*((f_A)_{\mathfrak{J}^*}, G).$$

10. — Systèmes locaux et systèmes locaux classiques.

10. 1. *Systèmes locaux classiques.* — On rappelle, (cf. [7]) qu'un système local classique G sur un ensemble simplicial X est la donnée :

(i) pour chaque sommet $x_0 \in X_0$ d'un groupe abelien G_{x_0};

(ii) pour chaque 1-simplexe $x_1 \in X_1$ d'un isomorphisme $G(x_1) : G_{d_0 x_1} \to G_{d_1 x_1}$ tel que si $x_1 = s_0 x_0$, $G(x_1) =$ identité, et si $\sigma \in X_2$, $G(d_2\sigma) \circ G(d_0\sigma) = G(d_1\sigma)$.

a. Un système local classique G *sur* $X \in \mathcal{S}$ *définit un système local G au sens du* § 7 *sur la catégorie* $\mathfrak{M}_X$(cf. 5. 6.).

Pour le voir, on rappelle que les objets de $\mathfrak{M}_X$ sont les couples $(\Delta[n], x)$ où x est une application simpliciale :

$$\Delta[n] \to X,$$

et que les morphismes de $\mathfrak{M}_X$ sont les diagrammes commutatifs dans $\mathcal{S}$:

$$(u, x, y) \qquad \begin{tikzcd}[row sep=small] \Delta[n] \arrow[d, "u"'] \arrow[dr, "x"] & \\ \Delta[m] \arrow[r, "y"'] & X \end{tikzcd}$$

on pose alors :

$$G(\Delta[n], x) = G_{x(0_n)}, \quad G(u, x, y) = G(\rho)$$

où $\rho \in X_1$ est le 1-simplexe défini de la façon suivante : dans $\Delta[m]$, il existe un et un seul 1-simplexe dont les zéros faces sont 0_m et $u\ (0_n)$; ρ est l'image par y de ce simplexe; les

0-faces de ρ sont $d_1\rho = y(0_m)$, $d_0\rho = x(0_n)$, et $G(u, x\ y,)$ est donc un isomorphisme $G(\Delta[n], x) \to G(\Delta[m], y)$.

Le fait que $\mathrm{G}(s_0x_0) =$ identité pour $x_0 \in \mathrm{X}_0$ entraîne que $G(1_{\mathrm{M}}) =$ identité pour tout $\mathrm{M} \in \mathfrak{M}_{\mathrm{X}}$; de même

$$\mathrm{G}(d_2\sigma) \circ \mathrm{G}(d_0\sigma) = \mathrm{G}(d_1\sigma)$$

entraîne que si f et g sont deux morphismes de $\mathfrak{M}_{\mathrm{X}}$, $G(g \circ f) = G(g) \circ G(f)$.

G est donc un foncteur covariant $\mathfrak{M}_{\mathrm{X}} \to \mathcal{G}_{\mathrm{Z}}$. Comme $G(f)$ est un isomorphisme pour tout morphisme $f \in \mathfrak{M}_{\mathrm{X}}$, on obtient un système local contravariant en remplaçant $G(f)$ par l'isomorphisme réciproque $G(f)^{-1}$.

b. Un système local G sur $\mathfrak{M}_{\mathrm{X}}$ *définit un système local classique* G *sur* X.

Pour le voir, on pose, pour tout $x \in \mathrm{X}_0$, et tout $\rho \in \mathrm{X}$

$$\mathrm{G}_x = G(\Delta[0], \tilde{x}),$$
$$\mathrm{G}(\rho) = G^{-1}(\widetilde{d_1\delta^1}, \widetilde{d_1\rho}, \tilde{\rho}) \circ G(\widetilde{d_0\delta^1}, \widetilde{d_0\rho}, \tilde{\rho})$$

si G est covariant, l'isomorphisme du second membre de $\mathrm{G}(\rho)$ devant être remplacé par l'isomorphisme réciproque si G est contravariant, (on a bien des isomorphismes car $\widetilde{d_1\delta^1}$ et $\widetilde{d_0\delta^1}$ appartiennent à S(X) et par conséquent (cf. 5. 6.)

$$(\widetilde{\beta d_1\delta^1}, \widetilde{d_1\rho}, \tilde{\rho}) = (\widetilde{d_1\delta^1}, \widetilde{d_1\rho}, \tilde{\rho}), \quad \beta(\widetilde{d_0\delta^1}, \widetilde{d_0\rho}, \tilde{\rho}) = (\widetilde{d_0\delta^1}, \widetilde{d_0\rho}, \tilde{\rho}).$$

G est un système local classique: $\mathrm{G}(s_0x) =$ identité car $G(1_{\mathrm{M}}) =$ identité pour $\mathrm{M} \in \mathfrak{M}_{\mathrm{X}}$, et $\mathrm{G}(d_2\sigma) \circ \mathrm{G}(d_0\sigma) = \mathrm{G}(d_1\sigma)$ pour $\sigma \in \mathrm{X}_2$ car si f et g sont des morphismes de $\mathfrak{M}_{\mathrm{X}}$, on a $G(f \circ g) = G(g) \circ G(g)$ si G est covariant ou $G(f \circ g) = G(g) \circ G(f)$ si G est contravariant.

c. Soit G un système local (par exemple le covariant) sur $\mathfrak{M}_{\mathrm{X}}$ on lui associe par le procédé de *b* un système local classique G sur X, auquel on peut appliquer le procédé de *a* on obtient ainsi un système local G' sur $\mathfrak{M}_{\mathrm{X}}$.

Alors G et G' sont naturellement équivalents: en effet, si on exprime G' en fonction de G en utilisant les constructions explicites données dans *a* et *b*, on trouve que, si (u, x, y) est le morphisme

$$\begin{tikzcd} \Delta[n] \arrow[d, "u"'] \arrow[dr, "x"] & \\ \Delta[m] \arrow[r, "y"'] & \mathrm{X} \end{tikzcd}$$

de $\mathfrak{M}_X$, alors

$$G'(\Delta[n],x) = G(\Delta[0], x\circ\tilde{O}_n)$$
$$G'(u, x, y) = G^{-1}(\tilde{O}_m, y\circ\tilde{O}_m, y)\circ G(u, x, y)\circ G(\tilde{O}_n, x\circ\tilde{O}_n, x)$$

($G(\tilde{O}_m, y\circ\tilde{O}_m, y)$ est un isomorphisme puisque $(\tilde{O}_m, y\circ\tilde{O}_m, y)$ est non dégénéré).

La transformation naturelle $G'\to G$ est alors donnée par: $T(\Delta[n], x) = G(\tilde{O}_n, x\circ\tilde{O}_n, x)$. Le fait que T soit naturel résulte de la formule même donnant $G'(u, x, y)$.

L'équivalence naturelle entre G et G' montre que $G(f)$ est un isomorphisme pour tout $f\in\mathfrak{M}_X$. Comme un système local G sur $\mathfrak{M}$ induit toujours un système local sur $\mathfrak{M}_X$ (en posant $G(\Delta[n], x) = G(\Delta[n])$, $G(u, x, y) = G(u)$, on voit que tout système local sur $\mathfrak{M}$ possède la propriété de transformer les morphismes, dégénérés ou non, de $\mathfrak{M}$ en des isomorphismes.

10. 2. Puisque G et G' sont naturellement équivalents, les foncteurs $C_{*X}\ast G$ et $C_{*X}\ast G'$ le sont aussi d'après 7. 7.; explicitons donc $C_{*X}\ast G'$ (Y, f) où (Y, f) $\in\mathcal{S}_X$; un morphisme $u' = (\tilde{y}, f\circ\tilde{y}, f)$: $(\Delta[n], f\circ\tilde{y})\to(Y, f)$ est non dégénéré si et seulement si $y\in Y_n$ est non dégénéré. $C_{n,X,u'}(Y, f)$ est donc égal à $C_{n,\tilde{y}}(Y)$ c'est-à-dire au Z-module engendré par y. Avec les notations précédentes, $M_{u'} = (\Delta[n], f\circ\tilde{y})$ et par conséquent $G'(M_{u'}) = G(\Delta[0], f\circ\tilde{y}\circ\tilde{O}_n) = G_{f(y_0)}$ en désignant par y_0 le « zéro-ième » sommet de y, à savoir $d_1\ldots d_ny$.

$C_{n,X}\ast G'$ (Y, f) est donc engendré, comme objet de $\mathcal{G}_{*Z}$, par les éléments de la forme $y\otimes g$ où $g\in G_{f(y_0)}$. On constate sans peine que la différentielle d'un tel élément est $d(y\otimes g) = d_0y\otimes G^{-1}(f(\rho))g + \sum_{i=1}^{n}(-1)^id_iy\otimes g$ où ρ désigne le 1-simplexe $d_2\ldots d_ny$, et où d_iy doit être remplacé par 0 si d_iy est dégénéré. ($i = 0, \ldots n$). $C_{*X}\ast G'(Y,f)$ est donc le complexe des chaînes à coefficients dans le système local classique sur Y induit par l'application $X\xrightarrow{f}X$ à partir du système local classique G associé à G (cf. [7]). La considération de G' au lieu de celle de G a donc le double avantage d'avoir un caractère fonctoriel et de donner tous les systèmes locaux induits par les applications $Y\to X$.

De même Hom (C_{*X}, G') (Y, f) est le complexe des cochaînes à coefficients dans le système local classique sur Y induit par l'application $f: Y \to X$ à partir du système local classique G associé à G, c'est-à-dire : une n-chaîne est une application qui à chaque $y \in Y_n$ non dégénéré fait correspondre un élément $\varphi(y) \in G_{f(y_0)}$; la différentielle de φ est la n-cochaîne $\delta\varphi$ telle que, si $y \in Y_{n+1}$ est non dégénéré,

$$(\delta\varphi)(y) = G(f(\rho))\varphi(d_0 y) + \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i \varphi(d_i y)$$

où $\rho = d_2 \dots d_{n+1} y$ et où $d_i y$ doit être remplacé par 0 si $d_i y$ est dégénéré $(i = 0, 1 \dots n+1)$.

Si on remplace C_{*X} par $(C_X)_{\mathcal{J}}$ dans les considérations précédentes, on obtient bien entendu les complexes de chaînes (resp. cochaines) classiques qui donnent l'homologie (resp. la cohomologie) relative d'un couple formé d'un objet et d'un sous objet de $\mathcal{S}$, à valeur dans un système local de coefficients.

10. 3. On peut développer les considérations analogues dans $\mathcal{S}^p$ (cf. § 9).

Bornons-nous au cas de $\mathcal{S}^2$.

Soit $X = (X_1, X_2) \in \mathcal{S}^2$. Un morphisme de $\mathfrak{M}_X^2$ est un couple formé de deux morphismes, l'un dans $\mathfrak{M}_{X_1}$ l'autre dans $\mathfrak{M}_{X_2}$:

$$u = (u, \;\; u_2) = \left(\begin{tikzcd}[row sep=small] \Delta[m_1] \arrow[d] \arrow[dr] & \\ \Delta[n_1] \arrow[r] & X_1, \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd}[row sep=small] \Delta[m_2] \arrow[dr] & \\ \Delta[n_2] \arrow[u] \arrow[r] & X_2 \end{tikzcd} \right) : \;\; M \to N \in \mathfrak{M}_X^2$$

dans 10. 1. a on a fait correspondre à chacun des modèles M_i un sommet x_i de $(X_i)_0$ $(i = 1, 2)$ et à chacun des morphismes u_i un 1-simplexe ρ_i de $(X_i)_1$ $(i = 1,2)$.

Si G est un système local classique sur $X_1 \times X_2$, on obtient un système local sur $\mathfrak{M}_X^2$ en posant

$$G(M) = G_{x_1 \times x_2} G(u) = G(\rho_1 \times \rho_2)$$

réciproquement si G est un système local sur $\mathfrak{M}_X^2$, on obtient un système local classique sur $X_1 \times X_2$ en posant

$$G_{x_1 \times x_2} = G((\Delta[0], \tilde{x}_1), (\Delta(0), \tilde{x}_2)) \quad \text{pour} \quad x_i \in (X_i)_0 \quad (i = 1, 2)$$

et en définissant $G(\rho_1 \times \rho_2)$ par la formule donnée dans

10. 1. *b* pour $G(\rho)$ en « dédoublement » tous les morphismes qui y figurent, conformément à la définition des objets et des morphismes de $\mathcal{J}^2_X$.

Partant d'un foncteur G sur $\mathfrak{M}^2_X$ on obtient un système local classique sur $X_1 \times X_2$ qui redonne un foncteur G' sur $\mathfrak{M}^2_X$: G et G' sont naturellement équivalents.

CHAPITRE III

LA SUITE SPECTRALE DES FIBRÉS

11. — La catégorie des fibrés.

Étant donné un fibré $\pi = (E, p, B)$, on lui associe une suite spectrale (d'homologie) qui est un foncteur défini sur $\mathcal{F}$, dont l'aboutissement est $H_*(E)$ et dont le terme $E^2_{p,q}$ est canoniquement isomorphe à $H_p(B, \mathcal{H}_q(F))$ où $\mathcal{H}_q(F)$ désigne un système local (classique) de module isomorphe à $H_q(F)$ déterminé par le fibré. Pour arriver à ce résultat on considère les deux foncteurs K_* et $L_* : \mathcal{F} \to d\mathcal{G}_{*}z$, K (resp. L) faisant correspondre à π les chaînes de la base B (resp. de l'espace total E). On filtre alors $L_*(\pi) = C_*(E)$ en introduisant la notion de *dimension* d'un morphisme de $\mathcal{F}$ dont la source est un modèle. Cette filtration permet alors de définir une suite spectrale qui est un foncteur sur $\mathcal{F}$, et dont l'aboutissement est $H_*(E)$. K_* étant singulier, on se propose de montrer que E^1_{*q} satisfait, pour tout $q \geqslant 0$, aux hypothèses de 7. 10. On a donc à démontrer que pour tout $q \geqslant 0$,

i) E^1_{*q} est représentable
ii) E^1_{*q} est acyclique sur les modèles,
iii) E^1_{*q} est augmentable.

On désigne alors par $\mathbf{G}_q$ le système local $H_0 E^1_{*q} | \mathcal{F}\mathcal{M} = E^2_{0,q} | \mathcal{F}\mathcal{M}$. D'après 7. 10 on a alors

$$E^2 = H_* E^1 \approx H_*(K_* \divideontimes \mathbf{G}_q).$$

Il ne reste plus qu'à expliciter $H_*(K_* \divideontimes \mathbf{G}_q)$ ce qui est facile en utilisant les résultats du § 10.

Le but de ce paragraphe est de montrer que E^1_{*q} est représentable. En utilisant des sous-catégories $\mathfrak{I}$ et $\mathfrak{J}$ convenables de $\mathcal{F}$, on démontre un résultat analogue pour les suites spectrales relatives d'un fibré et d'un sous-fibré (il y a deux notions distinctes de sous-fibré d'un fibré donné).

11. 1. Soit $\mathcal{F}$ la catégorie des fibrés (cf. (1,5)); on désigne par $\mathcal{F}\mathfrak{M}$ la sous-catégorie des modèles (*i.e* des fibrés dont la base est un modèle $\Delta[n] \in \mathfrak{M}$). Si $\pi = (E, p, B)$ est un fibré, et $f\colon X \to B$ une application de $\mathcal{J}$, le fibré (f^*E, P, X) induit par f sera désigné par $f^*\pi$. On note que si f et g sont deux applications, les deux fibrés $g^*(f^*\pi)$ et $(f \circ g)^*\pi$ sont canoniquement isomorphes : dans la suite ils seront toujours identifiés. Soit $\Phi : \pi' \to \pi$ un morphisme de $\mathcal{F}$

$$\Phi : \begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{f} & E \\ {\scriptstyle p'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ B' & \xrightarrow[g]{} & B \end{array}$$

et supposons que g, se factorise en $g_1 \circ g_2$. Il existe alors une application et une seule $h\colon E' \to g_1^*E$ telle que le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} E' & \xrightarrow{h} & g_1^*E & \xrightarrow{Q} & E \\ {\scriptstyle p'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle P} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ B' & \xrightarrow[g_2]{} & X & \xrightarrow[g_1]{} & B \end{array}$$

commute et que $Q \circ h = f$: si $e' \in E'$, alors $he' = (g_2p'e', fe')$, autrement dit $\Phi = \Phi_1 \circ \Phi_2$, où Φ_1, désigne le carré de droite, et Φ_2 le carré de gauche.

12. 2. Soient α et β les fonctions de dégénérescence de la catégorie $\mathcal{J}$ (cf. (5. 5.)) on définit des fonctions de dégénérescence pour $\mathcal{F}$, en posant pour tout morphisme $\mathfrak{U} : \mu \to \pi$ où $\mu \in \mathcal{F}\mathfrak{M}$,

$$\mathfrak{U} : \begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{f} & E \\ {\scriptstyle p'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ M & \xrightarrow[u]{} & B \end{array} : u \to \pi \quad (M \in \mathfrak{M})$$

$\alpha(\mathfrak{U}) = \mathfrak{U}_2$, $\beta(\mathfrak{U}) = \mathfrak{U}_1$ où $\mathfrak{U}_1$ et $\mathfrak{U}_2$ sont les morphismes construits comme Φ_1 et Φ_2 de 11. 1. à l'aide de la factorisation $u = \beta(u)\,\alpha(u)$. En particulier, $\mathfrak{U} \in S(\pi)$ si et seulement si $u \in S(B)$, $E' = u^*E$ et si f est l'application canonique $u^*E \to E$. L'application $\mathfrak{U} \to u$ est donc une bijection de $S(\pi)$ sur $S(B)$. En particulier, la convention 5. 1. est vérifiée.

11. 3. Avec les notations de 11. 1., disons qu'un morphisme $\Phi \in \mathfrak{I}$ si $B' \subset B$, $g : B' \to B$ est l'injection canonique, $E' = \underline{p}^{-1}(B')$ est l'injection canonique $\underline{p}^{-1}(B') \to E$ et $\underline{p}' = \underline{p}|E'$; disons que $\Phi \in \mathfrak{J}$ si $E' \subset E$, $B' = B$, f est l'injection canonique $E' \to E$ et $\underline{p}' = p|E'$. α et β sont alors compatibles avec $\mathfrak{I}$ et $\mathfrak{J}$ (cf. § 8).

11. 4. *Le foncteur* $K_* : \mathfrak{F} \to d\mathcal{G}_{*Z}$.

Avec les notations de 11. 1., on pose $K_*(\pi) = C_*(B)$ et $K_*(\Phi) = C_*(g)$.

Proposition. — K_* *est singulier.*

Démonstration. — Si $\mathfrak{U}$ est le morphisme de 11. 2.,

$$K_*(\pi', \mathfrak{U}) = (C_*(M), \mathfrak{U});$$

comme l'application $\mathfrak{U} \to u$ est bijective si $\mathfrak{U}$ est non dégénéré, on a, en identifiant $K_*(\pi', \mathfrak{U})$ et $C_*(M, u)$, $i(\mathfrak{U})$ et $i(u)$, $j(\mathfrak{U})$ et $j(u)$,

$$\hat{K}_*(\pi) = \hat{C}_*(B), \qquad \hat{K}_*(\Phi) = \hat{C}_*(g)$$

on pose alors $\chi_{K_*}(\pi) = \chi_{C_*}(B)$. K_* est donc représentable, fortement représentable et $K_{*\mathfrak{U}}(\pi) = C_{*,u}(B)$. On pose de même $U_n(\mu) = U_n(M)$, etc...

11. 5. *Le foncteur* $L_* : \mathfrak{F} \to d\mathcal{G}_{*Z}$.

Avec les notations de 11. 1, on pose

$$L_*(\pi) = C_*(E), \; L_*(\Phi) = C_*(f).$$

Proposition. — L_* *est fortement représentable.*

Démonstration. — On construit une application $\Sigma : S(E) \to S(\pi)$ de la manière suivante : soit $\nu : M \to E \in S(E)$, $(M \in \mathfrak{M})$, et N le but de $\alpha(\underline{p}\nu)$.

On considère le diagramme commutatif suivant :

(1)
$$\begin{tikzcd}
\beta(\underline{p}\nu)^*E \arrow[rr, "Q"] \arrow[dd, "P"'] & & E \arrow[dd, "\underline{p}"] \\
& M \arrow[ul, dashed, "\Omega"'] \arrow[ur, "\nu"'] \arrow[dl, "\alpha(\underline{p}\nu)"'] \arrow[dr, "\underline{p}\nu"] & \\
N \arrow[rr, "\beta(\underline{p}\nu)"'] & & B
\end{tikzcd}$$

où P et Q désignent les applications canoniques (cf. 1. 5. d). La commutativité du diagramme montre que pour tout $m \in \overline{\mathrm{H}}$, $(\alpha(\underline{p}\nu)m, \nu m) \in \beta(\underline{p}\nu)^*\mathrm{E}$. On définit ainsi une application Ω : $\mathrm{M} \to \beta(\underline{p}\nu)^*\mathrm{E}$ qui complète commutativement (1). Le fibré de gauche, soit μ, appartient à $\mathcal{F}\mathfrak{M}$, le grand carré est un morphisme $\mu \to \pi \in \mathrm{S}(\pi)$. On définit Σ comme étant l'application qui à ν fait correspondre ce carré. Puisque $\mathrm{L}_*(\pi) = \mathrm{C}_*(\mathrm{E})$, on définit $\chi_{\mathrm{L}_*}(\pi)$ en posant, tout $e \in \mathrm{E}_n$, e non dégénéré :

$$\chi_{\mathrm{L}_n} e = i(\Sigma\tilde{e})\Omega(\delta^n) \in \mathrm{L}(\mu, \Sigma\tilde{e}) \subset \hat{\mathrm{L}}_n(\pi).$$

(avec $\mathrm{M} = \Delta[n]$, $\nu = \tilde{e}$, etc... dans (1)).

On voit alors que $\Gamma_{\mathrm{L}_*}\chi_{\mathrm{L}_*} =$ identité, et que χ_{L_*} est une transformation naturelle $\mathrm{L}_* \to \hat{\mathrm{L}}_*$. Donc L_* est représentable. De plus, si $\mathcal{U} \in \mathrm{S}(\pi)$, on remarque que $\psi_*(\mathcal{U}) = 0$ sauf si $\mathcal{U} \in \mathrm{I}m(\Sigma)$ et dans ce dernier cas, $\psi(\Sigma\tilde{e})e = e$. On en déduit que L_* est fortement représentable, et que $\mathrm{L}_{*\mathcal{U}}(\pi) = 0$ si $\mathcal{U} \notin \mathrm{I}m(\Sigma)$,

$$\mathrm{L}_{*\Sigma\tilde{e}}(\pi) = \sum_{\Sigma\tilde{e}' = \Sigma\tilde{e}} \mathrm{C}_{*,\tilde{e}'}(\mathrm{E})$$

11. 6. *Dimensions.* — Soit $\mathcal{U}$ le morphisme $\mu \to \pi \in \mathcal{I}$ de 11. 2. On dit que $\mathcal{U}$ est de dimension p, et on écrit $\dim \mathcal{U} = p$, si $\mathrm{M} = \Delta[p]$. Les modèles de $(\mathcal{F}\mathfrak{M})_{\mathfrak{J}}$ sont du type $(\mu, \emptyset)$ où $\mu \in \mathcal{F}\mathfrak{M}$. Si $(\mathcal{U}, \emptyset_{\pi'}) : (\mu, \emptyset) \to (\pi, \pi')$ est un morphisme de $\mathcal{F}_{\mathfrak{J}}$ on pose $\dim(\mathcal{U}, \emptyset_{\pi'}) = \dim \mathcal{U}$.

Les modèles de $(\mathcal{F}\mathfrak{M})_{\mathfrak{J}'}$ sont du type (μ, μ') où μ et $\mu' \in \mathcal{F}\mathfrak{M}$ μ et μ' ayant même base dans $\mathfrak{M}$. Si $(\mathcal{U}, \mathcal{U}') : (\mu, \mu') \to (\pi, \pi')$ est un morphisme de $\mathcal{F}_{\mathfrak{J}'}$ on a donc $\dim \mathcal{U} = \dim \mathcal{U}'$. On pose $\dim(\mathcal{U}, \mathcal{U}') = \dim \mathcal{U} = \dim \mathcal{U}'$.

On déduit de ce qui précède une notion de dimension dans la catégorie $(\mathcal{F}_{\mathfrak{J}})_{\mathfrak{J}'}$.

Le couple $(\mathcal{I}, \mathrm{L}_*)$ (resp. $(\mathcal{I}_{\mathfrak{J}}, \mathrm{L}_{\mathfrak{J}})$, resp. $(\mathcal{I}_{\mathfrak{J}'}, \mathrm{L}_{\mathfrak{J}'})$, resp. $((\mathcal{I}_{\mathfrak{J}})_{\mathfrak{J}'}, (\mathrm{L}_{\mathfrak{J}})_{\mathfrak{J}'})$) vérifie alors les conditions suivantes :

11. 7. *Compatibilité avec la dimension.* — Soient $(\mathfrak{A}, \mathfrak{M}, \alpha, \beta)$ une catégorie avec modèles, fonctions de dégénérescence α, β, et K_* un foncteur fortement représentable covariant $\mathfrak{A} \to d\mathcal{G}_{*\Lambda}$. A tout morphisme u dont la source est un modèle M, on fait correspondre en entier $\geqslant 0$, $\dim u$ tel que

$\dim u = \dim 1_M$. On dit que le couple $(\mathcal{A}, K_*)$ est compatible avec la dimension si

(i) $\dim \beta(u) \leqslant \dim u$, l'égalité n'ayant lieu que si $\beta(u) = u$.

(ii) $K_{n,u}(A) \neq 0$ entraîne $\dim u \leqslant n (A \in \mathcal{A})$.

(iii) $\psi_*(v)\, d\psi_*(u) \neq 0$ entraîne $\dim v \leqslant \dim u$ l'égalité n'ayant lieu que si $v = u$.

11. 8. *Filtrations.* — Soit $(\mathcal{A}, K_*)$ un couple compatible avec la dimension. On pose pour tout objet $A \in \mathcal{A}$,

$$S_p(A) = \{u \mid u \in S(A), \dim u \leqslant p\}$$
$$S^p(A) = \{u \mid u \in S(A), \dim u \geqslant p\}$$
$$F_p K_n(A) = \sum_{u \in S_p(A)} K_{n,u}(A),$$
$$F^p Hom^n(K_*, G) = \prod_{u \in S^p(A)} \mathrm{Hom}(K_{n,u}(A), G(M_u))$$

(où l'on considère ces modules comme plongés dans $\sum\limits_{u \in S(A)}$ et $\prod\limits_{u \in S(A)}$)

$$F_p K_*(A) = \sum_n F_p K_n(A),$$
$$F_p Hom^*(K_*, G)(A) = \sum_n F^p Hom^n(K_*, G)(A).$$

Désignons par $d\mathcal{F}_{*\Lambda}$ (resp. $d\mathcal{F}^*_\Lambda$) la catégorie des Λ-modèles filtrés, différentiels gradués de filtration positive ou nulle croissante (resp. décroissante) compatible avec la graduation et la différentielle de degré (-1) (resp. $+1$) la filtration étant inférieure ou égale à la graduation.

Désignons par $E^r_{p,q}$ (resp. $E^{p,q}_r$) le foncteur suite spectrale défini sur la catégorie $d\mathcal{F}_{*\Lambda}$ (resp. $d\mathcal{F}^*_\Lambda$).

PROPOSITION 1. — *Les modules* $F_p K_*(A)$ (*resp.* F^p *Hom** (K_*, G)) *définissent sur* $K_*(A)$ (resp. *Hom** $(K_*, G)(A)$) *une structure de* $d\mathcal{F}_{*\Lambda}$ — module (resp. $d\mathcal{F}^*_\Lambda$).

Démonstration. — C'est évident pour $K_*(A)$. Pour *Hom** $(K_*, G)(A)$ la seule difficulté consiste à vérifier que la filtration est compatible avec la différentielle. Or si on explicite la différentielle de 7. 5*, on trouve que si $\varphi \in Hom^n(K_*, G)(A)$, $\varphi = (\varphi_u)$, $\delta\varphi = ((\delta\varphi)_u)$ $(\delta\varphi)_u \in \mathrm{Hom}\,(K_{n+1,u}(A), G(M_u))$ est la fonction donnée par

$$(\delta\varphi)_u y = \sum_{v \in S(M_u)} G^{-1}(v)\; G(\alpha(uv))\varphi_{\beta(uv)}\,(dy)_{\beta(uv)}$$

pour tout $y \in K_{n+1,u}(A)$, et où $(dy)_{\beta(uv)}$ désigne la composante de dy dans $K_{\beta(uv)}(M_u)$.

Si φ_u est nulle pour $\dim u < p$, $\varphi_{\beta(uv)} = 0$ pour $\dim u < p$ puisque (iii) entraîne $\dim \beta(uv) \leqslant \dim u < p$ si $(dy)_{\beta(uv)} \neq 0$.

Donc si $\dim u < p$, $(\delta\varphi)_u = 0$. C.Q.F.D.

Remarque 1. — On a une proposition analogue pour $K_* \divideontimes G$; mais il n'y a aucune démonstration nouvelle à faire puisque $(\mathfrak{A}, K \divideontimes G)$ est un couple compatible avec la dimension.

Remarque 2. — Si on explicite $F_pL_n(\pi)$ on trouve que c'est le groupe commutatif libre engendré par les simplexes non dégénérés $e \in E_n$ tels que

$$pe = s_{\alpha_1} \dots s_{\alpha_q} b_p, \qquad b_p \in B_p, \qquad n = p + q.$$

Proposition 2. — *Les foncteurs* $E^1_{p,q}K_*$, $E^1_{p,q}(K_* \divideontimes G)$, $E_1^{p,q}$ *Hom** (K_*, G) *sont représentables.*

Démonstration. — Soit $u : M \to A \in S(A)$. On a

$$\begin{aligned}\theta(u)\chi\psi(u)K(u)\psi(1_M) &= \theta(u)\tau(u)\chi K(u)\psi(1_M) = \theta(u)\tau(u)\hat{K}(u)\chi\psi(1_M)\\ &= \theta(u)\hat{K}(u)\tau(1_M)\chi = \theta(u)i(u)K(1_M)j(1_M)\tau(1_M)\chi\\ &= \theta(u)i(u)K(1_M)\theta(1_M)\chi = \theta(u)i(u)\psi(1_M) = \psi_{1_M}\end{aligned}$$

soit :

$$\theta(u)\chi\psi(u)K(u)\psi(1_M) = \psi(1_M) \tag{1}$$

considérons alors l'application $\theta(u)\chi = K_n(A) \to K_n(M)$. Elle préserve la filtration car si $x \in K_{n,v}$ (A), $\theta(u)\chi x = 0$ si $v \neq 0$ et $\theta(u)\chi x = \psi(1_M)\theta(u)x \in K_{1_M}(M)$ si $u = v$, et alors $\dim u = \dim 1_M$.

En utilisant les notations de J. P. Serre (cf. [17]) on a donc

$$\theta(u)\chi : C^0_{p-1,q+1}K_*(A) \to C^0_{p-1,q+1}K_*(M) \quad (p + q = n).$$

Mais on a aussi :

$$\theta(u)\chi : C^1_{p,q}K_*(A) \to C^1_{p,q}K_*(M) . (p + q = n)$$

en effet si $x \in K_{n,u}$ (A), et si $\dim u < p$, $\theta(u)\chi$ est de filtration $< p$ d'après ce qui précède et par conséquent $d\theta(u)\chi x$ aussi. Supposons alors $\dim u = p$, et posons $y = \theta(u)\chi x$, $dy = \sum_{v \in S(M)} y_v$ où $y_v \in K_v(M_v)$. On a

$$K_{n-1}(u)\, dy = dK_n(u)y = dK_n(u)\theta(u)\chi x = d\psi(u)x = dx$$

et

$$dx = K_{n-1}(u)\, dy = \sum_{v \in S(M)} K_{n-1}(u)y_v = \sum_{v \in S(M)} \psi(\beta(uv))K_{n-1}(u)y_v.$$

On a ainsi la décomposition (unique) de dx sur les composantes $K_{\beta(uv)}(A)$. D'après 11. 7 (iii), les indices des composantes non nulles sont de dimension $< p$ si dx est de filtration $p - 1$. y étant de filtration p, y_v ne peut être différent de zéro que si $\dim v \leqslant p$.

Soit $v_1 : M_{v_1} \to M$ avec $\dim v_1 = p$; puisque $y \in K_{1_M}(M)$ 11. 7 (iii) montre que $v_1 = 1_M$; donc $\beta(uv_1) = \beta(u) = u$. Soit v un indice tel que $\beta(uv) = u$. On a alors

$$p = \dim \beta(uv) \leqslant \dim uv = \dim 1_{M_v} \leqslant p,$$

soit $\dim 1_M = \dim v = p$. $v_1 = 1_M$ est donc le seul indice tel que $\beta(uv) = u$. Mais alors puisque dx est de filtration $p - 1$, on a : $\psi(u)K_{n-1}(u)y_{1_M} = 0$. Donc, en utilisant (1), on voit que $y_{1_M} = 0$: $\theta(u)\chi x \in C^1_{p,q}K_*(M)$.

On voit de même que

$$\theta(u)\chi : B^0_{p,q}\, K_*(A) \to B^0_{p,q}K_*(M) + C^0_{p-1,q+1}\, K(M)$$

autrement dit $\theta(u)\chi$ induit une application

$$E^1_{p,q}K_*(A) \to E^1_{p,q}K_*(M)$$

d'où une application

$$\chi^1 : E^1_{p,q}K_* \to \widehat{E^1_{p,q}K_*}.$$

La remarque 1 montre que la proposition est vraie pour $K_* * G$ un raisonnement analogue au précédent montre que $E_1^{p,q}\, Hom^*(K_*, G)$ est représentable.

En appliquant la proposition 2 aux foncteurs considérés dans 11. 6, on obtient un certain nombre de foncteurs représentables qui seront utilisés dans la suite.

Remarque. — L'hypothèse que les applications $\underline{p} : E \to B$ sont fibrées n'est pas encore intervenue.

12. — La suite spectrale sur les modèles.

Pour poursuivre le programme établi au début du § 11, il faut étudier la suite spectrale sur les modèles. Soit $\Delta[n]$ la base d'un modèle μ. Pour montrer que E^1_{*q} est acyclique sur μ, on commence par montrer que le terme $E^2(\mu)$ est isomorphe au terme E^2 du fibre induit au-dessus de O_n par l'injection $O_n \to \Delta[n]$, et dans ce cas, la base étant un point, la suite spectrale se calcule immédiatement. Pour arriver à ce résultat, on est amené à étudier avec précision, étant donné deux morphismes homotopes Φ_0 et $\Phi_1 : \pi' \to \pi$, l'homotopie qui en résulte pour les homomorphismes de modules différentiels gradués $E^1(\Phi_0)$ et $E^1(\Phi_1)$ (cf. 12. 2. et 12. 3). Quelques difficultés d'ordre technique compliquent légèrement les démonstrations.

12. 1. Lemme. — *Soient f et g deux morphismes: $A \to B \in d\mathcal{F}_{*\Lambda}$ (resp. $d\mathcal{F}^*_\Lambda$), et k un homomorphisme de Λ-modules $A \to B$ tels que*

(i) $kA_n \subset B_{n+1}$ (resp. $kA^n \subset B^{n-1}$)
(ii) $kF_p(A) \subset F_{p+1}(B)$ (resp. $kF^p(A) \subset F^{p-1}(B)$)
(iii) $f - g = dk + kd$.

k induit alors un homomorphisme $k^1 : E^1_{p,q}(A) \to E^1_{p+1,q}(B)$ (resp. $k_1 : E_1^{p,q}(A) \to E_1^{p-1,q}(B)$).
Dans ces conditions $E^r(f) = E^r(g)$ (resp. $E_r(f) = E_r(g)$ pour $r \geqslant 2$).

12. 2. Soit $\Phi_e : \pi' \to \pi$ un morphisme de fibrés :

$$\Phi_e : \begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{f} & E \\ {\scriptstyle \underline{p}'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \underline{p}} \\ B' & \xrightarrow[g]{} & B \end{array}$$

et $\underline{k} : I \times B' \to B$ une homotopie telle que $\underline{k} \circ \varepsilon_e = g$. Il existe alors (cf. 2. 3 corollaire 2) une homotopie $\underline{h} : I \times E' \to E$ qui prolonge f au-dessus de $\underline{k}$, et qui est stationnaire sur $p'^{-1}(A')$ si $\underline{k}$ est stationnaire sur $A' \subset B'$.

Notons Φ_{1-e} le morphisme $\pi' \to \pi$ que l'on obtient en remplaçant f par $\underline{h} \circ \varepsilon_{1-e}$ et g par $\underline{k} \circ \varepsilon_{1-e}$; écrivons pour simplifier L^* au lieu de $Hom^*(L_*, G)$ et L'_* au lieu de $L_* \star G$.

Proposition. — *Soit G un système local constant. Avec les notations ci-dessus, $\underline{h}$ induit une application h^1 :*

$$E^1_{p,q} L'_*(\pi') \to E^1_{p+1,q} L'_*(\pi)$$

(resp. $h_1 : E_1^{p,q} L^*(\pi) \to E_1^{p-1,q} L^*(\pi')$) *telle que*

$$d^1h^1 + h^1d^1 = E^1L'_*(\Phi_1) - E^1L'_*(\Phi_0)$$

(resp. $d_1h_1 + h_1d_1 = E_1L^*(\Phi_0) - E_1L'_*(\Phi_0)$). *De plus,* h_1 (resp h^1) *est indépendante de l'homotopie* $\underline{h}$ *choisie au-dessus de* $\underline{k}$ *et prolongeant* f.

Démonstration. — Soit Λ le module du système constant G. $L'_n(\pi) = L_n(\pi)\otimes_Z\Lambda$, $L^n(\pi) = \mathrm{Hom}_Z\ (L_n(\pi), \Lambda)$

$$F_pL'_n(\pi) = F_pL_n(\pi)\otimes_Z\Lambda,\ F^pL^n(\pi) = \mathrm{Ann}F_{p-1}L_n(\pi)$$

(où Ann désigne l'annulateur) etc...

D'après 5. 5, $\underline{h}$ induit une homotopie $U : L_n(\pi') \to L_{n+1}(\pi)$ telle que $dU + Ud = L_*(\Phi_1) - L_*(\Phi_0)$. Donc $U\otimes 1_\Lambda$:

$$L'_n(\pi') \to L'_{n+1}(\pi)$$

est telle que $d(U\otimes 1_\Lambda) + (U\otimes 1_\Lambda)d = L'_*(\Phi_1) - L'_*(\Phi_0)$ (en notant encore d la différentielle de L'_*) et $\mathrm{Hom}\ (U, 1_\Lambda)$: $L^n(\pi) \to L^{n-1}(\pi')$ est telle que $\delta\ \mathrm{Hom}\,(U, 1_\Lambda) + \mathrm{Hom}\,(U, 1_\Lambda)\delta = L^*(\Phi_1) - L^*(\Phi_0)$.

De plus (avec les notations de 5. 5) $U = \Sigma(-1)^i h_i$. Comme $\underline{p}\circ\underline{h} = \underline{k}\circ(\mathrm{id}\times\underline{p}')$, on a $\underline{p}\circ\underline{h}_i = \underline{k}_i\circ\underline{p}'$; par conséquent si $e' \in E'_n$ est un n-simplexe non dégénéré de filtration p (cf. 11. 8 remarque 2) *i.e* si $\underline{p}'e' = s_{\alpha 1}\ \ldots\ s_{\alpha q}\ b'_p\ (p + q = n)$, on a $\underline{p}\circ\underline{h}_ie' = \underline{p}_is_{\alpha 1}\ \ldots\ s_{\alpha q}b'_q = s_{\alpha'_1}\ \ldots\ s_{\alpha'_q}\ \underline{k}_{i'}\ b'_p$ (en vertu des relations 1. 2) $\alpha'_1, \ldots \alpha'_p, i'$ étant des entiers qu'il est inutile d'expliciter. Or $\underline{k}_{i'}\ b'_p$ est un $(p + 1)$-simplexe de B. Donc U et $U \otimes 1_\Lambda$ augmentent la filtration de 1, $\mathrm{Hom}\ (U, 1_\Lambda)$ diminue la filtration de 1. Le lemme 12. 1 montre alors l'existence de h_1 et h^1 ayant les propriétés demandées.

Il reste à démontrer que h_1 et h^1 sont indépendants du relèvement $\underline{h}$.

Soient $\underline{h}$ et $\underline{h}'$ deux homotopies au-dessus de $\underline{k}$ qui prolongent f. D'après 2. 5 il existe une application $H : I\times I\times E' \to E$ telle que, pour $x \in E'$ α, $\beta \in I$, $e = 0$ ou 1 fixé,

$$\begin{aligned} H(\alpha, 0, x) &= \underline{h}(\alpha, x)\\ H(\alpha, 1, x) &= \underline{h}'(\alpha, x)\\ H(e, \beta, x) &= f(x)\\ \underline{p}H(\alpha, \beta, x) &= \underline{k}(\alpha, \underline{p}', x). \end{aligned}$$

Considérons H comme une homotopie par rapport à la deuxième variable : on pose $H_j(\alpha, x) = H(s_j\alpha, s_n\ \ldots\ \hat{s}_j\ \ldots\ s_0\delta^1, s_jx)$ pour $(\alpha, x) \in (I\times E')_n$, et $V = \Sigma(-1)^j\ H_j$.
on obtient : $dV + Vd = C_*(\underline{h}') - C_*(\underline{h})$.

Soit i l'application identique $I \times E' \rightarrow I \times E'$. Considérons la comme une homotopie entre applications $E' \rightarrow I \times E'$, et soit σ l'homotopie $C_*(E') \rightarrow C_*(I \times E')$ associé à i : on a $(d\sigma + \sigma d)x = (d_0\delta^1, x) - (d_1\delta^1, x)$. Mais par définition,

$$C_*(\underline{h}')\sigma = U', \qquad C_*(\underline{h})\sigma = U$$

où U' est construit à partir de $\underline{h}'$ comme U à partir de $\underline{h}$. Finalement :

$$\begin{aligned}(dV\sigma + V d\sigma)\,x &= (U' - U)x \\ &= dV\sigma - V\sigma dx + V(d_0\delta^1, x) - V(d_1\delta^1, x).\end{aligned}$$

Or $H(e, \beta, x) = f(x)$ donc $V(d_{1-e}\delta^1, x) = \varepsilon C_*(f)(x)$ ou $\varepsilon = 0$ ou 1 suivant la parité du degré de la chaîne x. On en déduit le :

Lemme. — *Supposons que x soit de filtration p, et que dx soit de filtration $p - 1$: alors* $(U' - U)x$ *est un bord modulo les éléments de filtration p*; en effet

$V\sigma$ *augmente la filtration* de 1 car $V\sigma x$ est une somme alternée d'éléments du type $H_j(s_n \ldots \hat{s}_i \ldots s_0\delta^1, s_i x)$ et
$\underline{p}H_j(s_n \ldots \hat{s}_i \ldots s_0\delta^1, s_i x) = \underline{k}(s_j s_n \ldots \hat{s}_i \ldots s_0\delta^1, \underline{p}' s_j s_i x) = s_j \underline{k}_i \underline{p}' x.$

$V(d_{1-e}\delta^1, x)$ *conserve la filtration* puisque $C_*(f) = L_*(\Phi_e)$ conserve la filtration.

$V(d_e\delta^1, x_0)$ *conserve la filtration* puisque c'est une somme alternée du type $H_j(d_e\delta^1, x)$ et que

$$\underline{p}H_j(d_e\delta^1, x) = \underline{k}(1 - e, \underline{p}' s_j x) = s_j\underline{k}\ \ (1 - e, \underline{p}' x).$$

Fin de la démonstration. — D'après le lemme $U \otimes 1_\Lambda$ et $U' \otimes 1_\Lambda$ induisent la même application $h^1 : E^1L'_*(\pi') \rightarrow E^1L'_*(\pi)$ et $\mathrm{Hom}\,(U, 1_\Lambda)$, $\mathrm{Hom}\,(U', 1_\Lambda)$ la même application h_1 :

$$E_1L^*(\pi) \rightarrow E_1L^*(\pi').$$

12. 3. Soit $\Phi_e : (\pi', \varpi') \rightarrow (\pi, \varpi)$ un morphisme dans $\mathcal{F}_{\mathcal{J}}$, c'est-à-dire un diagramme commutatif.

$$\Phi_e : \quad \begin{tikzcd} E' \arrow[rrr, "f"] \arrow[ddd, "\underline{p}'"'] & & & E \arrow[ddd, "\underline{p}"] \\ & A' \arrow[ul, "inj"] \arrow[r, "f'"] \arrow[ddl, "p'|A"] & A \arrow[ur, "inj"'] \arrow[ddr, "\underline{p}|A"'] & \\ & & & \\ B' \arrow[rrr, "g"] & & & B \end{tikzcd}$$

Soit $\underline{k} : I \times B' \to B$ une homotopie telle que $\underline{k} \circ \varepsilon_e = g$ il existe (cf. 2. 3) une homotopie $\underline{h}' : I \times A' \to A$ qui prolonge f' au-dessus de $\underline{k}$, et par conséquent une homotopie $\underline{h}$: $I \times E' \to E$ qui prolonge f et h' au-dessus de g. Notons Φ_{1-e} le morphisme $(\pi', \varpi') \to (\pi, \varpi)$ que l'on obtient en remplaçant f par $\underline{h} \circ \varepsilon_{1-e}$, f' par $\underline{h}' \circ \varepsilon_{1-e}$ et g par $\underline{k} \circ \varepsilon_{1-e}$. On écrit $L^*_{\mathfrak{J}}$ au lieu de *Hom** $(L_{*\mathfrak{J}}, G)$ et $L'_{*\mathfrak{J}}$ au lieu de $L_{*\mathfrak{J}} \ast G$, et on suppose que le système local G *est constant.* $\underline{h}$ induit une homotopie $U: L_n(\pi') \to L_{n+1}(\pi)$, $\underline{h}'$ une homotopie U' : $L_n(\varpi') \to L_{n+1}(\varpi)$. Par passage au quotient on obtient une homotopie $U_{\mathfrak{J}}: L_{n, \mathfrak{J}}(\pi', \varpi') \to L_{n+1, \mathfrak{J}}(\pi, \varpi)$ qui augmente la filtration de 1 puisque c'est le cas de U et U'.

Soit $(\underline{\mu}, \underline{\mu}')$ une autre homotopie $(I \times E', I \times A') \to (E, A)$ qui prolonge (f, f') au-dessus de $\underline{k}$ et $M_{\mathfrak{J}}$ l'homotopie construite à partir de $(\underline{\mu}, \underline{\mu}')$ comme $U_{\mathfrak{J}}$ à partir de $(\underline{h}, \underline{h}')$. Il existe d'après 2. 5 une application $H' : I \times I \times A' \to A$ telle que pour $y \in A'$, α, $\beta \in I$,

$$\begin{aligned} H'(\alpha, 0, y) &= \underline{h}'(\alpha, y) \\ H'(\alpha, 1, y) &= \underline{\mu}'(\alpha, y) \\ H'(e, \beta, y) &= f'(y) \\ \underline{p}H'(\alpha, \beta, y) &= \underline{k}(\alpha, \underline{p}'y) \end{aligned}$$

Il existe donc, d'après 2. 5 une application $H : I \times I \times E' \to E$ qui prolonge H', et telle que, pour α, $\beta \in I$, $x \in E'$

$$\begin{aligned} H(\alpha, 0, x) &= \underline{h}(\alpha, x), \\ H(\alpha, 1, x) &= \underline{\mu}(\alpha, x), \\ H(e, \beta, x) &= f(x), \\ \underline{p}H(\alpha, \beta, x) &= \underline{k}(\alpha, p'x). \end{aligned}$$

En utilisant le couple (H, H') on démontre comme dans 12. 2 que si x est une chaîne de filtration p, telle que dx soit de filtration $p - 1$, $x \in L_{*\mathfrak{J}}(\pi', \varpi')$, alors $(M_{\mathfrak{J}} - U_{\mathfrak{J}})x$ est un bord modulo les éléments de filtration p. On a donc démontré :

Proposition. — *Soit G un système local constant. Avec les natotions ci-dessus, $(\underline{h}, \underline{h}')$ induit une application*

$$h^1 : E^1_{p,q}L'_{*\mathfrak{J}}(\pi', \varpi') \to E^1_{p+1,q}L'_{*\mathfrak{J}}(\pi, \varpi)$$
$$(\text{resp. } h_1 : E_1^{p,q}L^*_{\mathfrak{J}}(\pi, \varpi) \to E_1^{p-1,q}L^*_{\mathfrak{J}}(\pi', \varpi').$$

telle que $\quad d^1h^1 + h^1d^1 = E^1L'_{*\mathcal{J}}(\Phi_1) - E^1L'_{*\mathcal{J}}(\Phi_0)$
$\quad$ (resp. $d_1h_1 + h_1d_1 = E_1L^*_{\mathcal{J}}(\Phi_1) - E_1L^*_{\mathcal{J}}(\Phi_0)$).

De plus, h_1 (resp h^1) *est indépendante de l'homotopie* ($\underline{h}$, $\underline{h}'$) *choisie au-dessus de k et prolongeant* (f, f').

12. 4. *Le cas où la base est* $\Delta[0]$.

Si π est un fibré dont la base est $\Delta[0]$, $\pi \in \mathcal{F}\mathfrak{M}$, et $\psi(1_\pi) = 1_{C_*(\pi)}$ est la seule application non nulle (cf. 11. 5, diagramme (1)).

Donc $\quad F_\varepsilon L_*(\pi) = F_0L_*(\pi), \qquad L'_*(\pi) = L_*(\pi) \otimes G(\pi),$
$\quad L^*(\pi) = \mathrm{Hom}^*(L_*(\pi), G(\pi)).$

On en déduit que

(i) $E^r_{p,q}L_*(\pi) = E^r_{p,q}L'_*(\pi) = E_r^{p,q}L^*(\pi) = 0$ pour $p > 0$ et $r \geqslant 0$.

(ii) $\quad E^r_{0,q}L_*(\pi) = H_qL_*(\pi)$, $E^r_{0,q}L'_*(\pi) = H_qL'_*(\pi)$,
$\quad E_r^{0,q}L^*(\pi) = H^qL^*(\pi) \quad$ pour $\quad r \geqslant 1$.

Soit (π, ϖ) un couple de fibrés dans $\mathcal{F}_{\mathcal{J}}$ dont la base est $\Delta[0]$. (π, ϖ) $\in (\mathcal{F}\mathfrak{M})_{\mathcal{J}}$ et $\psi(1_{(\pi,\varpi)}) = 1_{L_*\mathcal{J}(\pi,\varpi)}$ est la seule application non nulle. On en déduit que (i) et (ii) sont encore vérifiés si on remplace L_* par $L_{\mathcal{J}*}$.

Comme les modèles de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}_{\mathfrak{J}}$ sont les mêmes, ainsi que les modèles de $\mathcal{F}_{\mathcal{J}}$ et $(\mathcal{F}_{\mathfrak{J}})_{\mathcal{J}'}$, on peut aussi remplacer L_* dans (i) et (ii) par $L_{*\mathcal{J}}$ et $(L_{*\mathfrak{J}})_{\mathcal{J}'}$.

12. 5. On se propose de déterminer complètement la suite spectrale sur les modèles. Il suffit donc de considérer les catégories $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}_{\mathcal{J}}$.

Soit O_n le zéro-ième sommet de $\Delta[n]$, F_0 la fibre du fibre $\pi = (E, p, B)$ au dessus de O_n, i le morphisme de $\mathcal{F}\mathfrak{M}$:

$$i : \quad \begin{array}{ccc} F_0 & \xrightarrow{\text{inj}} & E \\ {\scriptstyle p|F_0}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ O_n & \xrightarrow[\text{inj}]{} & \Delta[n] \end{array} \quad : \mu \to \pi$$

Proposition. — $E^2L'_*(i)$ *et* $E_2L^*(i)$ *sont des isomorphismes de plus, il existe des homomorphismes* $h^1 : E^1L'_*(\pi) \to E^1L'_*(\pi)$ et $\eta : E^2_0L'_*(\pi) \to E^1_0L'_*(\pi)$ (resp. $h_1 : E_1L^*(\pi) \to E_1L^*(\pi)$ et $\eta : E^0_1L^*(\pi) \to E^0_2L^*(\pi)$) tels que

(i): $h^1 : E^1_{p,q}L'_*(\pi) \to E^1_{p+1,q}L'_*(\pi)$ (resp. $h_1 : E_1^{p,q}L^*(\pi) \to E_1^{p-1,q}L^*(\pi)$).

(ii) : $d^1h^1 + h^1d^1 = \mathrm{id}$ *sur* $E^1_pL'_*(\pi)$ pour $p > 0$ (resp. $d_1h_1 + h_1d_1 = \mathrm{id}$ *sur* $E_1^pL^*(\pi)$, $p > 0$).

(iii) : $d^1h^1 = \mathrm{id} - \eta\varepsilon$ *sur* $E^1_0L'_*(\pi)$ (resp $h_1d_1 = \mathrm{id} - \varepsilon\eta$ *sur* $E_1^0L^*(\pi)$) *où* ε *est l'application canonique*

$$E^1_{0,q}L'_*(\pi) \to H_0E^1_{0,q}L'_*(\pi) = E^2_{0,q}L'_*(\pi)$$
$$(\text{resp } H^0E_1^{0,q}L^*(\pi) = E_2^{0,q}L^*(\pi) \to E_1^{0,q}L^*(\pi).$$

Démonstration.

1er *cas : G est un système local constant de module* Λ. — On applique la proposition 12. 2. à $\Phi_1 : \pi \to \pi$ où Φ_1 est l'application identique, avec $\underline{k} = \omega_n$ (cf. 1. 4). On peut alors relever $\underline{k}$ en une homotopie $\underline{h}$ stationnaire sur F_0 puisque ω_n est stationnaire sur O_n. De plus $\underline{h} \circ \varepsilon_0$ applique E dans F_0 puisque $\omega_n \circ \varepsilon_0 : \Delta[n] \to O_n$. Φ_0 se factorise alors en $i \circ j$, où j est le morphisme.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\underline{h}_0 \circ \varepsilon_0"] \arrow[d, "j\,:\,p"'] & F_0 \arrow[d, "p|F_0\,:\,\pi \to \mu"] \\ \Delta[n] \arrow[r, "\omega_n \circ \varepsilon_0"] & O_n \end{tikzcd}$$

et $j \circ i =$ identité.

D'après 12. 2, il existe h^1 (resp h_1) vérifiant (i) et de plus $E^2L'_*(\Phi_1) = E^2L'_*(\Phi_0)$. Comme $\Phi_1 = \mathrm{id}$ et $\Phi_0 = i \circ j$, on a :

$$E^2L'_*(i) \circ E^2L'_*(j) = \mathrm{id}$$

mais comme $j \circ i =$ identité, on a aussi

$$E^2L'_*(j) \circ E^2L'_*(i) = \mathrm{id}.$$

Donc $E^2L'_*(i)$ et $E^2L'_*(j)$ sont des isomorphismes. On démontre de même que $E_2L^*(i)$ et $E_2L^*(j)$ sont des isomorphismes.

Mais, d'après 12. 4, pour $p > 0$, $E^1_{p,q}L'_*(\mu)$ et $E_1^{p,q}L^*(\mu)$ sont nuls.

Donc $E_1^{p,q}L'_*(j)$, $E_1^{p,q}L^*(j)$ sont nuls pour $p > 0$ et finalement $E^1_{p,q}L'(\Phi_0)$ et $E_1^{p,q}L^*(\Phi_0)$ sont nuls. 12. 2 montre alors que h^1 et h_1 vérifient (ii).

Pour $p = 0$, on a $d^1h^1 = \mathrm{id} - E^1_{0,q}L'_*(\mathrm{i}) \circ E^1_{0,q}L'_*(\mathrm{j})$. Soit $x = d^1y$, $y \in E^1_{1,q}L'_*(\pi)$. Comme $E^1_{0,q}L'_*(j)x = d^1E^1_{1,q}L'_*(j)\,y = 0$, on voit que $E^1_{0,q}L'_*\,(\mathrm{i}) \circ E^1_{0,q}L'_*\,(\mathrm{j})$ est nul sur les d^1-bords. On définit donc une application η vérifiant (iii) en posant $\eta\varepsilon x = E^1_{0,q}L'_*(\mathrm{i}) \circ E^1_{0,q}L'_*(j)x$ pour $x \in E^1_{0,q}L'_*(\pi)$ même démonstration pour L^*.

2e *Cas : G est un système local quelconque.* — Sur les modèles, L'_* est naturellement équivalent à $L_* \circ G$ (cf. 7. 6_*) et par conséquent, $L'_*(\pi)$ est naturellement isomorphe à $L_*(\pi) \otimes G(\pi)$, $L'_*(\mu)$ naturellement isomorphe à $L_*(\mu) \otimes G(\mu)$, et à des identifications canoniques près, $L'_*(i)$ est égale à

$$L_*(i) \otimes G(i) = (L_*(i) \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes G(i)).$$

Désignons par $G(\pi)$ (resp $G(\mu)$) le système local constant de module $G(\pi)$ (resp, $G(\mu)$). $L_*(i) \otimes \mathrm{id} = (L_* \ast G(\pi)\ (i))$ et $\mathrm{id} \otimes G\ (i)$ sont des morphismes de $d\mathcal{F}_{*Z}$. Par conséquent :

$$E^2 L'_*(i) = E^2(L_* \ast G(\pi))\ (i) \circ E^2(\mathrm{id} \ast G(i)).$$

Le premier facteur du second membre est un isomorphisme d'après ce qui a été vu dans le cas G constant, le second facteur est un isomorphisme car $i \in S(\pi)$ et que par conséquent $G(i)$ est un isomorphisme. Donc $E^2 L'_*(i)$ est un isomorphisme.

Comme $L'_*(\pi)$ est naturellement isomorphe à $L_*(\pi) \otimes G(\pi)$, on peut pour calculer la suite spectrale du module gradué filtré $L'_*(\pi)$ utiliser le module gradué filtré $L_*(\pi) \otimes G(\pi)$ c'est-à-dire supposer G constant : d'où (ii) et (iii). Même démonstration pour $L^*(\pi)$.

12. 6. Proposition. — *On peut dans la proposition* 12. 5, *remplacer* L_* *par* $L_{*\mathcal{J}}$.

Démonstration. — On utilise 12. 3 au lieu de 12. 2.

12. 7. Théorème. — *Les foncteurs* $E^1_{*q}L^1_*$, $E^1_{*q}L'_{*\mathcal{J}}$, $E^1_{*q}L'_{*\mathcal{J}}$, $E^1_{*q}(L'_{*\mathcal{J}})_{\mathcal{J}'}$, $E^{*,q}_1 L^*$, $E^{*,q}_1 L_{\mathcal{J}}$, $E^{*,q}_1 L^*$, $E^{*,q}_1 (L^*_{\mathcal{J}})_{\mathcal{J}'}$ *sont acycliques sur les modèles.*

Démonstration. — Il suffit de considérer les foncteurs définis sur $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}_{\mathcal{J}}$.

D'après 12. 5 et 12. 6 (ii) et (iii), il suffit de démontrer que h^1 (resp h_1) et η sont naturels pour les morphismes de $(\mathcal{F}\mathfrak{M})^\alpha$, c'est-à-dire pour les morphismes du type :

$$\Phi : \begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{\varphi} & \beta(f)^*E \\ {\scriptstyle p'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ \Delta[n'] & \xrightarrow{\alpha(f)} & \Delta[n] \end{array} : \pi' \to \pi$$

où $f\colon \Delta[n'] \to B$, $E \to B$ est un fibré, et où la flèche horizontale supérieure est déterminée par 11. 1. Soient h'^1 et h^1 les homotopies définies par 12. 5 pour les fibrés π' et π, $\underline{h}'$ et $\underline{h}$ les homotopies au-dessus de $\omega_{n'}$ et ω_n dont ils proviennent.

$h \circ (\mathrm{id} \times \varphi)$ et $\varphi \circ \underline{h}'$ sont des homotopies au-dessus d'une même homotopie $I \times \Delta[n'] \to \Delta[n]$ puisque $\omega_n \circ (\mathrm{id} \times \alpha(f)) = \alpha(f) \circ \omega_{n'}$ (cf. 1. 4), et elles coïncident sur $1 \times E'$. Or la première induit $h^1 \circ E^1L'_*(\Phi)$ et la deuxième $E^1L'_*(\Phi)h'^1$.

Si G est un système local constant, le théorème résulte de 12. 2 qui affirme que $h^1 \circ E^1L'_*(\Phi) = E^1L'_*(\Phi)h'^1$. Si G n'est pas constant, on refait un raisonnement analogue à celui de 12. 5 *deuxième cas:* on suppose les coefficients locaux constants et on note h''^1 l'homotopie obtenue à partir de $\underline{h}'$ en utilisant le système local constant $G(\pi)$ au lieu de $G(\pi')$; on a $E^1(\mathrm{id} \otimes G(\Phi)) \circ h'^1 = h''^1 \circ E^1(\mathrm{id} \otimes G(\Phi))$.

Comme d'après ce qui précède,

$$h^1 \circ E^1(L_* \divideontimes G(\pi)\,(\Phi) = E^1(L_* \divideontimes G(\pi))\,(\Phi) \circ h''^1$$

on en déduit de nouveau l'égalité cherchée en multipliant les deux membres par $E^1(\mathrm{id} \otimes G(\Phi))$.

Même démonstration pour h_1, même démonstration pour la catégorie $(\mathcal{FM})^{\alpha}_{\mathrm{j}}$.

La naturalité de η résulte de la naturalité de h^1 (resp h_1) de la naturalité de ε, et du fait que ε est surjectif (resp injectif).

12. 8. Théorème. — *Les foncteurs du théorème* 12. 7 *sont augmentables.*

Démonstration. — Soit $\Phi : \pi' \to \pi$ un morphisme non dégénéré de $\mathcal{FM}$, c'est-à-dire un diagramme commutatif

$$(1) \qquad \Phi : \begin{array}{ccc} u^*E & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Delta[p] & \xrightarrow[u]{} & \Delta[n] \end{array} \quad \pi' \to \pi$$

où u est non dégénéré. Soit i le morphisme

$$\begin{array}{ccc} F_{O_p} & \xrightarrow{\mathrm{inj}} & u^*(E) \\ \downarrow & & \downarrow \\ O_p & \xrightarrow[\mathrm{inj}]{} & \Delta[p] \end{array}$$

où F_{O_p} désigne la fibre de π' au-dessus de O_p. Comine F_{O_p} est canoniquement isomorphe à $F_{u(O_p)}$ la fibre de E au-dessus de $u(O_p)$, et que $E_0^2 L'_*(i)$ (resp $E_2^0 L^*(i)$) est un isomorphisme (cf. 12 5), il suffit de démontrer que $E_0^2 L'_*(\Phi))$ (resp $E_2^0 L^*\Phi$) est un isomorphisme quand $p = 0$, ce que l'on suppose désormais. Si $u(\delta^0) = O_n$, Φ n'est autre que l'injection de la fibre F_{O_n} dans le fibré π, et le théorème résulte alors de 12. 5. Si ce n'est pas le cas, soit ρ l'unique 1-simplexe de $\Delta[n]$ tel que $d_1\rho = O_n$, $d_0\rho = u(\delta^0)$. ρ est non dégénéré. Si dans le diagramme (1) on fait $u = \tilde{\rho}$, $p = 1$, $E_0^2 L'_*(\Phi)$ et $E_2^0 L^*(\Phi)$ sont des isomorphismes puisque $\tilde{\rho}(O_1) = O_n$.

Comme $u : \Delta[0] \to \Delta[n]$ se factorise en $\tilde{\rho} \circ \widetilde{d_0\delta^1}$ et que $u^*E = \widetilde{d_0\delta^1}^*(\tilde{\rho}^*E)$ il suffit de démontrer le théorème pour $n = 1$ et $u = \widetilde{d_0\delta^1}$. La démonstration est alors entièrement analogue à celle de 12. 5 : on applique la proposition 12. 2 en prenant pour homotopie $I \times \Delta[1] \to \Delta[1]$ ω'_1 au lieu de ω_1 (cf. 1. 4).

Même démonstration pour $(\mathcal{FM})_{\mathfrak{J}}$.

13. — La suite spectrale des fibres.

13. 1. Les huit foncteurs du théorème 12. 7. sont représentables acycliques sur les modèles, augmentables. D'autre part les quatre foncteurs K_*, $K_{*\mathfrak{I}}$, $K'_{*\mathfrak{J}}$, $(K_{*\mathfrak{I}})'_{\mathfrak{J}'}$ sont singuliers (cf. 11. 4, 8. 2, 8. 6). On peut donc appliquer les théorèmes 7. 10* et 7. 10_*. Puisque $H_*E^1 = E^2$, $H^*E_1 = E_2$, on peut énoncer :

THÉORÈME. — *Désignons par* $\mathfrak{G}^q$, $(\mathfrak{G}_{\mathfrak{I}})_q$, $(\mathfrak{G}_{\mathfrak{J}})^q$, $(\mathfrak{G}_{\mathfrak{I}})_{\mathfrak{J}',}{}^q$, $\mathfrak{G}^q$, $(\mathfrak{G}_{\mathfrak{J}})^q$, $(\mathfrak{G}_{\mathfrak{J}})^q$ $(\mathfrak{G}_{\mathfrak{I}})_{\mathfrak{J}'}{}^q$ *les huit systèmes locaux donnés par le théorème* 12. 8.

Les foncteurs :

$$\begin{array}{llllll}
E^2_{p,q}L'_* & \text{et} & H_p(K_* \ast \mathfrak{G}_q), & E_2^{p,q}L^* & \text{et} & H^p\, \mathit{Hom}^*\,(K_*, \mathfrak{G}^q) \\
E^2_{p,q}L'_{*\mathfrak{I}} & \text{et} & H_p(K_{*\mathfrak{I}} \ast (\mathfrak{G}_{\mathfrak{I}})_q), & E_2^{p,q}L^*_{\mathfrak{I}} & \text{et} & H^p\, \mathit{Hom}\,(K_{*\mathfrak{I}}, (\mathfrak{G}_{\mathfrak{I}})^q) \\
E^2_{p,q}L'_{*\mathfrak{I}} & \text{et} & H_p(K'_{*\mathfrak{J}} \ast (\mathfrak{G}_{\mathfrak{J}})_q), & E_2^{p,q}L^*_{\mathfrak{J}} & \text{et} & H^p\, \mathit{Hom}\,(K'_{\mathfrak{J}}, (\mathfrak{G}_{\mathfrak{J}})^q)
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
E^2_{p,q}(L'_{*\mathfrak{I}})_{\mathfrak{J}}, & \text{et} & H_p((K_{*\mathfrak{I}})'_{\mathfrak{J}'} \ast (\underline{\underline{G}}_{\mathfrak{I}})_{\mathfrak{J}'q}), \\
E_2^{p,q}(L^*_{\mathfrak{I}})_{\mathfrak{J}'} & \text{et} & H^p\, \mathit{Hom}\,((K_{*\mathfrak{I}})'_{\mathfrak{J}'}, (\underline{\underline{G}}_{\mathfrak{I}})^{q,})
\end{array}$$

sont naturellement équivalents.

13. 2. *a*. Soit $\mathfrak{G}$ un système local quelconque sur $\mathcal{F}\mathfrak{M}$. Soit $\pi = (\mathrm{E}, \underline{p}, \mathrm{B}) \in \mathcal{F}$.

Si $(\Delta[n], u) \in \mathcal{S}_{\mathrm{B}}$ (cf. 5. 6) on considère le fibré de $\mathcal{F}\mathfrak{M}$ induit par π et $u : \Delta[n] \to \mathrm{B}$, soit $u^*\pi$. On pose alors $\mathfrak{G}(\Delta[n], u) = \mathfrak{G}(u^*\pi)$. Si (f, u, v) est un morphisme de $\mathcal{S}_{\mathrm{B}}$, on pose $\mathfrak{G}(f, u, v) = \mathfrak{G}(\Phi)$, où Φ est le morphisme $u^*\pi \to v^*\pi$ associé à la factorisation $u = v \circ f$ et au morphisme naturel $u^*\pi \to \pi$ (cf. 11. 1).

Au couple formé par un système local quelconque sur $\mathcal{F}\mathfrak{M}$ et par un fibré π, on associe donc un système local sur $\mathcal{S}_{\mathrm{B}}$. Or si $\mathfrak{U}$ est un morphisme non dégénéré de $\mathrm{S}(\pi)$, $\mathfrak{U}$ est de la forme

$$\begin{array}{ccc} u^*\mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \underline{p}} \\ \Delta[n] & \xrightarrow[u]{} & \mathrm{B} \end{array}$$

avec $u \in \mathrm{S(B)}$. On en déduit ceci :

$$\mathrm{K}_* \divideontimes \mathfrak{G}_q\,(\pi) = \mathrm{C}_{*\mathrm{B}} \divideontimes \mathfrak{G}_q\,(\mathrm{B}),$$
$$Hom^*\,(\mathrm{K}_*, \mathfrak{G}^q)\,(\pi) = Hom^*\,(\mathrm{C}_{*\mathrm{B}}, \mathfrak{G}^q)\,(\mathrm{B}).$$

De même si (π, π') est un couple tel que $\mu : \pi' \to \pi \in \mathfrak{J}$, où π' est le fibré $(\underline{p}^{-1}\mathrm{B}', \underline{p}|\underline{p}^{-1}\mathrm{B}', \mathrm{B}')$, $\mathrm{B}' \subset \mathrm{B})$ on a $\mathrm{K}_{*\mathfrak{J}} \divideontimes (\mathfrak{G}_{\mathfrak{J}})_q$ $(\pi, \pi') = (\mathrm{C}_{*\mathrm{B}})_{\mathfrak{J}} \divideontimes (\mathfrak{G}_{\mathfrak{J}})_q$ $(\mathrm{B}, \mathrm{B}')$ et Hom^* $(\mathrm{K}_{*\mathfrak{J}}, (\mathfrak{G}_{\mathfrak{J}})^q)$ $(\pi, \pi') = Hom^*\,((\mathrm{C}_{*\mathrm{B}})_{\mathfrak{J}}, (\mathfrak{G}_{\mathfrak{J}})^q)$ $(\mathrm{B}, \mathrm{B}')$. Appliquons 10. 2 : les foncteurs G sont naturellement équivalents aux foncteurs $\mathfrak{G}'$ que l'on va maintenant expliciter, et 10. 2. donne explicitement la structure des groupes différentiels gradués dont la cohomologie (ou l'homologie) est naturellement isomorphe au terme E^2 (ou E_2) de la suite spectrale du fibré.

b. Introduisons les notations classiques suivantes :

Si X est un ensemble simplicial, et G un système local de coefficient classique défini sur X, on écrit $\mathrm{H}_*(\mathrm{X}, G)$, $\mathrm{H}^*(\mathrm{X}, G)$ au lieu de $\mathrm{H}_*(\mathrm{C}_{*\mathrm{X}} \divideontimes G')$ (X) et $\mathrm{H}^*\, Hom^*\,(\mathrm{C}_{*\mathrm{X}}, G')$ (X).

Si $\mathrm{X}' \subset \mathrm{X}$, on écrit $\mathrm{H}_*(\mathrm{X}, \mathrm{X}'; G)$, $\mathrm{H}^*(\mathrm{X}, \mathrm{X}'; G)$ au lieu de $\mathrm{H}((\mathrm{C}_{*\mathrm{X}})_{\mathfrak{J}} \divideontimes G'_{\mathfrak{J}})\,(\mathrm{X}, \mathrm{X}')$ et $\mathrm{H}^*\, Hom^*((\mathrm{C}_{*\mathrm{X}})_{\mathfrak{J}}, G'_{\mathfrak{J}})$ $(\mathrm{X}, \mathrm{X}')$.

c. Soient $\pi = (\mathrm{E}, p, \mathrm{B})$ un fibré, $b \in \mathrm{B}_0$ et F_b la fibre au-dessus de b. Alors le système local classique associé à $\mathfrak{G}_q$ ou $\mathfrak{G}'_q$ (cf. 10. 1) associe à chaque $b \in \mathrm{B}_0$, le groupe

$$\mathrm{G}_b = \mathrm{E}^2_{0,\ q}\mathrm{L}'_*(\tilde{b}^*\pi)$$

or $L'_*(\tilde{b}^*\pi) = L_*(\tilde{b}^*\pi) \otimes G(\tilde{b}\pi) = C_*(F_b) \otimes G(\tilde{b}^*\pi)$ (cf. 12. 4) donc

$$G_b = H_q(F_b,\ G(\tilde{b}^*\pi))$$

de même en cohomologie, $G_b = H^q(F_b,\ G(\tilde{b}^*\pi))$.

Si $\rho \in B_1$ l'isomorphisme $G_{d_0\rho} \to G_{d_1\rho}$ est fourni par le diagramme

$$\begin{tikzcd}
F_0 \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "i_0"] & E \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "i_1"] & F \arrow[l] \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \Delta[1] & 1 \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

où i_0 est le morphisme défini dans 12. 5 et i_1 le morphisme défini dans le dernier paragraphe de 12. 8. Alors

$$G(\rho) = (E^2L'_*(i_0))^{-1} \circ E^2L'_*(i_1) \quad \text{en homologie,}$$
$$G(\rho) = (E_2L^*(i_0)) \circ (E_2L^*(i_1))^{-1} \quad \text{en cohomologie.}$$

On notera $H_q(F,\ G)$ et $H^q(F,\ G)$ les deux systèmes locaux précédents.

d. Avec les notations de 11. 5, on voit que si l'on désigne par μ_e le modèle représenté par la partie gauche du diagramme (1) où $\varphi = \tilde{e}$, $M = \Delta[n]$, $N = \Delta[\rho]$, alors $\mu_e = \mu_{e'}$, si $\Sigma e = \Sigma e'$.

De plus un calcul simple montre que $(\underline{p}\tilde{e})\, O_p = \underline{p}\tilde{e}\,(O_n)$. Autrement dit, si l'on considère le système local G comme un système local sur $\mathcal{S}_B$ conformément à 13. 2 *a*, et ce dernier comme un système local classique sur B, $G(\mu_e)$ n'est rien d'autre que le groupe associé au point $d_1 \ldots d_n e$ par le système local classique sur E induit par le système classique sur B et l'application $\underline{p} : E \to B$.

En désignant encore par G ce système local, et compte-tenu des formules :

$$\sum_\alpha (X_\alpha \otimes G) \approx \Big(\sum_\alpha X_\alpha\Big) \otimes G$$
$$\prod_\alpha \operatorname{Hom}(X_\alpha,\ G)\ \operatorname{Hom}\Big(\sum_\alpha X_\alpha,\ G\Big)$$

on voit que :

$L'_*(\pi)$ est le groupe différentiel gradué des chaînes normalisées de E à coefficients dans G.

$L^*(\pi)$ est le groupe différentiel gradué des cochaînes normalisées de E à coefficients dans G.

13. 3. Désignons par G un système local sur $\mathfrak{F}\mathfrak{M}$, et par le même symbole G le système local classique induit par G sur B, sur E, sur F.

Désignons d'autre part par (E′, $\underline{p}'$, B′) un sous fibré de π au sens $\mathfrak{I}$. On peut alors énoncer.

Théorème. — (i) *Homologie.*

Il existe une suite spectrale dont le terme $E^2_{p,q}$ *est naturellement isomorphe à* $H_p(B, H_q(F, G)$ *et dont l'aboutissement est* $H_*(E, G)$.

Il existe une suite spectrale dont le terme $E^2_{p,q}$ *est naturellement isomorphe à* $H_p(B, B'; H^q(F, G))$ *et dont l'aboutissement est* $H_*(E, E'; G)$.

(ii) *Cohomologie.*

Il existe une suite spectrale dont le terme $E_2^{p,q}$ *est naturellement isomorphe à* $H^p(B, H^q(F, G))$ *et dont l'aboutissement est* $H^*(E, G)$

Il existe une suite spectrale dont le terme $E_2^{p,q}$ *est naturellement isomorphe à* $H^p(B, B'; H^q(F, G))$ *et dont l'aboutissement est* $H^*(E, E'; G)$.

Ces suites spectrales sont des foncteurs sur la catégorie $\mathfrak{F}$ (ou $\mathfrak{F}_{\mathfrak{I}}$).

13. 4. On peut bien entendu développer les considérations de 13. 2. pour la catégorie $\mathfrak{F}_{\mathfrak{I}}$, et la catégorie $(\mathfrak{F}_{\mathfrak{I}})_{\mathfrak{J}}$. Avec des notations évidentes, en appelant (E′, p', B′) un sous fibré de π au sens $\mathfrak{I}$. (E″, p'', B) un sous fibré de π au sens $\mathfrak{J}$, on peut énoncer :

Théorème. — (i) *Homologie.*

Il existe une suite spectrale dont le terme $E^2_{p,q}$ *est naturellement isomorphe à* $H_p(B, B'; H_q(F, F''; G))$ *et dont l'aboutissement est* $H_*(E' \cup E''; G)$.

(ii) *Cohomologie.*

Il existe une suite spectrale dont le terme $E_2^{p,q}$ *est naturellement isomorphe à* $H^p(B, B'; H^q(F, F''; G))$ *et dont l'aboutissement est* $H^*(E' \cup E''; G)$.

Ces suites spectrales sont des foncteurs sur $(\mathfrak{F}_{\mathfrak{I}})_{\mathfrak{J}}$.

REMARQUE. — Le théorème précédent n'est pas le théorème le plus général que l'on peut déduire, dans le cas de la catégorie $(\mathcal{F}_{\mathfrak{J}})_{\mathfrak{J}}'$, du théorème 13. 1. En effet l'élément le plus général de $(\mathcal{F}_{\mathfrak{J}})_{\mathfrak{J}}'$ est un système de 4 fibrés : (π, π'), (π'', π''') où $\pi' \to \pi \in \mathfrak{J}$, $\pi''' \to \pi'' \in \mathfrak{J}$ et $\pi'' \to \pi \in \mathfrak{J}$. Le cas correspond à $\pi''' = \emptyset$.

13. 5. Si (**E**, p, **B**) est un fibré au sens de Serre, et si S est le foncteur qui a un espace topologique **X** fait correspondre l'ensemble simplicial S(**X**) des simplexes singuliers de **X**, à un morphisme f : **X** = **Y** l'application simpliciale S(f) = S(**X**) → S(**Y**), S(**E**), S(p), S(**B**) est un fibré. Les théorèmes 12. 2 et 12. 4 contiennent donc comme cas particuliers les théorèmes sur la suite spectrale d'un fibré au sens de Serre. Dans sa thèse [17], J. P. Serre énonce des théorèmes de suite spectrale (pour l'homologie et la cohomologie *absolue*) en prenant des simplexes *cubiques*. V.K.A.M. Gugenheim et J. C. Moore [12], ont démontré, dans le cas ou G est constant et dans le cas de l'homologie absolue, que la suite spectrale de J. S. Serre et la suite spectrale obtenue avec les simplexes singuliers sont naturellement isomorphes. [19] a démontré qu'il existait une suite spectrale analogue à celle du théorème 13. 4 en prenant des simplexes cubiques. Le raisonnement de [12] montre que cette suite spectrale est naturellement isomorphe à celle de 13. 4, après application du foncteur S.

13. 6. On a donné des théorèmes de suite spectrale pour un système local G quelconque. Les seuls cas utilisés dans les applications sont les suivants :

(i) G est constant.

(ii) G est un système local sur $\mathfrak{J}_B$. Il résulte de 12. 2 que la connaissance d'un tel système local est suffisante pour calculer la suite spectrale d'un fibré. Dans ce cas, la suite spectrale n'est plus un foncteur défini sur $\mathcal{F}$, mais seulement sur la catégorie $\mathcal{F}_B$ dont les objets sont des couples (π', f) où $\pi' = (E', p', B')$ est un fibré et f: $B' \to B \in \mathfrak{J}$, et les morphismes : $(\pi', f) \to (\pi'', g)$ des triples (Φ, f, g) où $\Phi : \pi' \to \pi'' \in \mathcal{F}$, est tel que $g \circ \varphi = f$ où φ est l'application induite par Φ sur les bases de π' et π'' (resp. $(\mathcal{F}_B)_{\mathfrak{J}}$ resp $((\mathcal{F}_B)_{\mathfrak{J}})_{\mathfrak{J}'}$).

14. — Structures multiplicatives.

14. 1. Soient K^* et K'^* deux foncteurs contravariants : $\mathfrak{A} \to d\mathcal{G}^*_\Lambda$ on définit un nouveau foncteur contravariant $\mathfrak{A} \to d\mathcal{G}^*_\Lambda$ en posant :

$$(K \otimes_\Lambda K')^n(A) = \sum_{p+q=n} K^p(A) \otimes_\Lambda K'^q(A)$$
$$(K \otimes_\Lambda K')^n(f) = \sum_{p+q=n} K^p(f) \otimes_\Lambda K'^q(f)$$

pour $A \in \mathfrak{A}$, $f : A \to B$.

Lemme. — *Si* K *et* K′ *sont acycliques sur les modèles,* $(K \otimes_\Lambda K')^*$ *est acyclique sur les modèles.*

Démonstration. — (Cf. (9. 3)). Soient U^*_K, η_K, $U^{*\prime}_K$, η', les transformations naturelles définissant l'acyclicité de K^* et K'^* sur les modèles (cf. (5. 4) a^*). On mettra un indice $\otimes$ à toutes les transformations naturelles définies à partir de $(K \otimes K')^*$.

On pose

$$U^n_\otimes(x \otimes y) = (U^p_K x) \otimes y + (-1)^p \varepsilon_K \eta_K x \otimes U^q_{K'} y$$

pour $x \in K^p(A)$, $y \in K'(A)$, $\eta_K x$ (resp $\eta_{K'}\, y$) étant égal à 0 si p (resp q) est $\neq 0$.

Alors

$$d_\otimes U^n_\otimes + U^{n+1}_\otimes d_\otimes = \text{id.} \qquad \text{pour} \qquad n > 0.$$

et
$$U^1 d_\otimes = \text{id} - \varepsilon_K \eta_K \otimes \varepsilon_{K'} \eta_{K'}.$$

On remarque que si $x \in K^0(A)$, $y \in K'^0(A)$, $\varepsilon_K \eta_K x \otimes \varepsilon_{K'} \eta_{K'} y$ est un cocycle de $(K \otimes_\Lambda K')^0$. On pose alors

$$\eta_\otimes(x \otimes y) = \overline{(\varepsilon_K \eta_K x \otimes \varepsilon_{K'} \eta_{K'} y)}$$

(ou la barre désigne la classe de cohomologie) et on a

$$U^1_\otimes d_\otimes = \text{id} - \varepsilon_\otimes \eta_\otimes.$$

Comme il est bien clair que $U^*_\otimes$ et $\eta_\otimes$ sont des transformations naturelles, le lemme est démontré.

Corollaire. — $H^0(K \otimes_\Lambda K') \approx H^0 K^* \otimes_\Lambda H^0 K'^*$ *sur les modèles.*

En effet, l'isomorphisme est donné par $(\eta_{K'} \otimes \eta_{K'}) \circ \varepsilon_\otimes$ de la gauche vers la droite, et par $\eta_{\otimes} \circ (\varepsilon_K \otimes \varepsilon_{K'})$ de la droite vers la gauche.

14. 2. Soient K''^* un foncteur contravariant $\mathfrak{A} \to d\mathcal{G}''_\Lambda$, et Φ : $(K \otimes_\Lambda K')^* \to K''^*$ est une transformation naturelle. Notons i^* l'application naturelle

$$H^*(K^*) \otimes_\Lambda H^*(K'^*) \to H^*(K \otimes_\Lambda K')^*.$$

Soient L^*, L'^*, L''^* trois foncteurs contravariants $\mathfrak{A} \to d\mathcal{G}^*_\Lambda$ et $\Psi : (L \otimes_\Lambda L')^* \to L''^*$ une transformation naturelle.

On suppose que

(i) L^*, L'^*, L''^* sont *acycliques sur les modèles.*

(ii) K^*, K'^*, K''^* *sont représentables,*

(iii) Il existe des transformations naturelles T, T'; T'' définies sur $\mathfrak{M}^\alpha$

$$T : H^0L^* \to H^0K^*, \qquad T' : H^0L'^* \to H^0K'^*,$$
$$T'' : H^0L^{*''} \to H^0K^{*''}.$$

(iv) Le diagramme (défini sur $\mathfrak{M}^\alpha$)

$$\begin{array}{ccc}
H^0L \otimes_\Lambda H^0L' & \xrightarrow{T \otimes T'} & H^0K \otimes_\Lambda H^0K' \\
{\scriptstyle (\eta_L \otimes \eta_{L'}) \circ \varepsilon_{\otimes}} \uparrow & & \downarrow {\scriptstyle i^* = H^0 \circ (\varepsilon_K \otimes \varepsilon_{K'})} \\
H^0(L \otimes_\Lambda L')^* & & H^0(K \otimes_\Lambda K')^* \\
{\scriptstyle H^0(\Psi)} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle H^0(\Phi)} \\
H^0(L'') & \xrightarrow{T''} & H^0(K'')
\end{array}$$

est *commutatif.*

D'après (i), (ii), (iii) il existe des applications

$$\mu : L^* \to K^*$$
$$\mu' : L'^* \to K'^*$$
$$\mu'' : L''^* \to K''^*$$

qui induisent T (resp T', resp T'') sur H^0 restreint à $\mathfrak{M}^\alpha$, et qui sont uniques à une homotopie naturelle près (cf 6. 1)

Théorème. — *Si les foncteurs* K^*, K'^*, K''^*, L^*, L'^*, L''^* *vérifient les conditions* (i), (ii), (iii), (iv), *le diagramme*

$$\begin{array}{ccc}
H^*L^* \otimes_\Lambda H^*L'^* & \xrightarrow{H^*(\mu) \otimes H^*(\mu')} & H^*K^* \otimes_\Lambda H^*K'^* \\
{\scriptstyle i^* \circ H^*(\Psi)} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle i^* \circ H^*(\Phi)} \\
H^*(L''^*) & \xrightarrow[H^*(\mu'')]{} & H^*(K''^*)
\end{array}$$

est commutatif.

Démonstration. — Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H^*L^* \otimes_\Lambda H^*L'^* & \xrightarrow{H^*(\mu)\otimes H^*(\mu')} & H^*K^* \otimes_\Lambda H^*K'^* \\ {\scriptstyle i^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i^*} \\ H(L \otimes_\Lambda L')^* & \xrightarrow{H^*(\mu\otimes\mu')} & H(K\otimes_\Lambda K') \end{array}$$

est commutatif. Pour démontrer le théorème, il suffit donc de démontrer que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H^*(L \otimes_\Lambda L')^* & \xrightarrow{H^*(\mu\otimes\mu')} & H(K\otimes_\Lambda K')^* \\ {\scriptstyle H^*(\psi)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle H^*(\Phi)} \\ H^*(L''^*) & \xrightarrow[H(\mu'')]{} & H^*K''^* \end{array}$$

commute. Considérons alors les deux transformations naturelles $\Phi \circ (\mu \otimes \mu')$ et $\mu'' \circ \psi : (L \otimes_\Lambda L')^* \to K''^*$.

Sur les modèles,

$$\begin{aligned} H^0(\Phi \circ (\mu \otimes \mu')) &= H^0(\Phi) \circ H^0(\mu \otimes \mu') = H^0(\Phi) \circ H^0 \circ (\mu \otimes \mu') \circ \varepsilon_\otimes \\ &= H^0(\Phi) \circ H^0 \circ (\varepsilon_K \otimes \varepsilon_{K'}) \circ (T \otimes T') \circ (\eta_L \otimes \eta_{L'}) \circ \varepsilon_\otimes \\ &= T'' H^0(\psi) = H^0(\mu'') \circ H^0(\psi) = H^0(\mu'' \circ \psi) \end{aligned}$$

d'après la définition de μ, μ', μ'' sur $\mathfrak{M}^a$ (cf. 6. 1), et (iv).

Donc $H^0(\Phi \circ (\mu \otimes \mu')) = H^0(\mu'' \circ \psi)$. Comme d'après le lemme, $(L \otimes_\Lambda L')^*$ est acyclique, le théorème 6. 1* montre que $\Phi \circ (\mu \otimes \mu')$ et $\mu'' \circ \psi$ sont naturellement homotopes.

C.Q.F.D.

14. 3. On reprend les notations du § 13.

Le cup-produit $L^* \otimes L^* \to L^*$ est compatible avec les filtrations, et définit par conséquent une structure d'algèbre sur E_r; pour cette algèbre la différentielle d_r est une anti-dérivation pour le *degré total*. En particulier on a une transformation naturelle de $d\mathcal{G}_Z^*$-foncteurs

$$\Psi : E_1^{*,q} \otimes E_1^{*q'} \to E_1^{*'q+q'}$$

où la différentielle du membre de gauche est donnée par

$$d(x \otimes y) = dx \otimes y + (-1)^{p+q}\, x \otimes dy$$

pour $x \in E_1^{p,q}$

on a aussi une transformation naturelle de $\mathcal{G}_Z$-foncteurs définie sur $\mathcal{FM}$:

$$E_2^{0,q}L^* \otimes E_2^{0,q'}L^* \to E_2^{0,q+q'}L^*$$

qui induit par conséquent un cup-produit

$$\Phi : Hom^*(K_*, G^q) \otimes Hom^*(K_*, G^{q'}) \rightarrow Hom^*(K_*, G^{q+q}).$$

Appliquons le théorème 14. 2.

THÉORÈME. — *L'équivalence naturelle entre* $E_2^{p,q}L^*$ *et* H^pHom^* (K, G^q) *est compatible avec les structures multiplicatives, à condition de définir le produit de* $x \in H^p$ Hom^* (K_*, G^q) *par* $y \in H^{p'}$ Hom^* $(K_*, G^{q'})$ *comme étant égal à* $(-1)^{p'q} x \cup y$ *où* $\cup$ *désigne le cup-produit défini par* Φ.

Le signe $(-1)^{p'q}$ provient du fait que si μ^q désigne la transformation naturelle : $Hom^*(K_*, G^q) \rightarrow E_1^{*q}$, $\mu^q \otimes \mu^{q'}$ *n'est pas une transformation naturelle de* $d\mathcal{G}_Z^*$*-foncteurs*. Par contre si on désigne par τ l'application $x \otimes y \rightarrow (-1)^{p'q}\, x \otimes y$ pour $x \in E_1^{p,q}L^*(\pi)$, $y \in E_1^{p',q'}L^*(\pi)$, on voit immédiatement que $\tau\mu^q \otimes \mu^{q'}$ est une transformation naturelle de $d\mathcal{G}_Z^*$-foncteurs. Enfin les conditions (i), (ii), (iii), (iv) sont vérifiées : en particulier (iv) est une évidence : la colonne de gauche est exactement égale à la colonne de droite, T, T′, T″ sont les transformations naturelles identités.

14. 4. Passons au cas relatif, en nous bornant au cas de la catégorie $(\mathcal{F}_\mathcal{J})_{\mathcal{J}'}$; notons par abus de notation, L^* le foncteur $(\mathcal{F}_\mathcal{J})_{\mathcal{J}'} \rightarrow d\mathcal{G}_Z^*$ défini par $L^*((\pi, \pi'), (\pi'', \pi''')) = L^*(\pi)$ et par $L^*(\Phi, \Phi', \Phi'', \Phi''') = L^*(\Phi)$ (π etc... $\in \mathcal{F}$, Φ etc. sont les morphismes de $\mathcal{F}$).

Soit de même Hom^* (K_*, G^q) le foncteur $(\mathcal{F}_\mathcal{J})_{\mathcal{J}'} \rightarrow d\mathcal{G}_Z^*$ le foncteur défini comme L ci-dessus.

Le cup-produit est cette fois-ci un accouplement

$$L^* \otimes (L_\mathcal{J}^*)_{\mathcal{J}'} \rightarrow (L_\mathcal{J}^*)_{\mathcal{J}'}$$

$$\text{(resp. } Hom\,(K^*, G^q) \rightarrow Hom\,((K_{*\mathcal{J}})_{\mathcal{J}'}, (G_\mathcal{J})^q{}_{\mathcal{J}'})$$
$$\rightarrow Hom^*\,((K_{*\mathcal{J}})_{\mathcal{J}'}, (G_\mathcal{J})_{\mathcal{J}'}^{q+q'})).$$

le théorème 14. 2 (compte-tenu du signe $((-1)^{p'q})$ donne encore la structure multiplicative de $A^*(B, B'; H^*(F, F''; G))$ compatible avec son identification au terme E_2 de la suite spectrale : le produit est égal au signe $(-1)^{p'q}$ près au cup-produit.

CHAPITRE IV

L'OBSTRUCTION A LA CONSTRUCTION D'UNE SECTION D'UN FIBRÉ

15. — Le système local de l'homotopie de la fibre.

15. 1. Soit $\pi = (E, \underline{p}, B)$ un fibré, une *section* du fibré est une application $g : B \rightarrow E$ telle que $p \circ g =$ identité. Une section sur le n-squelette B^n, est une application $g : B^n \rightarrow E$ telle que $p \circ g =$ identité. Si g_0 et g_1 sont deux sections : $B \rightarrow E$ (resp $B^n \rightarrow E$) on dit qu'elles sont *homotopes* s'il existe une homotopie $k : I \times B \rightarrow E$ (resp $I \times B^n \rightarrow E$) telle que

$$k \circ \varepsilon_0 = g_0, \qquad k \circ \varepsilon_1 = g_1,$$

et telle que $p \circ k(\alpha, x) = x$ pour $\alpha \in I, x \in B$ (resp $x \in B^n$); si $g_0|B' = g_1|B'$ où $B' \subset B$ (resp $B' \subset B^n$), on demande de plus que k soit stationnaire sur B'.

15. 2. Dans le chapitre III, on a vu que l'homologie et la cohomologie de la fibre déterminait un système local sur B. En perfectionnant légèrement le raisonnement du § 12, on démontrera que les *groupes d'homotopie* de la fibre forment un système local classique sur B.

Soit $(E, \underline{p}, \Delta[1])$ un fibré, et g une section de ce fibré. Désignons par F_0 et F_1 les fibres au-dessus des sommets 0 et 1 par $S\ (g(\delta^1))$ l'ensemble simplicial engendré par $g(\delta^1)$.

a. Soit $\mu : I \times (F_0 \cup S(g\delta^1)) \rightarrow E$ l'application définie par $\mu(\alpha, x) = x\ \ (\alpha \in I,\ x \in F_0)$.

$\mu(\alpha, \varphi g\delta^1) = g\omega_1(\alpha, \varphi\delta^1)$ ($\alpha \in I$, φ opérateur simplicial $\omega_1 :$ $I \times \Delta[1] \rightarrow \Delta[1]$ est l'homotopie de 1. 4).

Il existe une homotopie k qui prolonge μ, telle que $k \circ \varepsilon_1 =$ identité et que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} I \times E & \xrightarrow{k} & E \\ {\scriptstyle \mathrm{id.}\times p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ I \times \Delta[1] & \xrightarrow{\omega_1} & \Delta[1] \end{array}$$

commute (cf. 2. 3).

$k \circ \varepsilon_0$ est une application $E \to F_0$ telle que $g(\delta^1) \to k(s_0 d_1 \delta^1, g\delta^1) = \mu(s_0 d_1 \delta^1, g\delta^1) = g\omega_1(s_0 d_1 \delta^1, \delta^1) = s_0 g_0(0)$.

En particulier,

$$k \circ \varepsilon_0 | F_1 : (F_1, g(1)) \to (F_0, g(0)).$$

Proposition 1. — *Si k et $\varkappa$ sont deux homotopies prolongeant μ et l'identité au-dessous de ω_1, $k \circ \varepsilon_0 | F_1 \sim \varkappa \circ \varepsilon_0 | F_1$ rel $g(1)$.*

Démonstration. — D'après la proposition 2. 5, il existe une homotopie

$$h : I \times E \to E \qquad h : k \circ \varepsilon_0 \sim \varkappa \circ \varepsilon_0 \text{ rel } F_0 \cup S\,(g\delta^1).$$

Donc

$$\begin{aligned} h(\alpha, \varphi g(d_0 \delta^1)) &= h(\alpha, \varphi d_0\, g\delta^1) = k \circ \varepsilon_0(\varphi d_0\, g\delta^1) \\ &= k(\varphi d_1 \delta^1, \varphi d_0 g\delta^1) = \varphi g \omega_1(d_1 \delta^1, d_0 \delta^1) = \varphi g(d_1 \delta^1) = \varphi g(0) \end{aligned}$$

pour $\alpha \in I$, φ opérateur simplicial.

Autrement dit : $h : I \times g\,(1) \to g(0)$ C.Q.F.D.

Corollaire. — *Pour tout*

$$n \geqslant 0,\ \pi_n(k \circ \varepsilon_0 | F_1) : \pi_n(F_1, g(1)) \to (\pi_n F_0, g(0))$$

est un homomorphisme qui ne dépend que de la section g.

b. Soit maintenant $\mu' : I \times (F_1 \cup S(g\delta^1) \to E$ l'application définie comme μ, en remplaçant F_0 par F_1, et ω_1 par ω_1' (cf. 1. 4). On peut prolonger μ' et id par une homotopie $k' : I \times E \to E$ au-dessus de ω_1', et

$$k' \circ \varepsilon_1 | F_0 : (F_0, g(0)) \to (F_1, g(1)).$$

Si $\varkappa'$ est une autre homotopie, prolongeant μ' et id au-dessus de ω_1', $k' \circ \varepsilon_1 | F_0 \sim \varkappa' \circ \varepsilon_1 | F_0$ rel $g(0)$.

Proposition 2. — $\pi_n(k \circ \varepsilon_0 | F_1)$ *et* $\pi_n\ (k' \circ \varepsilon_1 | F_0)$ *sont deux isomorphismes réciproques.*

Démonstration. — Soit $K: I \times F_0 \to F_0$ l'application par $K(\alpha, x) = k(0, k'(\alpha, x)(\alpha \in I, x \in F_0))$. K est une homotopie définie telle que $K \circ \varepsilon_0 = \mathrm{id}$; $K \circ \varepsilon_1 = (k \circ \varepsilon_0|F_1) \circ k' \circ \varepsilon_1|F_0$, $K(\alpha, g(0)) = g(0)$ $(\alpha \in I)$. Donc $\pi_n(k \circ \varepsilon_0|F_1) \circ \pi_n(k' \circ \varepsilon_1|F_0) =$ identité.

Même démonstration en sens inverse.

15. 3. *Définition du système local attaché à une section sur le* 1-*squelette.*

Soient (E, p, B) un fibré, et $g: B^1 \to E$ une section sur le 1-squelette.

Si $b \in B_0$, on pose $\mathcal{F}^n_b = \pi_n(F_b, gb)$, où F_b désigne la fibre au-dessus de b.

Soit $\rho \in B_1$. Le fibré $\tilde{\rho}^*E \to \Delta[1]$ induit par $\tilde{\rho}$ possède une section $\tilde{\rho}^*g$ définie par $\tilde{\rho}^*g\,(\varphi\delta^1) = (\varphi\delta^1, (g \circ \tilde{\rho})\varphi\delta^1)$ pour tout opérateur simplicial φ. Soit Q l'application canonique $\tilde{\rho}^* \to E$.

Désignons par F_e la fibre au-dessus de e du fibré $\tilde{\rho}^*E \to \Delta[1]$, et par $F_{d_e\rho}$ la fibre au-dessus de $d_e\rho$ de $E \to B$ $(e = 0$ ou $1)$.

Enfin soit $i: (F_{d_0\rho}, g(d_0\rho)) \to (F_1, \tilde{\rho}^*g(1))$ l'application définie par $i\,x = (1, x)$ pour $x \in F_{d_0\rho}$. $\pi_n(i)$ est un isomorphisme car i est un isomorphisme de complexes de Kan avec points bases; de même $Q|F_0: (F_0, \tilde{\rho}^*g(0)) \to (F_{d_1\rho}, g(d_1\rho))$ est un isomorphisme qui induit un isomorphisme en homotopie.

Soit alors k l'homotopie de 15. 2. associée à la section $\tilde{\rho}^*g$.

On pose $\mathcal{F}^n(\rho) = \pi_n(Q|F_0) \circ \pi_n(k \circ \varepsilon_0|F) \circ \pi_n(i): \mathcal{F}^n_{d_0\rho} \to \mathcal{F}^n_{d_1\rho}$.

D'après 15. 2 = proposition 2, $\mathcal{F}^n(\rho)$ est un isomorphisme.

Pour démontrer que $\mathcal{F}^n$ est un système local (classique) sur B, il faut montrer

(i) : $\mathcal{F}^n(s_0 b) =$ identité si $b \in B_0$.

(ii) $\mathcal{F}^n(d_1\sigma) = \mathcal{F}^n(d_2\sigma) \circ \mathcal{F}^n(d_0\sigma)$ si $\sigma \in B_2$.

Remarque. — On peut considérer i comme une application $F_{d_0\rho} \to \tilde{\rho}^*E$ et poser $j = Q \circ k \circ \varepsilon_0 : \tilde{\rho}^*E \to F_{d_1\rho}$;

$$j \circ i: (F_{d_0\rho}, g(d_0\rho)) \to (F_{d_1\rho} g(d_1\rho))$$

induit alors $\pi_n\ (j \circ i) = \mathcal{F}^n(\rho)$.

15. 4. *Démonstration de* (i). — Puisque $\rho = s_0 b$, $d_0\rho = d_1\rho = b$. Dans ces conditions, $Q \circ k$ est une homotopie $I \times \tilde{\rho}^*E \to F_b$ en effet, si P est la projection canonique $\tilde{\rho}^*E \to \Delta[1]$,

$$p \circ Q \circ k = \tilde{\rho} \circ P \circ k,$$

et $\tilde{\rho}$ applique $\Delta[1]$ sur l'ensemble simplicial engendré par le sommet b. Donc $Q \circ k \circ (\mathrm{id} \times i) : I \times F_b \to F_b$ est une homotopie entre $j \circ i$ et identité; cette homotopie est rel $g(b)$ puisque

$$Q \circ k\ (\alpha, ig(b)) = Q \circ k(\alpha, d_0\tilde{\rho}^* g\delta^1) = Q \circ \tilde{\rho}^* g(\omega_1(\alpha, d_0\delta^1))$$
$$= g \circ \widetilde{s_0 b} \circ \omega_1\ (\alpha, d_0\delta^1) = g(b)$$

donc $\pi_n(j \circ i) = \mathrm{id}$ C.Q.F.D.

15. 5. *Démonstration de* (ii). — Soit $\sigma \in B_2$. Comme

$$\widetilde{d_i\sigma} = \tilde{\sigma} \circ \widetilde{d_i\delta^2} \qquad (i = 0, 1, 2)$$

on voit que $\widetilde{d_i\sigma}^* E$ est canoniquement isomorphe à $(\widetilde{d_i\delta^2})^*\ (\tilde{\sigma}^* E)$.

Donc, vu la définition du système local, il suffit de démontrer (ii) lorsque $B = \Delta[2]$.

Notons l, m deux entiers de l'ensemble $\{0, 1, 2\}$, $l < m$, et soit n le troisième élément de $\{0, 1, 2\}$.

On note :

— F_n la fibre au-dessus de $d_l d_m \delta^2$.

— $(E_{l,m}, \underline{p}_{l,m}, \Delta[1])$ le fibré image réciproque de $(E, \underline{p}, \Delta[2])$ par $\widetilde{d_n\delta^2} : \Delta[1] \to \Delta[2]$,

— $q_{l,m}$ l'application canonique $E_{l,m} \to E$,

— $i_{l,m} : F_m \to E_{l,m}$ $j_{l,m} : E_{l,m} \to F_l$ les applications notées i et j dans 15. 3,

— $k_{l,m}$ l'homotopie qui sert à construire $j_{l,m}$,

— $\mu_{l,m}$ l'application qui sert à construire $k_{l,m}$,

— $S(g(d_1\delta^2),\ g(d_2\delta^2))$ l'ensemble simplicial engendré par $g(d_1\delta^2)$ et $g(d_2\delta^2)$,

— μ l'application : $I \times (F_0 \cup S\ (g(d_1\delta^2),\ g(d_2\delta^2))) \to E$ définie par :

$$\mu(\alpha, x) = x \qquad \text{si} \qquad x \in F_0, \quad \alpha \in I$$
$$\mu(\alpha, \varphi g d_i\delta^2) = g\omega_2(\alpha, \varphi d_i\delta^2)$$

$(\alpha \in I;\ i = 1, 2;\ \varphi$ opérateur simplicial).

Il existe une homotopie $k : I \times E \to E$ qui prolonge μ et l'identité au-dessus de ω_2; $k \circ \varepsilon_0$ est une application $E \to F_0$ que l'on notera J.

Considérons alors l'application :

$$k'_{01} : I \times E_{0,1} \to \Delta[1] \times E$$

définie par $(\omega_1 \circ (\mathrm{id} \times p_{0,1})) \times (k \circ (\mathrm{id} \times q_{0,1}))$ c'est une application $I \times E_{0,1} \to E_{0,1}$ qui prolonge id et $\mu_{0,1}$ au-dessus de ω_1.

On peut donc prendre $k'_{0,1}$ au lieu de $k_{0,1}$ pour définir $j_{0,1}$, et par conséquent $j_{0,1} = q_{0,1}\, k'_{0,1}\, \varepsilon_0 = k \circ (\mathrm{id} \times q_{0,1}) \circ \varepsilon_0 = \mathrm{J} \circ q_{0,1}$.

On a donc

$$j_{0,1} = \mathrm{J} \circ q_{0,1}$$

et de même

$$j_{0,2} = \mathrm{J} \circ q_{0,2}$$

considérons alors l'application

$$\mathrm{J} \circ q_{1,2} \circ k_{1,2} \circ (\mathrm{id} \times i_{12}) : \mathrm{I} \times \mathrm{F}_2 \to \mathrm{F}_0.$$

On a

$$\begin{aligned} \mathrm{J} \circ q_{1,2} \circ k_{1,2} \circ (\mathrm{id} \times i_{1,2}) \circ \varepsilon_0 &= \mathrm{J} \circ j_{1,2} \circ i_{1,2} \\ &= \mathrm{J} \circ q_{0,1} \circ i_{0,1} \circ j_{1,2} \circ i_{1,2} = (j_{0,1} \circ i_{0,1}) \circ (j_{1,2} \circ i_{1,2}) \end{aligned}$$

et

$$\mathrm{J} \circ q_{1,2} \circ k_{1,2} \circ (\mathrm{id} \times i_{1,2}) \circ \varepsilon_1 = \mathrm{J} \circ q_{1,2} \circ i_{1,2} = \mathrm{J} \circ q_{0,2} \circ i_{0,2} = j_{0,2} \circ i_{0,2}.$$

Enfin puisque $k_{1,2}$ est une homotopie rel points bases, et que

$$\mathrm{J}(g(d_0 d_1 \delta^2)) = k(0, \; g d_0 d_1 \delta^2) = g\omega_2(0, \; d_0 d_1 \delta^2) = g(d_1 d_2 \delta^2),$$

l'homotopie $\mathrm{I} \times \mathrm{F}_2 \to \mathrm{F}_0$ est rel points bases. On a donc

$$\pi_n(j_{0,1} \circ i_{0,1}) \circ \pi_n(j_{1,2} \circ i_{1,2}) = \begin{cases} \mathcal{F}^n(d_2\delta^2) \circ \mathcal{F}^n(d_0\delta^2) \\ \pi_n(j_{02} \circ i_{02}) = \mathcal{F}^n[(d_1\delta^2). \end{cases}$$

C.Q.F.D.

Remarque. — On désignera par le même symbole $\mathcal{F}^n$ le système local classique déterminé ci-dessus et le système local contravariant sur la catégorie $\mathfrak{M}_\mathrm{B}$.

15. 6. *Le système local de l'homotopie d'un complexe de Kan.*

Si X est un complexe de Kan, la projection $p : \mathrm{I} \times \mathrm{X} \to \mathrm{I}$ fait de $(\mathrm{I} \times \mathrm{X}, p, \mathrm{I})$ un fibré.

Soit $x \in \mathrm{X}_1$ un 1-simplexe; on considère la section $g : \mathrm{I} \to \mathrm{I} \times \mathrm{X}$ définie par $g\delta^1 = (\delta^1, x)$. Si on applique les résultats de (15, 2, 3, 4, 5) on voit que x définit un isomorphisme $\pi_n(\mathrm{X}, d_0 x) \xrightarrow{\bar{x}} \pi_n(\mathrm{X}, d_1, x)$ tel que si $\sigma \in \mathrm{X}_2$, $\overline{d_2\sigma} \circ \overline{d_0\sigma} = \overline{d_1\sigma}$.

La correspondance :

$$\begin{aligned} \mathrm{X}_0 \ni x &\to \pi_n(\mathrm{X}, x) \\ \mathrm{X}_1 \ni x &\to \bar{x} \end{aligned}$$

est donc un système local (classique).

16. — L'obstruction $c^{n+1}(g)$ $(n \geqslant 1)$.

16. 1. Soient (E, p, B) un fibré, et $g : B^n \to E$ une section sur le n-squelette. Soit $x \in B_{n+1}$, $x \notin B^n$. On considère le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} (I \times O_{n+1}) \cup (1 \times \dot{\Delta}[n+1]) & \xrightarrow{f} & E \\ \downarrow{\scriptstyle \text{inj}} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ I \times \dot{\Delta}[n+1] & \xrightarrow[\tilde{x} \circ \omega_{n+1}]{} & B \end{array}$$

où f est l'application définie par

$$f(\alpha, O_{n+1}) = gx_0 \quad (\alpha \in I,\ x_0 = d_1 \dots d_{n+1}x)$$
$$f(1, \beta) = g \circ \tilde{x}(\beta) \quad (\beta \in \dot{\Delta}[n+1]).$$

D'après 2. 3. il existe une application $k : I \times \dot{\Delta}[n+1] \to E$ qui prolonge f au-dessus de $\tilde{x} \circ \omega_{n+1}$. $k \circ \varepsilon_0$ est donc une application

$$(\dot{\Delta}[n+1],\ O_{n+1}) \to (F_{x_0},\ g(x_0))$$

la classe d'homotopie de cette application (cf. 4.5) est un élément de $\pi_n(F_{x_0})$, $g(x_0)$ que l'on désigne par $c^{n+1}(g)$ (x).

Proposition. — *c^{n+1} (g) (x) est indépendant du choix de l'homotopie k qui prolonge f au-dessus de $\tilde{x} \circ \omega_{n+1}$.*

Démonstration. — Soit $\varkappa$ une autre homotopie. D'après 2. 5 il existe une homotopie $h : k \circ \varepsilon_0 \sim k \circ \varepsilon_0$ rel O_{n+1}. C.Q.F.D.

L'application $x \to c^{n+}(g)$ (x) définie pour $x \in B_{n+1}$ non dégénéré est donc une $(n+1)$-cochaîne de

$$Hom^{n+1}(C_{*B}, \mathcal{F}^n)\ (B, \text{id})$$

où $\mathcal{F}^n$ est le système local défini par la section $g|B^1$ (cf. 10. 2).

16. 2. Proposition. — *La condition nécessaire et suffisante pour que g soit prolongeable à* B^{n+1} *est que* c^{n+1} $(g) = 0$.

Démonstration.

a. La condition est nécessaire en effet, si g est défini sur B^{n+1}, on peut dans le diagramme de 16. 1 remplacer $\dot{\Delta}[n+1]$ par $\dot{\Delta}[n+1]$. On obtient une application $k \circ \varepsilon_0 : \Delta[n+1] \to F_{x_0}$

dont la restriction à $\dot{\Delta}[n+1]$ est un représentant de $c^{n+1}(g)x$ $(x \in B_{n+1})$.

On applique alors 4. 7.

b. La condition est suffisante. — Soit $x \in B_{n+1}$. Puisque $c^{n+1}(g)(x) = 0$, l'application $k \circ \varepsilon_0$ de 16. 1. est prolongeable à $\Delta[n+1]$ d'après 4. 7. On considère alors le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} (\mathrm{I} \times \dot{\Delta}[n+1]) \cup (0 \times \Delta[n+1]) & \xrightarrow{f'} & \mathrm{E} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{inj}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle p} \\ \mathrm{I} \times \Delta[n+1] & \xrightarrow[\tilde{x} \circ \omega_{n+1}]{} & \mathrm{B} \end{array}$$

où f' est l'application définie par

$$f'(\alpha, \beta) = k(\alpha, \beta) \quad (\alpha \in \mathrm{I},\ \beta \in \dot{\Delta}[n+1])$$
$$f'(0, \beta) = k \circ \varepsilon_0(\beta) \quad (\beta \in \Delta[n+1]).$$

D'après 2.3, il existe une homotopie $\mathrm{K} : \mathrm{I} \times \Delta[n+1] \to \mathrm{E}$ qui prolonge f' au-dessus de $\tilde{x} \circ \omega_{n+1}$.

On pose $g'x = \mathrm{K} \circ \varepsilon_1 \delta^{n+1}$, $g's_{\alpha_1} \dots s_{\alpha_q} x = s_{\alpha_1} \dots s_{\alpha_q} g'x$.

g' est un prolongement de g puisque pour $i = 0, \dots, n+1$ on a :

$$d_i g'x = d_i(\mathrm{K} \circ \varepsilon_1)\delta^{n+1} = (\mathrm{K} \circ \varepsilon_1) d_i \delta^{n+1} = (k \circ \varepsilon_1) d_i \delta^{n+1}$$
$$= g \circ \tilde{x} d_i \delta^{n+1} = g d_i x.$$

REMARQUE. — Il résulte de la démonstration précédente que si g est connue sur un sous-ensemble simplicial $\mathrm{B}' \subset \mathrm{B}$,

$$c^{n+1}(g) \in Hom^{n+1}\left((\mathrm{C}^*{}_{\mathrm{B}})_{\mathcal{J}}, \mathcal{F}^n\right)(\mathrm{B}, \mathrm{B}')$$

où l'on a écrit $(\mathrm{B}, \mathrm{B}')$ au lieu de $((\mathrm{B}, \mathrm{id}), (\mathrm{B}', i))$ où i est l'injection $i : \mathrm{B}' \to \mathrm{B}$.

16. 3. PROPOSITION. — *$c^{n+1}(g)$ est un cocycle $(n > 1)$.*

Démonstration.

a. Soient $x \in B_{n+1}$, x non dégénéré, $\mathrm{Q} : \tilde{x}^*\mathrm{E} \to \mathrm{E}$ l'application canonique, $\tilde{x}^*g : \dot{\Delta}[n+1] \to \tilde{x}^*\mathrm{E}$ la section définie par $\tilde{x}^*g\,(d_i\delta^{n+1}) = (d_i\delta^{n+1}, g \circ \tilde{x} d_i \delta^{n+1})$.

Il existe une homotopie $k : \mathrm{I} \times \tilde{x}^*\mathrm{E} \to \tilde{x}^*\mathrm{E}$ stationnaire sur 0_{n+1}, qui prolonge l'identité au-dessus de ω_{n+1}.

Il est clair sur les définitions que :

$$\mathrm{Q} \circ (k \circ \varepsilon_0) \circ \tilde{x}^*g : (\dot{\Delta}[n+1], 0_{n+1}) \to (\mathrm{F}_{x_0}, g(x_0))$$

est un représentant de $c^{n+1}(g)(x)$.

b. Soit alors $y \in B_{n+2}$, y non dégénéré. On a (cf. 10. 2)

$$(\delta c^{n+1}(g))\,(y) = \mathcal{F}^n(\rho)\, c^{n+1}(g)\,(d_0 y) + \sum_{i=1}^{n+2} (-1)^i c^{n+1}(g)\, d_i(y)$$

où ρ désigne le 1-simplexe $d_2 \dots d_{n+2} y$,

— soient i et j les applications définies dans 15. 3,

— $J^{n+1} : \widetilde{d_0 y}^* E \to F_{d_0\rho}$ l'application $Q \circ (k \circ \varepsilon_0)$ définie dans $\underline{a}$ avec $x = d_0 y$,

— $i^{n+1} : F_{d_0\rho} \to \widetilde{d_0 y}^* E$ l'application $x \to (0_{n+1}, x)$,

— $\lambda : \tilde{\rho}^* E \to \tilde{y}^* E$ l'injection canonique,

— $\mu : \widetilde{d_0 y}^* E \to \tilde{y}^* E$ l'injection canonique.

Le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
(I \times \lambda(\tilde{\rho}^* E)) \cup (1 \times \tilde{y}^* E) & \xrightarrow{\quad f \quad} & \tilde{y}^* E \\
\big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{inj}} & & \big\downarrow{\scriptstyle P} \\
I \times \tilde{y}^* E & \xrightarrow[(\mathrm{id} \times P) \circ \omega_{n+2}]{} & \Delta[n+2]
\end{array}$$

où f est l'application définie par

$$f(1, x) = x \qquad (x \in \tilde{y}^* E)$$

$f(\alpha, \lambda x) = \lambda h\,(\alpha, x)$ $(x \in \tilde{\rho}^* E,\ \ \alpha \in I,\ \ h : I \times \tilde{\rho}^* E \to \tilde{\rho}^* E$ est l'homotopie qui sert à construire $j)$

montre qu'il existe une homotopie $K : I \times \tilde{y}^* E \to \tilde{y}^* E$ qui prolonge f au-dessus de $(\mathrm{id} \times P) \circ \omega_{n+2}$.

Soit Q^{n+2} l'application canonique $\tilde{y}^* E \to E$;

Il résulte de ce qui précède et de a que

(i) $Q^{n+2} \circ K \circ \varepsilon_0 \circ \lambda = j$.

(ii) $Q^{n+2} \circ K \circ \varepsilon_0 \circ \tilde{y}^* g \circ \widetilde{d_i \delta}^{n+2} | \dot{\Delta}[n+1]$ est un représentant de $c^{n+1}(g)\,(d_i y)$ pour $i > 0$.

Mais on a aussi :

(iii) $Q^{n+2} \circ K \circ \varepsilon_0 \circ \tilde{y}^* g \circ \widetilde{d_0 \delta}^{n+2} | \dot{\Delta}[n+1]$ est un représentant de $\mathcal{F}^n(\rho)\ c^{n+1}(g)\,(d_0 y)$.

En effet, le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc}
\widetilde{d_0 y}^* E & \xrightarrow{\quad \mu \quad} & \tilde{y}^* E & \xrightarrow{Q^{n+2} \circ K \circ \varepsilon_0} & F_{d_1\rho} \\
\big\downarrow{\scriptstyle i^{n+1}} & & \big\downarrow{\scriptstyle \lambda} & \nearrow{\scriptstyle j} & \\
F_{d_0\rho} & \xrightarrow{\quad i \quad} & \tilde{\rho}^* E & &
\end{array}$$

est commutatif.

On considère alors l'homotopie

$$H = Q^{n+2} \circ K \circ \varepsilon_0 \circ \mu \circ k \circ (\mathrm{id} \times \widetilde{d_0 y}^* g) : I \times \dot{\Delta}[n+1] \to F_{d_1\rho}.$$

On a

$$H \circ \varepsilon_1 = Q^{n+2} \circ K \circ \varepsilon_0 \circ \mu \circ \widetilde{d_0 y}^* g = Q^{n+2} \circ K \circ \varepsilon_0 \circ \tilde{y}^* g \circ \widetilde{d_0} \delta^{n+2}$$
$$H \circ \varepsilon_0 = Q^{n+2} \circ K \circ \varepsilon_0 \circ \mu \circ i^{n+1} \circ J^{n+1} \circ \widetilde{d_0 y}^* g$$
$$= Q^{n+2} \circ K \circ \varepsilon_0 \circ \lambda \circ i \circ J^{n+1} \widetilde{d_0 y}^* g = j \circ i \circ J^{n+1} \circ \widetilde{d_0 y}^* g$$

de plus H est stationnaire sur 0_{n+1} car cela est vrai pour k (iii) est donc bien vérifié puisque $j \circ i$ induit $\mathcal{F}^n(\rho)$ et $J^{n+1} \circ \widetilde{d_0 y}^* g$ est un représentant de $c^{n+}(g)\,(d_0 y)$ d'après a.

c. Soit alors $\Phi : \ddot{\Delta}[n+2] \to (F_{d_1\rho}, g(d_1\rho))$ l'application

$$\Phi = Q^{n+2} \circ K \circ \varepsilon_0 \circ \tilde{y}^* g$$

on a $\Phi(d_2 \ldots d_{n+2}\, \delta^{n+2}) = s_0 g(d_1\rho)$ puisque $jg(\rho) = s_0 g(d_1\rho)$. On peut donc appliquer la proposition 4. 6. à Φ. Compte tenu de (ii) et (iii), 4. 6. implique $\delta c^{n+1}(g)\,(y) = 0$.

C.Q.F.D.

16. 4. Soit $f : A \to B$ une application. On définit une section $f^* g : A^n \to f^* E$ du fibré induit par f en posant

$$f^* g\,(x) = (x, gfx) \text{ pour tout } x \in A^n.$$

Désignons par f^{n+1} l'application $Hom^{n+1}\,(C_{*B}, \mathcal{F}^n)\,(f, f, \mathrm{id})$.

Proposition. — $c^{n+1}\,(f^* g) = f^{n+1} c^{n+1}(g)$.

C'est évident sur les définitions (en utilisant par exemple 16. 3 pour définir l'obstruction).

17. — La cochaîne différence.

On peut donner une définition directe de la cochaîne différence (cf. 17. 11). Les propositions 17. 7 (dont la démonstration serait alors analogue à celle de 16. 3. — tout en étant beaucoup plus possible —) et 18. 4. montrent cependant qu'on a intérêt à donner une définition qui mette en évidence les relations existantes entre la cochaîne différence et le cocycle obstruction (cf. Steenrod [18]).

17. 1. *Notations.* — Soient g_0 et g_1 deux sections sur le n-squelette B^n du fibré (E, p, B) et k une homotopie $g_0|B^{n-1} \sim g_1|B^{n-1}$ (cf. 15. 1). On considère le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} (I \times B^{n-1}) \cup (0 \times B^n) & \longrightarrow & E \\ {\scriptstyle \mathrm{inj}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ I \times B^n & \longrightarrow & B \end{array}$$

où la flèche du haut représente l'application égale à k sur $I \times B^{n-1}$ à g_0 sur $0 \times B^n$ et la flèche du bas le composé de la projection $I \times B^n \to B^n$ et de l'injection $B^n \to B$.

D'après 2. 3. il existe une application $\varkappa : I \times B^n \to E$ qui prolonge k et g_0.

$(I \times E, \mathrm{id} \times p, I \times B)$ est un fibré que l'on muni d'une section h sur le n-squelette $(I \times B)^n$ en posant
$h(\alpha, b) = (\alpha, \varkappa(\alpha, b))$ pour $(\alpha, b) \in (I \times B)^n - s_0^n d_0 \delta^1 \times B^n$
$h(\alpha, b) = (\alpha, g_1 b)$ pour $(\alpha, b) \in s_0^n d_0 \delta^1 + B^n$.

On prolonge h à un sous-ensemble de $(I \times B)^{n+1}$ en posant $h(\alpha, b) = (\alpha, \varkappa(\alpha, b))$ pour $(\alpha, b) = (s_n \ldots \hat{s}_i \ldots s_0 \delta^1, s_i b')$

$$b' \in B_n, \qquad i > 0.$$

On désigne par

$\mathcal{F}$ le système local sur $I \times B$ défini par le n-ième groupe d'homotopie de la fibre et la section $h|(I \times B)^1$, et aussi par $\mathcal{F}$ le système local (contravariant) induit sur la catégorie $\mathfrak{M}_{I, B}$ (cf. 10. 3).

∇^* la transformation naturelle $Hom^*\ (\nabla_{I, B}, \mathcal{F}) : Hom^*\ (L_{I, B}, \mathcal{F}) \to Hom^*\ (K_{I, B}, \mathcal{F})$ (cf. 9. 9 et 9. 10).

f^* la transformation naturelle $Hom^*\ (f_{I, B}\ \mathcal{F})$ (cf. 9. 9. et 9. 10.).

$\mathcal{F}_e (e = 0$ ou $1)$ le système local sur B défini par le n-ième groupe d'homotopie de la fibre et la section $g_e|B^1$.

17. 2. *Explicitation de* $\mathcal{F}$. — Les fibres de

$$(I \times E, \mathrm{id} \times p, I \times B)$$

sont du type $d_e \delta^1 \times F_x$ ($x \in B_0$, $e = 0$ ou 1). Les points bases de ces fibres sont $h(d_e \delta^1, x) = (d_e \delta^1, g_{1-e} x)$.

$\pi_n(d_e \delta^1 \times F_x,\ h(d_e \delta^1, x))$ est canoniquement isomorphe à $\pi_n(F_x, g_{1-e} x)$. Pour rappeler que la fibre est $d_e \delta^1 \times F_x$ on écrira $\pi_n(d_e \delta^1 \times F_x,\ h(d_e \delta^1, x)) = (d_e \delta^1, \pi_n(F_x,\ g_{1-e} x)$ et, comme dans

5. 1 d, on introduira les isomorphismes $i(d_e\delta^1)$, $j(d_e\delta^1)$ qui constituent à écrire ou effacer $d_e\delta^1$. Pour simplifier on écrira comme d'habitude e à la place de $d_{1-e}\delta^1$.

Soit alors $\rho \in B_1$, $x \in B_0$. En utilisant 15. 3 on voit que

(i) $\mathcal{F}(s_0 e, \rho) = i(e)\underline{\mathcal{F}_e(\rho) j(e)}$,

(ii) $\underline{\mathcal{F}(\delta^1, s_0 x)} = i(0)\, \overline{k(\delta^1, s_0 x)}\, j(1)$,

où $\overline{k(\delta^1, s_0 x)} : \pi_n(F_x, g_1 x) \to \pi_n(F_x, g_0 x)$ est l'isomorphisme induit par le 1-simplexe $k\ (\delta^1,\ s_0 x) \in F_x$ (cf. 15. 6.) (on rappelle que $k(\delta^1, s_0 x) \in F_x$ car $pk(\delta^1, s_0 x) = s_0 x$ d'après 15. 1.

En appliquant 15. 3. (ii) à $\sigma = (s_0\delta^1, s_1\rho)$ et à $\sigma = (s_1\delta^1, s_0\rho)$ on voit que

(iii) $\mathcal{F}(\delta^1, \rho) = \mathcal{F}(s_0 0, \rho) \circ \mathcal{F}(\delta^1, s_0 d_0 \rho) = \mathcal{F}(\delta^1, s_0 d_1 \rho) \circ \mathcal{F}(s_0 1, \rho)$

les formules (i), (ii) et (iii) explicitent complètement $\mathcal{F}$ en fonction de $\mathcal{F}_e$ et k.

17. 3. *L'équivalence naturelle* $\tau : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_0$ *associée à une homotopie* $g_0|B^1 \sim g_1|B^1$.

Soient $(M, u) \in \mathcal{S}_B$ un modèle ($u : M \to B$, $M \in \mathfrak{M}$), et μ l'homotopie $g_0|B^1 \sim g_1|B^1$. On considère l'isomorphisme

$$\tau : \mathcal{F}_1(M,\ u) \to \mathcal{F}_0(M,\ u)$$

défini par $\gamma \to \overline{\mu(\delta^1, u(0))}\,\gamma$ où 0 désigne le zéro-ième sommet de M.

17. 2. (iii) montre que τ est une transformation naturelle.

Dans la suite on prendra $\mu = k|I \times B^1$.

17. 4. *Les transformations naturelles* $\psi_e^*(e = 0$ ou $1)$ $(n > 1)$.

Soit Z le système local constant sur I (ou $\mathfrak{M}_I$) de module l'anneau Z des entiers rationnels. On obtient un système local $Z \otimes \mathcal{F}_e$ sur $I \times B$ (ou $\mathfrak{M}_{I, B}$) en posant pour tout $x \in B_0$, $(\alpha, \rho) \in I_1 \times B_1$, e, $e' = 0$ ou 1 :

$$(Z \otimes \mathcal{F}_e)_{e', x} = Z \otimes_Z (\mathcal{F}_e)_x \approx (\mathcal{F}_e)_x$$
$$(Z \otimes \mathcal{F}_e)\ (\alpha,\ \rho) = \mathrm{id} \otimes \mathcal{F}_e(\rho).$$

On considère alors les homomorphismes

$$\psi_e : (Z \otimes \mathcal{F}_e)_{e', x} \to \mathcal{F}_{e', x}$$

définis par

$$\psi_0 = \mathcal{F}(\alpha, s_0 x) i(0)$$
$$\psi_1 = \mathcal{F}^{-1}(\beta, s_0 x) i(1)$$

où α (resp β) est l'unique 1-simplexe de I tel que $d_1\alpha = 0$, $d_0\alpha = e'$ (resp $d_1\beta = e'$, $d_0\beta = 1$).

D'après 17. 2. (i), (ii), (iii), ψ_e est une transformation naturelle $Z \otimes \mathcal{F}_e \to \mathcal{F}$ de fonctions contravariantes dont la source est $\mathfrak{M}_{I, B}$.

D'après 7. 7 ψ_e induit une transformation naturelle.

$$(1) \qquad Hom^* (K_{I, B}, Z \otimes \mathcal{F}_e) \to Hom^* (K_{I, B}, \mathcal{F})$$

Comme d'autre part on a une transformation naturelle

$$(2) \quad Hom^* (C_I, Z) \otimes Hom^* (C_B, \mathcal{F}_e) \to Hom^* (K_{I, B}, Z \otimes \mathcal{F}_e)$$ [1].

On en déduit par composition de (1) et (2) une transformation naturelle de foncteurs de source $\mathcal{S}_{I, B}$:

$$\psi_e^* : Hom^* (C_I, Z) \otimes Hom^* (C_B \mathcal{F}_e) \to Hom^* (K_{I, B}, \mathcal{F})$$

17. 5. *L'isomorphisme* λ^* $(n > 1)$.

Soit $u : (\dot{I}, B) \to (I, B)$ l'injection canonique dans $\mathcal{S}_{I, B}$. Pour chaque $p = 0, 1, \ldots$ on définit un isomorphisme

λ^p : Ker $Hom^{p+1} (K_{I, B}, \mathcal{F}) (u) \to Hom^p (C_B, F_0) (B, id)$

de la façon suivante :

$$\text{Ker } Hom^{p+1}(K_{I, B}, \mathcal{F}) (u) = \prod_{\substack{x \in B_p \\ x \text{ non dégénéré}}} \text{Hom} (\overset{1}{\delta}_{\otimes} x, \mathcal{F}(\Delta[1], \Delta[n], \tilde{\delta}^1, \tilde{x}))$$

et
$$Hom^p (C_B, \mathcal{F}_0) (B, id) = \prod_{\substack{x \in B_p \\ x \text{ non dégénéré}}} \text{Hom} (x, \mathcal{F}_0(\Delta[n], \tilde{x})).$$

Si $\varphi \in$ Ker $Hom^{p+1} (K_{I, B}, \mathcal{F}) (u)$ on pose, pour tout $x \in B_p$, x non dégénéré,

$$(\lambda^p \varphi) (x) = (-1)^p \bar{j}(0) \varphi(\overset{1}{\delta}_{\otimes} x).$$

LEMME. — $\lambda^{p+1} \delta = \delta \lambda^p$.

Démonstration. — Soit $\rho = d_2 \ldots d_{p+1} x$ avec $x \in B_{p+1}$, x non dégénéré, alors (cf. 10. 2) :

$$(\delta \lambda^p \varphi) (x) = \sum_{i>0} (-1)^i (\lambda^p \varphi) (d_i x) + \mathcal{F}_0(\rho) (\lambda^p \varphi) (d_0 x)$$
$$= \sum_{i>0} (-1)^{i+p} j(0) \varphi(\delta^1 \otimes d_i x) + (-1)^p \mathcal{F}_0(\rho) (j(0) \varphi(\delta^1 \otimes d_0 x))$$

[1] Un objet de $\mathcal{S}_{I, B}$ est un couple formé d'un objet de $\mathcal{S}_I$ et d'un objet de $\mathcal{S}_B$. Le foncteur de gauche associe à (X, Y) $(X \in \mathcal{S}_I, Y \in S_B)$ le complexe $Hom^*(C_I, Z)(X) \otimes_Z Hom^* (C_B, \mathcal{F}_e) (Y)$, à un morphisme de $\mathcal{S}_{I, B}$ le produit tensoriel des morphismes dans $d\mathcal{C}_Z^*$ correspondant aux morphismes dans $\mathcal{S}_I$ et $\mathcal{S}_B$.

Enfin la transformation naturelle (2) est bien évidente : avec des notations évidentes, $\varphi \otimes \varphi'$ elle fait correspondre la cochaîne $x \otimes y \to \varphi(x) \otimes \varphi'(y)$.

et

$$(\delta\varphi)(\overset{1}{\delta}_{\otimes} x) = -\sum_{i>0}(-1)^i \varphi(\overset{1}{\delta}_{\otimes} d_i x) - \mathcal{F}(s_0 0, \rho)\,\varphi(\overset{1}{\delta}_{\otimes} d_0 x)$$

d'où

$$(\lambda^{p+1}\delta\varphi)(x) = -\sum_{i>0}(-1)^{i+p+1} j(0)\,\varphi(\delta^1 \otimes d_1 x)$$
$$-(-1)^{p+1} j(0)\,\mathcal{F}(s_0\, 0, \rho)\,\varphi(\overset{1}{\delta}_{\otimes} d_0 x)$$

ce qui démontre le lemme compte tenu de 17. 2 (i).

17. 6. *Définition de la cochaîne différence.* — Soit

$$\varphi_e \in Hom^0(C_I, Z)(I, \mathrm{id})$$

la o-cochaîne définie par $\varphi_e(e) = 1$ $\varphi_e(1-e) = 0$ $(e = 0, 1)$.
$c^{n+1}(g_0, g, h) = \nabla^{n+1}c^{n+1}(h) - \psi_0^{n+1}(\varphi_0 \otimes c^{n+1}(g_0)) - \psi_1^{n+1}(\varphi_1 \otimes c^{n+1}(g_1))$ est une $(n+1)$-cochaîne de $\mathrm{Ker}\, Hom^{n+1}(K_{I,\,B'}\mathcal{F})\,(u)$ en effet, si $x \in B_{n+1}$, x non dégénéré,

$$\nabla^{n+1}c^{n+1}(h)\,(d_1\delta^1 \otimes x) = c^{n+1}(h)\,(\nabla d_1\delta^1 \otimes x))$$
$$= c^{n+1}(h)\,(s_0^{n+1}d_1\delta^1, x) = (d_1\delta^1, c^{n+1}(g_0)\,(x))$$

(la dernière égalité résulte du fait que les faces de $(s_0^{n+1}d_1\delta^1, x)$ sont $(s_0^n d_1\delta^1, d_i x)$ sur lesquelles $h = \mathrm{id} \times g_0$)

$$\psi_0^{n+1}(\varphi_0 \otimes c^{n+1}(g_0))(d_1\delta^1 \otimes x) = \psi_0(1 \otimes c^{n+1}(g_0)(x)) = (d_1\delta^1, c^{n+1}(g_0)x)$$
$$\psi_1^{n+1}(\varphi_1 \otimes c^{n+1}(g_1))\,(d_1\delta^1 \otimes x) = 0,$$

donc $c^{n+1}(g_0, g_1;\, h)\,(d_1\delta^1 \otimes x) = 0$. De même

$$c^{n+1}(g_0, g_1;\, h)\,(d_0\delta^1 \otimes x) = 0.$$

Définition. — On appelle cochaîne différence la n-cochaîne de $Hom^n(C_B, \mathcal{F}_0)(B, \mathrm{id})$ définie par $(n > 1)$

$$d^n(g_0, g_1;\, h) = (-1)^{n+1}\lambda^n c^{n+1}(g_0, g_1;\, h).$$

17. 7. Proposition. — $\delta d^n(g_0, g; h) = c^{n+1}(g_0) - \tau c^{n+1}(g_1)\,(n > 1)$.

Démonstration. — ∇^*, λ^*, ψ_0^*, ψ_1^* commutent avec δ, et $c^{n+1}(h)$, $c^{n+1}(g_0)$, $c^{n+1}(g_1)$ sont des cocyles, donc :

$$\delta d^n(g_0, g_1;\, h) = (-1)^{n+1}\lambda^{n+1}(-\psi_0(\delta\varphi_0 \otimes c^{n+1}(g_0)) - \psi_1(\delta\varphi_1 \otimes c^{n+1}(g_1))$$

si $x \in B_{n+1}$, x non dégénéré, on a donc (puisque $(\delta\varphi_0)\,(\delta^1) = -1$, $(\delta\varphi_1)\,(\delta^1) = 1)$:

$$\delta d^n(g_0, g_1;\, h)\,(x) = -j(0)\,(-\psi_0(1 \otimes c^{n+1}(g_0)\,(x))$$
$$+\,\psi_1(1 \otimes c^{n+1}(g_1)\,(x)) = c^{n+1}(g_0)\,(x) - \tau c^{n+1}(g_1)\,(x).$$

17. 8. Proposition. — *La condition nécessaire et suffisante pour que k soit prolongeable à* $\mathrm{I} \times \mathrm{B}^n$ *est que* $d^n(g_0, g_1; h) = 0$.

Démonstration. — Il est clair sur les définitions que la condition nécessaire et suffisante pour que k soit prolongeable à $\mathrm{I} \times \mathrm{B}^n$ est que h soit prolongeable à $\mathrm{I} \times \mathrm{B}^n \subset (\mathrm{I} \times \mathrm{B})^{n+1}$. Soit $\wp$ l'injection $\mathrm{I} \times \mathrm{B}^n \to \mathrm{I} \times \mathrm{B}$. On rappelle (cf. [2]) que $\nabla(\delta^1 \otimes x) = \Sigma(-1)^i \; (s_n \ldots \hat{s}_i \ldots s_0\delta^1, \; s_i x) \; (x \in \mathrm{B}_n, \; x$ non dégénéré) et que

$$f(s_n \ldots s_i \ldots s_0\delta^1, s_i x) = 0 \text{ si } i \neq 0, \; \delta^1 \otimes x \text{ si } i = 0.$$

Comme $c^{n+1}(h) \; (s_n \ldots \hat{s}_i \ldots s_0, \; s_i x) = 0$ si $i < 0$ d'après 16. 2. et 17. 1, et que $\wp^{n+1} f^{n+1} \psi_e^{n+1} \; (\varphi_e \otimes c^{n+1} \; (g_e)) = 0$ (puisque φ_e est une zéro cochaîne), on en déduit que

$$\wp^{n+1} f^{n+1} \; (\lambda^n)^{-1} \; d^n \; (g_0, g_1; h) = (-1)^{n+1} \; \wp^{n+1} \; c^{n+1} \; (h).$$

Donc si $d^n(g_0 \; g_1; h) = 0$, $\wp^{n+1} \; c^{n+1}(h) = 0$ ce qui entraîne d'après 16. 2. et 16.4. que h est prolongeable à $\mathrm{I} \times \mathrm{B}^n$. Réciproquement si $\wp^{n+1} \; c^{n+1}(h) = 0$, $(\lambda^n)^{-1} \, d^n(g_0, g_1; h) \in \operatorname{Ker} \wp^{n+1} f^{n+1}$. Or si $\varphi \in \operatorname{Ker} \wp^{n+1} f^{n+1}$, $\varphi(\delta^1 \otimes x) = 0$ pour $x \in \mathrm{B}_n$, x non dégénéré. Donc $(\lambda^n)^{-1} \; d^n \; (g_0, g_1; h)$ est nulle car cette cochaîne est nulle sur $d_e\delta^1 \otimes x$ pour $x \in \mathrm{B}_{n+1}$, x non dégénéré et sur $\delta^1 \otimes x$, $x \in \mathrm{B}_n$, x non dégénéré.

Remarque. — Il résulte de la démonstration, que si k est connue sur un sous-ensemble simplicial $\mathrm{B}' \subset \mathrm{B}$,

$$d^n(g_0, g_1; h) \in Hom^n \left((\mathrm{C}_{*\mathrm{B}})_{\mathfrak{J}}, \mathcal{F}_0 \right) \qquad (\mathrm{B}, \mathrm{B}').$$

17. 9. Proposition. — *Si* g_0 *et* g_1 *sont deux sections sur le n-squelette homotopes* rel B^0, *on a* $c^{n+1}(g_0) = c^{n+1}(g_1)$.

Démonstration. — Soit $\varkappa : \mathrm{I} + \mathrm{B}^n \to \mathrm{E}$ l'homotopie donnée, et soit $h : (\mathrm{I} \times \mathrm{B})^n \to \mathrm{I} \times \mathrm{E}$ la section construite à l'aide de $\varkappa$ comme dans 17. 1. D'après 17. 8 on a $d^n \; (g_0, g_1; h) = 0$, donc d'après 17. 7. $c^{n+1} \; (g_0) = \tau c^{n+1} \; (g_1)$. Mais $\varkappa$ étant une homotopie rel B^0, τ est l'identité. C.Q.F.D.

17. 10. Proposition. — $d^n(g_0, g_1; h)$ *ne dépend que de* $k : g_0|\mathrm{B}^{n-1} \sim g_1|\mathrm{B}^{n-1}$.

Démonstration. — Soit $\varkappa'$ une autre homotopie prolongeant k, et h' la section correspondante.

D'après 2. 5, il existe une application $K : I \times I \times B^n \to E$ telle que :

$$\begin{array}{ll} K(\alpha, 0, x) = \varkappa(\alpha, x) & \alpha \in I, x \in B^n \\ K(\alpha, 1, x) = \varkappa'(\alpha, x), & \alpha \in I, x \in B^n \\ K(\alpha, \beta, y) = k(\alpha, y) & \alpha, \beta \in I, y \in B^{n-1} \\ pK(\alpha, \beta, x) = x, & \alpha, \beta \in I, x \in B^n \end{array}$$

on définit alors une application $H : I \times I \times B^n \to I \times E$ en posant

$$H(\alpha, \beta, x) = \alpha, K(\alpha, \beta, x) \quad \text{pour} \quad \beta \in I,$$
$$(\alpha, x) \in (I \times B)^n - s_0 d_0 \delta^1 \times B^n$$
$$H(\alpha, \beta, x) = \alpha, g_1(x) \quad \text{pour} \quad \beta \in I, (\alpha, x) \in s_0^n d_0 \delta^1 \times B^n$$

H est une homotopie (par rapport à la deuxième variable) : $h \sim h'$ rel $I \times B^{n-1}$.

Donc, pour $n > 1$, $c^{n+1}(h) = c^{n+1}(h')$ d'après 17. 9.

C.Q.F.D.

Remarque. — Puisque $d^n(g_0, g_1; h)$ ne dépend que de k, on écrira désormais $d^n(g_0, g_1; k)$ au lieu de $d^n(g_0, g_1; h)$.

17. 11. *Le cas où* $g_0|B^{n-1} = g_1|B^{n-1}$.

Si k est l'homotopie $I \times B^{n-1} \to E$ donnée par

$$k(\alpha, x) = g_0(x) = g_1(x) \quad \text{pour} \quad \alpha \in I, x \in B^{n-1},$$

on pose $d^n(g_0, g_1) = d^n(g_0, g_1; k)$.

Soit $G_x : \dot{\Delta}[n+1] \to E$ l'application définie par

$$\begin{array}{ll} G_x d_0 \delta^{n+1} = (g_0 \circ \tilde{x})\delta^n & \\ G_x d_1 \delta^{n+1} = (g_1 \circ \tilde{x})\delta^n & \\ G_x d_j \delta^{n+1} = (g \circ \tilde{x}) s_0 d_{j-1} \delta^n & \text{pour} \quad j > 1 \end{array}$$

($x \in B_n$, x non dégénéré, $g = g_0|B^{n-1} = g_1|B^{n-1}$).

Le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} (I \times 0_{n+1}) \cup (1 \times \dot{\Delta}[n+1]) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{inj}"] & E \arrow[d, "p"] \\ I \times \dot{\Delta}[n+1] \arrow[r, "\widetilde{s_0 x} \circ \omega_{n+1}"] & B \end{tikzcd}$$

où la flèche supérieure désigne l'application égale à G_x sur $1 \times \dot{\Delta}[n+1]$ et à $g(d_1 \ldots d_n x)$ sur $I \times 0_{n+1}$ permet d'appliquer 2. 3 : on obtient une homotopie $D : I \times \dot{\Delta}[n+1] \to E$ et $D \circ \varepsilon_0 : (\dot{\Delta}[n+1], 0_{n+1}) \to (F_{x_0}, g(x_0))$ où $x_0 = d_1 \ldots d_n x$.

On voit facilement que la classe d'homotopie de $D \circ \varepsilon_0$ est égale à $d(g_0, g_1)(x)$. En particulier cette classe est indépendante de l'homotopie D qui prolonge G_x. Il revient au même de définir $d(g_0, g)$ de la manière suivante : (cf. 16. 3 *a*). Soit $\tilde{x}^*G$ l'application $\dot{\Delta}[n+1] \to \tilde{x}^*E$ définie par :

$$\tilde{x}^*G(d_0\delta^{n+1}) = \tilde{x}^*g_0(\delta^n) = (\delta^n, g_0(x))$$
$$\tilde{x}^*G(d_1\delta^{n+1}) = \tilde{x}g_1(\delta^{n+1}) = (\delta^n, g_1(x))$$

et pour $j > 1$

$$\tilde{x}^*G(d_j\delta^{n+1}) = \tilde{x}^*g(s_0 d_{j-1}\delta^n) = s_0 d_{j-1}\delta^n, \quad s_0 g d_{j-1}x.$$

Soit D une homotopie : $I \times \tilde{x}^n E \to \tilde{x}^*E$ stationnaire sur O_n, qui prolonge l'identité au-dessus de ω_n. Alors $d(g_0, g_1)(x)$ est la classe d'homotopie de $Q \circ D \circ \varepsilon_0 \circ \tilde{x}^*G$ où Q est l'application canonique $\tilde{x}^*E \to E$.

17. 12. Proposition. — *Soient g_0, g_1, g_2 trois sections sur B^n qui coïncident sur B^{n-1}. On a :*

$$d(g_0, g_2) = d(g_0, g_1) + d(g_1, g_2) \quad (n > 1).$$

Démonstration. — Soit G_{lm} l'application $\tilde{x}^*G$ fabriquée avec les sections g_l et g_m. Soit $G : \ddot{\Delta}[n+2] \to E$ l'application définie par

$$\begin{aligned}
G(d_i d_1 \delta^{n+2}) &= G_{02}(d_i\delta^{n+1}) && i = 0, \ldots, n+1\\
G(d_i d_0 \delta^{n+2}) &= G_{01}(d_i\delta^{n+1}) && i = 0, \ldots, n+1\\
G(d_i d_2 \delta^{n+2}) &= G_{12}(d_i\delta^{n+1}) && i = 0, \ldots, n+1\\
G(d_i d_j \delta^{n+2}) &= \widetilde{s_1 s_0 \tilde{x} g(d_{j-2}\delta^n)}\, d_i\delta^{n+1} && i = 0, \ldots, n+1, \quad j > 2.
\end{aligned}$$

on vérifie sans peine que

$$G(d_2 \ldots d_{n+2}\delta^{n+2}) = s_0\tilde{x}^*g(d_1 \ldots d_n\delta^n) = s_0 g(x_0)$$

appliquons la proposition 4. 5. à $Q \circ D \circ \varepsilon_0 \circ G$: on obtient le résultat cherché.

17. 13. Proposition. — *Soit* $\varphi \in Hom^n(C_{*B}, \mathcal{F}_0)$ (B, id); *il existe une section g_1 définie sur le n-squelette de* B *telle que* $g_1|B^{n-1} = g_0|B^{n-1}$ *et que* $d(g_0, g_1) = \varphi$.

Démonstration. — Soit $x \in B_n$, x non dégénéré, $x_0 = d_1 \ldots d_n x$, soit γ une application $(\dot{\Delta}[n+1], 0_{n+1})$ $(F_{x_0}, g_0(x_0))$ dans la classe de $\varphi(x) \in \pi_n(F_{x_0}, g_0(x_0))$.

Soit $Y = (0 \times \dot{\Delta}[n+1]) \cup (1 \times \Lambda^1[n+1]) \cup (I \times 0_{n+1})$.
On pose :

$$H(0, \beta) = \gamma(\beta), \qquad \beta \in \dot{\Delta}[n+1]$$
$$H(1, \beta) = \begin{cases} g_0(x) & \text{si} \quad \beta = d_0\delta^{n+1} \\ g_0 s_0 d_{j-1} x & \text{si} \quad \beta = d_j\delta^{n+1} \quad j > 0 \end{cases}$$
$$H(\alpha, 0_{n+1}) = g(x_0) \qquad \alpha \in I, \qquad x_0 = d_1 \ldots d_n x.$$

Le diagramme :

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "H"] \arrow[d, "\mathrm{inj}"'] & E \arrow[d, "p"] \\ I \times \dot{\Delta}[n+1] \arrow[r, "\widetilde{s_0 x \circ \omega_{n+1}}"] & B \end{tikzcd}$$

est commutatif donc H est prolongeable à $K : I \times \dot{\Delta}[n+1] \to E$ (2. 4. lemme 3). On pose alors $G_x = H \circ \varepsilon_1$, $g_1(x) = G_x(d_1\delta^{n+1})$. g_1 est une section qui coïncide avec g_0 sur B^{n-1} et $d(g_0, g_1) = \varphi$ d'après 17. 8.

Corollaire. — *Si $c^{n+1}(g_0)$ et a sont deux cocycles cohomologues, il existe une section g_1 sur le n-squelette telle que* (i) $g_0|B^{n-1} = g_1|B^{n-1}$, (ii) $a = c^{n+1}(g_1)$ $(n > 1)$.

17. 14. Soit f: A $\to$ B une application. Si g_0 et g_1 sont deux sections $B^n \to E$, homotopes sur B^{n-1} par une homotopie k, f^*g_0 et f^*g_1 sont deux sections $A^n \to f^*E$ homotopes sur A^{n-1} par l'homotopie,

$$f^*k(\alpha, a) = (a, k(\alpha, f(a))) \, (\alpha \in I, \ a \in A^{n-1}).$$

Désignons par f^n l'application $Hom^n(C_{*B}, \mathcal{F}_0)$ (f, f, id).

Proposition. — $d^n(f^*g_0, f^*g_1; f^*k) = f^n d^n (g_0, g_1; k)$.

C'est évident, compte-tenu de 16. 4. et du fait que toutes les transformations utilisées pour définir d^n sont naturelles sur $\mathcal{S}_B$ ou $\mathcal{S}_{I, B}$.

18. — Les théorèmes sur l'obstruction.

18. 1. *La classe obstruction.* — Soit g une section sur B^n $c^{n+1}(g)$ est un cocycle On désigne par $\bar{c}^{n+1}(g)$ la classe de cohomologie de $c^{n+1}(g)$.

Conformément aux notations du § 15 et de 13. 2 *b* on a

$$\bar{c}^{n+}(g) \in H^{n+1} (B, \mathcal{F}^n).$$

18. 2. Théorème. — *Soit g une section sur le n-squelette de* B. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une section g' sur B^n telle que $g'|B^{n-1} = g|B^{n-1}$ et que g' soit prolongeable à B^{n+1} est que $\bar{c}^{n+1}(g) = 0$ $(n > 1)$.*

Démonstration. — La condition est nécessaire :

$$c^{n+1}(g) - c^{n+1}(g') = \delta d(g, g')$$

d'après 17. 7 et $c^{n+1}(g') = 0$ d'après 16. 2 donc $\bar{c}^{n+1}(g) = 0$.

La condition est suffisante : si $\bar{c}^{n+1}(g) = 0$, $c^{n+1}(g)$ et 0 sont deux cocycles cohomologues. Donc il existe une section g' sur B^n telle que $g'|B^{n-1} = g|B^{n-1}$ et $c^{n+1}(g') = 0$ d'après 17. 10, donc g' est prolongeable à B^{n+1} d'après 16. 2.

Remarque. — Si g est une section sur $B^n \cup B'$ $(B' \subset B)$, il résulte de la remarque 16. 2 que $\bar{c}^{n+1}(g) \in H^{n+1}(B, B'; \mathcal{F}^n)$ et de la remarque 18. 7. que le théorème 18. 2. s'applique et donne une condition nécessaire et suffisante pour que $g|B^{n-1}$ soit prolongeable à $B^{n+1} \cup B'$.

18. 3. *Classe différence.* — Soient g_0 et g_1 deux sections $B \to E$, et k une homotopie $g_0|B^{n-1} \sim g_1|B^{n-1}$. Comme d'après 16. 2 $c^{n+1}(g_0)$ et $c^{n+1}(g)$ sont nuls, 17. 7. montre que $d(g_0, g_1; k)$ est un cocycle. On désigne par $\bar{d}(g_0, g; k)$ la classe de cohomologie de $d(g_0, g_1; k)$. C'est un élément de $H^n(B, \mathcal{F}_0)$.

18. 4. Théorème. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une homotopie k' : $g_0|B^n \sim g_1|B^n$ telle que $k'|I \times B^{n-2} = k|I \times B^{n-2}$ est que $\bar{d}(g_0, g, k) = 0$ $(n \geqslant 2)$.*

La condition est nécessaire. — S'il existe une homotopie k' ayant les propriétés exigées, $d^n(g_0, g_1; k') = 0$ d'après 17. 8. Désignons par h' la section fabriquée avec k' de la même manière que h avec k. Comme $k'|I \times B^{n-2} = k|I \times B^{n-2}$, un raisonnement analogue à celui du 17. 9 montre qu'il existe une homotopie

$$H : h|(I \times B)^{n-1} \sim h'|(I \times B)^{n-1} \text{ rel } I \times B^{n-2}.$$

Donc $d^n(g_0, g_1; k) - d^n(g_0, g_1; k') = \lambda^n \nabla^{n+1}(c^{n+1}(h) - c^{n+1}(h')) = \lambda^n \nabla^{n+1} \delta d^n(h, h'; H) = \delta \lambda^{n-1} \nabla^n d^n(h, h'; H)$ d'après 17. 7. et 17. 5. Donc $\bar{d}^n(g_0, g_1; k) = 0$.

La condition est suffisante. — Comme ∇^* induit un isomorphisme en cohomologie cf. 9. 9., ainsi que λ^*, $\bar{d}^n(g_0, g_1; k) = 0$

entraîne que $\bar{c}^{n+1}(h) = 0$. D'après 18. 2. il existe alors une section h' sur $(I \times B)^{n+1}$ égale à h sur $(I \times B)^{n-1}$, donc une homotopie $k' : g_0|B^n \sim g_1|B^n$ égale à k sur $I \times B^{n-2}$.

Remarque. — Si k est une homotopie

$$g_0|B^{n-1} \cup B' \sim g_1|B^{n-1} \cup B',$$

on voit comme dans 18. 2. que $d(g_0, g_1 ; k) \in H^n(B, B' ; \mathcal{F})$ et que le théorème 18. 4. donne une condition nécessaire et suffisante pour que $k|I \times B^{n-2}$ soit prolongeable à $I \times B^n \cup B'$.

18. 5. *Le cas* $n = 0$.

Théorème. — *Si* $\pi_0(F) = 0$, *toute section sur* B^0 *est prolongeable à* B^1; *réciproquement, si* B_1 *contient un* 1-*simplexe* ρ *tel que* $d_0\rho \neq d_1\rho$, *et si toute section sur* B^0 *est prolongeable à* B^1, $\pi_0(F) = 0$.

Démonstration. — Le théorème direct est un cas particulier de 16. 2. Réciproquement, soient y_0 et y, deux sommets de $F_{d_1\rho}$, z un sommet de $F_{d_0\rho}$. Il existe un 1-simplexe y et un 1-simplexe y' tels que $d_1y = y_0$ $d_0y = z$, $d_1y' = y_1$ $d_0y' = z$; puisque (E, p, B) est fibré, il existe un 2-simplexe σ de E tel que $d_0\sigma = y'$, $d_1\sigma = y$, $p\sigma = s_0x$. Donc $d_2\sigma \in F_{d_1\rho}$ est un 1-simplexe d'extrémités y_0 et y_1.

18. 6. *Le cas* $n = 1$. Si $\pi_1(F)$ est commutatif, la théorie précédente est encore valable. Dans le cas contraire, on définit le « cobord » dans $Hom^1(C_{*B}, \mathcal{F})$ par la formule :

$$(\delta\varphi)(x) = \varphi(d_2x) + \mathcal{F}(\rho)\,\varphi(d_0x) - \varphi(d_1x)$$

(pour $x \in B_2$, $\rho = d_2x$).

Si g_0 et g_1 sont deux sections sur B^1 qui coïncident sur B^0, on définit $d^1(g_0, g_1)$ directement par le procédé explicite de 17. 8, et on vérifie que :

$$\mathcal{F}(\rho)\, d^1(g_0, g_1)(d_0x) + c^2(g_1)(x) = -d^1(g_0, g_1)(d_2x) + c^2(g_0)(x) + d^1(g_0, g_1)(d_1x), \quad (x \in B_2,\ \rho = d_2x).$$

On en déduit immédiatement le :

Théorème 1. — *Soit* g *une section sur le* 1-*squelette de* B. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une section*

g' sur B^1 *telle que* $g'|B^0 = g|B^0$ *et que* g' *soit prolongeable à* B^2 *est que* $c^2(g)$ *soit un cobord.*

Soient g_0 et g_1 deux sections sur B et k une homotopie $g_0|B^0 \sim g_1|B^0$; avec les notations de 17. 1. soit $g'_1 = k \circ \varepsilon_1$.

Théorème 2. — *La condition nécessaire et suffisante pour que k soit prolongeable à* $I \times B^1$ *est que* $d(g_0, g'_1) = 0$.

18. 7. On a donc retrouvé, pour les fibrés au sens de Kan, tous les théorèmes classiques de la théorie des fibrés au sens de Serre dont la base est un C. W-complexe ([1]). Dans une prochaine publication, on se propose d'appliquer ces résultats à la décomposition de Postnikov d'un fibré et d'en déduire entre autres quelques théorèmes énoncés sans démonstration dans [15], et quelques propriétés de la seconde obstruction.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Barcus, Note on cross sections over C.W. complexes, *Quat. J. of*, 2e série, 5, 1954, p. 150-150.

[2] H. Cartan, Séminaire E.N.S., 7e année, 1954-1955, Algèbre d'Eilenberg Mac-Lane et homotopie.

[3] H. Cartan, Séminaire E.N.S., 11e année, 1958-1959.

[4] S. Eilenberg, Singular Homology theory, *Ann. of. Math.*, Vol. 45, 1944, p. 63-69.

[5] S. Eilenberg and S. Mac-Lane, On the group H (π, n), *I Ann. of Math.* ,Vol. 58, 1953, p. 55-106.

[6] S. Eilenberg and S. Mac-Lane, Acyclic Models, *Amer J. of Math.*, Vol. 65, 1955, p. 189-199.

[7] S. Eilenberg and Zilber, Semi-simplicial complexes and singular homology, *Ann. of Math.*, Vol. 51, 1950, p. 499-513.

[8] S. Eilenberg and Zilber, On product of complexes, *Amer J. of Math.*, Vol. 75, 1953, p. 200-204.

[9] D. Kan, Abstract homotopy, I and II, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, Vol. 41, 1955, p. 1092-1096.

[10] D. Kan, A Combinatorial definition of homotopy groups, *Ann. of Math.*, Vol. 67, 1958, p. 282-312.

[11] D. Kan, Adjoint functors, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 87, 1958, p. 294-329.

[12] V. K. A. M. Gugenheim and J. C. Moore, Acyclic models and Fibre-spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 85, 1957, p. 182-207.

[13] S. Mac-Lane, Simplicial Topology I, *Lecture notes Chicago*, 1959.

[14] J. Milnor, The geometric realisation of a semi-simplicial complex, *Ann. of Math.*, Vol. 65, 1957, p. 357-162.

[15] J. C. Moore, C.S.S. complexes and Postnikov systems, *Lecture notes* Princeton, 1957.

[16] J. C. Moore. *Seminar on algebraïc homotopy.* Princeton 1955.

[17] J. P. Serre, *Homologie singulière des espaces fibrés.*

[18] N. Steenrod, The topology of fibre bundles, Princeton university press.

[19]

[20] M. Zisman, Suite spectrale des fibrés au sens de Kan, *Compte Rendus Acad. Sci.*, t. 248, 1959, p. 762-764.

[21] M. Zisman, L'obstruction à la construction d'une section d'un fibré au sens de Kan, *Compte Rendus Acad. Sci.*, t. 250, 1960, p. 646-647.

[22] M. Zisman, *Id.*, *Compte Rendus*, *Acad. Sci.* t. 250, 1960 p. 793-794.

(Thèse, Fac. Sciences, Paris, 1960.)