ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

HAJER BAHOURI

Non prolongement unique des solutions d'opérateurs «somme de carrés»

Annales de l'institut Fourier, tome 36, nº 4 (1986), p. 137-155

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1986__36_4_137_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
36, 4 (1986), 137-155.

NON PROLONGEMENT UNIQUE DES SOLUTIONS D'OPÉRATEURS « SOMME DE CARRÉS »

par Hajer BAHOURI

Introduction.

Dans ce travail, on s'intéresse aux « opérateurs de Hörmander » [10] $P = \Sigma X_j^2$, où l'algèbre de Lie engendrée par les X_j est de rang maximum en tout point. Bony [5] a montré que, dans le cas analytique, le prolongement des solutions de ces opérateurs est unique. Par ailleurs, Watanabe [14] a obtenu le même résultat, dans le cas C^∞, en dimension deux. En ce qui nous concerne, nous montrerons que ce résultat n'est plus vrai dès que la dimension est supérieure ou égale à trois. En particulier, en dimension trois ou quatre, nous établirons que ces opérateurs ne possèdent jamais la propriété de prolongement unique. (Évidemment, en supposant que ces opérateurs ne sont elliptiques en aucun point de l'espace).

Les hypothèses des résultats que nous énoncerons au paragraphe 1, sont invariantes, et reposent sur des propriétés algébriques et géométriques de l'opérateur. La preuve de ces résultats, donnée au paragraphe 2, est fondée sur des techniques, introduites par Plis̆ [12-13], pour être ensuite améliorées par Hörmander [8-9], qui sont en liaison avec le méthode de l'optique géométrique.

C'est à S. Alinhac que je dois de m'être intéressée à cette question. Je l'en remercie vivement. Je tiens également à remercier Jean-Pierre Bourguignon pour les précieux conseils qu'il m'a prodigués.

Mots-clés : Prolongement unique - Forme volume de classe 4 - Non unicité de Cauchy - Opérateurs de Hörmander.

1. Généralités et résultats.

Dans toute la suite, $P(x,D_x)$ (où $x \in \mathbf{R}^n$, $n \geqslant 3$) désignera un opérateur différentiel écrit sous la forme :

$$(1.1)\quad P(x,Dx) = \sum_{i=1}^{n-1} X_i^2(x,Dx) + p_1(x,Dx)$$

où

(1.2) Les X_i, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, sont des champs de vecteurs réels, à coefficients C^∞ dans un ouvert Ω de $\mathbf{R}^n$.

(1.3) L'espace vectoriel engendré par les X_i, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, est de dimension $n-1$ en tout point de Ω.

(1.4) L'algèbre de Lie engendrée par les X_i, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, est de rang n en tout point de Ω.

(1.5) p_1 est un opérateur différentiel d'ordre un à coefficients C^∞ dans Ω.

Nous dirons que P possède la propriété de prolongement unique dans un ouvert $V \subset \Omega$ si :

$u \in C^\infty(v)$, et $Pu = 0$ dans V impliquent $u \equiv 0$ dans V dès que $u = 0$ près d'un point de v.

Et nous désignerons par ε_n la forme volume associée aux champs X_i, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, qui à tout champ de vecteur X, réel C^∞ dans Ω, associe $X_1 \wedge X_2 \wedge \ldots \wedge X_{n-1} \wedge X = \det(X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}, X)$.

Le résultat principal que nous obtenons est le :

THÉORÈME 1.1. — *Soit* $P(x,Dx)$ *un opérateur différentiel vérifiant* (1.1), (1.2), (1.3), (1.4) *et* (1.5), *on suppose qu'il existe un point* x_0 *de* Ω *tel que :*

(1.6) ε_n *satisfait à* $\varepsilon_n \wedge d\varepsilon_n \neq 0$ *en* x_0 *et* $\varepsilon_n \wedge (d\varepsilon_n)^2 = 0$ *près de* x_0. *Alors, dans tout voisinage de* x_0, *il existe un ouvert* V *et une fonction* $a \in C^\infty(V)$ *telle que* $P_{+}a$ *n'a pas la propriété de prolongement unique dans* V.

De cet énoncé, on déduit les :

COROLLAIRE 1.2. – *En dimension* 3 *ou* 4, *la conclusion du théorème* 1.1 *reste vraie sans l'hypothèses* (1.6).

COROLLAIRE 1.3. – *Soit* $P(x,Dx) = \sum_{i=1}^{p} X_i^2(x,Dx) + p_1(x,Dx)$ *tel que* $p < m - 1$, *la conclusion du théorème* 1.1 *reste vraie s'il existe* $X_{p+1}, \ldots, X_{n-1}$ *tels que les* $X_i, 1 \leqslant i \leqslant n-1$, *et* p_1 *vérifient* (1.1) ... (1.6).

Exemples et remarques.

(1.7) Le fait que la dimension est supérieure ou égale à trois est important; en effet, en dimension deux, Watanabe [14] a montré que toute solution u dans $C^\infty(\Omega)$ de $Pu = 0$ est identiquement nulle dès qu'elle est nulle au voisinage d'un point, lorsque P vérifie la condition d'Hörmander [10]. Notons que (1.3) et (1.4) ne peuvent avoir lieu en même temps que si la dimension est supérieure ou égale à trois.

(1.8) Dire que la forme volume ε_n satisfait à (1.6), équivaut à dire que ε_n est de classe 4 en x_0.

(Pour plus de détails, voir Abraham-Marsden [1] Godbillon [7] ou Malliavin [11]).

(1.9) Dire qu'au voisinage de x_0 $\varepsilon_n \wedge d\varepsilon_n = 0$ revient à dire que les X_i forment un système de Frobenius. Le théorème montre qu'on sait traiter le cas qui vient après celui de Frobenius pour lequel la propriété de non prolongement unique est immédiate.

(1.10) Le fait que ε_n vérifie la propriété (1.6) est une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une hypersurface S telle que les composantes tangentielles des X_i forment un système de Frobenius.

(1.11) Notons que l'on obtient le même résultat avec deux champs (resp. trois champs) dans $\mathbf{R}^n$ vérifiant (1.2), (1.3) et (1.4) (même preuve que le théorème 1.1, voir même plus simple).

(1.12) Notons que dans le cas où l'on considère plus que $n - 1$ champs de vecteurs réels sur $\mathbf{R}^n$, vérifiant (1.2) et (1.4), nous disposons (à part, le cas trivial des opérateurs elliptiques) de plusieurs exemples dus à Watanabe [14], Bahouri [4], possédant la propriété du prolongement unique, à savoir : $\partial_1^2 + x_1^{2k}\,\partial_2^2$ en dimension 2, où k est un entier positif $\partial_1^2 + \partial_2^2 + x_1^2\,\partial_3^2$ en dimension 3.

Plus généralement, on peut montrer que tout opérateur d'Hörmander elliptique hors d'une hypersurface, possède la propriété de prolongement unique.

(1.13) L'opérateur $\partial_1^2 + (\partial_2 + x_1\,\partial_3)^2$, en dimension 3, vérifie les hypothèses du théorème 1.1 et n'admet pas l'unicité de Cauchy par rapport à la surface $\mathrm{S}: \{x_1 = 0\}$, dans le sens où, pour tout $x_0 \in \mathrm{S}$, il existe un voisinage V de x_0 dans $\mathbf{R}^3$, des fonctions a et u de classe C^∞ dans V, $\operatorname{supp} a \subset \{x_1 \geqslant 0\}$,

$$\operatorname{supp} u \cap \mathrm{V} = \{x_1 \geqslant 0\} \cap \mathrm{V}$$

et
$$(\partial_1^2 + (\partial_2 + x_1\,\partial_3)^2)u + au = 0 \quad \text{dans} \quad \mathrm{V}.$$

Plus généralement, dans $\mathbf{R}^n$, tout opérateur de la forme $\partial_1^2 + \partial_2^2 + \cdots + \partial_{n-2}^2 + (\partial_{n-1} + x_1\,\partial_n)^2$ vérifie les hypothèses du théorème et n'admet pas l'unicité de Cauchy par rapport à la surface $\{x_1 = 0\}$.

L'exemple de l'opérateur $\partial_1^2 + \partial_2^2 + (\partial_3 + a\,\partial_5)^2 + (\partial_4 + b\,\partial_5)^2$ vérifie les hypothèses du théorème 1.1 lorsqu'il existe $x_0 \in \mathbf{R}^5$ tel que $a_{x_1}(x_0) \neq 0$ ou $b_{x_1}(x_0) \neq 0$ ou $a_{x_2}(x_0) \neq 0$ ou $b_{x_2}(x_0) \neq 0$ et $a_{x_1} b_{x_2} \equiv a_{x_2} b_{x_1}$ au voisinage de x_0.

Enfin, l'opérateur $\partial_1^2 + (\partial_2 + x_1\,\partial_3 + \cdots + x_1^{j-2}\,\partial_j + \cdots + x_1^{n-2}\,\partial_n)^2$ ne vérifie pas les hypothèses du théorème 1.1 mais reste dans le cadre de la remarque (1.11) et donc ne possède pas la propriété de prolongement unique. On montre facilement qu'il n'admet pas l'unicité du problème de Cauchy par rapport à la surface $\{x_1 = 0\}$, dans le sens indiqué ci-dessus.

2. Preuve du résultat.

Dans ce qui suit, nous noterons par $\mathrm{P}(x,\xi)$, $\mathrm{X}_i(x,\xi)$, $p_1(x,\xi)$ les symboles respectifs de $\mathrm{P}(x,\mathrm{D}x)$, $\mathrm{X}_i(x,\mathrm{D}x)$, $p_1(x,\mathrm{D}x)$ et nous écrirons $\mathrm{X}_i(x,\partial_x) = \sum_{j=1}^{n} a_j^i(x)\,\partial_{x_j}$ dans le système de coordonnées $(x_1,\ldots,x_n)$.

Avant d'établir le théorème 1.1, notons que le corollaire 1.2 est immédiat, vu que (1.6) est toujours vraie en dimension 3 ou 4. La preuve du corollaire 1.3 est analogue à celle du théorème 1.1.

2.1. *Changement de variables.*

PROPOSITION 2.1.1. — *Pour toute fonction* f*, réelle* C^∞*, définie près de* x_0 *dans* $\mathbf{R}^n$*, telle que* $df(x_0) \neq 0$ *et la surface* $S : \{x, f(x) = f(x_0)\}$ *est non caractéristique par rapport à* P *en* x_0*, il existe un changement de variables* $(y'_1, \ldots, y'_n) = (x_1, \ldots, x_n)$ *(près de* x_0*) tel que le transformé de* P *noté* P *s'écrit :*

$$\text{(2.1.1)}\quad P = A\,\partial y'^2 + \sum_{i=1}^{n-1} W_i^2 \quad \textit{(modulo des termes d'ordre un) où}$$

$$A = \sum_{p=1}^{n-1} [x_p, f]^2$$

$$W_i = X_i - \frac{[X_i, f]}{A} \sum_{r=1}^{n-1} [X_r, f] X_r$$

et tel que :

(2.1.2) *Pour tout* i, $1 \leqslant i \leqslant n-1$ $[W_i, f] = 0$

(2.1.3) $\sum_{i=1}^{n-1} [X_i, f]\ W_i = 0$

(2.1.4) $E(W_i)_{1 \leqslant i \leqslant n-1}$ *est de dimension* $n-2$ *en tout point*

(2.1.5) $[\partial_{y'_\ell}, f] = 1$

(2.1.6) $\mathscr{A}\,(\partial_{y'_\ell}, W_i)_{1 \leqslant i \leqslant n-1}$ *est de rang* n *en tout point.*

Preuve de la proposition 2.1.1. — *a)* Comme $df(x_0) \neq 0$, il existe ℓ, $1 \leqslant \ell \leqslant n : \dfrac{\partial f}{\partial x_\ell}(x_0) \neq 0$ et l'on peut écrire (près de x_0) :

Pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant n-1$

$$\begin{cases} X_i = \alpha_i\,\partial_{x_\ell} + \tilde{X}_i \\ \text{où} \quad \alpha_i = \dfrac{[X_i, f]}{\dfrac{\partial f}{\partial x_\ell}} \end{cases}$$

b) Le changement de variables.

En considérant successivement les changements de variables suivants :

$$\begin{cases} y_\ell = f(x) \\ y_j = x_j \end{cases} \qquad j \neq \ell$$

et

$$\begin{cases} y'_\ell = y_\ell \\ y'_k = f_k(y) \end{cases} \quad k \neq \ell$$

où pour tout $k \neq \ell$, f_k vérifie l'équation :

$$(2.1.7) \quad \begin{cases} \left(\sum_{s=1}^{n-1} [X_s,f]^2 \frac{\partial f_k}{\partial y_\ell} + \sum_{i=1}^{n-1} [X_i,f]\left(\sum_{j\neq\ell} a^i_j \frac{\partial f_k}{\partial y_j}\right) = 0.\right. \\ f_k|_{y_\ell = f(x_0)} = y_k . \end{cases}$$

Le transformé de P vérifie (2.1.1).

c) Les propriétés (2.1.2) ... (2.1.6) découlent trivialement de (2.1.1) et des propriétés des X_i.

2.2. *Calcul de* $[W_i, W_j]$.

PROPOSITION 2.2.1. — *Pour tous* i, j, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, $1 \leqslant j \leqslant n-1$, *on a :*

$$(2.2.1) \quad [W_i, W_j] \equiv \frac{1}{A} W \sum_{r=1}^{n-1} [X_r,f]([X_r,f][X_i,X_j] + [X_i,f][X_j^h, X_r] + [X_j,f][X_r,X_i])$$

modulo des combinaisons linéaires des W_s.

Preuve de la proposition 2.2.1.

a) $[AW_i,AW_j] = A^2[W_i,W_j] + A([W_i,A]W_j - [W_j,A]W_i^h)$

d'où $[AW_i,AW_j] = A^2[W_i,W_j]$ modulo des combinaisons linéaires des W_s.

b) *Calcul de* $[AW_i,AW_j]$.

$$\begin{aligned}[AW_i,AW_j] &= \left[AX_i - [X_i,f]\sum_{r=1}^{n-1}[X_r.f]X_r,\ AX_j - [X_j,f]\sum_{r=1}^{n-1}[X_r,f]X_r\right] \\ &= A\left(A[X_i,X_j] - ([X_i,[X_{j,f}]] - [X_j,[X_i f]])\sum_{r=1}^{n-1}[X_r,f]X_r\right) \\ &\quad - \sum_{r=1}^{n-1}[X_j,f][X_r,f](A[X_i,X_r] + [X_r,[X_i,f]])\sum_{s=1}^{n-1}[X_s,f]X_s \\ &\quad + \sum_{r=1}^{n-1}[X_i,f][X_r,f](A[X_j,X_r] + [X_r,[X_j,f]]\sum_{s=1}^{n-1}[X_s,f]X_s)\end{aligned}$$

$$+ \sum_{r=1}^{n-1} [X_r,f][X_r,A]([X_j,f]X_i - [X_i,f]X_j)$$
$$- A[X_j,f] \sum_{r=1}^{n-1} [X_i,[X_r,f]]X_r$$
$$+ A[X_i,f] \sum_{r=1}^{n-1} [X_j,[X_r,f]]X_r$$
$$+ A([X_i,A]X_j - [X_j,A]X_i).$$

D'où (2.2.1), en utilisant le fait que :

$$2A[X_r,f]X_j - A[X_j,f]X_r - [X_j,f][X_r,f] \sum_{s=1}^{n-1} [X_s,f]X_s$$
$$= A([X_r,f]W_j - [X_j,f]W_r) + A[X_r,f]W_j.$$

2.3. *Rang de* $\mathscr{A}(W_i)$.

PROPOSITION 2.3.1. — *Sous les hypothèses du théorème* 1.1, *il existe une fonction* f, *réelle* C^∞, *définie près de* x_0 *dans* Ω, *telle que :*

(2.3.1) $df(x_0) \neq 0$.

(2.3.2) *La surface* S *définie par* $\{x,f(x)=f(x_0)\}$ *est non caractéristique par rapport à* P *en* x_0.

(2.3.3) $\mathscr{A}(w_i)_{1\leqslant i\leqslant n-1}$ *est de rang* $n-2$ *en tout point assez voisin de* x_0.

Preuve de la proposition 2.3.1.

A. On se propose tout d'abord de montrer l'existence d'une fonction f réelle C^∞, définie près de x_0, telle que :

Pour tous i_1, i_2, $i_3 \in \{1,\dots,n-1\}$, on a

(2.3.4) $[X_{i_3},f][X_{i_1},X_{i_2}] + [X_{i_1},f][X_{i_2},X_{i_3}] + [X_{i_2},f][X_{i_3},X_{i_1}]$

est une combinaison linéaire des $X_i (1\leqslant i\leqslant n-1)$.

Mais avant, notons que :

LEMME 2.3.2. — *Les deux conditions suivantes sont équivalentes : Pour tous* i_1, i_2, $i_3 \in \{1,\dots,n-1\}$

(2.3.4) $[X_{i_3},f][X_{i_1},X_{i_2}] + [X_{i_1},f][X_{i_2},X_{i_3}] + [X_{i_2},f][X_{i_3},X_{i_1}]$

est une combinaison linéaire des $X_i (1\leqslant i\leqslant n-1)$.

(2.3.5) $\sum_{r=1}^{n-1} [X_r,f]([X_r,f][X_{i_1},X_{i_2}] + [X_{i_1},f][X_{i_2},X_r] + [X_{i_2},f][X_r,X_{i_1}])$

est une combinaison linéaire des $X_i (1 \leqslant i \leqslant n-1)$.

Preuve du lemme 2.3.2. — Il est évident que (2.3.4) implique (2.3.5). Par ailleurs :

$$
\begin{aligned}
&[X_{i_3},f]\left(\sum_{r=1}^{n-1} [X_r,f]([X_r,f][X_{i_1},X_{i_2}] + [X_{i_1},f][X_{i_2},X_r] + [X_{i_2},f][X_r,X_{i_1}])\right)\\
&+ [X_{i_1},f]\left(\sum_{r=1}^{n-1} [X_r,f]([X_r,f][X_{i_2},X_{i_3}] + [X_{i_2},f][X_{i_3},X_r] + [X_{i_3},f][X_r,X_{i_2}])\right)\\
&+ [X_{i_2},f]\sum_{r=1}^{n-1} [X_r,f]([X_r,f][X_{i_3},X_{i_1}] + [X_{i_3},f][X_{i_1},X_r] + [X_{i_1},f][X_r,X_{i_3}])\\
&\qquad = \sum_{r=1}^{n-1} [X_r,f]^2([X_{i_3},f][X_{i_1},X_{i_2}] + [X_{i_1},f][X_{i_2},X_{i_3}] + [X_{i_2},f][X_{i_3},X_{i_1}]).
\end{aligned}
$$

Comme $A = \sum_{r=1}^{n-1} [X_r,f]^2 \neq 0$, on en déduit que (2.3.5) implique (2.3.4).

B. *Système d'équations.*

Notons, tout d'abord, que pour qu'il existe une fonction f, réelle C^∞, définie près de x_0, telle que :

Pour tous i_1, i_2, $i_3 \in \{1,\ldots,n-1\}$, on a

(2.3.4) $[X_{i_3},f][X_{i_1},X_{i_2}] + [X_{i_1},f][X_{i_2},X_{i_3}] + [X_{i_2},f][X_{i_3},X_{i_1}]$

est une combinaison linéaire des $X_i (1 \leqslant i \leqslant n-1)$,

il faut et il suffit que pour tous i_1, i_2, $i_3 \in \{1,\ldots,n-1\}$, on ait :

(2.3.4)'

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Det}\,(X_1,\ldots,X_{n-1},[X_{i_1},X_{i_2}])[X_{i_3},f] + \mathrm{Det}\,(X_1,\ldots,X_{n-1}[X_{i_2},X_{i_3}])[X_{i_1},f]\\
&\qquad + \mathrm{Det}\,(X_1,\ldots,X_{n-1}[X_{i_3},X_{i_1}])[X_{i_2},f] = 0.
\end{aligned}
$$

En effet, on a le :

LEMME 2.3.3. — *Pour tous* i_1, i_2, $i_3 \in \{1,\ldots,n-1\}$, *les conditions* (2.3.4) *et* (2.3.4)' *sont équivalentes.*

La preuve du lemme 2.3.3 découle facilement de (1.3).

On note par (i_1,i_2,i_3) l'équation

$$\operatorname{Det}(X_1,\ldots,X_{n-1},[X_{i_1},X_{i_2}])[X_{i_3},f] + \operatorname{Det}(X_1,\ldots,X_{n-1}[X_{i_3},X_{i_1}])[X_{i_2},f] + \operatorname{Det}(X_1,\ldots,X_{n-1},[X_{i_2},X_{i_3}])[X_{i_1},f] = 0.$$

Trouver une fonction f, réelle C^∞, définie près de x_0, telle que pour tout $i_1, i_2, i_3 \in \{1,\ldots,n-1\}$, on a (2.3.4), revient d'après le lemme 2.3.3 à résoudre le système :

$$S \quad \left\{(i,j,k), \qquad \text{où } i,j,\ k \in \{1,\ldots,n-1\}.\right.$$

C. *Résolution du système.*

On se propose, à présent, de montrer que, sous la condition (1.6) équivalente à la condition (3.1) d'après le lemme 3.1, en appendice, on peut toujours résoudre le système S. En effet, on a le :

LEMME 2.3.4. — *Sous la condition* (1.6), *il existe dans tout voisinage de* x_0 *un point* x_1 *près duquel on peut définir une fonction* f, *réelle* C^∞ *vérifiant :*

(2.3.1)′ $$df(x_1) \neq 0$$

(2.3.5) f *est solution du système* S *dans un voisinage de* x_1.

Preuve du Lemme 2.3.4. — En désignant

$$\operatorname{Det}(X_1,\ldots,X_{n-1},[X_j,X_k])X_i + \operatorname{Det}(X_1,\ldots,X_{n-1},[X_i,X_j])X_k + \operatorname{Det}(X_1,\ldots,X_{n-1},[X_k,X_i])X_j$$

par $Y_{(i,j,k)}$ pour i,j et k compris entre 1 et $n-1$, il vient, en vertu des conditions faites sur les X_i que dans tout voisinage de x_0, on peut trouver un point x_1 tel que, pour tout x assez voisin de x_1, l'algèbre de Lie engendrée par les $Y_{(i,j,k)}$ soit incluse dans l'espace vectoriel engendré par les $\{Y_{(i,j,k)},[Y_{(i,j,k)},Y_{(i',j',k')}]\}$ pour tous i, j, k, i', j' et k' compris entre 1 et $n-1$. x_1 étant ainsi choisi, il suffit, d'après le théorème de Frobeinus, de montrer que le système S est de rang $< n-1$ au voisinage de x_1. Or :

$$S = \{Y_{(i,j,k)}f=0\}$$

et, d'après (1.3) :

$$\operatorname{Det}(X_1,\ldots,X_{n-1},[Y_{(i,j,k)},Y_{(i',j',k')}]) \equiv 0$$

près de x_1 pour tous i, j, k, i', j' et k' compris entre 1 et $n-1$. D'où $(2.3.1)'$ et (2.3.5) compte tenu du choix de x_1 et du fait que les $Y_{(i,j,k)}$ sont des combinaisons linéaires des X_s.

D. *Fin de la preuve.*

D'après les lemmes 2.3.1, ..., 2.3.4, la propriété (2.1.4) et la proposition 2.2.1, il existe une fonction f, réelle C^∞, définie près de x_1, vérifiant (2.3.1) et (2.3.3). Comme $\mathscr{A}(X_i)$ est de rang n en tout point, pour tout voisinage w de x_1 dans Ω, il existe $x_2 \in \omega$ et $k : 1 \leqslant k \leqslant n-1$ tel que : $[X_k, f] \neq 0$ en x_2, on appellera toujours ce point x_0.

2.4. *Construction du contre-exemple.*

Nous supposerons, dans ce qui suit, choisi un système de coordonnées $Y = (x,t)$ (où $x \in \mathbf{R}^{n-1}, t \in \mathbf{R}$) au voisinage de (0,0) en sorte que (2.3.3) soit vérifiée en (0,0), qu'il existe $i_0, 1 \leqslant i_0 \leqslant n-1$, tel que $W'_{i_{0_t}}$ est linéairement indépendant avec les W_i, $1 \leqslant i \leqslant n-1$ en (0,0) (ce qui est toujours possible d'après (2.1.6) et (2.3.3)) et que $P \equiv A\,\partial_t^2 + \sum_{i=1}^{n-1} W_i^2(x,t,\partial_x)$; et on se propose de montrer, que pour tout $p_1(x,t;\partial_x,\partial_t)$, opérateur différentiel d'ordre un, défini près de l'origine, à coefficients C^∞, l'opérateur $A \quad \partial_t^2 + \sum_{i=1}^{n-1} W_i^2(x,t;\partial_x) + p_1(x,t;\partial_x,\partial_t)$ qu'on notera P, n'admet pas l'unicité de Cauchy par rapport à la surface (orientée) $\{t=0\}$ en (0,0) (Cf. Alinhac [2]).

La construction présentée ici est à rapprocher des travaux de Cohen [6], Plis̆ [12-13], Hörmander [8-9], Alinhac-Zuily [3]. La solution U (d'où l'on déduit la perturbation $a = -\dfrac{pu}{u}$ est obtenue comme superposition de fonctions u_k, définies dans des intervalles $[b_{k+1}, b_{k-1}]((b_k) \searrow 0)$, de la forme :

$$u_k(x,t) = e^{i\tau_k \xi(b_k,x)} e^{\nu_k \varphi\left(b_k, \frac{t-b_k}{b_k^\theta}, x\right)} e^{-Y_k(x)} W_k .$$

Ces fonctions u_k sont obtenues à l'aide de la méthode de l'optique géométrique (où les fonctions ξ et φ sont les « phases » tandis que $e^{-Y_k}W$ est l'amplitude) et sont des solutions approchées de $Pu = 0$, lorsque les « fréquences » τ_k, ν_k sont grandes.

2.4.1 *Le lemme fondamental.*

La construction du contre-exemple est fondée d'une part sur les constructions géométriques du paragraphe 2.4.2, d'autre part sur un lemme qui peut être considéré comme une variante délicate des constructions de l'optique géométrique.

Soit en effet, $P = A\,\partial_t^2 + \sum_{i=1}^{n-1} W_i(x,t;\partial_x)^2 + p_1(x,t;\partial_x\partial_t)$. Posons pour $\delta > 0$ et $\theta \in \mathbf{N}$, $\lambda = \delta^{-\theta}$, $t = \delta + s/\lambda$, l'opérateur P devient :

$$P = A\lambda^2\,\partial_s^2 + \sum_{i=1}^{n-1} W_i^2(x,\delta+s/\lambda;\partial_x) + p_1(x,\delta+s/\lambda;\partial_x,\lambda\,\partial_s).$$

Pour $\tau^2 = \lambda^2 v^2$, on a :

$$\begin{aligned}(2.4.1)\quad & e^{-i\tau\xi(\delta,x)}e^{-v\varphi(\delta,s,x)p}\left(e^{i\tau\xi(\delta,x)}e^{v\varphi(\delta,s,x)}W\right)\\ &= \lambda^2 v^2\left[A\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)^2 - \sum_{i=1}^{n-1} W_i(x,\delta+s/\lambda;\nabla_x\varepsilon)^2\right]W\\ &\quad + \lambda^2 v\left[2A\frac{\partial\varphi}{\partial s}\frac{\partial W}{\partial s} + A\frac{\partial^2\varphi}{\partial s^2}\cdot W + O(\delta)\right]\\ &\quad + \lambda^2\left[A\frac{\partial^2 W}{\partial s^2} + O(\delta)\right]\end{aligned}$$

où $O(\delta)$ désigne une fonction C^∞ dépendant de x, $\delta + \frac{s}{\lambda}$, w, $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial s}$ et tendant vers 0 avec δ.

LEMME FONDAMENTAL. — *Soit*

$$p = A\,\partial_t^2 + \sum_{i=1}^{n-1} W_i^2(x,t;\partial_x)^2 + \rho_1(x,t;\partial_x,\partial_t)$$

comme ci-dessus. Supposons qu'il existe un voisinage ω *de zéro dans* $\mathbf{R}_x^{n-1}$, *des constantes* $\theta \in \mathbf{N}$, $\delta_0 > 0$, $s_0 > 0$, *une fonction réelle* $\xi(\delta,x)$ *de classe* C^∞ *dans* $]0,\delta_0[\times\omega$, *une fonction* $\varphi(\delta,s,x)$ *de classe* C^∞ *dans* $[0,\delta_0[\times]-s_0,s_0[\times\omega$ *avec les propriétés suivantes :*

i) *les fonctions* φ *et* ξ *satisfont à l'équation de phase :*

$$(2.4.2)\qquad A\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)^2 - \sum_{i=1}^{n-1} W_i(x,\delta+s/\lambda;\nabla_x\varepsilon)^2 = 0.$$

ii) *Il existe* $M \in \mathbf{N}$ *tel que* $|\xi(\delta,x)| \leqslant \delta^{-M}$ *pour* $(\delta,x) \in]0,\delta_0[\times\omega$.

iii) $\dfrac{\partial \varphi}{\partial s}(0,0,0) \neq 0$, $\quad \operatorname{Re} \varphi(\delta,s,x) = \alpha(\delta,x)s - \beta(\delta,s,x)s^2$ *avec* $\alpha(0,0) > 0$ *et* $\beta(0,0,0) > 0$.

Il existe un voisinage V *de* $(t,x) = (0,0)$ *dans* $\mathbf{R}^n$, *des fonctions* a *et* u *de classe* C^∞ *dans* V, $\operatorname{supp} a \subset \{t \geqslant 0\}$, $\operatorname{supp} U \cap V = \{t \geqslant 0\} \cap V$ *et* $Pu + au = 0$ *dans* V.

Démonstration.

A. *Choix des paramètres.*

Dans toute la suite, on prendra pour $\delta, \nu, \lambda = \delta^{-\theta}$, $\tau^2 = \lambda^2\nu^2$ des valeurs dépendant de l'entier k (assez grand), choisies de la manière suivante :

$$\delta = b_k = k^{-\rho};\ \nu = \nu_k = \delta^{-\varepsilon};\ \lambda = b_k^{-\theta};$$

$\tau = \tau_k = b_k^{-\theta}\delta^{-\varepsilon} = \delta^{-(\theta+\varepsilon)}$ où $\rho = 5/6$, $\varepsilon = 1$ et $\theta = 2$. Néanmoins, pour la clarté des calculs, on laissera le plus souvent des lettres $\rho, \varepsilon, \ldots$ sans les remplacer par leurs valeurs. On utilisera la fonction $e^{i\tau_k\xi(b_k,x)}e^{\nu_k\varphi\left(b_k,\frac{t-b_k}{b_k},x\right)}W$ pour t dans l'intervalle $[b_{k+1}, b_{k-1}]$ où elle est bien définie (pour k assez grand) puisque l'on a :

$$|t_k| = \left|\frac{t-b_k}{b_k^\theta}\right| \leqslant \frac{b_{k-1}-b_k}{b_k^\theta} \sim \rho k^{\rho\theta-\rho-1} = 5/6k^{-1/6}.$$

B. On pose :

$$G_k(x,t) = \nu_k\,(\operatorname{Re}\varphi)\left(b_k, \frac{t-b_k}{b_k^\theta}, x\right) - \nu_{k+1}\,(\operatorname{Re}\varphi)\left(b_{k+1}, \frac{t-b_{k+1}}{b_{k+1}^\theta}, x\right).$$

Lemme 2.4.1. — *Soient* $m_k = 1/3b_k + 2/3b_{k+1}$ *et* $I_k(x) = G_k(x,m_k)$. *Alors, pour* $k \to \infty$, *on a :*

$$I_k(x) \sim -\alpha(0,x)\rho k^{\rho\theta-1}.$$

La preuve de ce lemme est identique à celle du Lemme 3.1 de [3].

Nous posons maintenant, pour $k \geqslant k_0 + 1$ assez grand :

$$Y_k(x) = -\sum_{j=k_0}^{k-1} I_j(x)$$

de sorte que

$$(2.4.3) \qquad Y_{k+1}(x) - Y_k(x) = -I_k(x).$$

D'après le lemme 2.4.1

$$\text{(2.4.4)} \qquad Y_k(x) \sim \frac{1}{\theta}\alpha(0,x)k^{\rho\theta}$$

et il existe une fonction $\tilde{Y}(\delta,x)$, de classe C^∞ en x, bornée uniformément en x, pour $x \in \omega$ et δ petit, ainsi que toutes ses dérivées telle que si l'on pose

$$Y(\delta,x) = \delta^{-\theta}\tilde{Y}(\delta,x)$$

on ait

$$Y(\delta_k,x) = Y_k(x).$$

C. *Construction des solutions formelles de* $Pu = 0$.

Si dans (2.4.1), on prend φ et ξ celles données par le lemme fondamental, le second membre de (2.4.1) sera formellement nul en prenant pour W la somme formelle :

$$W(\delta,s,x,1/\nu) = \sum_{j\geq 0} W_j(\delta,s,x)\nu^{-j}$$

les fonctions W_j étant astreintes à vérifier les équations de transport :

$$\text{(2.4.5)} \qquad 2A\frac{\partial\varphi}{\partial s}\frac{\partial W_0}{\partial s} + A\frac{\partial^2\varphi}{\partial s^2}W_0 + \cdots$$

Et, pour $j \geq 1$

$$\text{(2.4.6)} \qquad 2A\frac{\partial\varphi}{\partial s}\frac{\partial W_j}{\partial s} + \cdots \qquad = -A\frac{\partial^2 W_{j-1}}{\partial s^2} - \cdots$$

Posons $W_j = e^{-Y(\delta,x)}\tilde{W}_j$, Y ayant été déterminée au point B. Les nouvelles fonctions $\tilde{W}_j$ doivent vérifier des équations de transport : (2.4.7), pour $j = 0$, et (2.4.8) pour $j \geq 1$ du même type que (2.4.5) et (2.4.6).

On choisira donc $\tilde{W}_0$ solution de (2.4.7) avec $\tilde{W}_0(\delta,0,x) = 1$ et $\tilde{W}_j$ solution de (2.4.8) avec $\tilde{W}_j(\delta,0,x) = 0$, pour $j \geq 1$. Les fonctions $\tilde{W}_j$ ainsi obtenues sont C^∞ en (s,x), bornées ainsi que toutes leurs dérivées en (s,x), pour δ assez petit.

D. *Construction de* V_k *dans* (b_{k+1},b_{k-1}).

Soit $W(\delta,s,\xi)$ une fonction C^∞ de (s,x,ξ) au voisinage de $(0,0,0)$ telle que $W \sim \sum_{j\geq 0} W_j\xi^j$ lorsque $\xi \to 0$, au sens où : pour tous $\ell \in \mathbf{N}$,

$\alpha \in \mathbf{N}^{n-1}$, $\mathrm{N} \in \mathbf{N}$ il existe $C_{\ell,\alpha,\mathrm{N}} > 0$ tels que pour tout (δ,s,x) voisin de $(0,0,0)$ et ξ assez petit, on ait :

$$\left| D_s^{\ell} D_x^{\alpha}\left(W - \sum_{j=0}^{N} W_j \xi^j \right) \right| \leqslant C_{\ell,\alpha,N} |\xi|^{N+1}.$$

Posons $Z_k(s,x) = W\left(b_k, s, x, \frac{1}{\nu_k} \right)$. Posons, enfin, pour $t \in (b_{k+1}, b_{k-1})$

$$\text{(2.4.9)} \qquad V_k(x,t) = e^{-Y_k(x)} e^{i\tau_k \xi(b_k,x)} e^{\nu_k \varphi\left(b_k, \frac{t-b_k}{b_k^{\theta}}, x\right)} Z_k\left(\frac{t-b_k}{b_k^{\theta}}, x \right)$$

on a alors le :

LEMME 2.4.2. — *Considérons, pour* $x \in \omega$ *et* $t \in (b_{k+1}, b_{k-1})$, $r_k = \frac{P v_k}{v_k}$. *Alors il existe* k_0 *tel que pour tous* $\alpha \in \mathbf{N}^n$, $\mathrm{N} \in \mathbf{N}$ *il existe* $C_{N,\alpha} > 0$ *telle que :*

$$\text{(2.4.10)} \qquad |D^{\alpha}_{(x,t)} r_k(x,t)| \leqslant C_{N,\alpha} k^{-N}$$

pour tout $k \geqslant k_0$ *et tout* $(x,t) \in \omega \times (\delta_{k+1}, \delta_{k-1})$.

Démonstration. — La preuve de ce lemme est identique à celle du lemme 3.1 de [3].

E. *Étude de l'ensemble où* $|V_k| = |V_{k+1}|$.

Posons pour $t \in (b_{k+1}, b_k)$

$$F_k(x,t) = \mathrm{Log}\left| \frac{V_k(x,t)}{V_{k+1}(x,t)} \right|.$$

LEMME 2.4.3. — *Il existe* $C > 0$ *et* $\eta = 2\rho\theta - 1 > \rho + 1$ *telles que pour* $(x,t) \in \omega \times (b_{k+1}, b_k)$

$$\text{(2.4.13)} \qquad \left(\frac{\partial}{\partial t} F_k \right)(x,t) \geqslant C k^{\eta}.$$

La preuve de ce lemme est identique à celle du lemme 3.3 de [3].

Compte tenu de la forme de V_k et pour le choix de Y_k au point B on peut écrire

$$F_k(x,m_k) = Y_{k+1}(x) - Y_k(x) + I_k(x) + \mathrm{Log}\left| \frac{Z_k}{Z_{k+1}} \right| = \mathrm{Log}\left| \frac{Z_k}{Z_{k=1}} \right| = O(1)$$

où $m_k = 1/3b_k + 2/3b_{k+1}$. Comme $\frac{\partial F_k}{\partial t}(x,t) \geqslant Ck^\eta$ il existe une fonction $m_k(x)$ de classe C^∞ au voisinage de l'origine telle que :

$$F_k(x,m_k(x)) = 0$$

de plus

$$\left\{\begin{array}{l} m_k(x) = m_k\ e_k(x) \\ e_k(x) = O(k^{-\eta}) = O(\ell_k). \end{array}\right. \tag{2.4.14}$$

F. A partir de ce point, la preuve s'achève en deux étapes « standard », exactement identiques aux parties F et G de la démonstration du Lemme Fondamental de [3]. Nous mentionnons seulement ces étapes.

1[re] *étape :* On construit une suite de fonctions $Y_k(s,x)$, nulles sur les surfaces $t = m_k(x)$ et $t = m_{k-1}(x)$, plus petites que toute puissance de $\frac{1}{k}$ pour $t \in [b_{k+1}, b_{k-1}]$, telles que, en notant $u_k(x,t) = v_k(x,t)(1+y_k(x,t))$, on ait $\frac{Pu_k}{u_k}$ plat sur $t = m_k(x)$ et $t = m_{k-1}(x)$ cette construction utilise uniquement le lemme 2.4.2 et le fait que les surfaces $t = \mathrm{Cte}$ sont non caractéristiques pour P.

2[e] *étape :* On choisit $X \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, $X(s) = 1$ pour $|s| \leqslant 3/4$, $\operatorname{supp} X \subset [-1,+1]$, et $0 \leqslant X \leqslant 1$. On pose $X_k(t) = X\left(\frac{t-b_k}{k}\right)$ et $u(x,t) = \sum_{k \geqslant k_0} X_k(t) u_k(x,t)$, on vérifie alors que $a = \frac{Pu}{u}$ est une fonction C^∞ plate sur $t = 0$. Pour vérifier que la fonction u elle-même est plate sur $t = 0$, il suffit de remarquer que $Y_k(x)$ est de l'ordre de $k^{\rho\theta}$, tandis que $|v_k \operatorname{Re} \varphi| \leqslant \mathrm{Cte}\, k^{\varepsilon\rho}$.

2.4.2 *Résolution de l'équation de phase.*

Nous allons construire des phases φ et ξ satisfaisant l'équation de phase : $A\varphi_s'^2 - \sum_{i=1}^{n-1} W_i(x, \delta+s/\lambda; \nabla_x \xi)^2 = 0$ et les conditions du lemme fondamental.

En posant $\xi(\delta,x) = \xi_1(\delta,x) + \delta^{-\theta}\xi_2(\delta,x)$; $\xi_1(\delta,x)$, $\xi_2(\delta,x)$ vérifiant : pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant n-1$

$$\{W_i(x,\delta;\nabla_x \xi_1(\delta,x)) = A_i(x,\delta) \tag{2.4.15}$$

$$\begin{cases} W_i(x,\delta,\nabla_x\xi_2(\delta,x)) = 0 \\ W'_{i_t}(x,\delta,\nabla_x\xi_2(\delta,x)) = B_i(x,\delta) \end{cases} \tag{2.4.16}$$

où les $A_i(x,\delta)$, $B_i(x,\delta)$ pour $i \in \{1,\dots,n-1]$ sont des fonctions C^∞ réelles pour x voisin de 0 et δ assez petit telles que :

$$\sum_{i=1}^{n-1} A_i(0,0)B_i(0,0) < 0 . \tag{2.4.17}$$

L'équation de phase s'écrit :

$$\begin{aligned} A\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)^2 &= \sum_{i=1}^{n-1} W_i(x,\delta+s/\lambda;\nabla_x\xi(\delta,x))^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} [W_i(x,\delta;\nabla_x\xi_1(\delta,x)) + O(\delta^\theta) \\ &\qquad + \delta^{-\theta}W_i(x,\delta;\nabla_x\xi_2(\delta,x)) + sW'_{i_t}(x,\delta;\nabla_x\xi_2(\delta,x)) \\ &\qquad + O(\delta^\theta)]^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} [A_i(x,\delta) + sB_i(x,\delta) + O(\delta^\theta)]^2 \end{aligned}$$

d'où

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)^2(0,0,0) = \frac{1}{A(0,0)}\sum_{i=1}^{n-1} A_i(0,0)^2 > 0 \quad \text{(d'après (2.4.17))}$$

et

$$2A\,\frac{\partial\varphi}{\partial s}\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial s^2}(0,0,0) = 2\sum_{i=1}^{n-1} A_i(0,0)B_i(0,0)$$

soit

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial s^2}(0,0,0) = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} A_i(0,0)B_i(0,0)}{\sqrt{A(0,0)\sum_{i=1}^{n-1} A_i(0,0)^2}} < 0 .$$

Reste donc à prouver l'existence de ε_1, ε_2 satisfaisant à (2.4.15), (2.4.16) et (2.4.17). Nous avons le lemme suivant :

LEMME 2.4.4. — *Soient* W_i, $1 \leqslant i \leqslant n-1$ *vérifiant* (2.3.3) *en* (0,0) *et tel qu'il existe* $i_0 \in \{1,\dots,n-1\}$: $W'_{i_{0t}}$ *est linéairement indépendant avec les* W_i *en* (0,0).

Il existe alors $\varepsilon_1(\delta,x)$, $\varepsilon_2(\delta,x)$, $A_i(x,\delta)$, $B_i(x,)$ $(1\leqslant i\leqslant n-1)$ *réelles* C^∞ *près de* $x=0$ *et pour* δ *assez petit, telles que pour tout* $i\in\{1,\ldots,n-1\}$, *on ait* (2.4.15), (2.4.16) *et* (2.4.17).

Preuve du lemme 2.4.4. – D'après (2.3.3), l'algèbre de Lie engendrée par les $W_i(1\leqslant i\leqslant n-1)$ est de rang constant $n-2$ en tout point assez voisin de l'origine, d'où, d'après le théorème de Frobenius, l'existence d'une fonction $\xi_2(\delta,x)C^\infty$ réelle définie près de $(0,0)$ telle que $W_i(x,\delta;\nabla_x\varepsilon_2(\delta,x))=0$ pour tout $i\in\{1,\ldots,n-1\}$. Par ailleurs comme $W_{i_{0t}}$ n'appartient pas à $(W_i)_{1\leqslant i\leqslant n-1}$ en $(0,0)$, on peut choisir ξ_2 en sorte que $B_{i_0}(0,0)\neq 0$; il est évident que les $B_i(x,\delta)$ sont des fonctions C^∞ réelles près de l'origine. Reste à présent à montrer qu'on peut choisir ξ_1 en sorte que $\sum_{i=1}^{n-1} A_i(0,0)B_i(0,0)<0$. Pour cela, il suffit de montrer qu'il existe $\xi_0\in\mathbf{R}^n\backslash 0$ $(\nabla_x\xi_1=\xi_0)$ tel que : $\sum_{i=1}^{n-1} W_i(0,0;\xi_0)B_i(0,0)\neq 0$. En prenant ξ_0 sous la forme : $\varepsilon_0=\sum_{i\neq k}\alpha_i\xi_i$, où $W_k=\sum_{i\neq k}\lambda_i W_i$ et où pour $i\neq k$ $W_i(0,0;\xi_0)=\alpha_i$ (ce qui est toujours possible puisque d'après (2.1.4), les $(W_i)_{i\neq k}$ sont linéairement indépendants), il suffit de trouver $\alpha_1,\ldots,\alpha_{k-1},\alpha_{k+1},\ldots,\alpha_{n-1}$ tels que :

$$\sum_{i\neq k}\alpha_i B_i(0,0)+\Big(\sum_{i\neq k}\lambda_i\alpha_i\Big)\Big(\sum_{i\neq k}\lambda_i B_i(0,0)\Big)$$
$$=\sum_{i\neq k}\alpha_i\Big(B_i(0,0)+\lambda_i\sum_{j\neq k}\lambda_j B_j(0,0)\Big)\neq 0.$$

Il suffit donc qu'il existe $i\neq k$ tel que $B_i(0,0)+\lambda_i\sum_{j\neq k}\lambda_j B_j(0,0)\neq 0$. Ce qui est toujours possible, en effet, supposons que pour tout $i\neq k: B_i(0,0)+\lambda_i\sum_{j\neq k}\lambda_j B_j(0,0)=0$, or le système

$$S_1\left\{\begin{array}{l}(1+\lambda_1^2)Y_1+\lambda_1\lambda_2Y_2+\cdots+\lambda_1\lambda_{n-1}Y_{n-1}=0\\ \vdots\\ \lambda_1\lambda_{n-1}Y_1+\lambda_2\lambda_{n-1}Y_2+\cdots+(1+\lambda_{n-1}^2)Y_{n-1}=0\end{array}\right.$$

n'admet que des solutions triviales

$$Y_1=\cdots=Y_{k-1}=Y_{k+1}=\cdots=Y_{n-1}=0.$$

Puisque :

$$\operatorname{Det} S_1=\begin{vmatrix}1+\lambda_1^2 & \lambda_1\lambda_2 & \lambda_1\lambda_{n-1}\\ \vdots & & \\ \lambda_1\lambda_{n-1} & \lambda_2\lambda_{n-1} & (1+\lambda_{n-1}^2)\end{vmatrix}$$
$$=1+\lambda_1^2+\cdots+\lambda_{n-1}^2\neq 0.$$

D'où nécessairement l'existence de $i \neq k$ tel que

$$B_i(0,0) + \lambda_i \sum_{j \neq k} \lambda_j B_j(0,0) \neq 0,$$

sachant que $B_{i_0}(0,0) \neq 0$ ce qui termine la preuve du Lemme 2.4.4.

3. Appendice.

On a le :

LEMME 3.1. — ε_n *étant la forme volume associée aux* X_i, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, *vérifiant* (1.2), (1.3), (1.4), *les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

(1.6) ε_n *est de classe constante* 4 *au voisinage de* x_0.

(3.1) *Pour tous* $i_1, i_2, i_3, i_4 \in \{1,\dots,n-1\}$

$$\begin{aligned} &A(X_{i_1}, X_{i_2}, X_{i_3}, X_{i_4}) \\ &= \operatorname{Det}(X_1,\dots,X_{n-1},[X_{i_1},X_{i_2}]) \operatorname{Det}(X_1,\dots,X_{n-1},[X_{i_3},X_{i_4}]) \\ &\qquad - \operatorname{Det}(X_1,\dots,X_{n-1},[X_{i_1},X_{i_3}]) \operatorname{Det}(X_1,\dots,X_{n-1},[X_{i_2},X_{i_4}]) \\ &\qquad + \operatorname{Det}(X_1,\dots,X_{n-1},[X_{i_1},X_{i_4}]) \operatorname{Det}(X_1,\dots,X_{n-1},[X_{i_2},X_{i_3}]) \equiv 0 \end{aligned}$$

au voisinage de x_0.

Preuve du lemme 3.1. — Soit X_n un champ de vecteurs réels, à coefficients C^∞ dans l'ouvert Ω, linéairement indépendant avec les X_i, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, en tout point de Ω et donnons-nous l'élément de volume $X_1 \wedge X_2 \wedge \dots \wedge X_n$.

ε_n étant une forme Pfaff, on a (d'après Lemme 2.1 de [11]) $d\varepsilon_n(X,Y) = X\varepsilon_n(Y) - Y\varepsilon_n(X) - \varepsilon_n([X,Y])$ pour tous X, Y champs de vecteurs sur $\mathbf{R}^n$. On en déduit que pour tous $i, j \in \{1,\dots,n-1\}$ $d\varepsilon_n(X_i,X_j) = -\varepsilon_n([X_i,X_j]) = -\operatorname{Det}(X_1,\dots,X_{n-1},[X_i,X_j])$ d'où pour tous $i_1, i_2, i_3, i_4 \in \{1,\dots,n-1\}$, on a :

$$\begin{aligned} (d\varepsilon_n \wedge d\varepsilon_n)(X_{i_1},X_{i_2},X_{i_3},X_{i_4}) &= \sum_{\sigma \in \sigma_4} \operatorname{sing} \sigma \varepsilon_n([X_{i\sigma(1)},X_{i\sigma(2)}]) \varepsilon_n([X_{i\sigma(3)},X_{i\sigma(4)}]) \\ &= 8A(X_{i_1},X_{i_2},X_{i_3},X_{i_4}). \end{aligned}$$

Par conséquent, pour tous $i_1, i_2, i_3, i_4 \in \{1,\dots,n-1\}$

$$\varepsilon_n \wedge (d\varepsilon_n \wedge d\varepsilon_n)(X_{i_1},X_{i_2},X_{i_3},X_{i_4},X_n) = 8A(X_{i_1},X_{i_2},X_{i_3},X_{i_4})$$

sachant que $\varepsilon_n(X_i) = \delta_i^n$ pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$ on en déduit que (4.1) est équivalente à $\varepsilon_n \wedge (\varepsilon_n)^2 \equiv 0$ au voisinage de x_0.

Par ailleurs, comme l'algèbre de Lie engendrée par les X_i, $1 \leqslant i \leqslant n-1$ est de rang n, il existe nécessairement x_0 dans Ω tel que $\varepsilon_n \wedge d\varepsilon_n$ est non nul en x_0, donc en tout point assez voisin de x_0. ε_n étant indépendante du choix de X_n, la preuve du Lemme 4.1 est terminée.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. Abraham and J. E. Marsden, *Foundations of Mechanics*, The Benjamin, Cummings Publishing Company.
[2] S. Alinhac, Non unicité du problème de Cauchy pour des opérateurs de type principal. Sém. Goulaouic-Schwartz, exposé n° 16, École Polytechnique, Paris (Mars 1981).
[3] S. Alinhac et C. Zuily, Unicité et non unicité du problème de Cauchy pour des opérateurs à caractéristiques doubles, *Comm. in P.D.E.*, 6 (7) (1981), 799-828.
[4] H. Bahouri, Unicité et non unicité du problème de Cauchy pour des opérateurs à symbole principal réel. Thèse de 3e cycle à Orsay (1982) et article à paraître.
[5] J. M. Bony, Principe du maximum, inégalité de Harnack et unicité du problème de Cauchy pour les opérateurs elliptiques dégénérés, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, 19-1 (1969), 277-304.
[6] P. Cohen, The non uniqueness of the Cauchy problem, O. N. Techn. Report 93, Stanford 1960.
[7] C. Godbillon, *Géométrie différentielle et mécanique analytique*, Hermann.
[8] L. Hörmander, *Linear partial differential operators*, Springer Verlag, 1963.
[9] L. Hörmander, Non uniqueness for the Cauchy problem, *Lecture Notes in Math.*, Springer Verlag, n° 459 (1975), 36-72.
[10] L. Hörmander, Hypoelliptic second order differential equations. *Acta Math. Uppsala*, 119 (1967), 147-171.
[11] P. Malliavin, *Géométrie différentielle intrinsèque*, Hermann.
[12] A. Pliš, The problem of uniqueness for the solution of a system of partial differential equations, *Bull. Acad. Pol. Sci.*, 2 (1954), 55-57.
[13] A. Pliš, Non uniqueness in Cauchy's problem for differential equations of elliptic type, *J. Math. Mech.*, 9 (1960), 557-562.
[14] K. Watanabe, L'unicité du prolongement des solutions elliptiques dégénérées, *Tohoku Math. Journal*, 34 (1982), 239-249.

Manuscrit reçu le 1er avril 1985,
révisé le 25 juin 1985.

Hajer Bahouri,
École Polytechnique
Centre de Mathématiques
Plateau de Palaiseau
91128 Palaiseau Cedex.