

# ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

HEINZ BAUER

## **Silovscher Rand und Dirichletsches Problem**

*Annales de l'institut Fourier*, tome 11 (1961), p. 89-136

[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1961\\_\\_11\\_\\_89\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1961__11__89_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1961, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## ŠILOVSCHER RAND UND DIRICHLETSCHES PROBLEM

von Heinz BAUER (Hamburg).

---

### EINLEITUNG

Aus der Theorie der Banach-Algebren kennt man Begriff und Bedeutung des Šilovschen Randes: Ist  $\mathcal{A}$  eine Algebra von stetigen, komplexwertigen Funktionen auf einem kompakten Raum  $X$ , welche die konstanten Funktionen enthält und die Punkte von  $X$  trennt, so existiert nach ŠILOV [25] unter allen abgeschlossenen Teilmengen  $S$  von  $X$  mit der Eigenschaft, daß jede der Funktionen  $|f|$  mit  $f \in \mathcal{A}$  eine in  $S$  gelegene Maximalstelle besitzt, eine kleinste Menge. Diese wird mit  $\partial_{\mathcal{A}} X$  bezeichnet und heißt der Šilovsche Rand von  $X$  bezüglich  $\mathcal{A}$ . Ist z.B.  $X$  die kompakte Kreisscheibe  $|z| \leq 1$  in der komplexen  $z$ -Ebene und  $\mathcal{A}$  die Algebra aller auf  $X$  stetigen, in der offenen Kreisscheibe holomorphen Funktionen, so folgt aus dem Maximum-Prinzip der Funktionentheorie, daß  $\partial_{\mathcal{A}} X$  der topologische Rand von  $X$ , also die Kreislinie  $|z| = 1$  ist.

Eine analoge Situation liegt vor, wenn man die Algebra  $\mathcal{A}$  ersetzt durch einen Vektorraum  $\mathcal{H}$  von auf einem kompakten Raum  $X$  definierten, stetigen, reellwertigen Funktionen, welcher die konstanten reellen Funktionen enthält und die Punkte von  $X$  trennt. Dann existiert nach MILMAN [33] und ARENS-SINGER [1] eine kleinste abgeschlossene Menge  $\partial_{\mathcal{H}} X$  von  $X$  mit der Eigenschaft, daß jede Funktion aus  $\mathcal{H}$  eine in  $\partial_{\mathcal{H}} X$  gelegene Maximalstelle besitzt. Man nennt auch hier  $\partial_{\mathcal{H}} X$  den Šilovschen Rand von  $X$  bezüglich  $\mathcal{H}$ .

Der Ausgangspunkt der vorliegenden Arbeit war die Frage nach der Bedeutung dieser Begriffsbildung für die Theorie

des *Dirichletschen Problems*, oder genauer: Es sei  $\Omega$  eine offene, relativ kompakte Menge im  $\mathbb{R}^n$ . Welches ist der Šilovsche Rand der abgeschlossenen Hülle  $\bar{\Omega}$  von  $\Omega$  bezüglich des Vektorraumes  $\mathcal{H}_\Omega$  aller in  $\bar{\Omega}$  stetigen, in  $\Omega$  harmonischen, reellen Funktionen? In § 6 dieser Arbeit wird gezeigt, daß der gesuchte Šilovsche Rand die abgeschlossene Hülle der Menge der sog. regulären Randpunkte von  $\Omega$  ist.

Darüber hinaus hat aber diese spezielle Frage zu einer allgemeineren Fragestellung geführt, nämlich zu einem *abstrakten Dirichletschen Problem*, das sich vom klassischen grob gesagt dadurch unterscheidet, daß der Raum  $\bar{\Omega}$  durch einen beliebigen kompakten Raum  $X$ , der Vektorraum  $\mathcal{H}_\Omega$  durch einen Vektorraum  $\mathcal{H}$  stetiger reeller Funktionen auf  $X$  und der euklidische Rand  $\Omega^*$  von  $\Omega$  durch den Šilovschen Rand  $X^* = \partial_{\mathcal{H}} X$  ersetzt wird. Von  $\mathcal{H}$  wird zunächst nur vorausgesetzt, daß die konstanten Funktionen zu  $\mathcal{H}$  gehören und daß die Punkte von  $X$  durch  $\mathcal{H}$  getrennt werden. Durch einen sich in natürlicher Weise anbietenden Prozeß wird sodann  $\mathcal{H}$  zu einem Vektorraum  $\hat{\mathcal{H}}$  stetiger reeller Funktionen erweitert, der mit  $\mathcal{H}_\Omega$  eine wichtige Eigenschaft gemeinsam hat: Es gibt eine bezüglich gleichmäßiger Konvergenz abgeschlossene Menge  $\mathcal{E}$  stetiger reeller Funktionen auf  $X$ , welche mit je zwei Funktionen auch deren untere Einhüllende enthält; ferner gilt  $\hat{\mathcal{H}} = \mathcal{E} \cap (-\mathcal{E})$ . Bezüglich  $\mathcal{H}_\Omega$  hat die Menge aller auf  $\bar{\Omega}$  stetigen, in  $\Omega$  superharmonischen Funktionen diese Eigenschaft. Daher ist erst  $\hat{\mathcal{H}}$  das genaue Analogon zu  $\mathcal{H}_\Omega$ . Das abstrakte Dirichletsche Problem besteht dann in der Aufgabe, notwendige und hinreichende Bedingungen dafür anzugeben, daß jede auf  $X^*$  stetige reelle Funktion zu einer Funktion aus  $\hat{\mathcal{H}}$  fortgesetzt werden kann. Gewisse Ansatzpunkte zu einem abstrakten, wenn auch andersartigen Dirichletschen Problem finden sich bereits bei ARENS-SINGER [1].

Innerhalb dieser allgemeinen Theorie spielt eine in  $X^*$  dicht liegende Punktmenge, nämlich die Menge der sog.  *$\mathcal{H}$ -extremalen Punkte* von  $X$  eine wichtige Rolle. Die regulären Randpunkte von  $\Omega$  erweisen sich hinterher als identisch mit den  $\mathcal{H}_\Omega$ -extremalen Punkten von  $\bar{\Omega}$ . Daher werden in § 1 zunächst diese ausgezeichneten Punkte eingeführt und mit

ihrer Hilfe ein neuer Beweis für die Existenz des Šilovschen Randes gegeben. In den Paragraphen 2 und 3 wird dann das abstrakte Dirichletsche Problem entwickelt.

Der Rest der Arbeit ist im wesentlichen Anwendungen gewidmet. Es zeigt sich nämlich, daß die allgemeine Theorie auch nützliche Anwendungen außerhalb des Fragenkreises des klassischen Dirichletschen Problems besitzt. In § 4 wird  $X$  als *konvexe* kompakte Menge in einem lokal-konvexen Raum  $E$  angenommen und für  $\mathcal{H}$  der Vektorraum der auf  $X$  eingeschränkten, stetigen, *affin-linearen* Funktionen auf  $E$  gewählt. Dann erweist sich  $\mathcal{H}$  als der Vektorraum aller auf  $X$  stetigen, affin-linearen Funktionen. Die  $\mathcal{H}$ -extremalen Punkte fallen mit den (geometrischen) Extrempunkten von  $X$  zusammen. Das abstrakte Dirichletsche Problem reduziert sich also hier auf die Frage, wann jede stetige reelle Funktion auf der abgeschlossenen Hülle aller Extrempunkte zu einer in  $X$  stetigen, affin-linearen Funktion fortgesetzt werden kann. Hierfür erweist es sich als notwendig und hinreichend, daß  $X$  ein Simplex im Sinne von CHOQUET [21] mit abgeschlossener Extrempunktmenge ist. Die allgemeine Theorie liefert Kennzeichnungen dieser Klasse von Simplexen durch innere Eigenschaften.

Diese Anwendung wurde derjenigen über das klassische Dirichletsche Problem vorangestellt, da sie mit der allgemeinen Theorie in innigem Zusammenhang steht. Man kann nämlich im Rahmen der allgemeinen Theorie den kompakten Raum  $X$  homöomorph in den schwach topologisierten, topologischen Dualraum  $E$  von  $\mathcal{H}$  einbetten und z.B. zeigen, daß das abstrakte Dirichletsche Problem genau dann lösbar ist, wenn die abgeschlossene konvexe Hülle des Bildes von  $X$  in  $E$  ein Simplex mit kompakter Extrempunktmenge ist. Der § 5 dient der Klärung dieser Beziehungen zwischen der allgemeinen Theorie und der soeben beschriebenen speziellen Anwendung des § 4.

Erst der § 6 bringt dann die Anwendung auf das *klassische Dirichletsche Problem*. Die allgemeine Theorie liefert hierbei neuartige Einsichten in diesen Problemkreis. Hervorzuheben ist besonders die bereits erwähnte Tatsache, daß die regulären Randpunkte einer offenen, relativ kompakten Menge im  $\mathbb{R}^n$  als *Extrempunkte* gedeutet werden können.

Der § 7 bringt eine Anwendung auf das Dirichletsche Problem für *diskrete harmonische Funktionen*, die neuerdings wieder im Zusammenhang mit der Theorie der Markovschen Ketten an Bedeutung gewonnen haben [29]. Der abschließende § 8 weist im wesentlichen auf offene Fragen im Zusammenhang mit *Funktionenalgebren* hin.

Die wichtigsten Resultate dieser Arbeit wurden ohne Beweis in einer Note in den Comptes rendus de l'Académie des Sciences (Paris) [3] angekündigt. In gedrängter Form habe ich einen im Pariser Seminar über Potentialtheorie gehaltenen Vortrag über dieses Thema in [4] ausgearbeitet.

## BEZEICHNUNGEN

Im folgenden schließen wir uns weitgehend der Terminologie von N. BOURBAKI an.

Mit  $\mathbb{R}$  bzw.  $\mathbb{C}$  soll stets der topologische Körper der *reellen* bzw. *komplexen Zahlen* (Zahlengerade bzw. komplexe Zahlenebene) bezeichnet werden. Jede Abbildung  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  einer Menge  $A$  in die Zahlengerade heie *reelle* oder reellwertige Funktion auf  $A$ . Jede Abbildung  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  von  $A$  in die durch Adjunktion von  $\pm \infty$  kompaktifizierte Zahlengerade  $\overline{\mathbb{R}}$  heie *numerische Funktion* auf  $A$ .

Für jede Abbildung  $f: A \rightarrow B$  und jede Menge  $S \subset A$  bezeichne  $f_S$  die *Restriktion* der Abbildung  $f$  auf  $S$ . Eine Menge  $\mathcal{F}$  von Abbildungen einer Menge  $A$  in eine Menge  $B$  heißt *punktetrennend*, wenn zu je zwei Punkten  $x, y \in A$  mit  $x \neq y$  eine Abbildung  $f \in \mathcal{F}$  existiert mit  $f(x) \neq f(y)$ .

Ist  $X$  ein *kompakter* (und daher Hausdorffscher) Raum, so bezeichnen wir mit  $\mathcal{C}(X) = \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  bzw.  $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$  die Menge aller stetigen, reellen bzw. komplexen Funktionen auf  $X$ . Bezüglich der üblichen (punktweise definierten) Operationen ist  $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  bzw.  $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$  eine *Algebra*, insbesondere also ein *Vektorraum* ber  $\mathbb{R}$  bzw.  $\mathbb{C}$ . Beide Algebren sollen stets mit der *Topologie der gleichmäßigen Konvergenz* versehen sein. Außerdem trägt  $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$  die übliche, mit der Vektorraumstruktur verträgliche Ordnungsrelation  $\leq$ .

Für einen kompakten Raum  $X$  soll ferner  $\mathcal{M}(X)$  stets die Menge aller *positiven (Radonschen) Maße* auf  $X$  bezeichnen.  $\mathcal{M}(X)$  ist bezüglich der üblichen Operationen ein konvexer Kegel. Es sei stets mit der *vagen Topologie* versehen. Für einen beliebigen Punkt  $x \in X$  bezeichne  $\varepsilon_x$  das durch die *Einheitsmasse im Punkte  $x$*  definierte positive Maß auf  $X$ .

### § 1. — Extremalpunkte und Šilovscher Rand.

1. 1. *Definition des Šilovschen Randes.* — Es sei  $X$  ein kompakter topologischer Raum und  $\mathcal{E}$  eine nicht leere Menge von auf  $X$  definierten, nach unten halbstetigen, numerischen Funktionen. Dann nimmt bekanntlich jede Funktion  $u \in \mathcal{E}$  ihr (globales) *Minimum* auf  $X$  an, d.h. es gibt mindestens ein  $x_0 \in X$  mit

$$u(x_0) = \inf_{x \in X} u(x).$$

Jeden derartigen Punkt  $x_0$  nennen wir eine *Minimalstelle* von  $u$ .

Wir betrachten nun das System  $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathcal{E})$  aller *kompakten* Teilmengen  $S$  von  $X$  mit der Eigenschaft, daß jede Funktion  $u \in \mathcal{E}$  mindestens eine in  $S$  gelegene Minimalstelle besitzt. Es gilt dann  $X \in \mathcal{S}$ ; also ist  $\mathcal{S}$  nicht leer.

Ferner ist  $\mathcal{S}$  *induktiv geordnet* bezüglich der Relation  $\supset$ . Es sei nämlich  $\mathfrak{R}$  eine bezüglich  $\supset$  total-geordnete Teilmenge von  $\mathcal{S}$ . Dann genügt es zu zeigen, daß  $T = \bigcap_{S \in \mathfrak{R}} S$  ein Element

von  $\mathcal{S}$  ist. Zunächst ist  $T$  kompakt und nicht leer, da  $X$  kompakt und  $\mathfrak{R}$  eine Filterbasis kompakter Teilmengen von  $X$  ist. Weiter sei  $u \in \mathcal{E}$  und  $M_u$  die Menge aller Minimalstellen von  $u$ . Da  $u$  nach unten halbstetig ist, so ist  $M_u$  abgeschlossen. Aus  $M_u \cap S \neq \emptyset$  für alle  $S \in \mathcal{S}$ , also insbesondere für alle  $S \in \mathfrak{R}$ , folgt dann  $M_u \cap T \neq \emptyset$ , da  $\{M_u \cap S : S \in \mathfrak{R}\}$  eine Filterbasis kompakter Teilmengen von  $X$  ist. Daher gilt:  $T \in \mathcal{S}$ .

Nach dem Zornschen Lemma ist also in jeder Menge  $S \in \mathcal{S}$  mindestens ein minimales Element von  $\mathcal{S}$  enthalten. Die Existenz genau eines minimalen Elementes in  $\mathcal{S}$  ist daher gleichwertig mit der Existenz eines kleinsten Elementes in  $\mathcal{S}$ .

**DEFINITION 1.** — *Existiert im System  $\mathcal{S}(\mathcal{E})$  eine kleinste Menge  $S_0$ , so heiÙe  $S_0$  der Šilovsche Rand von  $X$  bezüglich  $\mathcal{E}$ ; in Zeichen:  $S_0 = \delta_{\mathcal{E}} X$ .*

1. 2.  *$\mathcal{E}$ -extremale Punkte.* — Im folgenden sollen hinreichende Bedingungen für die Existenz von  $\delta_{\mathcal{E}} X$  angegeben werden.

Die Anwendungen, auf die wir in den Paragraphen 4 und 6 zu sprechen kommen, werden zeigen, daß  $\partial_{\mathcal{E}}X$  im allgemeinen «unnatürliche» Punkte enthält. Der folgende Beweis für die Existenz von  $\partial_{\mathcal{E}}X$  (unter gewissen Zusatzvoraussetzungen) soll daher die Definition der «natürlichen Punkte von  $\partial_{\mathcal{E}}X$ » zum Ausgangspunkt haben.

Hierzu bezeichne  $\mathcal{M}_x = \mathcal{M}_x(\mathcal{E})$  für jeden Punkt  $x \in X$  die Menge aller Maße  $\mu \in \mathcal{M}(X)$  mit folgenden zwei Eigenschaften:

$$(1.1) \quad \int d\mu = 1;$$

$$(1.2) \quad \int^* u d\mu \leq u(x) \quad \text{für alle } u \in \mathcal{E}.$$

Hierbei bezeichnet  $\int^* u d\mu$  das  $\mu$ -Oberintegral von  $u$  (vgl. BOURBAKI [14], pp. 172-173, exercices 5,6). Wenn eine Funktion  $u \in \mathcal{E}$  nach unten beschränkt ist, wie das im folgenden fast immer der Fall sein wird, ist  $\int^* u d\mu = \int u d\mu$  unter der Voraussetzung der Integrierbarkeit von  $u$  und sonst  $\int^* u d\mu = +\infty$  (vgl. [14], p. 150).

Die Menge  $\mathcal{M}_x$  ist für kein  $x \in X$  leer, da offenbar stets  $\varepsilon_x$  zu  $\mathcal{M}_x$  gehört.

DEFINITION 2. — Ein Punkt  $x \in X$  heiße  $\mathcal{E}$ -extremal, wenn gilt:

$$(1.3) \quad \mathcal{M}_x(\mathcal{E}) = \{\varepsilon_x\}.$$

Die Menge aller  $\mathcal{E}$ -extremalen Punkte von  $X$  werde mit  $X_e = X_e(\mathcal{E})$  bezeichnet und heiße <sup>(1)</sup> der Choquetsche Rand von  $X$  bezüglich  $\mathcal{E}$ .

Ohne Zusatzvoraussetzungen über  $\mathcal{E}$  kann die Menge  $X_e$  leer sein, wie die beiden folgenden Beispiele zeigen:

Beispiel 1. — Der Raum  $X$  enthalte mindestens zwei Punkte;  $\mathcal{E}$  sei die Menge aller auf  $X$  konstanten reellen Funktionen.

Beispiel 2. — Der Raum  $X$  sei die mit der diskreten Topologie versehene zweipunktige Menge  $\{a, b\}$ .  $\mathcal{E}$  enthalte

<sup>(1)</sup> Nach einem Vorschlag von BISHOP und DE LEEUW [8].



als einziges Element die folgende Funktion  $u: u(a) = -\infty$ ,  $u(b) = 0$ .

Die durch diese Beispiele nahegelegten Zusatzvoraussetzungen genügen, um die Existenz  $\mathfrak{E}$ -extremaler Punkte zu beweisen:

**SATZ 1.** — Die Menge  $\mathfrak{E}$  besitze folgende zusätzliche Eigenschaften:

- (1. 4)  $\mathfrak{E}$  trennt die Punkte von  $X$ ;  
 (1. 5) es ist  $u(x) > -\infty$  für alle  $x \in X$  und  $u \in \mathfrak{E}$ .

Dann besitzt jede Funktion aus  $\mathfrak{E}$  mindestens eine  $\mathfrak{E}$ -extremale Minimalstelle. Insbesondere ist der Choquetsche Rand  $X_e(\mathfrak{E})$  nicht leer.

Der Beweis dieses Satzes wurde in [5] (Satz 2) als Folgerung aus einem allgemeinen Minimumprinzip erbracht.

**1. 3.  $\mathfrak{E}$ -exponierte Punkte.** — Spezielle  $\mathfrak{E}$ -extremale Punkte lernen wir im folgenden Beispiel kennen:

**Beispiel 3.** — Ein Punkt  $x \in X$  heiße  $\mathfrak{E}$ -exponiert, wenn eine Funktion  $u \in \mathfrak{E}$  existiert derart, daß gilt:

- (1. 6)  $-\infty < u(x) < u(y)$  für alle  $y \in X$  mit  $y \neq x$ .

Es sei  $x$  ein solcher Punkt und  $u$  eine Funktion aus  $\mathfrak{E}$  mit der Eigenschaft (1.6). Für jedes Maß  $\mu \in \mathfrak{M}_x(\mathfrak{E})$  ist dann  $u$  auf dem Träger  $T_\mu$  von  $\mu$  konstant gleich  $u(x)$  (nach [5], Hilfssatz 3). Wegen (1.6) folgt hieraus:  $T_\mu = \{x\}$ ; wegen (1.1) ist dann  $\mu = \varepsilon_x$ , also  $\mathfrak{M}_x = \{\varepsilon_x\}$ . Daher ist jeder  $\mathfrak{E}$ -exponierte Punkt auch  $\mathfrak{E}$ -extremal. Die Umkehrung hiervon gilt jedoch nicht, wie schon Beispiel 4 zeigen wird <sup>(2)</sup>.

Aus der Definition der  $\mathfrak{E}$ -exponierten Punkte folgt ferner, daß jeder derartige Punkt in jeder Menge  $S \in \mathfrak{S}(\mathfrak{E})$  und damit auch in  $\partial_{\mathfrak{E}} X$  liegt, sofern der Šilovsche Rand existiert.

**1. 4. Existenz des Šilovschen Randes.** — Die bisherigen Voraussetzungen über  $\mathfrak{E}$  (einschließlich (1.4) und (1.5)) haben nach Satz 1 zur Folge, daß die abgeschlossene Hülle  $\overline{X_e}$  des

<sup>(2)</sup> Vgl. auch die Bemerkung 3 in Nr. 4.3.

Choquetschen Randes zum System  $\mathfrak{S}(\mathfrak{E})$  gehört. Sie lassen aber nicht den Schluß zu, daß der Šilovsche Rand existiert; aus der Existenz von  $\partial_{\mathfrak{E}}X$  folgt ferner nicht die Gleichheit mit  $\overline{X}_e$ . Dies zeigen die beiden nächsten Beispiele:

Beispiel 4. — Der Raum  $X$  sei die diskret topologisierte, aus drei Punkten bestehende Menge  $\{x_1, x_2, x_3\}$ . Die (stetigen) reellen Funktionen auf  $X$  entsprechen dann eineindeutig den Vektoren des  $\mathbb{R}^3$ . Die Funktionenmenge  $\mathfrak{E}$  bestehe aus den durch den Vektoren  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$  definierten Funktionen. Es ist offenbar:  $X_e(\mathfrak{E}) = X$ . Der Šilovsche Rand existiert nicht, da alle zweipunktigen Teilmengen von  $X$  minimale Elemente von  $\mathfrak{S}(\mathfrak{E})$  sind.

Beispiel 5. — Der Raum  $X$  sei wie im Beispiel 4 definiert. Jedoch sei  $\mathfrak{E}$  jetzt die durch die Vektoren  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$ ,  $(0, 1, 1)$  und  $(1, 0, 1)$  definierte Funktionenmenge. Wiederum ist  $X_e(\mathfrak{E}) = X$ . Jedoch existiert jetzt der Šilovsche Rand:  $\partial_{\mathfrak{E}}X = \{x_1, x_2\}$ .

Es gilt nun aber der folgende.

SATZ 2. — Die Menge  $\mathfrak{E}$  besitze neben (1.4) und (1.5) noch folgende Eigenschaft:

$$(1.7) \quad u, v \in \mathfrak{E} \implies u + v \in \mathfrak{E}.$$

Dann existiert der Šilovsche Rand  $\partial_{\mathfrak{E}}X$  und er ist gleich der abgeschlossenen Hülle des Choquetschen Randes  $X_e(\mathfrak{E})$ .

Beweis. Wir setzen  $S_0 = \overline{X}_e$ . Dann folgt aus Satz 1, daß  $S_0$  zum System  $\mathfrak{S}$  gehört. Es sei nun  $S$  ein beliebiges Element aus  $\mathfrak{S}$ ; dann ist noch  $S_0 \subset S$  oder die gleichwertige Relation  $X_e \subset S$  zu beweisen. Wir betrachten hierzu einen beliebigen Punkt  $x \in X$  und konstruieren ein spezielles Maß  $\mu \in \mathfrak{M}_x(\mathfrak{E})$ , welches von  $S$  getragen wird. Für jeden Punkt  $x \in \int S$  ist dann dieses Maß von  $\varepsilon_x$  verschieden, also  $\int S \subset \int X_e$  und somit  $X_e \subset S$ .

Zur Konstruktion von  $\mu$  bezeichnen wir mit  $\mathfrak{E}_1$  die Menge aller Funktionen  $u + \alpha$  mit  $u \in \mathfrak{E}$  und  $\alpha \in \mathbb{R}$  einschließlich aller auf  $X$  konstanten reellen Funktionen. Dann überträgt sich die Eigenschaft (1.7) auf  $\mathfrak{E}_1$ ; ferner besitzt auch jede

Funktion aus  $\mathcal{E}_1$  eine in  $S$  gelegene Minimalstelle, es ist also  $S \in \mathfrak{C}(\mathcal{E}_1)$ . Für jede Funktion  $f \in \mathcal{C}(S)$  setzen wir

$$(1.8) \quad p(f) = \inf_{f \leq \nu_s, \nu \in \mathcal{E}_1} \nu(x),$$

wobei wie auf p. 93 vereinbart,  $\nu_s$  die Restriktion von  $\nu$  auf  $S$  bezeichnet. Dann gilt für alle  $f \in \mathcal{C}(S)$ :

$$(1.9) \quad |p(f)| < +\infty.$$

Es ist nämlich  $p(f) < +\infty$ , da z.B. konstante Funktionen  $\nu \in \mathcal{E}_1$  existieren mit  $f \leq \nu_s$ ; ist weiter  $\alpha \in \mathbb{R}$  eine untere Schranke von  $f$ , so gilt  $p(f) \geq \alpha$  wegen  $S \in \mathfrak{C}(\mathcal{E}_1)$ . Diese Überlegung zeigt ferner, daß

$$(1.10) \quad p(\alpha) = \alpha$$

ist für jede auf  $S$  konstante reelle Funktion  $\alpha$ . Aus  $\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}_1$  folgt noch:

$$(1.11) \quad p(f+g) \leq p(f) + p(g) \quad \text{für beliebige } f, g \in \mathcal{C}(S).$$

Nun wird durch  $\nu_0(\alpha) = p(\alpha) = \alpha$  ein Homomorphismus der additiven Gruppe aller auf  $S$  konstanten reellen Funktionen in die additive Gruppe  $\mathbb{R}$  definiert. ( $\nu_0$  ist natürlich sogar ein Isomorphismus auf  $\mathbb{R}$ .) Nach AUMANN [2] (Satz 2) kann dann  $\nu_0$  fortgesetzt werden zu einem Homomorphismus  $\nu: \mathcal{C}(S) \rightarrow \mathbb{R}$  der additiven Gruppe  $\mathcal{C}(S)$  in  $\mathbb{R}$ , und zwar derart, daß

$$(1.12) \quad \nu(f) \leq p(f) \quad \text{für alle } f \in \mathcal{C}(S)$$

gilt<sup>(3)</sup>. Dann ist  $\nu$  ein positives Maß auf  $S$ . In der Tat: aus  $f \in \mathcal{C}(S)$  und  $f \geq 0$  folgt  $-f \leq 0$  und somit  $p(-f) \leq 0$ . Nach (1.12) ist daher  $-\nu(f) = \nu(-f) \leq p(-f) \leq 0$ , also  $\nu(f) \geq 0$ . Nach einem bekannten Satz ([14], p. 35, prop. 1) ist dann aber  $\nu$  eine positive Linearform auf dem Vektorraum  $\mathcal{C}(S)$ , also  $\nu \in \mathfrak{M}(S)$ .

Das Bildmaß  $\mu = j(\nu)$  von  $\nu$  bei der kanonischen Injektion  $j: S \rightarrow X$  leistet dann das Verlangte. Zunächst ist

<sup>(3)</sup> Wir verwenden den zitierten Satz von AUMANN nur in der folgenden speziellen Form, die sich leicht aus [2] ableiten läßt: *Es sei  $H$  eine abelsche (additiv geschriebene) Gruppe und  $E$  eine Untergruppe von  $H$ ; ferner sei  $p$  eine reelle Funktion auf  $H$  mit:  $p(0) = 0$  und  $p(f+g) \leq p(f) + p(g)$  für alle  $f, g \in H$ . Dann existiert zu jedem Homomorphismus  $\nu_0: E \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\nu_0(f) \leq p(f)$  für alle  $f \in E$  ein Homomorphismus  $\nu: H \rightarrow \mathbb{R}$  mit folgenden Eigenschaften:  $\nu$  setzt  $\nu_0$  fort und es ist  $\nu(f) \leq p(f)$  für alle  $f \in H$ .*

definitionsgemäß  $\mu$  ein positives Maß auf  $X$  mit  $\mu(\int S) = 0$  und  $\int g d\mu = \int g_s d\nu$  für alle  $g \in \mathcal{C}(X)$ . Speziell ist also:  $\int d\mu = \int d\nu = \nu_0(1) = 1$ . Für jede Funktion  $u \in \mathcal{E}$ , welche gemäß (1. 5) nach unten beschränkt ist, gilt:

$$(1. 13) \quad \int^* u d\mu = \sup_{g \leq u, g \in \mathcal{C}(X)} \int g d\mu.$$

Für jedes  $g \in \mathcal{C}(X)$  mit  $g \leq u$  ist  $g_s \leq u_s$  und nach (1. 12):  $\int g d\mu = \int g_s d\nu = \nu(g_s) \leq p(g_s)$ . Nun ist aber  $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}_1$ , also auch  $u \in \mathcal{E}_1$ ; aus (1. 8) folgt daher noch:  $p(g_s) \leq u(x)$ . Zusammen mit (1. 13) ergibt dies die für alle  $u \in \mathcal{E}$  gültige Ungleichung  $\int^* u d\mu \leq u(x)$ . Damit ist  $\mu$  wie behauptet ein auf  $S$  konzentriertes Maß aus  $\mathcal{M}_x(\mathcal{E})$ , unser Satz also bewiesen.

Bemerkung. — Der Satz 2 überschneidet sich hinsichtlich der Aussage über die Existenz des Šilovschen Randes mit einem Resultat von ARENS-SINGER [1] (Theorem 2. 4). Unter der Voraussetzung, daß  $\mathcal{E}$  nur stetige Funktionen enthält und die Eigenschaften (1. 4), (1. 5) und (1. 7) besitzt, genügt nämlich die Menge  $H = \{e^{-u} : u \in \mathcal{E}\}$  den Annahmen in [1]. Dort werden allerdings  $\mathcal{E}$ -extremale Punkte und ihr Zusammenhang mit  $\partial_{\mathcal{E}} X$  nicht diskutiert.

## § 2. — $\mathcal{H}$ -harmonische Funktionen.

2. 1. *Der Vektorraum  $\mathcal{H}$ .* — Die Situation, mit der wir uns hier und im folgenden beschäftigen werden, wird spezieller sein als die im Paragraphen 1.

Gegeben sei jetzt nämlich ein kompakter Raum  $X$  und eine Menge  $\mathcal{H}$  von auf  $X$  definierten Funktionen mit folgenden Eigenschaften:

- (2. 1)  $\mathcal{H}$  ist ein linearer Unterraum von  $\mathcal{C}(X)$ ;
- (2. 2)  $\mathcal{H}$  enthält alle konstanten Funktionen aus  $\mathcal{C}(X)$ ;
- (2. 3)  $\mathcal{H}$  trennt die Punkte von  $X$ .

Dann ist für jedes  $x \in X$  die Menge  $\mathcal{M}_x(\mathcal{H})$  von Maßen definiert. Wegen der speziellen Eigenschaften von  $\mathcal{H}$  vereinfachen sich die an  $\mathcal{M}_x(\mathcal{H})$  gestellten Forderungen (1. 1) und (1. 2):

$\mathcal{M}_x(\mathcal{H})$  ist für jedes  $x \in X$  die Menge aller Maße  $\mu \in \mathcal{M}(X)$  mit :

$$(2.4) \quad \int h d\mu = h(x) \quad \text{für alle } h \in \mathcal{H}.$$

Nach dem Satz 2 existiert der Šilovsche Rand  $\partial_{\mathcal{H}} X$  und ist gleich der abgeschlossenen Hülle des Choquetschen Randes  $X_e(\mathcal{H})$  aller  $\mathcal{H}$ -extremalen Punkte. Das System  $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$  besteht somit aus allen kompakten Mengen  $S$  mit  $\partial_{\mathcal{H}} X \subset S \subset X$ . Wegen (2.1) besitzt jede Funktion aus  $\mathcal{H}$  eine in einem beliebigen  $S \in \mathfrak{S}(\mathcal{H})$  gelegene Minimal- und Maximalstelle.

2.2. Die Mengen  $\mathcal{M}_x^S$ . — Für eine beliebige Menge  $S \in \mathfrak{S}(\mathcal{H})$  verallgemeinern wir nun die Mengen  $\mathcal{M}_x(\mathcal{H})$  wie folgt: Für jeden Punkt  $x \in X$  bezeichne  $\mathcal{M}_x^S = \mathcal{M}_x^S(\mathcal{H})$  die Menge aller Maße  $\mu \in \mathcal{M}(S)$  mit :

$$(2.5) \quad \int h_S d\mu = h(x) \quad \text{für alle } h \in \mathcal{H}.$$

Offenbar ist  $\mathcal{M}_x(\mathcal{H}) = \mathcal{M}_x^X(\mathcal{H})$  für jedes  $x \in X$ . Aus (2.2) folgt :  $\int d\mu = 1$  für alle  $\mu \in \mathcal{M}_x^S(\mathcal{H})$ . Aus  $x \in S$  folgt  $\varepsilon_x \in \mathcal{M}_x^S$  und für jeden  $\mathcal{H}$ -extremalen Punkt  $x$  ist sogar  $\mathcal{M}_x^S = \{\varepsilon_x\}$ . Wir werden später sehen, daß diese letzte Eigenschaft die  $\mathcal{H}$ -extremalen Punkte sogar kennzeichnet (Satz 14).

Daß auch für Punkte  $x \in \int S$  die Menge  $\mathcal{M}_x^S$  nicht leer ist, folgt aus der folgenden Betrachtung :

Für jeden Punkt  $x \in X$  und jede Funktion  $f \in \mathcal{C}(S)$  werde gesetzt :

$$(2.6) \quad \overline{Q}_x^S(f) = \inf_{f \leq h_S, h \in \mathcal{H}} h(x);$$

$$(2.7) \quad \underline{Q}_x^S(f) = -\overline{Q}_x^S(-f).$$

Durch elementare Schlüsse, die dem Leser überlassen werden können, beweist man dann :

HILFSSATZ 1. — Für alle  $x \in X$  gilt :

$$(2.8) \quad -\infty < \underline{Q}_x^S(f) \leq \overline{Q}_x^S(f) < +\infty \quad (f \in \mathcal{C}(S));$$

$$(2.9) \quad f \leq g \Rightarrow \underline{Q}_x^S(f) \leq \underline{Q}_x^S(g) \quad (f, g \in \mathcal{C}(S));$$

$$(2.10) \quad \overline{Q}_x^S(f+g) \leq \overline{Q}_x^S(f) + \overline{Q}_x^S(g) \quad (f, g \in \mathcal{C}(S));$$

$$(2.11) \quad \underline{Q}_x^S(\lambda f) = \lambda \underline{Q}_x^S(f) \quad (f \in \mathcal{C}(S); \lambda \geq 0);$$

$$(2.12) \quad \underline{Q}_x^S(h_S) = \overline{Q}_x^S(h_S) = h(x) \quad (h \in \mathcal{H}).$$

Hieraus folgern wir nunmehr:

SATZ 3. — (a) Bei beliebiger Wahl von  $x \in X$ ,  $\mu \in \mathcal{M}_x^s$  und  $f \in \mathcal{C}(S)$  gilt:

$$(2.13) \quad \underline{Q}_x^s(f) \leq \int f d\mu \leq \overline{Q}_x^s(f).$$

(b) Sind umgekehrt  $x \in X$ ,  $f_0 \in \mathcal{C}(S)$  und  $\gamma \in \mathbb{R}$  derart gewählt, daß

$$(2.14) \quad \underline{Q}_x^s(f_0) \leq \gamma \leq \overline{Q}_x^s(f_0)$$

gilt, so gibt es mindestens ein Maß  $\mu \in \mathcal{M}_x^s$  mit:  $\gamma = \int f_0 d\mu$ .

Beweis. Zu (a): Für jedes  $h \in \mathcal{H}$  mit  $f \leq h_s$  gilt nach (2.5):  $\int f d\mu \leq \int h_s d\mu = h(x)$ ; somit ist  $\int f d\mu \leq \overline{Q}_x^s(f)$ . Bei Beachtung von (2.7) folgt hieraus die Behauptung.

Zu (b): Es sei  $\mathcal{F}_0 = \{\lambda f_0 : \lambda \in \mathbb{R}\}$  der von  $f_0$  in  $\mathcal{C}(S)$  erzeugte lineare Unterraum. Dann ist  $\lambda f_0 \rightarrow \lambda \gamma$  eine auf  $\mathcal{F}_0$  definierte Linearform  $\mu_0$ ; im Falle  $f_0 = 0$  hat man hierbei zu berücksichtigen, daß  $\gamma = 0$  ist. Für jedes  $f \in \mathcal{F}_0$  gilt:  $\mu_0(f) \leq \overline{Q}_x^s(f)$  nach (2.11) und (2.14). Wegen der Eigenschaften (2.10) und (2.11) der Funktion  $f \rightarrow \overline{Q}_x^s(f)$  existiert nach dem Satz von HAHN-BANACH (vgl. [24], p. 9) eine  $\mu_0$  auf  $\mathcal{C}(S)$  fortsetzende Linearform  $\mu$  mit  $\mu(f) \leq \overline{Q}_x^s(f)$ , also mit

$$(2.15) \quad \underline{Q}_x^s(f) \leq \mu(f) \leq \overline{Q}_x^s(f) \quad \text{für alle } f \in \mathcal{C}(S).$$

Aus  $f \geq 0$  folgt gemäß Hilfssatz 1:  $0 = \underline{Q}_x^s(0) \leq \underline{Q}_x^s(f)$ , also  $\mu(f) \geq 0$ . Somit ist  $\mu$  ein positives Maß auf  $\mathcal{C}(S)$ . Nach Konstruktion gilt:  $\int f_0 d\mu = \mu_0(f_0) = \gamma$ ; aus (2.15) folgt schließlich bei Beachtung von (2.12), daß  $\mu$  zu  $\mathcal{M}_x^s$  gehört. Damit besitzt  $\mu$  alle gewünschten Eigenschaften.

Zusammen mit (2.8) zeigt der Satz 3 insbesondere, daß keine der Mengen  $\mathcal{M}_x^s$  leer ist.

2.3.  $\mathcal{H}$ -harmonische Funktionen. — Bei gegebenem  $S \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$  fragen wir nun weiter nach der Menge aller Funktionen  $h \in \mathcal{C}(X)$ , welche der Gleichung (2.5) für alle  $x \in X$  und  $\mu \in \mathcal{M}_x^s$  genügen.

SATZ 4. — Bei beliebig gegebenem  $S \in \mathfrak{S}(\mathcal{H})$  sind für jede Funktion  $f \in \mathcal{C}(X)$  folgende Bedingungen gleichwertig:

(a)  $f(x) = \int f_s d\mu$  für alle  $x \in X$  und alle  $\mu \in \mathcal{M}_x^s(\mathcal{H})$ .

(b)  $f(x) = \underline{Q}_x^s(f_s) = \overline{Q}_x^s(f_s)$  für alle  $x \in X$ .

(c) Zu jedem  $\varepsilon > 0$  gibt es endlich viele Funktionen  $h'_1, \dots, h'_m; h''_1, \dots, h''_n$  in  $\mathcal{H}$  derart, daß für die Einhüllenden

$$\underline{h} = \sup(h'_1, \dots, h'_m) \text{ und } \overline{h} = \inf(h''_1, \dots, h''_n)$$

gilt:  $\underline{h} \leq f \leq \overline{h}$  und  $\overline{h} - \underline{h} \leq \varepsilon$ .

Beweis. (a)  $\Rightarrow$  (b): Dies ist eine unmittelbare Folgerung aus Satz 3.

(b)  $\Rightarrow$  (c): Es seien  $\varepsilon > 0$  und  $x \in X$  beliebig gewählt. Aus den Definitionsgleichungen (2. 6) und (2. 7) sowie aus (b) folgt dann die Existenz von Funktionen  $h_x^1, h_x^2 \in \mathcal{H}$  mit folgenden Eigenschaften:

$$(2. 16) \quad (h_x^1)_s \leq f_s \leq (h_x^2)_s;$$

$$(2. 17) \quad h_x^2(x) - h_x^1(x) < \varepsilon.$$

Aus (2. 16) folgt wegen der Isotonie der Funktion  $Q_y^s$  bei Beachtung von (2. 12) und (b):  $h_x^1(y) \leq f(y) \leq h_x^2(y)$  für alle  $y \in X$ , also  $h_x^2 \leq f \leq h_x^1$ . Wegen der Stetigkeit aller Funktionen aus  $\mathcal{H}$  folgt aus (2. 17) die Existenz einer offenen Umgebung  $U_x$  von  $x$  mit:  $h_x^2(y) - h_x^1(y) < \varepsilon$  für alle  $y \in U_x$ . Da der Raum  $X$  kompakt ist, genügen endlich viele der Mengen  $U_x$  zu seiner Überdeckung:  $X = U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_n}$  ( $x_i \in X$ ). Es ist dann klar, daß die Funktionen  $h'_i = h_{x_i}^1$  und  $h''_i = h_{x_i}^2$  ( $i = 1, \dots, n$ ) das Verlangte leisten.

(c)  $\Rightarrow$  (a): Zu gegebenem  $\varepsilon > 0$  wählen wir die Funktionen  $h'_1, \dots, h'_m; h''_1, \dots, h''_n$  gemäß der Bedingung (c). Durch Integration einer jeden Ungleichung  $h'_i \leq f \leq h''_j$  folgt dann  $h'_i(x) \leq \int f_s d\mu \leq h''_j(x)$  ( $i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$ ) und somit  $\underline{h}(x) \leq \int f_s d\mu \leq \overline{h}(x)$  für jedes  $x \in X$  und alle  $\mu \in \mathcal{M}_x^s$ . Wegen  $\underline{h} \leq f \leq \overline{h}$  und  $\overline{h} - \underline{h} \leq \varepsilon$  folgt weiter:  $|\int f_s d\mu - f(x)| \leq \varepsilon$  für alle  $\varepsilon > 0, x \in X$  und  $\mu \in \mathcal{M}_x^s$ . Also genügt  $f$  der Bedingung (a).

Die Tatsache, daß die Menge  $S$  nicht in der Bedingung (c) auftritt, gibt Anlaß zur folgenden Definition:

DEFINITION 3. — Eine Funktion  $f \in \mathcal{C}(X)$  heie  $\mathcal{H}$ -harmonisch, wenn sie den äquivalenten Bedingungen (a)-(c) in Satz 4 für eine Menge  $S \in \mathfrak{S}(\mathcal{H})$  (und dann auch für jede derartige Menge) genügt.

Wir bezeichnen die Menge aller  $\mathcal{H}$ -harmonischen Funktionen mit  $\hat{\mathcal{H}}$ . Aus der Definition (z. B. durch die Bedingung (a) von Satz 4) folgt sofort, daß  $\hat{\mathcal{H}}$  ein abgeschlossener, linearer Unterraum von  $\mathcal{C}(X)$  ist. Nach (2. 5) gilt:  $\mathcal{H} \subset \hat{\mathcal{H}}$ . Der Übergang von  $\mathcal{H}$  zu  $\hat{\mathcal{H}}$  ist ein gewisser Prozess der Vervollständigung, der, wie sich sofort zeigen wird, auf  $\hat{\mathcal{H}}$  angewendet zu nichts Neuem führt.

2. 4. Beziehungen zwischen  $\mathcal{H}$  und  $\hat{\mathcal{H}}$ . — Soeben wurde gezeigt, daß auch  $\hat{\mathcal{H}}$  die Eigenschaften (2. 1)-(2. 3) von  $\mathcal{H}$  besitzt. Also sind definiert die Mengen:  $X_e(\hat{\mathcal{H}})$ ,  $\partial_{\hat{\mathcal{H}}}X$ ,  $\mathfrak{S}(\hat{\mathcal{H}})$ ,  $\mathcal{M}_x^s(\hat{\mathcal{H}})$  und  $\hat{\mathcal{H}}$ . Aus der Definition von  $\hat{\mathcal{H}}$  durch die Bedingung (a) von Satz 4 für  $S = X$  folgt:  $\mathcal{M}_x(\hat{\mathcal{H}}) = \mathcal{M}_x(\mathcal{H})$  für alle  $x \in X$ . Hieraus ergibt sich:

$$(2. 18) \quad X_e(\hat{\mathcal{H}}) = X_e(\mathcal{H}).$$

Nach Satz 2 ist daher

$$(2. 19) \quad \partial_{\hat{\mathcal{H}}}X = \partial_{\mathcal{H}}X.$$

Dann aber ist auch

$$(2. 20) \quad \mathfrak{S}(\hat{\mathcal{H}}) = \mathfrak{S}(\mathcal{H})$$

und aus der Definition von  $\hat{\mathcal{H}}$  folgt:

$$(2. 21) \quad \mathcal{M}_x^s(\hat{\mathcal{H}}) = \mathcal{M}_x^s(\mathcal{H}) \quad \text{für alle } S \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}) \quad \text{und } x \in X.$$

Schließlich folgt hieraus

$$(2. 22) \quad \hat{\mathcal{H}} = \mathcal{H}.$$

Die Gleichungen (2. 18)-(2. 22) rechtfertigen die Verwendung der kürzeren Bezeichnungen  $X_e$ ,  $\mathfrak{S}$ ,  $\mathcal{M}_x^s$  und  $\mathcal{M}_x$  bei gegebenem  $\mathcal{H}$ .

Die naheliegende Vermutung, daß  $\hat{\mathcal{H}}$  gleich der abgeschlossenen Hülle von  $\mathcal{H}$  in  $\mathcal{C}(X)$  ist, wird durch das folgende Beispiel widerlegt.



Beispiel 6. — Es sei  $X$  das kompakte Intervall  $[0,1]$  auf der Zahlengeraden und  $\mathcal{H}$  die Menge aller auf  $X$  eingeschränkten, reellen, quadratischen Polynome  $x \rightarrow \alpha + \beta x + \gamma x^2$  ( $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ). Dann besitzt  $\mathcal{H}$  die Eigenschaften (2. 1)-(2. 3); ferner ist  $\mathcal{H}$  in  $\mathcal{C}(X)$  abgeschlossen. Es gilt jedoch:  $\hat{\mathcal{H}} = \mathcal{C}(X)$ . Man zeigt dies entweder direkt mit Hilfe der Definition von  $\hat{\mathcal{H}}$  durch die Bedingung (c) von Satz 4 oder einfacher wie folgt: Für jedes  $x_0 \in X$  liegt die durch  $x \rightarrow (x - x_0)^2$  definierte Funktion  $h$  in  $\mathcal{H}$  und es ist  $h(x_0) < h(x)$  für alle  $x \neq x_0$ . Also ist jeder Punkt aus  $X$   $\mathcal{H}$ -exponiert, also nach 1.3  $\mathcal{H}$ -extremal. Dann aber ergibt sich  $\hat{\mathcal{H}} = \mathcal{C}(X)$  nach dem folgenden Satz.

SATZ 5. — *Dann und nur dann ist jeder Punkt aus  $X$   $\mathcal{H}$ -extremal, wenn  $\hat{\mathcal{H}} = \mathcal{C}(X)$  ist.*

Beweis. Aus  $\hat{\mathcal{H}} = \mathcal{C}(X)$  folgt  $X = X_e(\hat{\mathcal{H}})$  unmittelbar, also  $X = X_e(\mathcal{H})$  nach (2. 18). Umgekehrt folgt aus  $X = X_e$  zunächst  $\mathbb{M}_x = \{\varepsilon_x\}$  für jedes  $x \in X$ . Die Definition der  $\mathcal{H}$ -harmonischen Funktionen liefert dann:  $\hat{\mathcal{H}} = \mathcal{C}(X)$ .

Unter einer Zusatzvoraussetzung über  $\mathcal{H}$ , die uns noch in § 3 beschäftigen wird, gilt jedoch:

SATZ 6. — *Wenn  $\mathcal{H}$  bezüglich der üblichen Ordnungsrelation  $\leq$  ein Verband ist, so ist  $\hat{\mathcal{H}}$  die abgeschlossene Hülle von  $\mathcal{H}$  in  $\mathcal{C}(X)$  (\*).*

Beweis. Zu jeder Funktion  $f \in \hat{\mathcal{H}}$  und jedem  $\varepsilon > 0$  gibt es nach Satz 4 Funktionen  $h'_1, \dots, h'_m; h''_1, \dots, h''_n$  in  $\mathcal{H}$  mit:

$$\underline{h} = \sup (h'_1, \dots, h'_m) \leq f \leq \bar{h} = \inf (h''_1, \dots, h''_n)$$

und  $\bar{h} - \underline{h} \leq \varepsilon$ . Nach Voraussetzung besitzen  $h'_1, \dots, h'_m$  eine kleinste gemeinsame Majorante  $\underline{h}_0$  in  $\mathcal{H}$ , für die offenbar gilt:  $\underline{h} \leq \underline{h}_0 \leq \bar{h}$ . Man erhält daher:  $|f - \underline{h}_0| \leq \varepsilon$ . Damit ist gezeigt, daß  $f$  in der abgeschlossenen Hülle  $\overline{\mathcal{H}}$  von  $\mathcal{H}$  liegt; es ist also:  $\hat{\mathcal{H}} \subset \overline{\mathcal{H}}$ . Da andererseits  $\hat{\mathcal{H}}$  in  $\mathcal{C}(X)$  abgeschlossen ist und  $\mathcal{H}$  als Teilmenge enthält, gilt sogar  $\overline{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}}$ .

(\*) Die Voraussetzung über  $\mathcal{H}$  besagt, daß zu je zwei Funktionen  $h_1, h_2$  in  $\mathcal{H}$  eine kleinste gemeinsame Majorante und eine größte gemeinsame Minorante in  $\mathcal{H}$  existiert.  $\mathcal{H}$  ist dann bezüglich der Relation  $\leq$  sogar ein *Rieszscher Raum* (Vektorverband).

Beispiel 7. — Es sei  $X$  das kompakte Intervall  $[0,1]$  auf der Zahlengeraden und  $\mathcal{H}$  die Menge aller auf  $X$  eingeschränkten, affin-linearen, reellen Funktionen  $x \rightarrow \alpha + \beta x$ . Dann besitzt  $\mathcal{H}$  die Eigenschaften (2.1)-(2.3).  $\mathcal{H}$  ist in  $\mathcal{C}(X)$  abgeschlossen und ein Verband. Also gilt  $\hat{\mathcal{H}} = \mathcal{H}$ . Übrigens ist hier  $X_c = \{0,1\}$ .

2.5. *Kennzeichnungen von  $\hat{\mathcal{H}}$  mittels inf-stabiler Teilmengen.* — Zunächst vereinbaren wir folgende Sprechweise: Eine Teilmenge  $\mathcal{J}$  von  $\mathcal{C}(X)$  heiße *inf-stabil*, wenn sie mit je endlich vielen Funktionen auch deren untere Einhüllende enthält. Offenbar existiert zu  $\mathcal{H}$  (allgemeiner zu jeder Teilmenge von  $\mathcal{C}(X)$ ) eine *kleinste abgeschlossene, inf-stabile Teilmenge* von  $\mathcal{C}(X)$ , die  $\mathcal{H}$  enthält. Diese Menge soll mit  $\mathcal{E}_{\mathcal{H}}$  bezeichnet werden.

Es gilt nun folgende Verallgemeinerung von Satz 4:

SATZ 7. — Für jede Funktion  $f \in \mathcal{C}(X)$  sind folgende Bedingungen gleichwertig:

(a)  $f \in \mathcal{E}_{\mathcal{H}}$ ;

(b)  $\int f d\mu \leq f(x)$  für alle  $x \in X$  und  $\mu \in \mathcal{M}_x(\mathcal{H})$ ;

(c)  $\overline{Q}_x^X(f) = f(x)$  für alle  $x \in X$ ;

(d) Zu jedem  $\varepsilon > 0$  gibt es endlich viele Funktionen

$h_1, \dots, h_n \in \mathcal{H}$  mit  $f \leq \inf(h_1, \dots, h_n) \leq f + \varepsilon$ .

Beweis. (a)  $\Rightarrow$  (b): Es sei  $\mathcal{J}$  die Menge aller Funktionen  $u \in \mathcal{C}(X)$  mit  $\int u d\mu \leq u(x)$  für alle  $x \in X$  und  $\mu \in \mathcal{M}_x$ . Dann prüft man sofort nach, daß  $\mathcal{J}$  in  $\mathcal{C}(X)$  abgeschlossen und inf-stabil ist. Da ferner  $\mathcal{H} \subset \mathcal{J}$  ist, so folgt  $\mathcal{E}_{\mathcal{H}} \subset \mathcal{J}$  und damit (b).

(b)  $\Rightarrow$  (c): Aus (b) folgt zunächst  $\overline{Q}_x^X(f) \leq f(x)$  für jedes  $x \in X$ , da nach Satz 3 speziell ein Maß  $\mu \in \mathcal{M}_x$  existiert mit  $\overline{Q}_x^X(f) = \int f d\mu$ . Nach der Definitionsgleichung (2.6) (für  $S = X$ ) ist aber auch  $f(x) \leq \overline{Q}_x^X(f)$  für alle  $x \in X$ .

(c)  $\Rightarrow$  (d): Zu  $\varepsilon > 0$  und zu jedem  $x \in X$  gibt es nach (2.6) eine Funktion  $h_x \in \mathcal{H}$  mit  $f \leq h_x$  und

$$h_x(x) < f(x) + \varepsilon = \overline{Q}_x^X(f) + \varepsilon.$$

Der Rest des Beweises verläuft dann analog zum Schritt « (b)  $\Rightarrow$  (c) » des Beweises von Satz 4.

(d)  $\Rightarrow$  (a): Da  $\mathcal{E}_{\mathcal{H}}$  definitionsgemäß eine abgeschlossene,

inf-stabile Teilmenge von  $\mathcal{C}(X)$  ist mit  $\mathcal{H} \subset \mathcal{E}_{\mathcal{H}}$ , zeigt die Bedingung (d), daß  $f$  in  $\mathcal{E}_{\mathcal{H}}$  liegt.

Nunmehr ergeben sich eine Reihe von Folgerungen:

**KOROLLAR 1.** — *Es gilt  $\hat{\mathcal{H}} = \mathcal{E}_{\mathcal{H}} \cap (-\mathcal{E}_{\mathcal{H}})$ . Dann und nur dann ist  $\mathcal{H} = \hat{\mathcal{H}}$ , wenn es eine in  $\mathcal{C}(X)$  abgeschlossene, inf-stabile Menge  $\mathcal{E}$  gibt mit  $\mathcal{H} = \mathcal{E} \cap (-\mathcal{E})$ .*

**Beweis.** Nach Satz 7 ist  $\mathcal{E}_{\mathcal{H}} \cap (-\mathcal{E}_{\mathcal{H}})$  die Menge aller  $f \in \mathcal{E}(X)$  mit  $\int f d\mu = f(x)$  für alle  $x \in X$  und  $\mu \in \mathcal{M}_x$ . Nach Definition 3 ist dies die Menge  $\hat{\mathcal{H}}$ . — Ist  $\mathcal{H} = \hat{\mathcal{H}}$ , so ist nach dem bereits Bewiesenen  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\mathcal{H}}$  eine in  $\mathcal{C}(X)$  abgeschlossene, inf-stabile Menge mit  $\mathcal{H} = \mathcal{E} \cap (-\mathcal{E})$ . Ist  $\mathcal{E}$  irgendeine Menge mit diesen Eigenschaften, so folgt  $\mathcal{H} = \hat{\mathcal{H}}$  aus der Gleichheit  $\hat{\mathcal{H}} = \mathcal{E}_{\mathcal{H}} \cap (-\mathcal{E}_{\mathcal{H}})$  und aus  $\mathcal{E}_{\mathcal{H}} \subset \mathcal{E}$ .

**KOROLLAR 2.** — *Die Menge  $\mathcal{E}_{\mathcal{H}}$  ist ein konvexer Kegel in  $\mathcal{C}(X)$  mit der Spitze 0<sup>(5)</sup>.*

**Beweis.** Zu zeigen ist:  $\mathcal{E}_{\mathcal{H}} + \mathcal{E}_{\mathcal{H}} \subset \mathcal{E}_{\mathcal{H}}$  und  $\lambda \mathcal{E}_{\mathcal{H}} \subset \mathcal{E}_{\mathcal{H}}$  für jede reelle Zahl  $\lambda \geq 0$ . Dies aber folgt aus Satz 7, (b).

**KOROLLAR 3.** — *Jede Funktion aus  $\mathcal{E}_{\mathcal{H}}$  besitzt eine  $\mathcal{H}$ -extremale Minimalstelle.*

**Beweis.** Wegen  $\mathcal{H} \subset \mathcal{E}_{\mathcal{H}} \subset \mathcal{C}(X)$  ist Satz 1 auf  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\mathcal{H}}$  anwendbar. Jede Funktion aus  $\mathcal{E}_{\mathcal{H}}$  besitzt also eine  $\mathcal{E}_{\mathcal{H}}$ -extremale Minimalstelle. Nach Satz 7 gilt  $\mathcal{M}_x(\mathcal{E}_{\mathcal{H}}) = \mathcal{M}_x(\mathcal{H})$  für alle  $x \in X$ . Daher ist  $X_e(\mathcal{H}) = X_e(\mathcal{E}_{\mathcal{H}})$ , woraus die Behauptung folgt.

Wegen  $\mathcal{H} \subset \mathcal{E}_{\mathcal{H}}$  folgt aus dem letzten Korollar noch, daß  $\delta_{\mathcal{H}}X = \delta_{\mathcal{E}_{\mathcal{H}}}X$  ist.

### § 3. — Das abstrakte Dirichletsche Problem.

**3. 1.  $\mathcal{H}$ -harmonische Maße und  $\mathcal{H}$ -resolutive Funktionen.** — Für eine beliebige Menge  $S \in \mathfrak{S}(\mathcal{H})$  folgt aus der Gleichung (2. 20), daß jede  $\mathcal{H}$ -harmonische Funktion  $h$  eindeutig durch

(<sup>5</sup>) Vgl. hierzu auch CHOQUET-DENY [23].

ihre Restriktion  $h_S$  auf  $S$  bestimmt ist. Für jede Funktion  $g \in \hat{\mathcal{H}}$  mit  $g_S = h_S$  gilt nämlich  $(g - h)_S = 0$ . Hieraus folgt  $g = h$ , da  $g - h$  sowohl eine Maximal- als auch eine Minimalstelle in  $S$  besitzt. Wir stoßen daher auf das folgende «*abstrakte*» Dirichletsche Problem: Man gebe notwendige und hinreichende Bedingungen dafür an, daß eine Funktion  $f \in \mathcal{C}(S)$  oder jede Funktion aus  $\mathcal{C}(S)$  zu einer  $\mathcal{H}$ -harmonischen Funktion auf  $X$  fortgesetzt werden kann.

Eine Antwort auf die erste Frage gibt folgender Satz:

SATZ 8. — Für jede Menge  $S \in \mathfrak{S}(\mathcal{H})$  und jede Funktion  $f \in \mathcal{C}(S)$  sind folgende Aussagen gleichwertig:

(a)  $f$  kann zu einer  $\mathcal{H}$ -harmonischen Funktion auf  $X$  fortgesetzt werden.

(b) Für jeden Punkt  $x \in X$  und je zwei Maße  $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}_x^S(\mathcal{H})$  gilt:

$$\int f d\mu_1 = \int f d\mu_2.$$

(c)  $Q_x^S(f) = \bar{Q}_x^S(f)$  für jedes  $x \in X$ .

Beweis. (a)  $\implies$  (b): Es gibt eine Funktion  $h \in \hat{\mathcal{H}}$  mit  $f = h_S$ . Daher gilt  $h(x) = \int h_S d\mu = \int f d\mu$  für alle  $x \in X$  und  $\mu \in \mathcal{M}_x^S$ . Hieraus folgt (b).

(b)  $\implies$  (c): Dies folgt aus Satz 3.

(c)  $\implies$  (a): Wir definieren eine reelle Funktion  $h$  auf  $X$  durch:  $h(x) = Q_x^S(f) = \bar{Q}_x^S(f)$ . Nach (2. 6) und (2. 7) ist sie nach oben und unten halbstetig, also stetig. Nach Satz 3 gilt  $h(x) = \int f d\mu$  für alle  $x \in X$  und  $\mu \in \mathcal{M}_x^S$ . Da für jeden Punkt  $x \in S$  das Maß  $\epsilon_x$  zu  $\mathcal{M}_x^S$  gehört, ergibt sich:  $h(x) = \int f d\epsilon_x = f(x)$ . Also ist  $h$  eine Fortsetzung von  $f$ . Die für alle  $x \in X$  und  $\mu \in \mathcal{M}_x^S$  gültige Gleichung  $h(x) = \int f d\mu = \int h_S d\mu$  besagt dann, daß  $h$   $\mathcal{H}$ -harmonisch ist.

Bei der Behandlung der zweiten Frage, die uns im folgenden ausschließlich beschäftigen wird, können wir uns auf den Fall  $S = \partial_{\mathcal{H}} X$  beschränken. In der Tat: Kann jede Funktion aus  $\mathcal{C}(S)$  zu einer  $\mathcal{H}$ -harmonischen Funktion fortgesetzt werden, so kann auch jede Funktion aus  $\mathcal{C}(\partial_{\mathcal{H}} X)$  zunächst zu einer Funktion aus  $\mathcal{C}(S)$  und diese zu einer Funktion aus  $\hat{\mathcal{H}}$  fortgesetzt werden. Wegen  $\partial_{\mathcal{H}} X \in \mathfrak{S}(\mathcal{H})$  kann also jede Funk-

tion aus  $\mathcal{C}(\partial_{\mathcal{H}}X)$  auf genau eine Weise zu einer Funktion aus  $\mathcal{C}(S)$  fortgesetzt werden. Wegen der Normalität kompakter Räume ist dies nur möglich, wenn  $S = \partial_{\mathcal{H}}X$  ist.

Wir setzen daher im folgenden zur Abkürzung:

$$(3.1) \quad X^* = \partial_{\mathcal{H}}X \quad \text{und} \quad \mathbb{M}_x^* = \mathbb{M}_x^*(\mathcal{H}) \quad \text{für jedes } x \in X.$$

Die Elemente von  $\mathbb{M}_x^*$  sollen die zum Punkt  $x \in X$  gehörigen  $\mathcal{H}$ -harmonischen Maße genannt werden. Ferner werde eine Funktion  $f \in \mathcal{C}(X^*)$  als  $\mathcal{H}$ -resolutiv bezeichnet, wenn sie zu einer Funktion aus  $\hat{\mathcal{H}}$  fortgesetzt werden kann.

Aus dem Satz 8 erhalten wir nun sofort eine erste Antwort auf unsere zweite Frage:

SATZ 9. — *Jede der beiden folgenden Bedingungen ist notwendig und hinreichend dafür, daß jede Funktion aus  $\mathcal{C}(X^*)$   $\mathcal{H}$ -resolutiv ist:*

(a) *Zu jedem Punkt  $x \in X$  gehört genau ein  $\mathcal{H}$ -harmonisches Maß.*

(b) *Für alle  $x \in X$  und  $f \in \mathcal{C}(X^*)$  gilt:  $\underline{Q}_x^*(f) = \overline{Q}_x^*(f)$ .*

3. 2. *Verbandsstruktur von  $\hat{\mathcal{H}}$ .* — Es soll jetzt ein Kriterium anderer Art für die  $\mathcal{H}$ -Resolutivität aller Funktionen aus  $\mathcal{C}(X^*)$  angegeben werden.

Wir betrachten hierzu die Abbildung  $h \rightarrow h_{X^*}$  von  $\hat{\mathcal{H}}$  in  $\mathcal{C}(X^*)$ , welche jedem  $h \in \hat{\mathcal{H}}$  seine Restriktion  $h_{X^*}$  auf  $X^*$  zuordnet. Es handelt sich offenbar um einen Monomorphismus bezüglich der Ordnungsstruktur: aus  $g \leq h$  folgt  $g_{X^*} \leq h_{X^*}$  und umgekehrt. Wenn speziell jede Funktion aus  $\mathcal{C}(X^*)$   $\mathcal{H}$ -resolutiv ist, liegt ein Isomorphismus der geordneten Mengen  $\hat{\mathcal{H}}$  und  $\mathcal{C}(X^*)$  vor. Mit  $\mathcal{C}(X^*)$  ist dann also auch  $\hat{\mathcal{H}}$  ein Verband, wegen der Verträglichkeit der Relation  $\leq$  mit der Vektorraumstruktur also sogar ein *Rieszscher Raum*.

Das angekündigte Kriterium lautet nun:

SATZ 10. — *Dann und nur dann ist jede Funktion aus  $\mathcal{C}(X^*)$   $\mathcal{H}$ -resolutiv, wenn  $\hat{\mathcal{H}}$  bezüglich der üblichen Ordnungsrelation  $\leq$  ein Verband ist.*

Zu beweisen ist nur noch, daß die angegebene Bedingung auch hinreichend ist. Der Beweis soll erst in den beiden

nächsten Nummern erbracht werden. Hier sollen zunächst einige Folgerungen aus Satz 10 besprochen werden.

Im Verband  $\hat{\mathcal{H}}$  bezeichnen wir die Verbandsoperationen mit Sup und Inf. Offenbar gilt für je zwei Funktionen  $h_1, h_2 \in \hat{\mathcal{H}}$ :

$$(3. 2) \quad \text{Inf}(h_1, h_2) \leq \inf(h_1, h_2) \leq \sup(h_1, h_2) \leq \text{Sup}(h_1, h_2).$$

Im allgemeinen ist  $\text{Sup}(h_1, h_2) \neq \sup(h_1, h_2)$  wie Beispiel 7 zeigt, welches zudem eine erste Illustration unseres Satzes 10 liefert.

Mit Hilfe der Menge  $\mathcal{E}_{\mathcal{H}}$  aus Nr. 2. 5 kann der Satz 10 auch wie folgt formuliert werden:

**KOROLLAR 1.** — *Dann und nur dann ist jede Funktion aus  $\mathcal{C}(X^*)$   $\mathcal{H}$ -resolutiv, wenn jede Funktion  $u \in \mathcal{E}_{\mathcal{H}}$  eine größte  $\mathcal{H}$ -harmonische Minorante  $h_u$  besitzt.*

**Beweis.** Es sei jede Funktion aus  $\mathcal{C}(X^*)$   $\mathcal{H}$ -resolutiv. Speziell ist dann für jedes  $u \in \mathcal{E}_{\mathcal{H}}$  die Restriktion  $u_{X^*}$  auf  $X^*$   $\mathcal{H}$ -resolutiv, also existiert ein  $h_u \in \hat{\mathcal{H}}$  mit  $h_u(x) = u(x)$  für alle  $x \in X^*$ . Wegen  $\hat{\mathcal{H}} \subset \mathcal{E}_{\mathcal{H}}$  ist  $u - h_u$  eine Funktion aus  $\mathcal{E}_{\mathcal{H}}$ . Aus  $u(x) - h_u(x) = 0$  für alle  $x \in X^*$  folgt  $u - h_u \geq 0$  nach dem Korollar 3 zu Satz 7. Also ist  $h_u$  eine  $\mathcal{H}$ -harmonische Minorante von  $u$ . Sie ist sogar die größte: Aus  $h \in \hat{\mathcal{H}}$  und  $h \leq u$  folgt  $h(x) \leq h_u(x)$  für alle  $x \in X^*$  und hieraus  $h \leq h_u$ .

Nunmehr werde umgekehrt die Existenz von  $h_u$  für jedes  $u \in \mathcal{E}_{\mathcal{H}}$  vorausgesetzt. Für jede Funktion  $h \in \hat{\mathcal{H}}$  gehört  $u = \inf(h, 0)$  zu  $\mathcal{E}_{\mathcal{H}}$ . Die zugehörige Funktion  $h_u$  ist dann eine  $\mathcal{H}$ -harmonische Minorante von  $h$  und 0. Für jede andere Minorante  $h' \in \hat{\mathcal{H}}$  von  $h$  und 0 gilt  $h' \leq u$  und somit  $h' \leq h_u$ . Also ist  $h_u$  die größte  $\mathcal{H}$ -harmonische Minorante von  $h$  und 0: es existiert  $\text{Inf}(h, 0) = h_u$ . Hieraus folgt, daß  $\hat{\mathcal{H}}$  ein Verband ist. Die Behauptung folgt daher aus Satz 10.

**KOROLLAR 2.** — *Dann und nur dann kann jede Funktion aus  $\mathcal{C}(X^*)$  zu einer Funktion aus dem Vektorraum  $\mathcal{H}$  selbst fortgesetzt werden, wenn  $\mathcal{H}$  in  $\mathcal{C}(X)$  abgeschlossen und ein Verband ist.*

**Beweis.** Kann jede Funktion aus  $\mathcal{C}(X^*)$  zu einer Funktion aus  $\mathcal{H}$  fortgesetzt werden, so ist offenbar  $\mathcal{H} = \hat{\mathcal{H}}$  und jede

Funktion aus  $\mathcal{C}(X^*)$   $\mathcal{H}$ -resolutiv. Nach Nr. 2.3 ist daher  $\mathcal{H}$  in  $\mathcal{C}(X)$  abgeschlossen, nach Satz 10 ein Verband. — Besitzt umgekehrt  $\mathcal{H}$  diese Eigenschaften, so ist  $\mathcal{H} = \hat{\mathcal{H}}$  nach Satz 6 und die Behauptung folgt abermals nach Satz 10.

Bemerkung. — Wenn  $\hat{\mathcal{H}}$  ein Verband ist, so ist  $\hat{\mathcal{H}}$  bezüglich der Norm  $\|h\| = \sup_{x \in X} |h(x)|$  sogar ein M-Raum im Sinne von KAKUTANI [27], d.h. es gilt

$$\|\text{Sup}(h_1, h_2)\| = \sup(\|h_1\|, \|h_2\|)$$

für je zwei Funktionen  $h_i \in \hat{\mathcal{H}}$  mit  $h_i \geq 0$ . Nach dem Hauptresultat von [27] ist jeder M-Raum isomorph zum Rieszschen Raum aller stetigen reellen Funktionen auf einem kompakten Raum  $Y$ . Der Satz 10 zeigt, daß der zu  $\hat{\mathcal{H}}$  gehörige Raum  $Y$  zu  $X^*$  homöomorph ist.

3.3. *Hilfssätze über Rieszsche Räume.* — Wir erinnern zunächst an einige bekannte Begriffsbildungen über Rieszsche Räume <sup>(6)</sup>. Es sei hierzu  $R$  ein Rieszscher Raum; mit  $\text{Sup}$  und  $\text{Inf}$  sollen die Verbandsoperationen bezeichnet werden. Ein linearer Unterraum  $N$  von  $R$  heißt *gesättigt*, wenn jedes Element  $f \in N$  von der Form  $f = f_1 - f_2$  ist mit  $f_i \in N$ ,  $f_i \geq 0$  ( $i = 1, 2$ ) und wenn aus  $0 \leq g \leq f$ ,  $f \in N$ ,  $g \in R$  stets  $g \in N$  folgt. Mit diesen Forderungen gleichwertig ist die Bedingung: aus  $f \in N$ ,  $g \in R$  und  $\text{Sup}(g, -g) \leq \text{Sup}(f, -f)$  folgt  $g \in N$ .

Zu jedem linearen Unterraum  $N$  von  $R$  gehört der Quotientenraum  $R/N$  und die kanonische Abbildung  $\varphi: R \rightarrow R/N$ . Ist  $N$  gesättigt und  $R^+$  die Menge aller Elemente  $\geq 0$  in  $R$ , so gibt es in  $R/N$  genau eine mit der Vektorraumstruktur verträgliche Ordnungsrelation, bezüglich welcher  $\varphi(R^+)$  die Menge aller Elemente  $\geq 0$  in  $R/N$  ist.  $R/N$  ist dann sogar ein Rieszscher Raum, und es gilt:

$$(3.3) \quad \varphi(\text{Sup}(h_1, h_2)) = \text{Sup}(\varphi(h_1), \varphi(h_2)) \quad (h_1, h_2) \in R.$$

Ein gesättigter linearer Unterraum  $N$  von  $R$  heißt *maximal*, wenn  $N \neq R$  ist und für jeden gesättigten linearen Unterraum  $N'$  mit  $N \subset N' \subset R$  gilt:  $N = N'$  oder  $N' = R$ .

<sup>(6)</sup> Vgl. hierzu und für das Folgende BOURBAKI [14], chap. II, insbesondere p. 27, exercice 4, sowie [11], p. 23, exercice 4.

Zur Vorbereitung des Beweises von Satz 10 benötigen wir einige Hilfssätze:

**HILFSSATZ 2.** — *Es sei  $N$  ein maximaler gesättigter linearer Unterraum eines Rieszschen Raumes  $R$ . Dann ist  $N$  eine Hyperebene in  $R$  und es gibt eine positive Linearform  $\chi$  auf  $R$  mit  $N = \chi^{-1}(0)$ . Jede solche positive Linearform  $\chi$  genügt den folgenden Bedingungen:*

- (3. 4)  $\chi(\text{Sup}(h_1, h_2)) = \sup(\chi(h_1), \chi(h_2)) \quad (h_1, h_2 \in R);$   
 (3. 5)  $\chi(\text{Inf}(h_1, h_2)) = \inf(\chi(h_1), \chi(h_2)) \quad (h_1, h_2 \in R);$   
 (3. 6)  $\text{Inf}(h_1, h_2) = 0 \implies \chi(h_1) = 0 \text{ oder } \chi(h_2) = 0 \quad (h_1, h_2 \in R).$

*Diese sind für jede positive Linearform  $\chi$  auf  $R$  äquivalent.*

**Beweis.** Es sei  $\varphi: R \rightarrow R/N$  die kanonische Abbildung von  $R$  auf den Rieszschen Raum  $R/N$ . Aus der Maximaleigenschaft von  $N$  folgt, daß  $\{0\}$  der einzige maximale gesättigte lineare Unterraum von  $R/N$  ist. Daher existiert ein Isomorphismus  $\psi: R/N \rightarrow R$  auf den Rieszschen Raum  $R$  der reellen Zahlen (<sup>7</sup>). Dann ist  $\chi_0 = \psi \circ \varphi$  eine positive Linearform auf  $R$  mit  $\chi_0^{-1}(0) = \varphi^{-1}(0) = N$ , welche nach (3. 3) die Eigenschaft (3. 4) besitzt. Insbesondere ist dann  $N$  eine Hyperebene in  $R$ . Jede andere positive Linearform  $\chi$  auf  $R$  mit  $\chi^{-1}(0) = N$  ist von der Form  $\chi = \lambda\chi_0$  mit  $\lambda > 0$ ,  $\lambda \in R$ , und besitzt daher ebenfalls die Eigenschaft (3. 4). Schließlich rechnet man leicht nach, daß die Eigenschaften (3. 4)-(3. 6) für jede positive Linearform  $\chi$  auf  $R$  äquivalent sind (<sup>8</sup>).

**HILFSSATZ 3.** — *Für jede positive Linearform  $\chi \neq 0$  auf einem Rieszschen Raum  $R$ , welche die Eigenschaften (3. 4)-(3. 6) besitzt, ist  $N = \chi^{-1}(0)$  ein maximaler gesättigter linearer Unterraum.*

**Beweis.** Für jedes Element  $f \in R$  gilt bekanntlich  $f = f^+ - f^-$  und  $\text{Inf}(f^+, f^-) = 0$ , wenn man setzt:  $f^+ = \text{Sup}(f, 0)$  und  $f^- = (-f)^+$ . Aus (3. 6) folgt daher  $\chi(f^+) = 0$  oder  $\chi(f^-) = 0$ . Wegen  $\chi(f) = \chi(f^+) - \chi(f^-)$  folgt hieraus:  $\chi(f^+) = \chi(f^-) = 0$  für jedes  $f \in N$ ; also liegen mit  $f$  auch  $f^+$  und  $f^-$  in  $N$ . Somit ist jedes  $f \in N$  die Differenz von Elementen  $\geq 0$  aus  $N$ . Aus

(<sup>7</sup>) Vgl. BIRKHOFF [7], p. 239; gesättigte lineare Unterräume werden dort  $l$ -Ideale genannt. Vgl. ferner BOURBAKI [11], p. 23, exercice 4.

(<sup>8</sup>) Vgl. auch KAKUTANI [27], p. 1001.



$0 \leq g \leq f$ ,  $f \in N$ ,  $g \in R$  und der Positivität von  $\chi$  folgt:  $\chi(g) = 0$ , also  $g \in N$ . Somit ist  $N$  ein gesättigter linearer Unterraum von  $R$ .  $N$  ist maximal, da  $N$  als Hyperebene sogar ein maximales Element in der Menge aller echten linearen Unterräume von  $R$  ist.

**HILFSSATZ 4.** — *Es sei  $Y$  ein kompakter Raum und  $\mathcal{R}$  ein die Punkte von  $Y$  trennender, die konstanten reellen Funktionen enthaltender, linearer Unterraum von  $\mathcal{C}(Y)$ . Ferner sei  $\mathcal{R}$  ein Verband bezüglich der üblichen Relation  $\leq$  (und damit ein Rieszscher Raum). Dann existiert zu jedem maximalen gesättigten linearen Unterraum  $\mathcal{N}$  von  $\mathcal{R}$  genau ein Punkt  $y_0 \in Y$  derart, daß  $\mathcal{N}$  die Menge aller  $f \in \mathcal{R}$  ist mit  $f(y_0) = 0$ .*

**Beweis.** Auf Grund der Voraussetzungen über  $\mathcal{R}$  gibt es zu je zwei verschiedenen Punkten  $y_1, y_2 \in Y$  eine Funktion  $f \in \mathcal{R}$  mit  $f(y_1) = 0$  und  $f(y_2) \neq 0$ . Daher kann zu  $\mathcal{N}$  höchstens ein Punkt  $y_0$  mit den genannten Eigenschaften existieren. Den Existenzbeweis führen wir indirekt: Angenommen zu jedem  $y \in Y$  gibt es eine Funktion  $f_y \in \mathcal{N}$  mit  $f_y(y) \neq 0$ . Da sich jede Funktion aus  $\mathcal{N}$  als Differenz nicht-negativer Funktionen aus  $\mathcal{N}$  darstellen läßt, kann o.B.d.A.  $f_y \geq 0$  angenommen werden. Daher gibt es zu  $y \in Y$  eine offene Umgebung  $U_y$  von  $y$  mit:  $f_y(z) > 0$  für alle  $z \in U_y$ . Da  $Y$  kompakt ist, gibt es endlich viele Punkte  $y_1, \dots, y_n \in Y$  mit  $Y = U_{y_1} \cup \dots \cup U_{y_n}$ . Die Funktion  $f_0 = f_{y_1} + \dots + f_{y_n}$  liegt in  $\mathcal{N}$  und ist auf  $Y$  strikt positiv. Zu jedem  $f \in \mathcal{R}$  mit  $f \geq 0$  gibt es daher eine Zahl  $\alpha > 0$  mit  $0 \leq f \leq \alpha f_0$ , woraus  $f \in \mathcal{N}$  folgt. Hieraus ergibt sich aber  $\mathcal{N} = \mathcal{R}$ , was falsch ist. Damit ist die Existenz eines  $y_0 \in Y$  bewiesen mit  $f(y_0) = 0$  für alle  $f \in \mathcal{N}$ . Es ist  $\mathcal{N}$  sogar gleich der Menge  $\mathcal{N}'$  aller  $f \in \mathcal{R}$  mit  $f(y_0) = 0$ . Es ist nämlich  $\mathcal{N}$  eine Hyperebene in  $\mathcal{R}$  nach Hilfssatz 2;  $\mathcal{N}'$  ist eine Hyperebene in  $\mathcal{R}$  nach Definition. Aus  $\mathcal{N} \subset \mathcal{N}'$  folgt daher  $\mathcal{N} = \mathcal{N}'$ .

Der Hilfssatz 4 kann unter Heranziehung der vorausgehenden Hilfssätze auch wie folgt ausgesprochen werden: *Zu jeder positiven Linearform  $\chi$  auf  $\mathcal{R}$  mit  $\chi(1) = 1$  und den gleichwertigen Eigenschaften (3. 4)-(3. 6) gibt es genau einen Punkt  $y_0 \in Y$  mit  $\chi(f) = f(y_0)$  für alle  $f \in \mathcal{R}$ .*

Wir fragen daher jetzt nach allen Punkten  $y \in Y$ , für welche die Linearform  $f \rightarrow f(y)$  auf  $\mathcal{R}$  die Eigenschaften (3. 4)-(3. 6)

besitzt. Hiermit gleichbedeutend ist die Frage nach allen Punkten  $y \in Y$ , für welche die Menge  $\mathcal{N}_y = \{f \in \mathcal{R} : f(y) = 0\}$  ein (notwendig maximaler) gesättigter linearer Unterraum ist.

**HILFSSATZ 5.** — *Unter den in Hilfssatz 4 über  $Y$  und  $\mathcal{R}$  gemachten Voraussetzungen gilt: Die Menge  $Y_0$  aller Punkte  $y \in Y$ , für welche die Linearform  $f \rightarrow f(y)$  auf  $\mathcal{R}$  die Eigenschaften (3. 4)-(3. 6) besitzt, ist gleich dem Šilovschen Rand  $\delta_{\mathcal{R}} Y$ .*

**Beweis.** Wir zeigen zunächst, daß  $Y_0$  abgeschlossen und damit kompakt ist. Hierzu sei  $y \in \overline{Y_0}$ . Dann gibt es Funktionen  $f_1, f_2 \in \mathcal{R}$  mit  $\inf (f_1, f_2) = 0$  sowie mit  $f_1(y) > 0$  und  $f_2(y) > 0$ . Aus Stetigkeitsgründen sind  $f_1$  und  $f_2$  sogar noch in einer Umgebung  $U$  von  $y$  strikt positiv. Also ist  $U$  zu  $Y_0$  fremd. Damit ist die Offenheit von  $\overline{Y_0}$ , also die Abgeschlossenheit von  $Y_0$  bewiesen.

Weiter besitzt jede Funktion  $f_0 \in \mathcal{R}$  eine in  $Y_0$  gelegene Minimalstelle. Hierzu sei  $\alpha = \inf_{y \in Y} f_0(y)$  und  $M$  die Menge aller Minimalstellen von  $f_0$ . Wir betrachten die Menge  $\mathcal{N}_0$  aller Funktionen  $f \in \mathcal{R}$ , die sich in der Form  $f = f_1 - f_2$  darstellen lassen, wobei  $f_i \in \mathcal{R}$ ,  $f_i \geq 0$  und  $f_i(x) = 0$  ist für alle  $x \in M$  ( $i = 1, 2$ ). Offenbar ist  $\mathcal{N}_0$  ein gesättigter linearer Unterraum, der  $f_0 - \alpha$  aber nicht die konstante Funktion 1 als Element enthält. Eine einfache Anwendung des Zornschen Lemmas ergibt dann die Existenz eines maximalen gesättigten linearen Unterraumes  $\mathcal{N}$  mit  $\mathcal{N}_0 \subset \mathcal{N}$ . Nach Hilfssatz 4 entspricht diesem genau ein Punkt  $y_0 \in Y$  mit:  $\mathcal{N} = \{f \in \mathcal{R} : f(y_0) = 0\}$ . Nach der diesem Hilfssatz vorangestellten Bemerkung liegt  $y_0$  in  $Y_0$ ; wegen  $f_0 - \alpha \in \mathcal{N}_0 \subset \mathcal{N}$  gilt  $f_0(y_0) = \alpha$ . Also ist  $y_0$  eine in  $Y_0$  gelegene Minimalstelle von  $f_0$ .

Schließlich haben wir noch zu zeigen, daß  $Y_0$  in  $Y^* = \delta_{\mathcal{R}} Y$  enthalten und damit gleich  $Y^*$  ist. Hierzu betrachten wir die Abbildung  $f \rightarrow f_{Y^*}$  von  $\mathcal{R}$  auf den Vektorraum  $\mathcal{R}_{Y^*}$  aller Restriktionen  $f_{Y^*}$  mit  $f \in \mathcal{R}$ ; diese ist ein Isomorphismus bezüglich der Vektorraumstruktur und der Ordnungsstruktur. Insbesondere ist also mit  $\mathcal{R}$  auch  $\mathcal{R}_{Y^*}$  ein Verband. Ferner folgt, daß für jeden Punkt  $y_0 \in Y_0$  die auf  $\mathcal{R}_{Y^*}$  definierte positive Linearform  $f_{Y^*} \rightarrow f(y_0) = \chi(f_{Y^*})$  die Eigenschaften (3. 4)-(3. 6) besitzt. Aus dem Hilfssatz 4 ergibt sich daher die Existenz

eines Punktes  $z_0 \in Y^*$  mit  $f_{Y^*}(z_0) = \gamma(f_{Y^*})$ , also mit  $f(z_0) = f(y_0)$  für alle  $f \in \mathcal{R}$ . Hieraus folgt  $z_0 = y_0 \in Y^*$ . Also gilt  $Y_0 \subset Y^*$ , was noch zu zeigen war.

3. 4. *Beweis des Satzes 10.* — Es werde nun  $\hat{\mathcal{H}}$  als Verband vorausgesetzt. Zu zeigen ist die  $\mathcal{H}$ -Resolutivität aller Funktionen aus  $\mathcal{C}(X^*)$ .

Nach dem Hilfssatz 5 (angewandt auf  $Y = X$  und  $\mathcal{R} = \hat{\mathcal{H}}$ ) ist  $X^*$  die Menge aller Punkte  $x \in X$ , für welche die positive Linearform  $h \rightarrow h(x)$  die Eigenschaften (3. 4)-(3. 6) besitzt. Nach (3. 4) gilt dann also:

$$(3. 7) \quad [\text{Sup}(g, h)]_{X^*} = \text{sup}(g_{X^*}, h_{X^*})$$

für je zwei Funktionen  $g, h \in \hat{\mathcal{H}}$ . Daher genügt der lineare Unterraum  $\hat{\mathcal{H}}_{X^*}$  von  $\mathcal{C}(X^*)$  aller Restriktionen  $h_{X^*}$  mit  $h \in \hat{\mathcal{H}}$  den Voraussetzungen des Approximationssatzes von M. H. STONE. Nach diesem Satz ist  $\hat{\mathcal{H}}_{X^*}$  in  $\mathcal{C}(X^*)$  dicht. Nun ist aber  $\hat{\mathcal{H}}$  in  $\mathcal{C}(X)$  abgeschlossen; aus den fundamentalen Eigenschaften des Šilovschen Randes folgt dann auch die Abgeschlossenheit von  $\hat{\mathcal{H}}_{X^*}$  in  $\mathcal{C}(X^*)$ . Also ist  $\hat{\mathcal{H}}_{X^*} = \mathcal{C}(X^*)$  und damit der Beweis für Satz 10 erbracht.

3. 5. *Aussagen über den Choquetschen Rand.* — Abschließend untersuchen wir die Frage, in welcher Weise die  $\mathcal{H}$ -Resolutivität jeder Funktion aus  $\mathcal{C}(X^*)$  den Choquetschen Rand  $X_c$  einschränkt.

SATZ 11. — *Ist jede Funktion aus  $\mathcal{C}(X^*)$   $\mathcal{H}$ -resolutiv, so ist der Choquetsche Rand  $X_c(\mathcal{H})$  gleich dem Šilovschen Rand  $\partial_{\mathcal{H}} X$ .*

Beweis. Zu zeigen ist offenbar nur:  $X^* \subset X_c$ . Nach Satz 9 gehört zu jedem Punkt  $x \in X$  genau ein  $\mathcal{H}$ -harmonisches Maß  $\mu_x$ ; speziell ist  $\mu_x = \varepsilon_x$  für  $x \in X^*$ . Die durch  $\varphi(x) = \mu_x$  definierte Abbildung  $\varphi: X \rightarrow \mathcal{M}(X^*)$  ist stetig. Es sei nämlich  $\mathfrak{F}$  ein gegen  $x_0 \in X$  konvergenter Filter in  $X$ ; dann gilt aus Stetigkeitsgründen:  $h(x_0) = \lim_{\mathfrak{F}} h(x)$ , d. h.  $\int h_{X^*} d\mu_{x_0} = \lim_{\mathfrak{F}} \int h_{X^*} d\mu_x$  für alle  $h \in \hat{\mathcal{H}}$ . Da nach Voraussetzung jede Funktion  $f \in \mathcal{C}(X^*)$  von der Form  $f = h_{X^*}$  mit  $h \in \hat{\mathcal{H}}$  ist, bedeutet dies:  $\mu_{x_0} = \lim_{\mathfrak{F}} \mu_x$ , also die Stetigkeit von  $\varphi$ . Es sei jetzt  $x_0$  ein beliebiger Punkt aus

$X^*$  und  $\mu \in \mathcal{M}(X)$  ein Maß mit  $\int h d\mu = h(x_0)$  für alle  $h \in \mathcal{H}$ . Wegen der Stetigkeit von  $\varphi$  existiert  $\int \varphi d\mu$  und es ist  $\mu_\varphi = \int \varphi d\mu = \int \mu_x d\mu(x)$  ein Maß aus  $\mathcal{M}(X^*)$ ; es gilt

$$\int h_{X^*} d\mu_\varphi = \int \left( \int h_{X^*} d\mu_x \right) d\mu(x) = \int h(x) d\mu(x) = h(x_0)$$

für alle  $h \in \mathcal{H}$ . Also ist  $\mu_\varphi$  das zu  $x_0$  gehörige  $\mathcal{H}$ -harmonische Maß, d.h.  $\mu_\varphi = \varepsilon_{x_0}$ . Aus  $\varepsilon_{x_0} = \int \mu_x d\mu(x)$  und  $\int d\mu = 1$  folgt aber  $\mu = \varepsilon_{x_0}$ . In der Tat: für die in  $X^*$  offene Menge  $U = X^* \cap \{x_0\}$  gilt ([15], p. 19, corollaire)

$$0 = \varepsilon_{x_0}(U) = \int^* \mu_x(U) d\mu(x),$$

woraus  $\mu_x(U) = 0$  für  $\mu$ -fast alle  $x \in X$  folgt. Nun ist aber  $\mu_x(U) = 0$  und  $\int d\mu = 1$  gleichbedeutend mit  $\mu_x = \varepsilon_{x_0}$ . Daher ist  $\mu_x(U) > 0$  für alle  $x \neq x_0$  aus  $X$ . Wir erhalten somit  $\mu(\{x_0\}) = 0$ , was zusammen mit  $\int d\mu = 1$  die Gleichheit  $\mu = \varepsilon_{x_0}$  liefert. Also ist damit gezeigt, daß jeder Punkt  $x_0 \in X^*$   $\mathcal{H}$ -extremal ist.

Wenn der Raum  $X$  (oder auch nur  $X^*$ ) metrisierbar ist, läßt sich dieses Resultat verschärfen zu:

**SATZ 12.** — *Ist jede Funktion aus  $\mathcal{C}(X^*)$   $\mathcal{H}$ -resolutiv und ist  $X^*$  metrisierbar, so ist jeder Punkt des Šilovschen Randes  $X^*$   $\mathcal{H}$ -exponiert.*

Beweis. Es sei  $x_0$  in  $X^*$  beliebig gewählt. Nach Voraussetzung gibt es eine Funktion  $f \in \mathcal{C}(X^*)$  mit  $f(x) > f(x_0) = 0$  für alle  $x \neq x_0$  aus  $X^*$ . Wir behaupten, daß dann für die Funktion  $h \in \mathcal{H}$  mit  $h_{X^*} = f$  gilt:  $h(x) > h(x_0) = f(x_0) = 0$  für alle  $x \neq x_0$  aus  $X$ . Wegen  $f \geq 0$  gilt zunächst  $h \geq 0$ . Es sei  $x \in X$  mit  $h(x) = 0$ . Wir zeigen, daß dies  $x = x_0$  zur Folge hat. Für das zu  $x$  gehörige  $\mathcal{H}$ -harmonische Maß  $\mu_x$  gilt:  $\int f d\mu_x = 0 = f(x_0)$ . Hieraus folgt ([5], Hilfssatz 3), daß  $f$  auf dem Träger  $T_{\mu_x}$  von  $\mu_x$  gleich Null ist. Da  $x_0$  die einzige Nullstelle von  $f$  ist, impliziert dies  $T_{\mu_x} \subset \{x_0\}$ . Zusammen mit  $\int d\mu_x = 1$  ergibt dies:  $\mu_x = \varepsilon_{x_0}$ . Da  $\mathcal{H}$  die Punkte von  $X$  trennt, muß dann schließlich  $x = x_0$  sein.

§ 4. — Anwendung: Kennzeichnung gewisser Simplexe  
von G. CHOQUET.

4. 1. *Lineare und konkave Funktionen.* — Der bislang beliebige kompakte Grundraum  $X$  sei in diesem Paragraphen eine *konvexe, kompakte* Teilmenge eines *lokal-konvexen* topologischen Vektorraumes  $E$  (über  $\mathbb{R}$ ) <sup>(9)</sup>. Mit  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(X)$  bezeichnen wir die Menge aller auf  $X$  eingeschränkten, stetigen, *affin-linearen* Funktionen auf  $E$ . Affin-linear auf  $E$  heißt dabei jede Funktion  $f = l + \alpha$  auf  $E$ , wobei  $l$  eine Linearform auf  $E$  und  $\alpha$  eine konstante reelle Funktion ist. Im folgenden übernehme  $\mathcal{L}$  die Rolle des Vektorraumes  $\mathcal{K}$  der allgemeinen Theorie. Dies ist möglich, da  $\mathcal{L}$  die Eigenschaften (2. 1)-(2. 3) besitzt. Die Eigenschaft (2. 3) ergibt sich dabei wie folgt: Sind  $x, y$  verschiedene Punkte aus  $X$ , so liegt  $y$  nicht in der abgeschlossenen Hülle  $N$  von  $\{x\}$  in  $E$ , da  $X$  Hausdorffsch ist. Aus einem bekannten Trennungssatz ([12], p. 73, prop. 4) folgt dann die Existenz einer stetigen Linearform auf  $E$ , die  $N$  und  $\{x\}$ , also erst recht  $x$  und  $y$  trennt.

Wir interpretieren nun die wichtigsten Begriffe der allgemeinen Theorie in unserem Spezialfall. Wir beginnen mit der in 2. 5 definierten Menge  $\mathcal{E}_q$ .

HILFSSATZ 6. —  $\mathcal{E}_q$  ist die Menge aller auf  $X$  definierten, konkaven, stetigen, reellen Funktionen.

Beweis <sup>(10)</sup>. Die Menge  $\mathcal{K}$  aller auf  $X$  konkaven, stetigen, reellen Funktionen ist eine abgeschlossene, inf-stabile Teilmenge von  $\mathcal{C}(X)$  mit  $\mathcal{L} \subset \mathcal{K}$ . Daher gilt  $\mathcal{E}_q \subset \mathcal{K}$ . Für eine beliebige Funktion  $u \in \mathcal{K}$  zeigen wir, daß sie die untere Einhüllende aller  $h \in \mathcal{L}$  mit  $h \geq u$  ist. Dann ist  $\overline{Q}_x^*(u) = u(x)$  für alle  $x \in X$ ,

<sup>(9)</sup> Es ist also  $X$ , aber nicht notwendig  $E$  Hausdorffsch. Jedoch könnte man im folgenden  $E$  auch als Hausdorffsch voraussetzen, ohne dabei die Allgemeinheit wesentlich einzuschränken. Es bezeichne nämlich  $N$  die abgeschlossene Hülle von  $\{0\}$  in  $E$  und  $E_0 = E/N$  den zu  $E$  assoziierten Hausdorffschen lokal-konvexen Raum. Dann bildet die kanonische Abbildung  $\varphi: E \rightarrow E_0$  den Raum  $X$  homöomorph auf  $\varphi(X)$  ab. Durchläuft  $l$  alle stetigen Linearformen auf  $E_0$ , so durchläuft  $l \circ \varphi$  alle stetigen Linearformen auf  $E$ .

<sup>(10)</sup> Vgl. auch KLEE [30], p. 99.

also  $u \in \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$  nach Satz 7. Somit ergibt sich die behauptete Gleichheit:  $\mathcal{E}_{\mathcal{L}} = \mathcal{K}$ .

Es sei  $u \in \mathcal{K}$ ,  $x_0 \in X$  und  $\gamma \in \mathbb{R}$  mit  $u(x_0) < \gamma$ . Zu zeigen ist die Existenz eines  $h \in \mathcal{L}$  mit  $u \leq h$  und  $h(x_0) < \gamma$ . Hierzu betrachten wir im lokal-konvexen Raum  $E_1 = E \times \mathbb{R}$  die Menge

$$A = \{(x, \xi) : x \in X, \xi \leq u(x)\}.$$

Dann sind  $A$  und  $\bar{A}$  konvex in  $E_1$ , da  $u$  konkav ist. Der Punkt  $(x_0, \gamma)$  liegt nicht in  $\bar{A}$ . Zu jeder Zahl  $\gamma'$  mit  $u(x_0) < \gamma' < \gamma$  gibt es nämlich eine Umgebung  $V$  von  $x_0$  in  $E$  mit  $u(x) < \gamma'$  für alle  $x \in V \cap X$ ; setzen wir noch  $W = \{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda > \gamma'\}$ , so ist  $V \times W$  eine zu  $A$  fremde Umgebung von  $(x_0, \gamma)$  in  $E_1$ . Nach dem bereits zitierten Trennungssatz gibt es eine stetige Linearform  $f_1$  auf  $E_1$  mit:

$$(4. 1) \quad \eta = \sup_{(x, \xi) \in A} f_1(x, \xi) < f_1(x_0, \gamma).$$

Nun ist offenbar:  $f_1(x, \xi) = f(x) + \tau\xi$  für alle  $(x, \xi) \in E_1$ , wobei  $f$  eine stetige Linearform auf  $E$  und  $\tau = f_1(0, 1)$  ist. Wegen  $(x_0, u(x_0)) \in A$  ist  $f_1(x_0, u(x_0)) < f_1(x_0, \gamma)$ , wegen  $\gamma - u(x_0) > 0$  also  $\tau > 0$ . Bezeichnen wir mit  $h$  die Restriktion von  $\tau^{-1}(\eta - f)$  auf  $X$ , so ist  $h \in \mathcal{L}$ . Aus (4. 1) folgt  $u \leq h$  und  $h(x_0) < \gamma$ .

Aus diesem Hilfssatz und dem Korollar 1 zu Satz 7 folgt nun die Interpretation der Menge  $\hat{\mathcal{L}}$  der  $\mathcal{L}$ -harmonischen Funktionen:

KOROLLAR. —  $\hat{\mathcal{L}}$  ist die Menge aller auf  $X$  stetigen, afflinearen Funktionen, d.h. die Menge der auf  $X$  stetigen, zugleich konkaven und konvexen Funktionen.

Bemerkung. — Im allgemeinen ist  $\hat{\mathcal{L}} \neq \mathcal{L}$ ; dies folgt aus einer Bemerkung von CHOQUET [21], p. 15.

4. 2. Geometrische Extremalpunkte. — Für jeden Punkt  $x_0 \in X$  und jede Menge  $S \in \mathcal{S}(\mathcal{L})$  wurde in Nr. 2. 5 die Menge  $\mathcal{M}_{x_0}^S = \mathcal{M}_{x_0}^S(\mathcal{L})$  von Maßen auf  $S$  definiert. Nach BOURBAKI [14], p. 87 und CHOQUET [22], p. 236 ergibt sich im vorliegenden Spezialfall

folgende Interpretation:  $\mathcal{M}_{x_0}^S$  ist die Menge aller Maße  $\mu \geq 0$  auf  $S$  mit der Gesamtmasse 1 und mit  $x_0$  als *Schwerpunkt*:

$$(4. 2) \quad \int d\mu = 1 \quad \text{und} \quad x_0 = \int x d\mu.$$

Umgekehrt existiert hier zu jedem Maß  $\mu \geq 0$  auf  $S$  der Gesamtmasse 1 genau ein  $x_0 \in X$  mit  $\mu \in \mathcal{M}_{x_0}^S$ .

Nun soll gezeigt werden, daß die  $\mathcal{L}$ -extremalen Punkte von  $X$  mit den Extrempunkten von  $X$  identisch sind. Ein Punkt  $x_0 \in X$  heißt bekanntlich ein Extrempunkt oder, wie wir hier genauer sagen wollen, ein *geometrischer Extrempunkt* von  $X$ , wenn die Menge  $X \cap \left[ \{x_0\} \right]$  konvex ist.

**HILFSSATZ 7.** — Für jeden Punkt  $x_0 \in X$  und jede Menge  $S \in \mathfrak{C}(\mathcal{L})$  sind folgende Aussagen gleichwertig:

- (a)  $x_0$  ist ein geometrischer Extrempunkt von  $X$ .
- (b)  $\mathcal{M}_{x_0}^S(\mathcal{L}) = \{\varepsilon_{x_0}\}$ .

**Beweis.** (a)  $\Rightarrow$  (b): Es genügt offenbar den Fall  $S = X$  zu behandeln, wenn man Satz 3 beachtet, wonach  $\mathcal{M}_{x_0}^S$  nicht leer ist. Dann aber hat man weiter nur zu zeigen, daß der Träger  $T_\mu$  eines Maßes  $\mu \in \mathcal{M}_{x_0}$  keinen von  $x_0$  verschiedenen Punkt enthalten kann. Wegen  $\int d\mu = 1$  folgt hieraus nämlich  $\mu = \varepsilon_{x_0}$ ; also ist  $\mathcal{M}_{x_0} = \{\varepsilon_{x_0}\}$ . Angenommen für ein Maß  $\mu \in \mathcal{M}_{x_0}$  existiert ein Punkt  $x_1 \neq x_0$  im Träger  $T_\mu$ . Da  $\mathcal{L}$  die Punkte von  $X$  trennt, gibt es dann eine konvexe, kompakte Umgebung  $V$  von  $x_1$  in  $X$  mit  $x_0 \notin V$ . Dann ist  $c_1 = \mu(V) > 0$ , da  $V$  Umgebung eines Punktes aus  $T_\mu$  ist. Ferner ist  $c_2 = 1 - \mu(V) > 0$ , da  $V$  konvex und kompakt ist und aus  $\mu(V) = 1$  somit  $x_0 = \int x d\mu \in V$  folgen würde. Bezeichnet  $\chi_A$  die charakteristische Funktion einer Menge  $A \subset X$  bezüglich  $X$ , so sind  $\mu_1 = c_1^{-1}(\chi_V \mu)$  und  $\mu_2 = c_2^{-1}(1 - \chi_V)\mu$  positive Maße auf  $X$  der Gesamtmasse 1. Für die zugehörigen Schwerpunkte  $x_i^*$  aus  $X$  gilt:

$$x_0 = c_1 x_1^* + c_2 x_2^*, \quad c_1 > 0, \quad c_2 > 0, \quad c_1 + c_2 = 1.$$

Hieraus folgt  $x_1^* = x_2^* = x_0$ , da  $x_0$  ein geometrischer Extrempunkt ist. Dies aber kann nicht sein, da  $\mu_1$  von  $V$  getragen wird und somit  $x_1^*$  zu  $V$  gehört. Der Punkt  $x_0$  liegt aber nicht

in V. Wir stoßen somit auf einen Widerspruch zu unserer Annahme:  $T_\mu \cap \{x\} \neq \emptyset$ .

Non (a)  $\Rightarrow$  non (b): Ist  $x_0$  kein geometrischer Extrempunkt, so gibt es verschiedene Punkte  $x_1, x_2 \in X$  und ein  $\lambda \in \mathbb{R}$  mit  $x_0 = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$  und  $0 < \lambda < 1$ . Nach Satz 3 gibt es Maße  $\mu_i \in \mathcal{M}_{x_i}^s$  ( $i = 1, 2$ ). Das Maß  $\mu = \lambda\mu_1 + (1 - \lambda)\mu_2$  liegt dann in  $\mathcal{M}_{x_0}^s$  und ist ungleich  $\varepsilon_{x_0}$ . In der Tat: aus  $\mu = \varepsilon_{x_0}$  folgt, daß  $\{x_0\}$  der Träger von  $\mu_1$  und  $\mu_2$ , also  $\mu_1 = \mu_2 = \varepsilon_{x_0}$  ist. Dies kann aber wegen  $x_1 \neq x_2$  nicht sein.

Setzt man speziell  $S = X$ , so erhält man das angekündigte Resultat:

**KOROLLAR.** — Die  $\mathcal{L}$ -extremalen Punkte von  $X$  sind identisch mit den geometrischen Extrempunkten von  $X$ .

Folglich ist  $\delta_{\mathcal{L}}X$  die abgeschlossene Hülle  $\overline{X_e}$  in  $X$  der Menge  $X_e = X_e(\mathcal{L})$  aller geometrischen Extrempunkte von  $X$ . Dies ist ein bekanntes Resultat (vgl. MILMAN [33], ARENS-SINGER [1]).

**3. 4. Simplexe von Choquet.** — Nach den Resultaten der beiden letzten Nummern spezialisiert sich unser allgemeines Dirichletsches Problem hier auf die Aufgabe, notwendige und hinreichende Bedingungen dafür anzugeben, daß jede Funktion aus  $\mathcal{C}(\overline{X_e})$  zu einer in  $X$  stetigen, affin-linearen Funktion fortgesetzt werden kann. Im folgenden kennzeichnen wir die konvexen kompakten Mengen  $X$  mit dieser Eigenschaft.

Hierzu erinnern wir zunächst an die von CHOQUET [21] gegebene Definition eines Simplex in einem Vektorraum  $F$  (über  $\mathbb{R}$ ): Simplex in  $F$  heißt jede konvexe Menge  $S$  in  $F$  mit der Eigenschaft, daß für je zwei positiv-homothetische Bilder  $S_i = a_i + \lambda_i S$  ( $a_i \in F$ ,  $\lambda_i \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda_i \geq 0$ ) die folgende Alternative besteht: Entweder ist der Durchschnitt  $S_1 \cap S_2$  die leere Menge oder selbst ein positiv-homothetisches Bild von  $S$ .

Die affine Natur dieser Begriffsbildung wird deutlich durch die folgende Behauptung, deren elementarer Beweis dem Leser überlassen werden kann. Im Vektorraum  $F$  sei  $V$  eine affin-lineare Mannigfaltigkeit und  $x_0$  ein Punkt aus  $V$ ; ferner sei  $S$  eine konvexe Teilmenge von  $V$ . Dann und nur dann ist  $S$  ein



Simplex in  $F$ , wenn der Durchschnitt je zweier Mengen  $S_i = a_i + \lambda_i(S - x_0)$  mit  $a_i \in V$  und  $\lambda_i \geq 0$  ( $i = 1, 2$ ) entweder leer oder von der gleichen Gestalt  $a + \lambda(S - x_0)$  mit  $a \in V$  und  $\lambda \geq 0$  ist.

Nunmehr behaupten wir :

Satz 13. — Für jede konvexe, kompakte Teilmenge  $X$  eines lokal-konvexen Raumes  $E$  sind folgende Aussagen gleichwertig:

- (a) Jede Funktion  $f \in \mathcal{C}(\overline{X}_e)$  ist  $\mathcal{L}$ -resolutiv.
- (b) Jeder Punkt aus  $X$  ist der Schwerpunkt genau eines Maßes aus  $\mathcal{M}(\overline{X}_e)$  mit Gesamtmasse 1.
- (c) Die Menge  $\mathcal{L}$  aller auf  $X$  stetigen, affin-linearen, reellen Funktionen ist ein Verband bezüglich der üblichen  $\leq$ -Relation.
- (d) Zu jeder auf  $X$  stetigen, konkaven, reellen Funktion existiert eine größte stetige, affin-lineare Minorante.
- (e)  $X$  ist ein Simplex und  $X_e$  ist abgeschlossen in  $X$ .

Beweis. Die Äquivalenz der Aussagen (a)-(d) folgt unmittelbar aus den allgemeinen Sätzen 9 und 10 sowie dem Korollar 1 zu Satz 10 bei Beachtung der Resultate von 4. 1. und 4. 2. Zu beweisen ist also noch die Äquivalenz von (e) mit z. B. (b).

(e)  $\implies$  (b): Dies folgt einerseits aus einem Eindeutigkeitsatz von CHOQUET [21], wonach sich jeder Punkt  $x$  eines kompakten Simplex  $X$  in  $E$  nur auf höchstens eine Weise als Schwerpunkt eines auf  $X_e$  konzentrierten Maßes  $\nu \in \mathcal{M}(X)$  mit  $\int d\nu = 1$  darstellen läßt. Da  $X_e$  in  $X$  abgeschlossen und somit gleich  $\partial_x X$  ist, sichert andererseits Satz 3 die Existenz mindestens eines solchen Maßes  $\nu$ .

(b)  $\implies$  (e): Wegen der bereits bewiesenen Äquivalenz von (b) und (a) besagt Satz 11, daß die Menge  $X_e$  abgeschlossen in  $X$  ist. Daß  $X$  ein Simplex ist, sieht man folgendermaßen ein: Es sei  $F$  der Vektorraum aller Radonschen Maße auf dem kompakten Raum  $X_e$  und  $V$  die affin-lineare Mannigfaltigkeit aller Maße  $\mu \in F$  mit  $\int d\mu = 1$ . Jedem Maß  $\mu \in V$  ordne man als Bild  $\varphi(\mu)$  in  $E$  zu den Punkt  $\varphi(\mu) = \int x d\mu^+ - \int x d\mu^- \in E$ , wenn hierbei  $\mu^+$  bzw.  $\mu^-$  den Positiv- bzw. Negativteil von  $\mu$

bezeichnet <sup>(11)</sup>. Die so definierte Abbildung  $\varphi: V \rightarrow E$  ist affin-linear; man hat hierbei nur zu beachten, daß

$$\varphi(\mu) = \int x d\mu_1 - \int x d\mu_2$$

ist für jedes Paar von Maßen  $\mu_1 \geq 0, \mu_2 \geq 0$  auf  $X_e$  mit  $\mu = \mu_1 - \mu_2$ . Aus (b) folgt die Eineindeutigkeit von  $\varphi$ , wie man sofort nachrechnet. Daher ist  $\varphi$  ein affiner Isomorphismus von  $V$  auf die affin-lineare Mannigfaltigkeit  $\varphi(V)$  in  $E$ . Es gilt offenbar  $\varphi(Y) = X$ , wenn  $Y$  die Menge aller positiven Maße aus  $V$  bezeichnet. Nun ist bekanntlich  $Y$  ein Simplex in  $F$  (vgl. CHOQUET [21], p. 14) <sup>(12)</sup>. Aus der dem Satz vorangestellten Hilfsbehauptung und den festgestellten Eigenschaften von  $\varphi$  folgt dann, daß  $X$  ein Simplex in  $E$  ist.

Bemerkungen. — 1. Die Aussage « (e)  $\implies$  (a) » findet sich bereits bei CHOQUET [21].

2. Es wäre interessant zu wissen, ob ein beliebiges kompaktes Simplex in einem lokal-konvexen Raum durch zu (a)-(d) analoge Eigenschaften gekennzeichnet werden kann.

3. Aus den Sätzen 12 und 13 folgt, daß in einem kompakten, metrisierbaren Simplex  $X$  in  $E$  mit in  $X$  abgeschlossenem Choquetschen Rand  $X_e$  jeder geometrische Extrempunkt auch  $\hat{\mathcal{L}}$ -exponiert ist. Im Hinblick auf ein analoges Resultat von БИШОП [9] über Funktionenalgebren wäre es interessant zu wissen, ob diese Eigenschaft jedes kompakte, metrisierbare Simplex besitzt. Eine beliebige konvexe, kompakte, metrisierbare Menge  $X$  in einem lokal-konvexen Raum  $E$  besitzt diese Eigenschaft im allgemeinen nicht, wie folgendes Gegenbeispiel zeigt:  $X =$  konvexe Hülle des Torus  $T^2$  im  $R^3$ .

### § 5. — Ergänzungen zur allgemeinen Theorie.

5.1. *Einbettung von  $X$  in den Raum  $\mathcal{H}'$ .* — Wir kehren zurück zu der in den Paragraphen 2 und 3 betrachteten allgemeinen Situation. Gegeben sei also ein beliebiger kompakter

<sup>(11)</sup> Für ein Maß  $\mu \geq 0$  auf  $X_e$  ist  $\int x d\mu$  definitionsgemäß gleich 0, wenn  $\mu = 0$  ist, und gleich  $\alpha x_1$ , wenn  $\alpha = \int d\mu > 0$  und  $x_1 \in X$  der Schwerpunkt von  $\alpha^{-1}\mu$  ist. Ist  $E$  ein Hausdorff-Raum, so ist dies der einzige Punkt  $x_0 \in E$  mit  $l(x_0) = \int l d\mu$  für jede stetige Linearform  $l$  auf  $E$ .

<sup>(12)</sup> Man hat nur zu beachten, daß  $F$  ein Rieszscher Raum und  $Y$  eine Basis des Kegels aller Elemente  $\geq 0$  aus  $F$  ist.

Raum  $X$  und eine Menge  $\mathcal{H}$  reeller Funktionen auf  $X$  mit den Eigenschaften (2.1.)-(2.3). Wir versehen  $\mathcal{H}$  mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf  $X$  und bezeichnen mit  $E = \mathcal{H}'$  den mit der *schwachen Topologie* ausgestatteten topologischen *Dualraum* von  $\mathcal{H}$ . Die Menge  $Y = Y_{\mathcal{H}}$  aller positiven Linearformen  $I$  auf  $\mathcal{H}$  mit  $I(1) = 1$  ist dann eine *konvexe, kompakte* Teilmenge von  $E$  (vgl. BOURBAKI [13], chap. iv, § 5). Für jeden Punkt  $x \in X$  ist  $h \rightarrow h(x)$  ein Element  $I_x$  von  $Y$ ; durch die Zuordnung  $x \rightarrow I_x$  ist also eine kanonische Abbildung  $\varphi: X \rightarrow Y$  definiert. Wir behaupten:

**HILFSSATZ 8.** — *Die Abbildung  $\varphi: X \rightarrow Y$  besitzt folgende Eigenschaften:*

(a) *Der Raum  $X$  wird durch  $\varphi$  homöomorph auf  $\varphi(X)$  abgebildet.*

(b) *Die Menge  $X_e$  der  $\mathcal{H}$ -extremalen Punkte von  $X$  wird auf die Menge  $Y_e$  der geometrischen Extrempunkte von  $Y$  abgebildet:  $Y_e = \varphi(X_e)$ .*

(c) *Ein positives Maß  $\mu$  auf  $X^* = \partial_{\mathcal{H}} X$  ist dann und nur dann ein zu einem Punkte  $x_0 \in X$  gehöriges  $\mathcal{H}$ -harmonische Maß wenn das Bildmaß  $\varphi(\mu)$  die Gesamtmasse 1 und  $\varphi(x_0)$  zum Schwerpunkt hat.*

**Beweis.** Zu (a): Da  $\mathcal{H}$  die Punkte von  $X$  trennt, ist die Abbildung  $\varphi$  eineindeutig. Aus der Konvergenz eines Filters  $\mathfrak{F}$  in  $X$  gegen einen Punkt  $x_0 \in X$  folgt  $\lim_{\mathfrak{F}} h(x) = h(x_0)$  also  $\lim_{\mathfrak{F}} I_x(h) = I_{x_0}(h)$  für alle  $h \in \mathcal{H}$ . Also gilt  $\lim_{\mathfrak{F}} \varphi(x) = \varphi(x_0)$  nach Definition der Topologie von  $E$ , was die Stetigkeit von  $\varphi$  beweist. Da  $X$  kompakt und  $E$  Hausdorffsch ist, so ist  $\varphi$  sogar eine Homöomorphie von  $X$  auf  $\varphi(X)$ .

Zu (b): Für jedes  $h \in \mathcal{H}$  ist  $I \rightarrow I(h)$  eine stetige Linearform auf  $E$ ; nach einem bekannten Satz (BOURBAKI [13], p. 50, prop. 1) ist umgekehrt jede stetige Linearform von dieser Form. Hieraus folgt zunächst:  $Y_e \subset \varphi(X)$ . Die Existenz eines geometrischen Extrempunktes  $I_0 \in Y_e$ , der nicht in  $\varphi(X)$  liegt, führt nämlich wie folgt auf einen Widerspruch: Zunächst kann  $I_0$  nicht in der abgeschlossenen konvexen Hülle  $Q$  von  $\varphi(X)$  in  $E$  liegen. Sonst wäre nämlich  $I_0$  ein geometrischer Extrempunkt von  $Q$ , müßte also nach BOURBAKI [12], p. 84, prop. 4 bereits in der kompakten Menge  $\varphi(X)$  liegen. Folglich existiert nach einem bereits früher verwendeten Trennungssatz ([12],

p. 73, prop. 4) eine in  $E$  abgeschlossene Hyperebene, welche  $Q$  und  $\{I_0\}$  streng trennt. Nach der einleitenden Bemerkung bedeutet dies die Existenz einer Funktion  $h_0 \in \mathcal{H}$  mit  $I(h_0) < I_0(h_0)$  für alle  $I \in Q$ , also speziell für alle  $I \in \varphi(X)$ . Somit gilt  $h_0(x) < I_0(h_0)$  für alle  $x \in X$ . Setzen wir  $\alpha = \sup_{x \in X} h_0(x)$ , so ergibt sich:  $\alpha < I_0(h_0)$ . Andererseits folgt aber aus  $h_0 \leq \alpha$  und  $I_0 \in Y$  die Relation:  $I_0(h_0) \leq I_0(\alpha) = \alpha$ . Dies ist der angekündigte Widerspruch zu unserer Annahme. Damit ist gezeigt worden, daß  $Y_e$  in  $\varphi(X)$  enthalten ist. — Hieraus folgt nun (b). In der Tat: Vermöge der Abbildung  $\mu \rightarrow \varphi(\mu)$  entsprechen sich umkehrbar eindeutig die Maße  $\mu \geq 0$  auf  $X$  der Gesamtmasse 1 und die Maße  $\nu \geq 0$  auf  $\varphi(X)$  der Gesamtmasse 1. Nach der einleitenden Bemerkung durchläuft  $I \rightarrow I(h) = f(I)$  alle stetigen Linearformen  $f$  auf  $E$ , wenn  $h$  alle Funktionen aus  $\mathcal{H}$  durchläuft. Somit gilt für jedes Maß  $\mu \geq 0$  der Gesamtmasse 1 auf  $X$ :

$$\begin{aligned} \int f d\varphi(\mu) &= \int f \circ \varphi d\mu = \int f(\varphi(x)) d\mu(x) = \int f(I_x) d\mu(x) \\ &= \int I_x(h) d\mu(x) = \int h d\mu. \end{aligned}$$

Aus  $\int h d\mu = h(x_0) = I_{x_0}(h) = \varphi(x_0)(h)$  für alle  $h \in \mathcal{H}$  folgt daher  $\int f d\varphi(\mu) = f(\varphi(x_0))$  für alle stetigen Linearformen  $f$  auf  $E$  und umgekehrt. Die Behauptung (b) ergibt sich daher jetzt aus Hilfssatz 7, wenn man dort  $S = \varphi(X)$  setzt.

Zu (c): Man beweist dies durch eine Überlegung, die zu derjenigen völlig analog ist, die wir soeben im zweiten Teil des Beweises von (b) durchgeführt haben. Man hat nur zu beachten, daß  $\varphi(X^*)$  nach (a) und (b) gleich der abgeschlossenen Hülle von  $Y_e$  in  $Y$  ist.

Bemerkungen. — 1. Der in Hilfssatz 8 festgestellte Sachverhalt kann umgekehrt zu einem Beweis der Sätze 1 und 2 für  $\mathcal{E} = \mathcal{H}$  verwendet werden. Vgl. hierzu BISHOP-DE LEEUW [8].

2. Aus der Behauptung (b) von Hilfssatz 8 und dem Satz von Krein-Milman folgt, daß  $Y$  gleich der abgeschlossenen konvexen Hülle  $Q$  von  $\varphi(X)$  ist.

5. 2. *Ergänzungen zu § 2 und § 3.* — Nunmehr ergibt sich die Antwort auf eine bereits in Nr. 2. 1 angeschnittene Frage:

SATZ 14. — *Ein Punkt  $x_0 \in X$  ist genau dann  $\mathcal{H}$ -extremal, wenn  $\varepsilon_{x_0}$  das einzige zu  $x_0$  gehörige  $\mathcal{H}$ -harmonische Maß ist.*

Beweis. Nach Hilfssatz 8 ist  $\varepsilon_{x_0}$  genau dann das einzige zu  $x_0$  gehörige  $\mathcal{H}$ -harmonische Maß, wenn  $\varepsilon_{x_0}$  das einzige positive Maß auf  $\varphi(X^*)$  der Gesamtmasse 1 mit  $y_0 = \varphi(x_0)$  als Schwerpunkt ist. Da nach dem gleichen Hilfssatz  $Y_e \subset \varphi(X^*)$  gilt, ist dies nach Hilfssatz 7 (mit  $S = \varphi(X^*)$ ) gleichbedeutend mit der Aussage, daß  $\varphi(x_0)$  ein geometrischer Extrempunkt von  $Y$  ist. Abermals nach Hilfssatz 8 ist hiermit gleichwertig die Aussage, daß  $x_0$   $\mathcal{H}$ -extremal ist.

Ersetzt man in 5. 1 den Vektorraum  $\mathcal{H}$  durch  $\hat{\mathcal{H}}$ , so gelangt man zum Raum  $\hat{E} = \hat{\mathcal{H}}'$ , zur konvexen kompakten Menge  $\hat{Y} = Y_{\hat{\mathcal{H}}}$  in  $\hat{E}$  und zur kanonischen Abbildung  $\hat{\varphi}: X \rightarrow \hat{Y}$ . Wir behaupten:

SATZ 15. — *Dann und nur dann ist jede Funktion aus  $\mathcal{C}(X^*)$   $\mathcal{H}$ -resolutiv, wenn  $\hat{Y}$  ein Simplex in  $\hat{E}$  und die Menge  $\hat{Y}_e$  seiner geometrischen Extrempunkte abgeschlossen ist.*

Beweis. Es sei jede Funktion aus  $\mathcal{C}(X^*)$   $\mathcal{H}$ -resolutiv. Dann ist  $\hat{\mathcal{H}}$  nach Satz 10 ein Rieszscher Raum, also (vgl. [14], p. 35) der konvexe Kegel  $\hat{P}$  aller positiven Linearformen  $I \in \hat{E}$  ein Verband bezüglich der durch  $\hat{P}$  in  $\hat{E}$  definierten Ordnungsrelation. Durch die Gleichung  $I(1) = 1$  wird in  $\hat{E}$  eine abgeschlossene Hyperebene definiert, welche jede Erzeugende von  $\hat{P}$  in genau einem Punkt  $\neq 0$  trifft. Der Durchschnitt von  $\hat{P}$  mit dieser Hyperebene ist  $\hat{Y}$ . Somit ist  $\hat{Y}$  eine Basis von  $\hat{P}$ , also  $\hat{Y}$  ein Simplex in  $\hat{E}$  nach CHOQUET [24]. Nach Satz 11 ist  $X_e$  in  $X$ , nach Hilfssatz 8 also  $\hat{Y}_e = \hat{\varphi}(X_e)$  in  $\hat{Y}$  abgeschlossen. (Bei der Anwendung von Hilfssatz 8 tritt  $\hat{\mathcal{H}}$  an die Stelle von  $\mathcal{H}$  und man hat (2. 18) zu beachten, wonach  $X_e(\hat{\mathcal{H}}) = X_e(\mathcal{H})$  ist.)

Umgekehrt besitze  $\hat{Y}$  die genannten Eigenschaften. Nach Satz 13 existiert dann zu jedem Punkt  $y_0 \in \hat{Y}$  genau ein positives Maß auf  $\hat{Y}_e$  der Gesamtmasse 1 mit  $y_0$  als Schwerpunkt. Da mit  $\hat{Y}_e$  auch  $X_e = \hat{\varphi}^{-1}(\hat{Y}_e)$  abgeschlossen, also  $X_e = X^*$  ist, folgt aus Hilfssatz 8, daß zu jedem Punkt  $x_0 \in X$  nur genau

ein  $\mathcal{H}$ -harmonisches Maß gehört. Dann ist aber jede Funktion aus  $\mathcal{C}(X^*)$   $\mathcal{H}$ -resolutiv nach Satz 9.

Bemerkung. — Ein direkter Beweis von Satz 14, der also nicht die kanonische Einbettung  $\varphi: X \rightarrow Y$  verwendet, wäre wünschenswert. Übrigens folgt aus Satz 14 leicht ein neuer Beweis von Satz 11.

5. 3. *Beziehungen zwischen  $\hat{Y}$  und  $Y$ .* — Über die Beziehungen zwischen  $\hat{E}$ ,  $\hat{Y}$ ,  $\hat{\varphi}$  einerseits und  $E$ ,  $Y$ ,  $\varphi$  andererseits behaupten wir abschließend:

HILFSSATZ 9. — *Die Abbildung  $\Phi: \hat{E} \rightarrow E$ , welche jeder Linearform aus  $\hat{E}$  ihre Restriktion auf  $\mathcal{H}$  zuordnet, besitzt folgende Eigenschaften:*

- (a)  $\Phi$  ist eine stetige, lineare Abbildung von  $\hat{E}$  auf  $E$ .
- (b)  $\Phi(\hat{Y}) = Y$  und  $\varphi = \Phi \circ \hat{\varphi}$ .
- (c)  $\Phi$  bildet  $\hat{\varphi}(X)$  homöomorph auf  $\varphi(X)$  ab.

Beweis. *Zu (a):* Daß  $\Phi$  linear und stetig ist, rechnet man sofort nach. Aus dem Satz von Hahn-Banach folgt, daß  $\Phi$  eine Abbildung auf  $E$  ist.

*Zu (b):* Da die konstante Funktion 1 in  $\mathcal{H}$  liegt und ein innerer Punkt des Kegels aller nicht-negativen Funktionen aus  $\hat{\mathcal{H}}$  (bezüglich der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz) ist, folgt die Gleichheit  $\Phi(\hat{Y}) = Y$  aus dem Fortsetzungssatz von M. G. KREIN ([12], p. 75, prop. 6). Aus der Definition der Abbildungen  $\varphi$ ,  $\hat{\varphi}$ ,  $\Phi$  folgt:  $\varphi = \Phi \circ \hat{\varphi}$ .

*Zu (c):* Nach Hilfssatz 8 ist  $\varphi$  eine homöomorphe Abbildung von  $X$  auf  $\varphi(X)$  und  $\hat{\varphi}$  eine homöomorphe Abbildung von  $X$  auf  $\hat{\varphi}(X)$ . Hieraus und aus  $\varphi = \Phi \circ \hat{\varphi}$  folgt dann (c).

Bemerkung. — Im allgemeinen wird  $\hat{Y}$  durch  $\Phi$  nicht eineindeutig auf  $Y$  abgebildet. Dies zeigt das Beispiel 6. Wegen  $\hat{\mathcal{H}} = \mathcal{C}(X)$  sind dort das Lebesguesche Maß  $\lambda$  auf  $[0, 1]$  und das diskrete Maß  $\mu = \frac{1}{6} \varepsilon_0 + \frac{4}{6} \varepsilon_{\frac{1}{2}} + \frac{1}{6} \varepsilon_1$  zwei verschiedene Elemente aus  $\hat{Y}$  mit  $\Phi(\lambda) = \Phi(\mu)$ .

§ 6. — Anwendung: Das klassische Dirichletsche Problem.

6. 1. *Reguläre Punkte.* — Wir betrachten im euklidischen Raum  $\mathbb{R}^N$  von  $N \geq 2$  Dimensionen eine *relativ kompakte, offene* Menge  $\Omega$ ;  $F$  sei der euklidische Rand von  $\Omega$  im  $\mathbb{R}^N$ . Der der allgemeinen Theorie zugrunde liegende kompakte Grundraum  $X$  sei jetzt speziell die abgeschlossene Hülle von  $\Omega$  im  $\mathbb{R}^N$ , also:  $X = \bar{\Omega} = \Omega \cup F$ . Der Funktionenraum  $\mathcal{H}$  der allgemeinen Theorie sei jetzt die Menge aller Funktionen  $h \in \mathcal{C}(X)$ , deren Restriktion  $h_\Omega$  auf  $\Omega$  im üblichen Sinne harmonisch, also in  $\Omega$  eine Lösung der *Laplaceschen Differentialgleichung*  $\Delta h_\Omega = 0$  ist. Dann besitzt offenbar  $\mathcal{H}$  die Eigenschaften (2. 1)-(2. 3); die allgemeine Theorie ist also anwendbar. Die Eigenschaft (2. 3) folgt aus der Bemerkung, daß die im  $\mathbb{R}^N$  harmonischen Funktionen die Punkte des  $\mathbb{R}^N$  trennen und eine in  $\mathcal{H}$  gelegene Restriktion auf  $X$  besitzen.

Zunächst bestimmen wir den Raum  $\hat{\mathcal{H}}$  aller  $\mathcal{H}$ -harmonischen Funktionen. Hierzu bezeichne  $\mathcal{E}$  die Menge aller Funktionen  $u \in \mathcal{C}(X)$ , deren Restriktion auf  $\Omega$  *superharmonisch* ist. Offenbar ist  $\mathcal{E}$  in  $\mathcal{C}(X)$  abgeschlossen und inf-stabil. Da ferner  $\mathcal{H} = \mathcal{E} \cap (-\mathcal{E})$  ist, folgt aus dem Korollar 1 zu Satz 7:

$$(6. 1) \quad \hat{\mathcal{H}} = \mathcal{H}.$$

Also fällt hier  $\hat{\mathcal{H}}$  mit  $\mathcal{H}$  zusammen.

Zur Bestimmung aller  $\mathcal{H}$ -extremalen Punkte von  $X$  erinnern wir an die Definition der *verallgemeinerten Lösung*  $H_f$  des Dirichletschen Problems für Randfunktionen  $f \in \mathcal{C}(F)$  <sup>(13)</sup>. Man betrachtet hierzu für jede stetige, reelle Funktion  $f$  auf  $F$  die Menge  $\mathfrak{D}_f$  aller in  $\Omega$  definierten superharmonischen Funktionen  $\nu$  mit der Eigenschaft:

$$(6. 2) \quad \liminf_{x \rightarrow x_0, x \in \Omega} \nu(x) \geq f(x_0) \quad \text{für alle } x_0 \in F.$$

Man betrachtet ferner die Menge  $\mathfrak{U}_f = -\mathfrak{D}_{-f}$  und zeigt, daß die untere Einhüllende von  $\mathfrak{D}_f$  gleich der oberen Einhüllenden von  $\mathfrak{U}_f$  ist. Die somit durch

$$(6. 3) \quad H_f = \inf \mathfrak{D}_f = \sup \mathfrak{U}_f$$

<sup>(13)</sup> Wegen der Einzelheiten sei auf BRELOT [16] verwiesen.

für alle  $f \in \mathcal{C}(F)$  in  $\Omega$  definierte Funktion  $H_f$  ist harmonisch und heißt die verallgemeinerte Lösung des Dirichletschen Problems (nach PERRON-WIENER).

Ein Punkt  $x_0 \in F$  wird *regulär* genannt, wenn gilt:

$$(6.4) \quad \lim_{x \rightarrow x_0, x \in \Omega} H_f(x) = f(x_0) \quad \text{für alle } f \in \mathcal{C}(F).$$

Besitzt für eine Funktion  $f \in \mathcal{C}(F)$  das klassische Dirichlet'sche Problem eine Lösung  $u_f$ , ist also  $u_f$  eine in  $\mathcal{H}$  gelegene Fortsetzung von  $f$ , so stimmt  $u_f$  auf  $\Omega$  mit der verallgemeinerten Lösung  $H_f$  überein. Daher besitzt das klassische Dirichlet'sche Problem für jede Funktion  $f \in \mathcal{C}(F)$  genau dann eine Lösung, wenn alle Punkte aus  $F$  regulär sind. In diesem Falle folgt aus einer Bemerkung in 3. 1 und Satz 11, daß die regulären Punkte mit den  $\mathcal{H}$ -extremalen Punkten zusammenfallen. Wir behaupten dies nun allgemein:

**SATZ 16.** — *Die  $\mathcal{H}$ -extremalen Punkte von  $X = \bar{\Omega}$  fallen mit den regulären Punkten des euklidischen Randes  $F$  von  $\Omega$  zusammen.*

**Beweis.** Wir bemerken zunächst, daß der Choquetsche Rand  $X_e = X_e(\mathcal{H})$  in  $F$  enthalten ist. Dies folgt entweder aus dem Randmaximum-Prinzip der Potentialtheorie oder aus der Bemerkung, daß zu jedem Punkt  $x_0 \in \Omega$  ein Maß  $\mu \neq \varepsilon_{x_0}$  auf  $X$  existiert mit  $\mu \in \mathcal{M}_{x_0}(\mathcal{H})$ . Wegen der Mittelwerteigenschaft der harmonischen Funktionen genügt es für  $\mu$  die auf einer in  $\Omega$  enthaltenen Vollkugel mit Mittelpunkt  $x_0$  « gleichmäßig verteilte Masse 1 » zu wählen.

Es sei nun  $x_0$  ein  $\mathcal{H}$ -extremaler Punkt von  $X$ . Wegen  $X_e \subset F$  gilt dann  $\mathcal{M}_{x_0}^F(\mathcal{H}) = \{\varepsilon_{x_0}\}$  nach 2. 2. Hieraus folgt nach Satz 3:

$$Q_{x_0}^F(f) = \bar{Q}_{x_0}^F(f) \quad \text{für jedes } f \in \mathcal{C}(F).$$

Zu jeder Funktion  $f \in \mathcal{C}(F)$  und jeder Zahl  $\varepsilon > 0$  gibt es daher Funktionen  $h^1, h^2 \in \mathcal{H}$  mit folgenden Eigenschaften:

$$(6.5) \quad h^1(x) \leq f(x) \leq h^2(x) \quad \text{für alle } x \in F;$$

$$(6.6) \quad h^2(x_0) - h^1(x_0) \leq \varepsilon.$$

Für die Restriktionen  $h^i_\Omega$  von  $h^i$  auf  $\Omega$  ergibt sich nach (6. 5):  $h^1_\Omega \in \mathcal{U}_f, h^2_\Omega \in \mathcal{D}_f$ . Hieraus folgt nach (6. 3)

$$h^1_\Omega \leq H_f \leq h^2_\Omega$$



und somit

$$(6. 7) \quad h^1(x_0) \leq \liminf_{x \rightarrow x_0, x \in \Omega} H_f(x) \leq \limsup_{x \rightarrow x_0, x \in \Omega} H_f(x) \leq h^2(x_0).$$

Nach (6. 5)-(6. 7) weichen also der obere und der untere Limes von  $H_f(x)$  für  $x \rightarrow x_0$  ( $x \in \Omega$ ) von  $f(x_0)$  um höchstens  $\varepsilon$  ab. Da  $\varepsilon > 0$  beliebig gewählt war, erhält man:  $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0, x \in \Omega} H_f(x)$

für alle  $f \in \mathcal{C}(F)$ . Also ist der Punkt  $x_0$  regulär.

Umgekehrt sei  $x_0$  ein regulärer Randpunkt von  $\Omega$ . Nach einem Lemma von KELDYCH [28] ist dann  $x_0$   $\mathcal{H}$ -exponiert, also  $x_0$  auch  $\mathcal{H}$ -extremal nach 1. 3.

Aus den Sätzen 2 und 16 folgt nun, daß der Šilovsche Rand  $X^* = \partial_{\mathcal{H}} X$  gleich der abgeschlossenen Hülle der Menge aller regulären Randpunkte von  $\Omega$  ist. Im Anschluß an diese Bemerkung wäre es leicht möglich,  $X^*$  unter Heranziehung klassischer Resultate von VASILESCO [34] und BOULIGAND [10] mit Hilfe potentialtheoretischer Begriffsbildungen zu kennzeichnen. Wenn  $\Omega$  speziell ein Gebiet ist, folgt z.B. aus den Resultaten der beiden zitierten Arbeiten, daß  $X^*$  die Menge aller Punkte  $x \in F$  ist, in welchen  $F$  lokal von positiver Kapazität ist. In der Terminologie von [34] ist daher  $X^*$  mit dem *reduzierten Teil* von  $F$  identisch. Auf diese feineren Gesichtspunkte soll jedoch hier nicht eingegangen werden.

Bemerkungen. — 1. Für das am Schluß des Beweises von Satz 16 verwendete Lemma von KELDYCH hat BRELOT [19] kürzlich einen einfachen Beweis gegeben. In der gleichen Arbeit wird das Lemma in geeigneter Form auch in Greenschen Räumen und allgemeiner im Rahmen der von BRELOT [17], [18] entwickelten Axiomatik für das Dirichletsche Problem bewiesen. Diese Resultate und die Tatsache, daß der erste Teil des Beweises von Satz 16 nur einfache Schlüsse verwendet, gestatten es, Satz 16 auf allgemeineren Räumen zu beweisen. Wir kommen hierauf sowie auf die Beziehungen dieses Satzes zu Resultaten von MATSUSHITA [31], [32] an anderer Stelle zurück.

2. Die Aussage, daß jeder  $\mathcal{H}$ -extremale Punkt regulär ist, bleibt richtig, wenn man die Laplacesche Differentialgleichung durch die Wärmeleitungsgleichung oder allgemeinere parabolische Differentialgleichungen ersetzt (vgl. hierzu BAUER [6]).

6. 2. *Minimal begrenztes*  $\Omega$ . — Von besonderem Interesse ist der Fall, daß  $X^*$  mit dem euklidischen Rand  $F$  zusammenfällt. Dann liefern nämlich die Resultate von § 3 neuartige Kriterien für die uneingeschränkte Lösbarkeit des klassischen Dirichletschen Problems. Die Formulierung der Sätze in diesem Spezialfall kann dem Leser überlassen werden.

Notwendig und hinreichend für die Gleichheit  $F = X^*$  ist nach Satz 16 die Bedingung, daß die regulären Punkte in  $F$  dicht liegen. Ein anderes Kriterium folgt aus den oben zitierten Resultaten von Bouligand-Vasilesco. Hier soll durch eine einfache Schlußweise gezeigt werden, daß  $F$  mit  $X^*$  sicher dann zusammenfällt, wenn  $\Omega$  *minimal begrenzt* ist, d.h. wenn für das Innere  $\dot{X}$  von  $X$  gilt:  $\dot{X} = \Omega$ .

Wir erinnern hierzu an die Definition des *Newtonschen Kerns*  $K$  auf  $R^N \times R^N$ :

$$(6. 8) \quad K(x, y) = \begin{cases} \|x - y\|^{2-N}, & N \geq 3; \\ -\log \|x - y\|, & N = 2. \end{cases}$$

$\|\dots\|$  bezeichnet dabei die euklidische Norm.

**HILFSSATZ 10.** — *Es sei  $A$  eine kompakte Teilmenge des  $R^N$  und  $(x_n)_{n=1, 2, \dots}$  eine gegen einen Punkt  $x_0 \in \int A$  konvergente Folge von Punkten des  $R^N$ . Bezeichnet dann  $f_i$  die Restriktion auf  $A$  der Funktion  $x \rightarrow K(x, x_i)$  ( $i = 0, 1, \dots$ ), so konvergiert die Folge  $(f_n)_{n=1, 2, \dots}$  auf  $A$  gleichmäßig gegen  $f_0$ .*

**Beweis.** Wir erbringen den Beweis nur für  $N = 2$ . Analoge Überlegungen führen für  $N \geq 3$  zum Ziel. Da  $(x_n)$  gegen  $x_0 \in \int A$  konvergiert und  $\int A$  offen ist, kann o.B.d.A. angenommen werden, daß kein  $x_n$  zu  $A$  gehört. Die Menge  $B$  aller Punkte  $x_0, x_1, \dots$ , ist dann kompakt und zu  $A$  fremd, also der Abstand  $\delta$  von  $A$  und  $B$  positiv. Für jedes  $x \in A$  und je zwei Zahlen  $i, j = 0, 1, \dots$  gilt:

$$f_i(x) - f_j(x) = \log \frac{\|x - x_j\|}{\|x - x_i\|} \leq \log \left( 1 + \frac{\|x_i - x_j\|}{\|x - x_i\|} \right) \leq \log (1 + \delta^{-1} \|x_i - x_j\|).$$

Hieraus folgt:  $|f_n(x) - f_0(x)| \leq \log (1 + \delta^{-1} \|x_n - x_0\|)$  für alle  $x \in A$  und  $n = 1, 2, \dots$ , also die gleichmäßige Konvergenz auf  $A$  von  $(f_n)$  gegen  $f_0$ .

SATZ 17. — Für den Šilovschen Rand  $X^* = \partial_{\mathcal{H}} X$  gilt stets:

$$F \cap \dot{X} \subset X^*.$$

Beweis. Angenommen, es gibt einen Punkt

$$x_0 \in F \cap \dot{X} \cap X^*.$$

Wegen  $x_0 \in \dot{X}$  hat dann jede Umgebung von  $x_0$  im  $\mathbb{R}^N$  mit  $\dot{X}$  einen Punkt gemeinsam. Also existiert eine gegen  $x_0$  konvergente Folge von Punkten  $x_n \in \dot{X}$ . Wir bezeichnen mit  $h_i^*$  bzw.  $h_i$  die Restriktion auf  $X^*$  bzw.  $X$  der Funktion  $x \rightarrow K(x, x_i)$  für  $i = 0, 1, \dots$ . Wegen  $x_n \notin X^*$  ist dann jede der Funktionen  $h_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) ein Element von  $\mathcal{H}$ . Wegen  $x_0 \in X^*$  konvergiert die Folge  $(h_n^*)$  auf  $X^*$  gleichmäßig gegen  $h_0^*$  gemäß Hilfssatz 10. Da  $X^*$  der Šilovsche Rand  $\partial_{\mathcal{H}} X$  ist, folgt hieraus die gleichmäßige Konvergenz von  $(h_n)$  gegen  $h_0$  auf  $X$ . Somit liegt auch  $h_0$  in  $\mathcal{H}$ . Dies kann aber nicht sein, da  $x_0$  in  $F$  liegt und  $h_0(x_0) = K(x_0, x_0) = +\infty$  ist. Unsere Annahme führt also zu einem Widerspruch; es gilt vielmehr  $F \cap \dot{X} \cap X^* = \emptyset$  und damit die Behauptung.

Wie angekündigt folgt nun:

KOROLLAR. — Ist die Menge  $\Omega$  minimal begrenzt, so gilt:  $X^* = F$ .

Beweis. Es ist  $\dot{X} = \Omega$  und somit

$$F \cap \dot{X} = F \cap \Omega = F \subset X^*.$$

Nach Satz 16 gilt außerdem:  $X^* \subset F$ .

### § 7. — Bemerkungen zum Dirichletschen Problem für diskrete harmonische Funktionen.

Im folgenden soll angedeutet werden, daß die in den ersten Paragraphen entwickelte Theorie selbst dann noch von Interesse ist, wenn der kompakte Raum  $X$  nur aus endlich vielen Punkten besteht.

Wir betrachten hierzu im  $\mathbb{R}^N$  ( $N \geq 1$ ) eine endliche Menge  $X$

von Punkten, deren sämtliche Koordinaten ganzzahlig sind (*Gitterpunkte*). Dann ist  $X$  ein diskreter kompakter Raum. Für jeden Punkt  $x \in X$  betrachten wir die Menge  $U_x$  seiner  $2^N$  Nachbargitterpunkte  $y$ , welche von  $x$  den (euklidischen) Abstand 1 haben. Punkte  $x \in X$  mit  $U_x \subset X$  heißen dann *innere Punkte* von  $X$ ; die Menge aller inneren Punkte von  $X$  soll mit  $X_i$  bezeichnet werden. Die Menge  $X_r = X \cap \bigcup X_i$  heißt Menge der *Randpunkte* von  $X$ .

Jedem Punkt  $x \in X_i$  ordnen wir das von  $U_x$  getragene Maß  $\mu_x$  auf  $X$  zu, welches jeden Punkt von  $U_x$  mit der Masse  $2^{-N}$  belegt. Dann sei  $\mathcal{H}$  die Menge aller (stetigen) reellen Funktionen  $h$  auf  $X$ , welche auf  $X_i$  *diskret harmonisch* sind, d.h. welche der Bedingung genügen:

$$(7.1) \quad \int h d\mu_x = h(x) \quad \text{für jedes} \quad x \in X_i.$$

Dann besitzt  $\mathcal{H}$  wieder die Eigenschaften (2. 1)-(2. 3). ( $\mathcal{H}$  trennt die Punkte von  $X$ , da z.B. die Restriktion auf  $X$  jeder auf dem  $\mathbb{R}^N$  affin-linearen Funktion in  $\mathcal{H}$  liegt.)

Die Menge  $\mathcal{E}$  aller auf  $X$  definierten, reellen Funktionen  $u$ , welche in  $X_i$  *diskret superharmonisch* sind, d.h. für jedes  $x \in X_i$  der Ungleichung  $\int u d\mu_x \leq u(x)$  genügen, ist eine in  $\mathcal{C}(X)$  abgeschlossene inf-stabile Menge mit  $\mathcal{H} = \mathcal{E} \cap (-\mathcal{E})$ . Daher gilt  $\mathcal{H} = \mathcal{H}$  nach dem Korollar 1 zu Satz 7.

Da für jeden inneren Punkt  $x \in X_i$  offenbar  $\mu_x \neq \varepsilon_x$  und nach (7. 1) ein Maß aus  $\mathcal{M}_x(\mathcal{H})$  ist, können  $\mathcal{H}$ -extremale Punkte von  $X$  nur Randpunkte sein:  $X_e(\mathcal{H}) \subset X_r$ . Der Satz 1 liefert also sofort das bekannte Resultat, wonach jede Funktion aus  $\mathcal{H}$  eine in  $X_r$  gelegene Minimalstelle besitzt (vgl. HEILBRONN [26], theorem 1).

Daß sogar  $X_e = X_r = \partial_{\mathcal{H}} X$  gilt, folgt aus dem bekannten Satz ([26], theorem 2), wonach jede reelle Funktion  $f$  auf  $X_r$  zu einer Funktion aus  $\mathcal{H}$  fortgesetzt werden kann. Dies kann übrigens auch sehr einfach und durchsichtig durch eine naheliegende Abwandlung der Methode von PERRON-WIENER aus der Theorie des klassischen Dirichletschen Problems gezeigt werden (vgl. § 6). Man betrachte hierzu zu  $f$  die Menge  $\mathcal{D}_f$  aller reellen Funktionen  $\varphi$  auf  $X$ , welche auf  $X_r$  die Funktion  $f$  majorisieren und in  $X_i$  diskret superharmonisch sind. Entspre-

chend setzt man  $u_f = -\mathfrak{D}_{-f}$ . Dann prüft man ohne Mühe nach, daß  $\sup u_f = \inf \mathfrak{D}_f$  die gesuchte Fortsetzung von  $f$  zu einer in  $X_i$  diskret harmonischen Funktion ist.

### § 8. — Bemerkungen über Funktionenalgebren.

8. 1. *Existenz des Šilovschen Randes.* — Im folgenden betrachten wir einen kompakten Raum  $X$  und eine Unteralgebra  $\mathfrak{A}$  der Algebra  $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$  aller komplexwertigen stetigen Funktionen auf  $X$ .  $\mathfrak{A}$  trenne die Punkte von  $X$  und enthalte die konstanten Funktionen aus  $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$  als Elemente.

Die Menge  $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(\mathfrak{A})$  aller Realteile  $\mathfrak{R}(f)$  von Funktionen  $f \in \mathfrak{A}$  besitzt dann die Eigenschaften (2. 1)-(2. 3). Für jeden Punkt  $x \in X$  ist  $\mathfrak{M}_x(\mathfrak{R})$  die Menge aller Maße  $\mu \geq 0$  auf  $X$  mit

$$(8. 1) \quad f(x) = \int f d\mu \quad \text{für alle } f \in \mathfrak{A}.$$

Wir setzen daher sinngemäß:

$$\mathfrak{M}_x(\mathfrak{A}) = \mathfrak{M}_x(\mathfrak{R}) \quad \text{und} \quad X_e(\mathfrak{A}) = X_e(\mathfrak{R}).$$

$X_e(\mathfrak{A})$  soll auch der Choquetsche Rand von  $X$  bezüglich  $\mathfrak{A}$  genannt werden; die Punkte von  $X_e(\mathfrak{A})$  sollen  $\mathfrak{A}$ -extremal heißen.

Es soll nun gezeigt werden, daß aus Satz 2 ein einfacher Beweis für die Existenz des Šilovschen Randes  $\mathfrak{d}_{\mathfrak{A}}X$  von  $X$  bezüglich  $\mathfrak{A}$  folgt, welcher zugleich wieder den Šilovschen Rand mit dem Choquetschen Rand verknüpft.  $\mathfrak{d}_{\mathfrak{A}}X$  ist bekanntlich die kleinste abgeschlossene Teilmenge von  $X$  mit der Eigenschaft, daß der absolute Betrag  $|f|$  einer jeden Funktion  $f \in \mathfrak{A}$  eine in  $\mathfrak{d}_{\mathfrak{A}}X$  gelegene Minimalstelle besitzt.

SATZ 18. — Für jedes  $f \in \mathfrak{A}$  besitzt die Funktion  $|f|$  eine  $\mathfrak{A}$ -extremale Maximalstelle. Der Šilovsche Rand  $\mathfrak{d}_{\mathfrak{A}}X$  existiert und ist gleich der abgeschlossenen Hülle des Choquetschen Randes  $X_e(\mathfrak{A})$ .

Beweis. Bezeichnet  $\overline{\mathfrak{A}}$  die abgeschlossene Hülle von  $\mathfrak{A}$  in  $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$  bezüglich der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz, so ist  $\overline{\mathfrak{A}}$  wieder eine Unteralgebra von  $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$  und aus (8. 1) folgt:  $\mathfrak{M}_x(\mathfrak{A}) = \mathfrak{M}_x(\overline{\mathfrak{A}})$  für alle  $x \in X$ . Besitzt ferner jede

Funktion  $|f|$  mit  $f \in \mathcal{A}$  eine Maximalstelle in einer abgeschlossenen Menge  $M \subset X$ , so gilt dasselbe für jede Funktion  $|f|$  mit  $f \in \overline{\mathcal{A}}$ . Daher kann für den Beweis  $\mathcal{A}$  als in  $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$  abgeschlossen vorausgesetzt werden.

Zunächst sei bemerkt, daß mit  $\mathcal{A}$  auch die Menge  $\mathcal{E}_0$  aller Funktionen  $—|f|$  mit  $f \in \mathcal{A}$  die Punkte von  $X$  trennt (vgl. auch [5]). Zu je zwei verschiedenen Punkten  $x, y \in X$  gibt es nämlich ein  $f \in \mathcal{A}$  mit  $f(x) \neq f(y)$ . Im Falle  $|f(x)| \neq |f(y)|$  ist nichts zu zeigen. Ist jedoch  $|f(x)| = |f(y)|$ , so trennt  $—|f + \alpha f^2|$  die beiden Punkte für  $\alpha^{-1} = -f(x)$ . Dann aber trennt auch die Menge  $\mathcal{E}$  aller Funktionen  $—\log |f|$  mit  $f \in \mathcal{A}$  die Punkte von  $X$ ; da  $\mathcal{A}$  eine Algebra ist, enthält  $\mathcal{E}$  mit je zwei Funktionen deren Summe.  $\mathcal{E}$  besitzt somit die Eigenschaften (1. 4)-(1. 6). Nach Satz 2 existiert also  $\delta_{\mathcal{E}}X$  und es ist  $\delta_{\mathcal{E}}X = \overline{X_e(\mathcal{E})}$ . Wegen der Isotonie von  $\xi \rightarrow \log \xi$  auf der reellen Halbgeraden  $\xi \geq 0$  existiert dann auch  $\delta_{\mathcal{A}}X$  und es ist  $\delta_{\mathcal{A}}X = \delta_{\mathcal{E}}X = \overline{X_e(\mathcal{E})}$ .

Der Rest der Behauptung folgt so: Zunächst ist offenbar  $\mathcal{M}_x(\mathcal{A}) \subset \mathcal{M}_x(\mathcal{E}_0)$  für jedes  $x \in X$ , wie durch Übergang zu den Absolutbeträgen in (8. 1) folgt; also ist  $X_e(\mathcal{E}_0) \subset X_e(\mathcal{A})$ . Nach Satz 1 besitzt dann jede Funktion  $|f|$  mit  $f \in \mathcal{A}$  eine  $\mathcal{E}_0$ -extremale, also auch  $\mathcal{A}$ -extremale Maximalstelle. Hieraus folgt weiter:  $\delta_{\mathcal{A}}X \subset \overline{X_e(\mathcal{A})}$ . Aus der Abgeschlossenheit von  $\mathcal{A}$  folgt:  $e^{-f} \in \mathcal{A}$  und somit  $\mathcal{R}(f) = -\log |e^{-f}| \in \mathcal{E}$  für jedes  $f \in \mathcal{A}$ . Also ist  $\mathcal{H} \subset \mathcal{E}$ ,  $\mathcal{M}_x(\mathcal{E}) \subset \mathcal{M}_x(\mathcal{H}) = \mathcal{M}_x(\mathcal{A})$  für alle  $x \in X$  und somit:  $X_e(\mathcal{A}) \subset X_e(\mathcal{E})$ . Damit ist auch noch  $\overline{X_e(\mathcal{A})} \subset \overline{X_e(\mathcal{E})} = \delta_{\mathcal{A}}X$  gezeigt.

Bemerkung. — Wenn  $\mathcal{A}$  abgeschlossen und  $X$  metrisierbar ist, so existiert nach BISHOP [9] zu jedem  $\mathcal{A}$ -extremalen Punkt  $x_0$  sogar ein  $f \in \mathcal{A}$  mit  $|f(x)| < |f(x_0)|$  für alle  $x \neq x_0$  aus  $X$ . Vgl. auch [8], p. 325.

8. 2. *Zwei Fragen.* — Die Unteralgebra  $\mathcal{A}$  werde jetzt als abgeschlossen vorausgesetzt. Zu jedem Punkt  $x \in X$  betrachten wir die Menge  $\mathcal{M}_x^*$  aller zu  $x$  gehörigen  $\mathcal{H}$ -harmonischen Maße. Wegen  $\mathcal{H} = \mathcal{R}(\mathcal{A})$  sind dies alle Maße  $\mu \geq 0$  auf  $X^* = \delta_{\mathcal{A}}X$  mit  $f(x) = \int f_X \cdot d\mu$  für alle  $f \in \mathcal{A}$ . In § 3 wurde gezeigt, daß zu jedem Punkt aus  $X$  dann und nur dann genau ein zugehöriges  $\mathcal{H}$ -harmonisches Maß existiert, wenn alle Funktionen

aus  $\mathcal{C}(X^*)$   $\mathcal{H}$ -resolutiv sind. Es wäre interessant zu wissen, welche Eigenschaften der Algebra  $\mathcal{A}$  selbst hiermit gleichwertig sind. Vielleicht geben die schönen Resultate von WERMER [35], [36] einen Hinweis darauf, von welcher Natur diese gesuchten Eigenschaften sein könnten.

Im Anschluß an die in § 6 gewonnene Kennzeichnung der regulären Randpunkte einer offenen, relativ kompakten Teilmenge des  $\mathbb{R}^N$  drängt sich weiter folgende Frage auf. Im Raum  $\mathbb{C}^N$  von  $N \geq 2$  komplexen Dimensionen sei  $\Omega$  eine offene, relativ kompakte Menge. Man betrachte auf  $X = \bar{\Omega}$  die Algebra  $\mathcal{A}$  aller stetigen komplexwertigen Funktionen, welche in  $\Omega$  holomorph sind. Welches ist dann der Choquetsche Rand  $X_c(\mathcal{A})$ ? Wegen Satz 18 wäre mit dieser Frage auch die Frage nach dem Šilovschen Rand  $\delta_{\mathcal{A}} X$  beantwortet, welche bereits durch BREMMERMANN [20] Teilantworten gefunden hat.

#### LITERATUR

- [1] R. ARENS and I. M. SINGER, Function values as boundary integrals, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **5**, 1954, 735-745.
- [2] G. AUMANN, Über die Erweiterung von additiven monotonen Funktionen auf regulär geordneten Halbgruppen, *Arch. der Math.*, **8**, 1957, 422-427.
- [3] H. BAUER, Un problème de Dirichlet pour la frontière de Šilov d'un espace compact, *C. r. Acad. Sci. Paris*, **247**, 1958, 843-846.
- [4] H. BAUER, Frontière de Šilov et problème de Dirichlet, *Séminaire de Théorie du potentiel*, **3**, 1958-1959, n° 7, 23 p. (Institut H. Poincaré, Paris).
- [5] H. BAUER, Minimalstellen von Funktionen und Extrempunkte II, *Arch. der Math.*, **11**, 1960, 200-205.
- [6] H. BAUER, Une axiomatique du problème de Dirichlet pour certaines équations aux dérivées partielles elliptiques et paraboliques, *C. r. Acad. Sci. Paris*, **250**, 1960, 2672-2674.
- [7] G. BIRKHOFF, Lattice theorie, *Amer. Math. Soc. Colloq. Publ.*, **25**, New York, 1948.
- [8] E. BISHOP and K. DE LEEUW, The representations of linear functionals by measures on sets of extreme points, *Ann. Inst. Fourier*, **9**, 1959, 305-331.
- [9] E. BISHOP, A minimal boundary for function algebras, *Pacific Journ. Math.*, **9**, 1959, 629-642.
- [10] G. BOULIGAND, Fonctions harmoniques. Principes de Picard et de Dirichlet, *Mém. Sci. Math.*, **11**, Paris, 1926.

- [11] N. BOURBAKI, Algèbre, Chap. VI-VII, *Actual. sci. et industr.*, **1179**, Paris, 1952.
- [12] N. BOURBAKI, Espaces vectoriels topologiques, Chap. I-II, *Actual. sci. et industr.*, **1189**, Paris, 1953.
- [13] N. BOURBAKI, Espaces vectoriels topologiques, Chap. III-V, *Actual. sci. et industr.*, **1299**, Paris, 1955.
- [14] N. BOURBAKI, Intégration, Chap. I-IV, *Actual. sci. et industr.*, **1175**, Paris, 1952.
- [15] N. BOURBAKI, Intégration, Chap. V, *Actual. Sci. et industr.*, **1244**, Paris, 1956.
- [16] M. BRELOT, Familles de Perron et problème de Dirichlet, *Acta Szeged*, **9**, 1939, 133-153.
- [17] M. BRELOT, Une axiomatique générale du problème de Dirichlet dans les espaces localement compacts, *Séminaire de Théorie du potentiel*, **1**, 1956-1957, n° 6, 16 p. (Institut H. Poincaré, Paris).
- [18] M. BRELOT, Axiomatique des fonctions harmoniques et surharmoniques dans un espace localement compact, *Séminaire de Théorie du potentiel*, **2**, 1957-1958, n° 1, 40 p. (Institut H. Poincaré, Paris).
- [19] M. BRELOT, Sur un théorème de prolongement fonctionnel de Keldych concernant le problème de Dirichlet, *Journal d'Analyse Math.*, Jérusalem (erscheint demnächst).
- [20] H. J. BREMERMAN, On a generalized Dirichlet problem for plurisubharmonic functions and pseudoconvex domains. Characterisation of Šilov boundaries, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **91**, 1959, 246-276.
- [21] G. CHOQUET, Existence et unicité des représentations intégrales au moyen des points extrémaux dans les cônes convexes, *Séminaire Bourbaki*, Déc. 1956, n° 139, 15 p. (Institut H. Poincaré, Paris).
- [22] G. CHOQUET, Theory of capacities, *Ann. Inst. Fourier*, **5**, 1953, 131-295.
- [23] G. CHOQUET et J. DENY, Ensembles semi-réticulés et ensembles réticulés de fonctions continues, *J. Math. pur. appl.*, **36** (9<sup>e</sup> série), 1957, 179-189.
- [24] M. M. DAY, Normed linear spaces, *Ergebnisse der Math.*, **21** (Neue Folge), Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1958.
- [25] I. GELFAND, D. RAIKOV and G. ŠILOV, Commutative normed rings, *Usp. Mat. Nauk SSSR*, N. S. **2**, 1946, 48-146.
- [26] H. A. HEILBRONN, On discrete harmonic functions, *Proc. Cambridge philos. Soc.*, **45**, 1949, 194-206.
- [27] S. KAKUTANI, Concrete representation of abstract (M-)spaces, *Ann. of Math.*, **42**, 1941, 994-1024.
- [28] M. V. KELDYCH, On the solubility and the stability of Dirichlet's problem (russisch), *Usp. Mat. Nauk SSSR*, **8**, 1941, 172-231.
- [29] J. G. KEMENY and J. L. SNELL, Semimartingales of Markov chains, *Ann. Math. Statistics*, **29**, 1958, 143-154.
- [30] V. L. KLEE jr., Extremal structure of convex sets II, *Math. Zeitschr.*, **69**, 1958, 90-104.
- [31] S. MATSUSHITA, Théorème de Krein-Milman et le balayage de mesures dans la théorie du potentiel I-III, *Proc. Japan. Acad.*, **31**, 1955, 643-647; **32**, 1956, 29-34; **32**, 1956, 125-130.



- [32] S. MATSUSHITA, On the foundation of balayage theory, *J. Inst. Polytech. Osaka City Univ.*, Ser. A, **9**, 1958, 59-86.
- [33] D. P. MILMAN, Characteristics of extremal points of regularly compact sets (russisch), *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, N. S. **57**, 1947, 119-122.
- [34] F. VASILESCO, Sur les singularités des fonctions harmoniques, *J. Math. pur. appl.*, **9** (9<sup>e</sup> série), 1930, 81-111.
- [35] J. WERMER, On algebras of continuous functions, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **4**, 1953, 866-869.
- [36] J. WERMER, Subalgebras of the algebra of all complex-valued continuous functions on the circle, *Amer. J. Math.*, **78**, 1956, 225-242.

(Reçu le 22 juillet 1960.)

---