ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

MICHEL DUBOIS-VIOLETTE

Systèmes dynamiques contraints : l'approche homologique

Annales de l'institut Fourier, tome 37, nº 4 (1987), p. 45-57

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1987__37_4_45_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
37, 4 (1987), 45-57.

SYSTÈMES DYNAMIQUES CONTRAINTS : L'APPROCHE HOMOLOGIQUE

par Michel DUBOIS-VIOLETTE

1. Introduction.

Le contenu de cet exposé provient d'une tentative que j'ai faite l'automne dernier pour comprendre la nature géométrique et algébrique des méthodes à la B.R.S. pour traiter la théorie quantique de systèmes correspondant à des systèmes classiques dégénérés [1], [2]. Je vais me restreindre ici au cas des systèmes à un nombre fini de degrés de liberté dans l'espace des phases. On peut faire quelque chose de similaire pour les systèmes lagrangiens mais il faut alors démarrer avec l'espace des trajectoires. Dans ces méthodes on rajoute aux variables du système des variables qui anti-commutent, les fantômes et les fantômes conjugués (ou les anti-fantômes pour les systèmes lagrangiens), puis on définit un opérateur nilpotent, l'opérateur de B.R.S., sur l'algèbre engendrée par toutes ces variables.

Pour les systèmes dans l'espace des phases ces méthodes ont été développées initialement par Batalin, Fradkin, Vilkovisky et leurs collaborateurs dans une série d'articles [2]. Ces articles contiennent une série de recettes dont l'interprétation n'est pas évidente. Un excellent exposé de ces travaux est contenu dans le Physics Report de M. Henneaux [3], où la construction des recettes est faite dans un super-espace des phases et apparaît comme quelque chose de « classique » (au sens non-quantique). Les fantômes s'interprètent assez naturellement comme des formes (une base de 1-forme) dans les directions de dégénérescence. La clef de l'interprétation des fantômes conjugués est due à D. McMullan [4], [5], [6] qui a mis en évidence le fait qu'ils

Mots-clés : Système contraint - Complexe de Kaszul - Suite spectrale - Variété symplectique graduée.

engendrent une résolution de Koszul des fonctions sur la surface des contraintes. Autrement dit, les fantômes conjugués sont reliés à la restriction à la surface des contraintes tandis que les fantômes sont reliés au passage au quotient par les transformations de jauge ; ces deux opérations étant réalisées algébriquement en introduisant une différentielle, l'opérateur de B.R.S., dont la cohomologie en degré zéro s'identifie aux observables du système.

Des mathématiciens se sont récemment intéressés à cette formulation des systèmes contraints dans l'espace des phases. Signalons, en particulier, un exposé de J. Stasheff [7] et pour le cas des contraintes de première classe provenant d'une action d'un groupe de Lie les références [8] et [9].

Dans l'approche lagrangienne en théorie des champs, on introduit des champs auxiliaires pour lever la dégénérescence puis des anti-fantômes et des fantômes, les anti-fantômes étant destinés à « faire » la restriction à la « surface » (dans l'espace des champs) où des champs auxiliaires sont nuls tandis que les fantômes sont destinés à « faire » le quotient par les transformations de jauge.

Dans ce qui suit, on va généraliser, simplifier et présenter de manière un peu différente ces constructions pour les systèmes dans l'espace des phases.

On se placera dans le cadre classique des variétés symplectiques [7]. Toutes les variétés considérées seront C^∞, connexes, sans bord et paracompactes. Rappelons qu'une variété symplectique est une variété M munie d'une 2-forme fermée ω partout non dégénérée. A toute fonction f de $C^\infty(M)$, on associe un champ de vecteur $\mathrm{Ham}(f)$ défini par $\omega(X, \mathrm{Ham}(f)) = Xf$ pour tout champ de vecteur X sur M.

A deux fonctions f, g de $C^\infty(M)$ on en associe une troisième $\{f,g\}$ définie par $\{f,g\} = \omega(\mathrm{Ham}(f), \mathrm{Ham}(g))$; le crochet de Poisson $\{\circ,\circ\}$ est antisymétrique et vérifie l'identité de Jacobi, et $f \mapsto \mathrm{Ham}(f)$ est un homomorphisme d'algèbres de Lie de $C^\infty(M)$ muni d'un crochet de Poisson dans l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur M. Si V est une sous-variété de M, la notation $\restriction V$ désignera la restriction à V. Le module des sections d'un fibré vectoriel E sera noté ΓE.

2. Espace des phases réduit.

2.1. Soit (M,ω) une variété symplectique, V une sous-variété fermée de M et ω_V la 2-forme fermée sur V induite par ω. En général, (V,ω_V) n'est pas une variété symplectique car ω_V peut être dégénérée ; soit $E(V) = \{X \in T(V) \mid i_X\omega_V = 0\}$ *la distribution caractéristique de* ω_V. L'espace $\Gamma E(V)$ des champs de vecteurs sur V à valeurs dans $E(V)$ est un $C^\infty(V)$-module ; c'est un sous-module du module des champs de vecteurs sur V. Le fait que ω_V est fermée implique que le crochet de deux champs de vecteurs de $\Gamma E(V)$ est aussi un champ de vecteurs de $\Gamma E(V)$; autrement dit, $\Gamma E(V)$ est aussi une sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur V.

2.2. Supposons que ω_V soit de rang constant. Dans ce cas, $E(V)$ est un sous-fibré de $T(V)$ vérifiant la condition de Frobenius, i.e. $E(V)$ est intégrable et on a, par conséquent, un feuilletage $\mathscr{F}$ de V correspondant. Par la suite, nous supposerons toujours que ω_V est de rang constant, que le quotient $V/\mathscr{F} = M_0$ est une variété et que la projection canonique $p : V \to M_0$ est une submersion. Avec ces hypothèses de régularité (on va très vite en prendre de plus fortes), ω_V se projette en une 2-forme ω_0 sur $M_0 (p^*\omega_0 = \omega_V)$ qui est fermée et non-dégénérée par construction ($i_X\omega_V = 0$ et $L_X\omega_V = 0$, $\forall X \in \Gamma E(V)$). (M_0, ω_0) est donc une variété symplectique que l'on appelle *l'espace des phases réduit* et qui est l'espace des phases naturel pour un système hamiltonien sur M contraint à évoluer sur V (il est bien entendu que la donnée de V correspond à *toutes* les contraintes, en particulier que V est stable par le flot hamiltonien correspondant), $i : V \to M$ étant l'inclusion, on a la situation suivante

$$\begin{tikzcd} & (M,\omega) \\ V \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "p"'] & \\ & (M_0,\omega_0) \end{tikzcd}$$

avec $i^*\omega = p^*\omega_0 = \omega_V$.

La connaissance de (M_0, ω_0) est équivalente à la connaissance de l'algèbre $C^\infty(M_0)$ munie de la structure de Poisson correspondant à ω_0. $C^\infty(M_0)$ est un objet naturel physiquement puisque c'est l'algèbre des observables des systèmes contraints sur V.

2.3. Formes longitudinales. On construit de manière usuelle l'algèbre différentielle graduée commutative $\Omega(V,\mathcal{F})$ des formes longitudinales sur la variété feuilletée $(V,\mathcal{F}):\Omega^n(V,\mathcal{F})$ est le module dual du $C^\infty(V)$-module $\Lambda^n\Gamma E(V)$, le produit est induit par le produit extérieur et la différentielle est la différentielle extérieure $d_{\mathcal{F}}$ le long des feuilles. La cohomologie associée $H(V,\mathcal{F})$ est une algèbre graduée commutative et, on a canoniquement $H^0(V,\mathcal{F}) = C^\infty(M_0)$. $H^0(V,\mathcal{F})$ est l'algèbre des observables qui nous intéresse, cependant, $H(V,\mathcal{F})$ tout entier est une donnée intrinsèque de l'inclusion $V \subset M$ qui a un certain intérêt physique (en liaison avec les problèmes d'anomalies par exemple). Nous allons calculer $H(V,\mathcal{F})$ par des moyens purement algébriques (sous certaines hypothèses de régularité), dans la section 3.

2.4. LEMME. — *Soit* $I(V)$ *l'idéal de* $C^\infty(M)$ *des fonctions nulles sur* V *et* $I_1(V) = \{f \in I(V) \mid \{f, I(V)\} \subset I(V)\}$. *On a canoniquement* $C^\infty(V) = C^\infty(M)/I(V)$ et $I_1(V)$ *est un idéal de* $C^\infty(M)$ *qui est aussi une sous-algèbre de Lie pour le crochet de Poisson.*

Démonstration. — $C^\infty(V) = C^\infty(M)/I(V)$ est induit par la restriction i^* et découle du fait que V est fermée dans M. Soit $f \in I_1(V)$ et $c \in C^\infty(M)$ alors $cf \in I(V)$ et $\forall g \in I(V)$ on a $\{cf,g\} = \{c,g\}f + c\{f,g\} \in I(V)$, donc $cf \in I_1(V)$. Soit $f \in I_1(V)$ et $g \in I_1(V)$, alors $\{f,g\} \in I(V)$ puisque $I_1(V) \subset I(V)$ et, $\forall h \in I(V)$, on a $\{\{f, g\}, h\} = \{\{f,h\},g\} + \{f,\{g,h\}\} \in I(V)$, donc $\{f,g\} \in I_1(V)$. □

On remarquera que $(I(V))^2 \subset I_1(V)$ et que toute fonction de $C^\infty(M)$ ayant son support dans $M\backslash V$ appartient à $I_1(V)$.

2.5. LEMME. — *On a* $\mathrm{Ham}\,(I_1(V)) \restriction V = \Gamma E(V)$ (*dans* $\Gamma T(M) \restriction V$).

Démonstration. — *a*) Soit $f \in I_1(V)$ alors on a

$$\mathrm{Ham}\,(f) I(V) = \omega\,(\mathrm{Ham}\,(f),\ \mathrm{Ham}\,(I(V))) = \{f, I(V)\} \subset I(V),$$

ce qui implique $\mathrm{Ham}\,(f) \restriction V \in \Gamma T(V)$. D'autre part, on a

$$\forall Y \in T_x(V) \quad \omega_x\,(\mathrm{Ham}\,(f), Y) = -\,Y\,(f)_x = 0$$

puisque $f \in I(V)$ donc, $i_{\mathrm{Ham}(f)}\omega_V = 0$ et par conséquent $\mathrm{Ham}\,(I_1(V)) \restriction V \subset \Gamma E(V)$.

b) Soit $X \in \Gamma E(V)$; on a $\omega_x(X,Y) = 0$, $\forall x \in V$ et $\forall Y \in T_x(M)$ satisfaisant $\omega_x(\mathrm{Ham}(I(V)),Y) = 0$ (i.e. $\forall Y \in T_x(V)$). Il en résulte que X est localement dans $\mathrm{Ham}(I(V)) \restriction V$. Soit $(\mathcal{O}_\alpha)$ une famille d'ouverts de M recouvrant V et (h_α) une famille d'éléments de $I(V)$ tels que $X \restriction \mathcal{O}_\alpha \cap V = \mathrm{Ham}(h_\alpha) \restriction \mathcal{O}_\alpha \cap V$; $(\chi,(\chi_\alpha))$ étant une partition de l'unité subordonnée au recouvrement ouvert $(M \backslash V, (\mathcal{O}_\alpha))$ de M, on a $X = \sum \chi_\alpha \mathrm{Ham}(h_\alpha) \restriction V = (\sum \chi_\alpha h_\alpha) \restriction V$ (car $h_\alpha = 0$ sur V). Comme $h = \sum \chi_\alpha h_\alpha \in I(V)$ on a $X \in \mathrm{Ham}(I(V)) \restriction V$. X est d'autre part tangent à V, i.e. $XI(V) \restriction V = 0$ d'où $\mathrm{Ham}(h)I(V) \subset I(V)$ ce qui implique $h \in I_1(V)$. On a donc $\Gamma E(V) \subset \mathrm{Ham}(I_1(V)) \restriction V$ et par conséquent $\Gamma E(V) = \mathrm{Ham}\, I_1(V) \restriction V$. □

L'application ainsi définie de $I_1(V)$ sur $\Gamma E(V)$ est évidemment un homomorphisme d'algèbres de Lie et on remarquera que c'est aussi un homomorphisme de $C^\infty(M)$-modules si on munit $\Gamma E(V)$ de la structure de $C^\infty(M)$-module induite par la restriction $i^* : C^\infty(M) \to C^\infty(V)$.

3. 1^re^ étape : construction d'une algèbre différentielle.

3.1. Hypothèses de régularité. On se place, avec les mêmes notations, dans le cadre décrit dans la section 2. On va imposer aux données (M,ω,V) les conditions de régularité (R_0) et (R_1) suivantes :

(R_0) (*) – L'idéal $I(V)$ des fonctions de $C^\infty(M)$ s'annulant sur V est engendré par *m* fonctions u_α, $\alpha \in \{1,2,\ldots,m\}$, indépendantes dans le sens suivant : $du_1 \wedge \cdots \wedge du_m(x) \neq 0$, $\forall x \in V$.

On remarquera que cette condition est moins forte que la condition usuelle $du_1 \wedge \cdots \wedge du_m \neq 0$ sur M satisfaite par les systèmes physiques considérés habituellement.

(R_1) – $E(V)$ est un fibré vectoriel trivial de rang *l* sur V (i.e. $\Gamma E(V)$ est un $C^\infty(V)$-module libre de rang *l*).

Dans le cas de contraintes de première espèce, i.e. lorsque $\{I(V), I(V)\} \subset I(V)$, (i.e. V est co-isotrope), R_0 implique R_1 ; en effet, dans ce cas, la restriction à V des champs hamiltoniens $\mathrm{Ham}(u_\alpha)$ est une base de $\Gamma E(V)$.

3.2. Résolution de Koszul de $C^\infty(V)$. Soit (π_α) la base canonique du $C^\infty(M)$-module libre $\mathbf{R}^m \otimes C^\infty(M)$, (i.e. (π_α) est la base canonique de $\mathbf{R}^m$), et soit *u* la forme linéaire sur $\mathbf{R}^m \otimes C^\infty(M)$ définie par

(*) J'avais initialement introduit une condition plus forte ; je remercie le referee de m'avoir fait remarquer que cette condition suffit pour la suite (i.e. assure l'acyclicité en degrés > 0 du complexe de Koszul $K(u)$ considéré plus loin).

$u(\pi_\alpha) = u_\alpha$ pour $\alpha \in \{1, \ldots, m\}$. u se prolonge de manière unique en une antidérivation δ_0 de l'algèbre extérieure $\Lambda \mathbf{R}^m \otimes C^\infty(M)$; δ_0 étant de degré -1 et $\Lambda \mathbf{R}^m \otimes C^\infty(M)$ étant engendrée par des éléments de degré inférieur ou égal à 1, on a $(\delta_0)^2 = 0$. Le complexe correspondant est un complexe de Koszul habituellement noté $K(u)$, ($K(u) = \bigoplus_{n \in \mathbf{N}} K_n(u)$ avec $K_n(u) = \Lambda^n \mathbf{R}^m \otimes C^\infty(M)$) [11]. L'homologie $H_0(K(u))$ s'identifie à $C^\infty(V) = C^\infty(M)/I(V)$ et le lemme 3.3 suivant montre que $K(u) \to C^\infty(V)$ est une résolution.

3.3. Lemme. — *On a* $H_n(K(u)) = 0$, $\forall n \geq 1$.

Démonstration. — δ_0 étant $C^\infty(M)$-linéaire, on peut raisonner localement. Dans l'ouvert $M \backslash V$, les u_α ne s'annulent nulle part simultanément, on peut donc trouver des v^α tels que $\Sigma u_\alpha v^\alpha = 1$ dans $M \backslash V$; le produit extérieur par $v^\alpha \pi_\alpha$ réalise une homotopie pour δ_0 dans $M \backslash V$. Considérons l'ouvert $\mathcal{O} = \{x \in M | du_1 \wedge \ldots \wedge du_m(x) \neq 0\}$; comme $M = (M \backslash V) \cup \mathcal{O}$, il suffit de montrer que l'homologie de δ_0 en degrés strictement positifs est nulle dans $\mathcal{O}$ pour achever la démonstration du lemme. Cela résulte classiquement, du fait que la suite (u_α) est régulière pour $C^\infty(\mathcal{O})$ i.e. que l'homothétie de rapport u_α est injective dans $C^\infty(\mathcal{O})/(u_1 C^\infty(\mathcal{O}) + \cdots + u_{\alpha-1} C^\infty(\mathcal{O}))$ pour tout $\alpha \in \{1, \ldots, m\}$. □

3.4. L'algèbre graduée filtrée $\mathcal{K}$.

Posons $\mathcal{K}_s^r = \Lambda^s \mathbf{R}^m \otimes C^\infty(M) \otimes \Lambda^r \mathbf{R}^l$, et $\mathcal{K} = \bigoplus_{r,s \in \mathbf{N}} \mathcal{K}_s^r$. $\mathcal{K}$ est une algèbre bigraduée et on considérera les éléments des bases canoniques (π_α) de $\mathbf{R}^m$ et (χ^A) de $\mathbf{R}^l$ comme les générateurs de $\mathcal{K}$ en temps que $C^\infty(M)$-algèbre (r étant le degré en χ et s étant le degré en π). $K(u)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{K}$ ($\mathcal{K} = K(u) \otimes \Lambda \mathbf{R}^l$) et on prolongera δ_0 en une antidérivation de $\mathcal{K}$, encore notée δ_0, en posant $\delta_0 \chi^A = 0$.

Introduisons une $\mathbf{Z}$-graduation sur $\mathcal{K}$ en posant $\mathcal{K}^n = \bigoplus_{r-s=n} \mathcal{K}_s^r$ et une filtration F en posant $F^p \mathcal{K} = \bigoplus_{\substack{r \geq p \\ s \in \mathbf{N}}} \mathcal{K}_s^r$. Munie de cette graduation et de cette filtration $\mathcal{K}$ est une algèbre graduée filtrée [12] et δ_0 est une différentielle d'algèbre graduée filtrée.

Le lemme 3.3 implique que la cohomologie $H(\delta_0)$ de $\mathcal{K}$ pour δ_0 est égale à $C^\infty(V) \otimes \Lambda \mathbf{R}^l$; plus précisément on a

$$H_0^r(\delta_0) = H^{r,0}(\delta_0) = C^\infty(V) \otimes \Lambda^r \mathbf{R}^l \qquad \text{et} \qquad H_s^r(\delta_0) = H^{r,-s}(\delta_0) = 0$$

si $s \neq 0$.

3.5. Identification de $H(\delta_0)$ avec $\Omega(V,\mathscr{F})$.

Puisque $\Gamma E(V) = \mathrm{Ham}\,(I_1(V)) \upharpoonright V$ est un module libre de rang l, on peut choisir l éléments h_A de $I_1(V)$ tels que $(\mathrm{Ham}\,(h_A) \upharpoonright V)$ soit une base de $\Gamma E(V)$. $\Omega^1(V,\mathscr{F})$ est le $C^\infty(V)$-module dual de $\Gamma E(V)$; soit (ω^A) la base duale de $(\mathrm{Ham}\,(h_A) \upharpoonright V)$. En identifiant (ω^A) à la base canonique de $\mathbf{R}^l$, *l'algèbre* $\Omega(V,\mathscr{F})$ *des formes longitudinales s'identifie à* $C^\infty(V) \otimes \Lambda^r \mathbf{R}^l$ et donc à $H(\delta_0)$. On a $d_{\mathscr{F}} f = \sum_A (\{h_A,f\} \upharpoonright V)\omega^A$ pour $f \in C^\infty(V)$ et $d_{\mathscr{F}}\omega^A = \sum_{B,C} \Gamma^A_{BC}\,\omega^B \wedge \omega^C$ où les Γ^A_{BC} sont des éléments de $C^\infty(V)$.

Nous allons maintenant définir une antidérivation δ_1 sur $\mathscr{K}$ anticommutant avec δ_0 qui induit $d_{\mathscr{F}}$ sur $H(\delta_0) = \Omega(V,\mathscr{F})$. Posons $\delta_1 f = \sum_A \{h_A,f\}\chi^A$ pour $f \in C^\infty(M)$ et $\delta_1\chi^A = \sum_{B,C} \tilde{\Gamma}^A_{BC}\,\chi^B \wedge \chi^C$, où $\tilde{\Gamma}^A_{BC} \in C^\infty(M)$ est une extension à M de

$$\Gamma^A_{BC} \in C^\infty(V),$$

(i.e. $\tilde{\Gamma}^A_{BC} \upharpoonright V = \Gamma^A_{BC}$). δ_1 s'étend uniquement en une antidérivation de la sous-algèbre graduée $C^\infty(M) \otimes \Lambda \mathbf{R}^l$ de $\mathscr{K}$. Considérons $\delta_1 u_\alpha = \{h_A,u^\alpha\}\chi^A$; puisque $h_A \in I_1(V)$ et $u_\alpha \in I(V)$ on a $\{h_A,u_\alpha\} \in I(V)$ donc $\delta_1 u_\alpha = \delta_0\mu_\alpha$ pour $\mu_\alpha \in \mathscr{K}^1_1$. Posons $\delta_1\pi_\alpha = -\mu_\alpha$. δ_1 s'étend alors en une antidérivation de $\mathscr{K}$ et on a $\delta_0\delta_1 + \delta_1\delta_0 = 0$ sur $C^\infty(M)$ et sur les π_α,χ^A par construction, donc la dérivation $\delta_0\delta_1 + \delta_1\delta_0$ est nulle sur $\mathscr{K}$. Comme δ_1 anti-commute avec δ_0, elle induit une antidérivation sur $H(\delta_0)$ qui n'est autre, par construction, que la différentielle $d_{\mathscr{F}}$ de $\Omega(V,\mathscr{F})$ identifiée à $H(\delta_0)$. On prendra garde que δ_1 n'est généralement pas une différentielle (i.e. $(\delta_1)^2 \neq 0$).

3.6. Différentielle d'algèbre graduée filtrée sur $\mathscr{K}$. Rappelons qu'à une différentielle δ d'algèbre graduée filtrée sur $\mathscr{K}$ (i.e. δ est une antidérivation de degré un de carré nul satisfaisant $\delta(F^p\mathscr{K}) \subset F^p\mathscr{K}, \forall p)$ [12], on associe une suite spectrale $(E_r,d_r)_{r\in\mathbf{N}}$. $E_r = \oplus E_r^{i,j}$ est une algèbre bigraduée, d_r est une différentielle sur E_r satisfaisant

$$d_r(E_r^{ij}) \subset E_r^{i+r,j+1}\,; \qquad E_{r+1} = H(E_r,d_r).\ E_0 = \bigoplus_p F^p\mathscr{K}/F^{p+1}\mathscr{K}.$$

$d_0 : F^p\mathscr{K}/F^{p+1}\mathscr{K} \to F^{p+1}\mathscr{K}/F^{p+1}\mathscr{K}$ est induit par δ et

$$E_0^{r,s} = F^r\mathscr{K}^{r+s}/F^{r+s}\mathscr{K}^{r+s} = \mathscr{K}^r_{-s}.$$

Comme $F^0\mathscr{K} = \mathscr{K}$, une telle suite spectrale converge vers la cohomologie $H(\delta)$ de $\mathscr{K}$ pour δ ; $E_\infty^{r,s}$ s'identifiant à $F^rH^{r+s}(\delta)/F^{r+1}H^{r+s}(\delta)$, $F^rH(\delta)$ étant l'image dans $H(\delta)$ des δ-cocycles de $F^r\mathscr{K}$.

3.7. THÉORÈME. — *Il existe sur $\mathscr{K}$ une différentielle d'algèbre graduée filtrée δ telle que $E_1^{r,s} = 0$ si $s \neq 0$ et telle que $(E_1, d_1) = (\oplus\, E_1^{r,0}, d_1)$ s'identifie à $(\Omega(V,\mathscr{F}), d_{\mathscr{F}})$ en tant qu'algèbre différentielle graduée.*

Démonstration. — Une différentielle δ sur $\mathscr{K}$ telle que $\delta(F^p\mathscr{K}) \subset F^p\mathscr{K}$ est de la forme

$$\delta = \sum_{r\geqslant 0} \delta_r \qquad \text{avec} \qquad \delta_r : \mathscr{K}_j^l \to \mathscr{K}_{j+r-1}^{l+r}\,;$$

les δ_r étant des antidérivations de $\mathscr{K}$ satisfaisant $\sum\limits_{r+s=n} \delta_r\delta_s = 0$, $\forall n \in \mathbf{N}$.

Tout le problème est de construire les δ_r de manière à ce que $E_1 = H(\mathscr{K},\delta_0)$ s'identifie à $\Omega(V,\mathscr{F})$ et que δ_1 induise $d_{\mathscr{F}}$ sur $\Omega(V,F)$. Pour δ_0, on prendra évidemment la différentielle δ_0 déjà définie dans 3.4 et pour δ_1 on prendra l'antidérivation δ_1 définie dans 3.5. Pour démontrer le théorème il suffit de montrer que l'on peut construire des δ_r pour $r \geqslant 2$ tels que les dérivations $\sum\limits_{r+s=n} \delta_r\delta_s$ soient nulles. Supposons que l'on ait des antidérivations δ_n pour $n \leqslant r$, $r \leqslant 1$, tels que $\sum\limits_{m=0}^{n} \delta_{n-m}\delta_m = 0$ et que $\delta_n(\mathscr{K}_j^l) \subset \mathscr{K}_{j+n-1}^{l+n}$ et cherchons à construire une antidérivation δ_{r+1} telle que $\delta_0\delta_{r+1} + \delta_{r+1}\delta_0 + \sum\limits_{m=1}^{m=r} \delta_{r+1-m}\delta_m = 0$ et que $\delta_r(\mathscr{K}_j^i) \subset \mathscr{K}_{j+r-1}^{i+r}$. L'hypothèse de récurrence implique que l'on a :

$$\delta_0 \sum_{n=1}^{r} \delta_{r+1-n}\delta_n = \sum_{n=1}^{r} \delta_{r+1-n}\delta_n\delta_0\,.$$

Comme $\delta_0\chi^A = 0$ et $\delta_0 g = 0$, $\forall g \in C^\infty(M)$, on a $\delta_0 \sum\limits_{n=1}^{r} \delta_{r+1-n}\delta_n\chi^A = 0$ et $\delta_0 \sum\limits_{n=1}^{r} \delta_{r+1-n}\delta_n g = 0$ mais, les images de $\sum\limits_{n=1}^{r} \delta_{r+1-n}\delta_n\chi^A$ et $\sum\limits_{n=1}^{r} \delta_{r+1-n}\delta_n g$ sont nulles dans $H(\delta_0)$ car si $r \geqslant 2$

$$H_{r-1}^{r+2}(\delta_0) = H_{r-1}^{r+1}(\delta_0) = 0\,,$$

et si $r = 1$, l'image de $(\delta_1)^2$ n'est autre que $(d_{\mathscr{F}})^2 = 0$ (voir 3.5). On a donc des $\delta_{r+1}\chi^A$ et $\delta_{r+1}g$ pour $g \in C^\infty(M)$ de bidegrés appropriés tels que

$$\delta_0\delta_{r+1}\chi^A + \sum_{n=1}^{r} \delta_{r+1-n}\delta_n\chi^A = 0 \quad \text{et} \quad \delta_0\delta_{r+1}g + \sum_{n=1}^{r} \delta_{r+1-n}\delta_n g = 0 .$$

Comme $\sum_{n=1}^{r} \delta_{r+1-n}\delta_n$ sur $C^\infty(M)$ est une dérivation à valeur dans $\Lambda^{r-1}\mathbf{R}^m \otimes C^\infty(M) \otimes \Lambda^{r+1}\mathbf{R}^l$ (i.e. un champ de vecteurs sur M à valeurs vectorielles dans $\Lambda^{r-1}\mathbf{R}^m \otimes \Lambda^{r+1}\mathbf{R}^l$) on peut choisir δ_{r+1} sur $C^\infty(M)$ de manière à ce que ce soit également une dérivation (un champ de vecteurs à valeurs vectorielles) ; il suffit de résoudre le problème dans des cartes locales et de recoller les champs de vecteurs locaux à l'aide d'une partition de l'unité. Il reste à définir δ_{r+1} sur les π_α ; pour cela on remarque que

$$\delta_{r+1}\delta_0\pi_\pi + \sum_{n=1}^{r} \delta_{r+1-n}\delta_n\pi_\alpha = \delta_{r+1}u_\alpha + \sum_{n=1}^{r} \delta_{r+1-n}\delta_n\pi_\alpha$$

est un δ_0-cocycle (en utilisant la construction de δ_{r+1} sur les fonctions) et que comme $H_r^{r+1}(\delta_0) = 0$, $\forall r \geqslant 1$, on a des $\delta_{r+1}\pi_\alpha$ de bidegrés appropriés tels que

$$\delta_0\delta_{r+1}\pi_\alpha + \delta_{r+1}u_\alpha + \sum_{n=1}^{r} \delta_{r+1-n}\delta_n\pi_\alpha = 0,$$

δ_{r+1} se prolonge uniquement en une antidérivation de $\mathscr{K}$ satisfaisant ce que nous voulions. □

Comme on le voit dans la construction explicite de la démonstration, il y a un grand arbitraire pour les différentielles de $\mathscr{K}$ satisfaisant les conditions du théorème 3.7 ; on a cependant le résultat suivant :

3.8. Théorème. — *Soit δ une différentielle de $\mathscr{K}$ satisfaisant les conditions du théorème* 3.7. *La cohomologie* $H(\delta)$ *de $\mathscr{K}$ pour δ s'identifie (en tant qu'algèbre graduée) à la cohomologie* $H(V,\mathscr{F})$ *des formes longitudinales sur* V. *En particulier, on a* $H^0(\delta) = C^\infty(M_0)$.

Démonstration. — Puisque (E_1,d_1) s'identifie à $(\Omega(V\mathscr{F}),d_{\mathscr{F}})$ avec $E_1^{r,s}=0$ pour $s\neq 0$, $E_2=H(E_1,d_1)$ s'identifie à $H(V,\mathscr{F})$ avec $E_2^{r,s}=0$ pour $s \neq 0$. Comme $d_2(E_2^{r,s}) \subset E_2^{r+2,s-1}$ on a nécessairement $d_2 = 0$, donc $E_2 = E_\infty$ et $\oplus(F^pH(\delta)/F^{p+1}H(\delta))$ s'identifie à $H(V,\mathscr{F})$. On a, par conséquent $F^rH^{r+s}(\delta)/F^{r+1}H^{r+s}(\delta) = 0$ pour $s \neq 0$ et

$F^rH^r(\delta)/F^{r+1}H^r(\delta) = H^r(V,\mathcal{F})$ (en faisant l'identification). Comme $F^r\mathcal{K}^r = \bigoplus_{s\geq 0} \mathcal{K}_s^{r+s} = \mathcal{K}^r$, on a $F^rH^r(\delta) = H^r(\delta)$. Montrons que $F^{r+1}H^r(\delta)$ est nul, ce qui achèvera la démonstration du théorème. $F^{r+1}H^r(\delta)$ est l'image des cocycles qui sont dans $\bigoplus_{s\geq 1} \mathcal{K}_s^{r+s}$. Soit $Q = \Sigma\, Q_s^{r+s}$ un tel cocycle. On a, en décomposant $\delta Q=0$ en bidegrés : $\sum_{s=1}^{s=n} \delta_{n-s}Q_s^{r+s}=0$, $\forall n \geq 1$. En particulier $\delta_0 Q_1^{r+1} = 0$ donc

$$Q_1^{r+1} = \delta_0 L_2^{r+1}, \quad \text{d'où} \quad \delta_0 Q_2^{r+2} + \delta_1\delta_0 L_2^{r+1} = \delta_0(Q_2^{r+2} - \delta_1 L_2^{r+1}) = 0$$

ce qui implique $Q_2^{r+2} = \delta_1 L_2^{r+1} + \delta_0 L_3^{r+2}$ et ainsi de suite. On voit donc que $H_s^r(\delta_0) = 0$ pour $s \geq 1$, implique que $Q = \delta L$ et donc que $F^{r+1}H^r(\delta) = 0$. □

3.9. *Remarque.* — On a $m \geq l$ puisque $I_1(V) \subset I(V)$. D'autre part, $m + l$ est pair puisque $m + l = \dim(M) - \dim(M_0)$ et que M et M_0 étant symplectiques sont de dimension paire.

4. 2^e^ étape : le super-espace des phases.

4.1. Le cas où V est co-isotrope. Supposons que V est co-isotrope i.e. que les contraintes sont de 1^re^ classe. Ce cas, qui est le plus intéressant, est caractérisé par $I_1(V) = I(V)$. Comme nous l'avons signalé, R_0 implique R_1 et on peut prendre comme base de $\Omega^1(V,\mathcal{F})$ la base duale de la base $(\mathrm{Ham}\,(u_\alpha) \restriction V)$ de $\Gamma\, E(V)$. On a évidemment $m = l$ de sorte que $\mathcal{K} = \Lambda\mathbf{R}^m \otimes C^\infty(M) \otimes \Lambda\mathbf{R}^m$ et on indexera par le même indice $\alpha \in \{,\ldots,m\}$ les bases π et χ des deux espaces $\mathbf{R}^m$; toutefois, nous considérerons ces deux espaces comme dual l'un de l'autre, on notera donc (π_α) la base du premier, comme précédemment, et (χ^α) la base du second. On peut interpréter $\mathcal{K}$ comme l'algèbre des « super-fonctions » d'une variété graduée [13] de dimension impaire $2m$; les π_α et les χ^α s'interprètent comme des coordonnées impaires globales. On va considérer cette variété graduée comme une variété symplectique graduée (i.e. un super-espace des phases) en munissant $\mathcal{K}$ d'un crochet de Lie gradué prolongeant le crochet de Poisson. Ce crochet, encore noté $\{\circ,\circ\}$ est défini par : $\{\pi_\alpha,\chi^\beta\} = \delta_\alpha^\beta$, $\{\pi_\alpha,f\} = 0$, $\{\chi^\alpha,f\} = 0$, $\forall f \in C^\infty(M)$ et $L \mapsto \{Q,L\}$ est une dérivation de $\mathcal{K}$ pour $Q \in \bigoplus \mathcal{K}^{2n}$ et une antidérivation pour $Q \in \bigoplus \mathcal{K}^{2n+1}$. Ce crochet vérifie l'identité de Jacobi graduée.

4.2. LEMME. — *Soit* $D : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ *l'application linéaire définie par* $D(A) = nA$ *si* $A \in \mathcal{K}^n$, D *est une dérivation de degré zéro de* $\mathcal{K}$ *donnée par* $D(A) = \{\Sigma\, \chi^\alpha \pi_\alpha, A\}$.

La démonstration est évidente et résulte de

$$\{\Sigma\chi^\alpha\pi_\alpha, \pi_\beta\} = -\pi_\beta, \quad \{\Sigma\chi^\alpha\pi_\alpha, \chi^\beta\} = \chi^\beta \quad \text{et} \quad \{\Sigma\chi^\alpha\pi_\alpha, C^\infty(M)\} = 0.$$

L'intérêt de ce lemme trivial est le suivant : si Δ est une k-dérivation de l'algèbre de Lie graduée $(\mathcal{K}, \{o,o\})$, i.e. si Δ est linéaire de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{K}$, tel que $\Delta(\mathcal{K}^n) \subset \mathcal{K}^{n+k}$ et $\Delta\{A,B\} = \{\Delta A, B\} + (-1)^{kn}\{A, \Delta B\}$, $\forall A \in \mathcal{K}^n$ et $\forall B \in \mathcal{K}$, alors

$$\Delta\{\Sigma\chi^\alpha\pi_\alpha, A\} = \{\Delta(\Sigma\chi^\alpha\pi_\alpha), A\} + \{\Sigma\chi^\alpha\pi_\alpha, \Delta A\}$$

ce qui implique $-k\Delta A = \{\Delta(\Sigma\chi^\alpha\pi_\alpha), A\}$ autrement dit si $k \neq 0$, Δ est un superchamp hamiltonien, $\Delta = \mathrm{Ham}\left(-\frac{1}{k}\Delta(\Sigma\chi^\alpha\pi_\alpha)\right)$.

Montrons que l'on peut choisir δ ainsi, i.e. que $\delta A = \{Q, A\}$ où $Q = \sum_{r \geq 0} Q_r^{r+1} \in \mathcal{K}^1$ (avec $Q_r^{r+1} \in \mathcal{K}_r^{r+1}$). S'il en est ainsi, on doit avoir, d'après ce qui précède, $Q = -\delta(\Sigma\chi^\alpha\pi_\alpha)$ ce qui implique en particulier $Q_0^1 = -\delta_0(\Sigma\chi^\alpha\pi_\alpha) = \Sigma u_\alpha \chi^\alpha$ avec δ_0 comme dans 3.4.

4.3. THÉORÈME. — *Il existe* $Q \in \mathcal{K}^1$, $Q = \Sigma\, Q_r^{r+1}$ *avec*

$$Q_r^{r+1} \in \mathcal{K}_r^{r+1},$$

tel que $Q_0^1 = \Sigma u_\alpha \chi^\alpha$ *et* $\{Q,Q\} = 0$. *Alors,* $\delta A = \{Q, A\}\ \forall A \in \mathcal{K}$, *définit une différentielle de* $\mathcal{K}$ *satisfaisant les conditions du théorème* 3.7.

Démonstration. — La démonstration du premier point est un peu analogue à la démonstration du théorème 3.7 ; on construit successivement des Q_r^{r+1} par récurrence en utilisant $H_s^r(\delta_0) = 0$ pour $s \neq 0$. On se réfèrera à [3].

Pour le second point, il est évident, que $\delta A = \{Q, A\}$ définit une différentielle de $\mathcal{K}$, car $\{Q,Q\} = 0 \Rightarrow \delta^2 = 0$, et que c'est une différentielle d'algèbre graduée filtrée car $Q \in \mathcal{K}^1 = \bigoplus_{r \geq 0} \mathcal{K}_r^{r+1}$. On a en décomposant δ en $\delta = \sum \delta_r$, $\delta_1 f = \{u_\alpha, f\}\chi^\alpha$ et

$$\delta_1 \chi^\alpha = \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\chi^\beta \wedge \chi^\gamma = \{Q_1^2, \chi^\alpha\} \qquad \text{avec} \qquad Q_1^2 = \pi_\alpha \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\chi^\beta \wedge \chi^\gamma\ ;$$

en écrivant $\{Q,Q\}_0^2 = 0$, on obtient $\{u_\beta, u_\gamma\} = -2\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}u_\alpha$ d'où

$$d_{\mathscr{F}}\omega^\alpha = (\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\restriction V)\omega^\beta \wedge \omega^\gamma$$

si (ω^α) est la base duale de la base $(\mathrm{Ham}(u_\alpha)\restriction V)$ du $C^\infty(V)$-module $\Gamma E(V)$. Ceci implique que δ_1 induit $d_{\mathscr{F}}$ sur $H(\delta_0)$ identifié à $\Omega(V,\mathscr{F})$ comme précédemment, i.e. on a $(E_1, d_1) = (\Omega(V,\mathscr{F}), d_{\mathscr{F}})$. □

Q est la charge de B.R.S. classique.

Dans le cas où V n'est pas co-isotrope, il y a moyen de faire des choses analogues soit en utilisant les crochets de Dirac, soit en rajoutant des variables auxiliaires pour se ramener au cas co-isotrope. Cependant, on a besoin de prendre des conditions de régularité plus fortes pour pouvoir séparer les contraintes de 1re et de 2e espèces.

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. Becchi, A. Rouet, R. Stora, Renormalization of gauge theories, *Ann. Phys. (N.Y.)*, 98 (1976), 287.

[2] E. S. Fradkin, G. A. Vilkovisky, Quantization of relativistic systems with constraints, *Phys. Letters*, 55B (1975), 224.
E. S. Fradkin, G. A. Vilkovisky, Quantization of relativistic systems with constraints, equivalence of canonical and covariant formalisms in quantum theory of gravitational field, *CERN prepint*, 1977.
I. A. Batalin, G. A. Vilkovisky, Relativistic S-matrix of dynamical systems with boson and fermion constraints, *Phys. Letters*, 69B (1977), 309.
E. S. Fradkin, T. E. Fradkina, Quantization of relativistic system with bosons and fermion first — and second — class contraints, *Phys. Letters*, 72B (1978), 343.

[3] M. Henneaux, Hamiltonian form of the path integral for theories with a gauge freedom, *Physics Reports*, 126 (1985).

[4] D. McMullan, Constraints and B.R.S. symmetry, *Imperial College Preprint*, TP 83-84/21 (1984).

[5] D. McMullan, Yang-Mills theory and the Batelin-Fradkin-Vilkovisky formalism, *J. Math. Phys.*, 28 (1987), 428.

[6] A. D. Browning, D. McMullan, The Batalin, Fradkin and Vilkovisky formalism for higher-order theories, *J. Math. Phys.*, 28 (1987), 438.

[7] J. D. Stasheff, Constrained Hamiltonians. An introduction to homological algebra in field theoretical physics, *Preprint*, 1986.

[8] M. Rosso, Espace des phases réduit et cohomologie B.R.S. Exposé au colloque « Applications harmoniques », Luminy, juin 1986 (à paraître).

[9] B. Kostant, S. Sternberg, Symplectic reduction, B.R.S. cohomology, and infinite dimensional Clifford algebras, *Preprint*, 1987.

[10] R. Abraham, J. E. Marsden, *Foundations of Mechanics*, Benjamin Cummings publishing company inc., 1981.
[11] N. Bourbaki, *Algèbre*, chapitre 10, Algèbre homologique, Masson, Paris, 1980.
[12] W. Greub, S. Halperin, R. Vanstone, *Connections, curvature and cohomology*, Volume III, Academic Press, New York, 1976.
[13] B. Kostant, Graded manifolds, graded Lie theory, and prequantization, in Differential Geometrical Methods in Mathematical Physics, *Lecture Notes in Mathematics*, 570, Springer Verlag, 1977.

Michel Dubois-Violette,
Université de Paris-Sud
Laboratoire de Physique Théorique
& Hautes Energies
Bâtiment 211
91405 Orsay Cedex (France).