

# ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

ÉTIENNE GHYS

## Sur l'invariance topologique de la classe de Godbillon-Vey

*Annales de l'institut Fourier*, tome 37, n° 4 (1987), p. 59-76

[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1987\\_\\_37\\_4\\_59\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1987__37_4_59_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## SUR L'INVARIANCE TOPOLOGIQUE DE LA CLASSE DE GODBILLON-VEY

par Étienne GHYS

---

### 1. Introduction.

L'invariant de Godbillon-Vey date de 1971 [13]. Il s'agit d'une classe de cohomologie réelle de dimension 3 associée à une variété feuilletée de codimension 1 et de classe  $C^2$ . Rapidement, diverses généralisations en codimension supérieure ont mené à une théorie « algébrique » très développée des classes caractéristiques secondaires des feuilletages (voir, par exemple, [17]). La signification géométrique de ces classes secondaires et, en particulier, de l'invariant de Godbillon-Vey, reste cependant assez peu claire. R. Moussu et F. Pelletier d'une part [20], et D. Sullivan d'autre part [23], suggèrent alors que cet invariant pourrait être de nature dynamique et, dans cet esprit, conjecturent qu'un feuilletage à croissance sous-exponentielle (i.e. « dynamiquement simple ») a un invariant de Godbillon-Vey trivial. Après la solution de divers cas particuliers, cette conjecture est finalement démontrée par G. Duminy en 1982. Le résultat obtenu est tout à fait dans la direction d'une interprétation dynamique : l'invariant de Godbillon-Vey est nul si un certain phénomène qualitatif ne se produit pas, à savoir, si le feuilletage ne contient pas de feuille ressort [5]. Ce remarquable théorème a été le point de départ d'une série de travaux qui établissent un lien entre le comportement ergodique d'un feuilletage et une partie de ses classes caractéristiques. Par exemple, S. Hurder montre dans [15] que l'invariant de Godbillon-Vey généralisé en codimension quelconque est nul pour les feuilletages à croissance sous-exponentielle. Cependant, les résultats obtenus jusqu'à présent sont encore incomplets : ils n'établissent que des conditions suffisantes d'annulation des classes secondaires et ne proposent pas encore de véritable interprétation dynamique.

*Mot-clé* : Invariant de Godbillon-Vey.

Observons que deux feuilletages qui sont conjugués par un homéomorphisme partagent évidemment le même comportement qualitatif. Il est tout à fait naturel, dans l'optique des travaux précédemment décrits, de chercher à savoir si la classe de Godbillon-Vey est invariante par conjugaison topologique. Le but de cet article est de fournir une réponse partielle à cette question.

Évidemment, la solution la plus simple consisterait à étendre la définition de cet invariant aux feuilletages topologiques. Aucune extension n'est cependant possible : J. Mather et W. Thurston montrent en effet que le classifiant des feuilletages topologiques est contractile [18] de sorte qu'aucune classe universelle de Godbillon-Vey ne peut exister à ce niveau. De même, un résultat récent de T. Tsuboi [24] montre qu'aucune extension n'est possible aux feuilletages de classe  $C^1$ . Ceci contraste quelque peu avec le résultat de G. Raby [22] selon lequel l'invariant de Godbillon-Vey est invariant par conjugaison de classe  $C^1$  (voir aussi [12] et [16] pour une extension en codimension supérieure).

Il a été cependant remarqué rapidement que la condition d'être de classe  $C^2$  est certainement trop forte pour pouvoir définir un invariant. Tout d'abord, D. B. Fuchs, A. M. Gabrielov et I. M. Gelfand [9] remarquent qu'il est possible de définir un invariant pour les feuilletages de classe  $C^2$  par morceaux. Par la suite, G. Duminy et V. Sergiescu [6] étendent encore la définition aux feuilletages qui sont transversalement de classe  $P$  : un homéomorphisme local  $f$  de  $\mathbf{R}$  est de classe  $P$  (voir [14]) si sa dérivée  $f'$  (définie presque partout) est telle que  $\text{Log} |f'|$  est à variation (localement) bornée. Cette classe  $P$  (qui contient la classe «  $C^2$ -par morceaux ») est fréquemment utilisée dans la théorie des feuilletages de codimension 1 ; c'est par exemple le cadre naturel pour le théorème de Denjoy (voir [14]). Enfin, S. Hurder et A. Katok [16] étendent la définition aux feuilletages transversalement de classe  $C^{1+\alpha}$  ( $\alpha > 1/2$ ) (i.e. dont la première dérivée satisfait une condition de Hölder d'exposant  $\alpha$ ). Notons que cette dernière extension est d'une toute autre nature ; un homéomorphisme de classe  $C^2$  par morceaux n'est pas nécessairement de classe  $C^1$  et, *a fortiori*, de classe  $C^{1+\alpha}$ . La question de savoir si l'invariant de Godbillon-Vey possède un « domaine de définition naturel » n'est pas encore claire ; les classes  $P$  et  $C^{1+\alpha}$  ( $\alpha > 1/2$ ) présentent chacune leur intérêt.

Dans [16], S. Hurder et A. Katok montrent que l'invariant de Godbillon-Vey n'est pas un invariant topologique dans la catégorie  $C^{1+\alpha}$  ( $\alpha > 1/2$ ). Leurs exemples sont obtenus à partir de flots géodésiques

de métriques à courbure négative variable sur une surface. Y. Mitsumatsu [19] avait montré au préalable que ces flots géodésiques ne permettent pas de construire d'exemples de non-invariance topologique dans la catégorie  $C^2$  (voir aussi [10] et [16]).

Dans cet article, nous nous proposons de construire des exemples analogues dans la classe  $P$  et, en fait, dans la classe des feuilletages  $C^2$  par morceaux. Nous allons construire explicitement un feuilletage de codimension 1, analytique réel, sur une variété compacte de dimension 3 dont l'invariant de Godbillon-Vey est non nul mais qui est topologiquement conjugué à un feuilletage affine par morceaux pour lequel l'invariant est nul.

Quant à l'invariance topologique dans le contexte  $C^2$ , nous ignorons si elle a lieu ou non. Cependant, il nous semble que l'exemple que nous proposons est assez proche d'un exemple de classe  $C^2$  : une « chirurgie » permettrait peut-être d'éliminer les feuilles où l'holonomie n'est pas affine mais présente des « coins »...

Le résultat que nous démontrons est en fait beaucoup plus précis ; son énoncé détaillé sera donné au paragraphe 2. Le théorème principal est démontré au paragraphe 3 grâce à l'usage de sections de Birkhoff pour le flot géodésique. Le paragraphe 4 contient quelques remarques complémentaires.

Pour terminer cette introduction, signalons que la non-invariance topologique de l'invariant de Godbillon-Vey en classe  $C^2$  ne serait en aucun cas en contradiction avec l'idée d'une interprétation dynamique ; elle signifierait simplement que cette interprétation est à chercher dans la dynamique différentiable et non pas dans la dynamique qualitative.

## 2. Les deux invariants de Godbillon-Vey.

Nous fixons d'abord quelques notations.

$\text{Diff}_+^r(S^1)$  désigne le groupe des  $C^r$ -difféomorphismes du cercle  $S^1 = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$  qui respectent l'orientation. Lorsque  $r$  n'est pas entier mais s'écrit  $n + \alpha$  avec  $n \in \mathbf{N}$  et  $\alpha \in ]0, 1[$ , nous rappelons qu'une application est de classe  $C^{n+\alpha}$  si elle est de classe  $C^n$  et si sa  $n$ -ième dérivée vérifie une condition de Hölder d'exposant  $\alpha$ .

$P\text{Diff}_+^r(S^1)$  désigne le groupe des homéomorphismes  $f$  du cercle qui respectent l'orientation et sont de classe  $C^r$  par morceaux. Précisons que

nous entendons par là qu'il existe un nombre *fini* d'intervalles ouverts disjoints  $I_i$  dont les adhérences recouvrent le cercle et tels que la restriction de  $f$  à l'adhérence de  $I_i$  soit un  $C^r$ -difféomorphisme sur son image.

$PL_+(S^1)$  est le groupe des homéomorphismes du cercle qui respectent l'orientation et qui sont affines par morceaux (en nombre fini).

$PL_+^\lambda(S^1)$  est le sous-groupe de  $PL_+(S^1)$  formé des éléments dont la dérivée (là où elle est définie) ne prend que des valeurs qui sont des puissances entières (positives ou négatives) du réel strictement positif  $\lambda$ .

$\mathcal{D}_+(S^1)$  désigne le groupe des homéomorphismes du cercle qui respectent l'orientation et qui sont de classe P. Rappelons que  $f$  est de classe P si  $\text{Log } f'$  est à variation bornée (voir [14]). Cela implique en particulier que  $f$  est dérivable partout sauf peut-être en un nombre dénombrable de points et que  $f$  est Lipschitz. Par contre, les éléments de  $\mathcal{D}_+(S^1)$  ne sont pas nécessairement de classe  $C^1$  (par exemple  $PL_+(S^1) \subset \mathcal{D}_+(S^1)$ ).

Soit  $\Gamma_g$  le groupe fondamental de la surface compacte orientée  $\Sigma_g$  de genre  $g$  et soit :

$$\Phi : \Gamma_g \rightarrow \text{Diff}_+^2(S^1)$$

une représentation quelconque. Le procédé bien connu de suspension permet alors de construire un  $S^1$ -fibré associé  $M$  au-dessus de  $\Sigma_g$  muni d'un feuilletage  $\mathcal{F}_\Phi$  transverse aux fibres de cette fibration. Puisque  $M$  est orienté de dimension 3, l'invariant de Godbillon-Vey de  $\mathcal{F}_\Phi$  peut s'évaluer sur la classe fondamentale de  $M$  et fournit donc un « nombre de Godbillon-Vey de  $\mathcal{F}_\Phi$  ». Comme il est bien connu, ce nombre peut aussi se calculer directement à partir de  $\Phi$  de la façon suivante. Il existe une classe de cohomologie de dimension 2, notée  $gv$ , du groupe discret  $\text{Diff}_+^2(S^1)$  telle que le nombre de Godbillon-Vey de  $\mathcal{F}_\Phi$  n'est autre que le résultat de l'évaluation de  $\Phi^*(gv)$  sur le cycle fondamental de  $H_2(\Gamma_g, \mathbf{Z}) \simeq H_2(\Sigma_g, \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}$ . Un 2-cocycle d'Eilenberg-McLane représentant  $gv$  est explicitement décrit dans [2] ; il est donné par la formule (de « Bott-Thurston ») suivante :

$$gv(u, v) = \frac{1}{2} \int_{S^1} \left| \begin{array}{cc} \text{Log } v'(x) & \text{Log}(u \circ v)'(x) \\ (\text{Log } v')'(x) & (\text{Log}(u \circ v))'(x) \end{array} \right| dx$$

où  $u$  et  $v$  sont deux éléments quelconques de  $\text{Diff}_+^2(S^1)$ .

L'extension de  $gv$  à  $\text{P Diff}_+^2(S^1)$  est immédiat ; l'intégrale ci-dessus a encore un sens si  $u$  et  $v$  ne sont que  $C^2$  par morceaux. En ce qui concerne l'extension de G. Duminy et V. Sergiescu, elle ne pose pas non plus de difficulté puisque, si  $u$  et  $v$  sont dans  $\mathcal{D}_+(S^1)$ , alors  $\text{Log } u'$  et  $\text{Log } (u \circ v)'$ , étant à variation bornée, sont différentiables presque partout de sorte que l'intégrale considérée existe encore (et définit toujours un 2-cocycle). Par contre, lorsque  $u$  et  $v$  sont dans  $\text{Diff}_+^{1+\alpha}(S^1)$  ( $\alpha > 1/2$ ), l'intégrale ci-dessus n'est plus définie *a priori* ; S. Hurder et A. Katok réussissent cependant à lui donner un sens pour définir leur extension de  $gv$  à  $\text{Diff}_+^{1+\alpha}(S^1)$  ( $\alpha > 1/2$ ).

Remarquons que si  $u$  et  $v$  sont dans  $\text{PL}_+(S^1)$ , alors  $(\text{Log } v)'$  et  $(\text{Log } (u \circ v))'$  sont nuls presque partout et, en particulier,  $gv$  est identiquement nul sur  $\text{PL}_+(S^1)$ . Cependant, dans [11], V. Sergiescu et l'auteur ont observé qu'une version discrète de l'invariant de Godbillon-Vey peut se définir facilement. Nous généralisons ici cette version discrète. Si  $u$  et  $v$  sont dans  $\mathcal{D}_+(S^1)$ , posons :

$$\overline{gv}(u,v) = \frac{1}{2} \sum_{x \in S^1} \begin{vmatrix} \text{Log } v'(x) & \text{Log } (u \circ v)'(x) \\ \Delta(\text{Log } v)(x) & \Delta(\text{Log } (u \circ v))(x) \end{vmatrix}$$

où  $v'$  et  $(u \circ v)'$  désignent ici les dérivées à droite (qui existent partout) et  $\Delta$  désigne le « saut » en  $x$ , i.e., si  $f$  est une fonction admettant une limite à droite et à gauche, on pose  $\Delta f(x) = f(x+0) - f(x-0)$ . Les sauts impliqués dans la formule ci-dessus sont nuls sauf pour un nombre dénombrable de valeurs de  $x$ . Le fait que  $\text{Log } v'$  et  $\text{Log } (u \circ v)'$  soient à variation bornée (et, en particulier, bornés) entraîne alors que la formule ci-dessus définit bien  $\overline{gv}(u,v)$  comme somme d'une série absolument convergente. On trouvera dans [11] la preuve que  $\overline{gv}$  est un 2-cocycle sur (un groupe analogue à)  $\text{PL}_+(S^1)$ . La même démonstration montre en fait que  $\overline{gv}$  est un 2-cocycle sur  $\mathcal{D}_+(S^1)$ .

En résumé, nous disposons maintenant de deux classes  $gv$  et  $\overline{gv}$  sur  $\mathcal{D}_+(S^1)$ . La première s'annule sur  $\text{PL}_+(S^1)$  et la seconde sur  $\text{Diff}_+^2(S^1)$ . En un certain sens, l'extension de  $gv$  à  $\mathcal{D}_+(S^1)$  faite par G. Duminy et V. Sergiescu n'est pas la seule naturelle : toute classe  $gv + \beta \overline{gv}$  (avec  $\beta \in \mathbf{R}$ ) est une extension de la classe initiale sur  $\text{Diff}_+^2(S^1)$ . C'est pour cette raison qu'un théorème de non invariance topologique dans  $\mathcal{D}_+(S^1)$  n'a d'intérêt que s'il traite de toutes les classes  $gv + \beta \overline{gv}$ . Il est en effet possible *a priori* que, par équivalence topologique, une partie de l'invariant de Godbillon-Vey usuel se

« refuge » dans la partie discrète  $\overline{gv}$ . Nous formulons maintenant le résultat précis que nous avons en vue :

**THÉORÈME 1.** — *Aucune combinaison linéaire non triviale des classes  $gv$  et  $\overline{gv}$  n'est un invariant topologique dans  $\text{P Diff}_+^2(S^1)$  (et donc dans  $\mathcal{D}_+(S^1)$ ). Plus précisément, si  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux réels non tous les deux nuls, il existe deux représentations  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  du groupe fondamental  $\Gamma_g$  d'une surface compacte orientée de genre  $g$  dans le groupe  $\text{P Diff}_+^2(S^1)$  tels que :*

a) *Il existe un homéomorphisme  $h$  du cercle, respectant l'orientation, tel que, pour tout  $\gamma$  de  $\Gamma_g$ , on ait :  $\Phi_2(\gamma) = h \circ \Phi_1(\gamma) \circ h^{-1}$ .*

b) *Les évaluations de  $\Phi_1^*(\alpha gv + \beta \overline{gv})$  et de  $\Phi_2^*(\alpha gv + \beta \overline{gv})$  sur la classe fondamentale de  $H_2(\Gamma_g, \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}$  sont différentes.*

Rappelons que le choix d'une métrique à courbure-1 sur la surface  $\Sigma_g$  (on suppose maintenant  $g \geq 2$ ) permet de construire un plongement  $\Phi$  de  $\Gamma_g$  dans  $\text{PSL}(2, \mathbf{R})$ , groupe d'isométries du disque de Poincaré. En observant que  $\text{PSL}(2, \mathbf{R})$  opère naturellement sur le cercle que l'on peut voir soit comme droite projective réelle, soit comme cercle à l'infini du disque de Poincaré, on obtient ainsi des représentations  $\Phi$  de  $\Gamma_g$  dans le groupe des difféomorphismes analytiques réels du cercle. Il est bien connu que l'invariant de Godbillon-Vey de ces actions est non nul. Le feuilletage de codimension 1 associé est en effet précisément l'exemple initial de R. Roussarie où l'invariant est non nul ; il se calcule à partir du volume de  $\text{PSL}(2, \mathbf{R})/\Phi(\Gamma_g)$  et, d'après le théorème de Gauss-Bonnet, est égal à  $(2\pi)^2 \chi(\Sigma_g)$  c'est-à-dire à  $8\pi^2(1-g)$ . On notera que ce nombre ne dépend que de  $g$  et non pas du choix de la métrique à courbure-1 sur  $\Sigma_g$ . Rappelons enfin que les actions de  $\Gamma_g$  sur le cercle correspondant à ces divers choix de métriques sont toutes topologiquement conjuguées entre elles.

**THÉORÈME 2.** — *Soit  $\Phi : \Gamma_g \rightarrow \text{PSL}(2, \mathbf{R}) \subset \text{Diff}_+^2(S^1)$  une représentation correspondant à un choix (quelconque) d'une métrique à courbure-1 sur  $\Sigma_g$ . Alors, il existe un homéomorphisme  $h$  du cercle, respectant l'orientation, tel que pour tout  $\gamma$  de  $\Gamma_g$ , l'homéomorphisme  $h \circ \Phi(\gamma) \circ h^{-1}$  soit affine par morceaux. On peut même supposer que tous ces homéomorphismes  $h \circ \Phi(\gamma) \circ h^{-1}$  sont dans  $\text{PL}_+^q(S^1)$  avec*

$$\lambda_g = 2g^2 - 1 + 2g\sqrt{g^2 - 1}.$$

Pour terminer ce paragraphe, nous montrons comment le théorème 2 entraîne le théorème 1.

Remarquons tout d'abord que le théorème 2 implique immédiatement que  $gv$  n'est pas un invariant topologique dans  $\text{PDiff}_+^2(S^1)$ . En effet, nous avons vu que  $\Phi^*(gv)$  est non nul (exemple de R. Roussarie) alors que  $(h \circ \Phi \circ h^{-1})(gv)$  est nul car l'image de  $h \circ \Phi \circ h^{-1}$  est contenue dans  $\text{PL}_+(S^1)$ .

Pour montrer que  $\alpha gv + \beta \bar{g}\bar{v}$  n'est pas un invariant topologique, on peut se limiter à  $gv + \beta \bar{g}\bar{v}$  et à  $\bar{g}\bar{v}$  (en multipliant par une constante). Considérons d'abord le cas de  $gv + \beta \bar{g}\bar{v}$ .

Fixons une injection  $\Phi: \Gamma_2 \rightarrow \text{PSL}(2, \mathbf{R}) \subset \text{Diff}_+^2(S^1)$  correspondant à une métrique à courbure  $-1$  sur  $\Sigma_2$ . Soit  $i: \Gamma_3 \rightarrow \Gamma_2$  l'injection correspondant à un revêtement fini  $\pi$  de  $\Sigma_3$  sur  $\Sigma_2$ . Il est clair que  $\psi = \Phi \circ i: \Gamma_3 \rightarrow \text{PSL}(2, \mathbf{R})$  est l'injection qui provient de la métrique de  $\Sigma_3$  image réciproque par  $\pi$  de celle de  $\Sigma_2$ . En appliquant le théorème 2 à  $\Phi$  et à  $\psi$ , on en déduit qu'il existe des homéomorphismes  $h_2$  et  $h_3$  du cercle qui respectent l'orientation et tels que :

$$\begin{aligned} h_2 \circ \Phi(\Gamma_2) \circ h^{-1} &\subset \text{PL}_+^{\lambda_2}(S^1) \\ h_3 \circ \psi(\Gamma_3) \circ h^{-1} &\subset \text{PL}_+^{\lambda_3}(S^1) \end{aligned}$$

avec  $\lambda_2 = 7 + 4\sqrt{3}$  et  $\lambda_3 = 17 + 12\sqrt{2}$ .

Nous disposons maintenant de trois représentations de  $\Gamma_3$  dans  $\text{PDiff}_+^2(S^1)$  topologiquement conjuguées deux à deux, à savoir  $\psi$ ,  $\psi_2$  et  $\psi_3$  définis par :

$$\begin{aligned} \psi_2(\gamma) &= h_2 \circ \psi(\gamma) \circ h_2^{-1} \in \text{PL}_+^{\lambda_2}(S^1) \subset \text{PDiff}_+^2(S^1) \\ \psi_3(\gamma) &= h_3 \circ \psi(\gamma) \circ h_3^{-1} \in \text{PL}_+^{\lambda_3}(S^1) \subset \text{PDiff}_+^2(S^1). \end{aligned}$$

Essayons d'estimer  $gv$  et  $\bar{g}\bar{v}$  pour ces trois représentations. Si l'on réalise la classe fondamentale  $[\Gamma_3]$  de  $H_2(\Gamma_3, \mathbf{Z})$  par un 2-cycle d'Eilenberg-McLane entier du type :

$$\sum n_i(\gamma_i, \gamma'_i), \quad n_i \in \mathbf{Z}; \quad \gamma_i, \gamma'_i \in \Gamma_3,$$

on obtient que l'évaluation de  $\psi_2^*(\bar{g}\bar{v})$  sur  $[\Gamma_3]$  (resp. de  $\psi_3^*(\bar{g}\bar{v})$  sur  $[\Gamma_3]$ ) est un multiple entier de  $\frac{1}{2}(\text{Log } \lambda_2)^2$  (resp.  $\frac{1}{2}(\text{Log } \lambda_3)^2$ ). Quant à  $\psi^*(\bar{g}\bar{v})$  ( $[\Gamma_3]$ ), nous savons qu'il est nul car l'image de  $\psi$  est contenue dans  $\text{Diff}_+^2(S^1)$ .



En ce qui concerne les images réciproques de  $gv$ , nous savons que :

$$\begin{aligned}\psi_2^*(gv)([\Gamma_3]) &= \psi_3^*(gv)([\Gamma_3]) = 0 \quad \text{car } gv \text{ est nul sur } PL_+(S^1) \\ \psi^*(gv)([\Gamma_3]) &= 8\pi^2(1-3) = -16\pi^2.\end{aligned}$$

Supposons maintenant que  $gv + \beta\overline{g\overline{v}}$  soit un invariant topologique. En évaluant sur  $\psi$ ,  $\psi_2$  et  $\psi_3$ , on obtient :

$$-16\pi^2 + \beta \cdot 0 = 0 + \beta \cdot \frac{n}{2} \cdot (\text{Log } \lambda_2)^2 = 0 + \beta \cdot \frac{p}{2} \cdot (\text{Log } \lambda_3)^2$$

avec  $n$  et  $p$  entiers. Comme  $\lambda_2$  et  $\lambda_3$  appartiennent à des corps de nombres quadratiques différents, le quotient  $(\text{Log } \lambda_2)/(\text{Log } \lambda_3)$  est irrationnel et, d'après le théorème de Gelfond-Schneider [21], ce quotient est transcendant. Ceci contredit évidemment une égalité du type précédent et montre donc que  $gv + \beta\overline{g\overline{v}}$  n'est pas un invariant topologique.

Pour démontrer le théorème 1 (toujours en admettant le théorème 2), il nous reste à montrer que  $\overline{g\overline{v}}$  n'est pas un invariant topologique. Considérons les deux éléments  $f_\lambda$  et  $g_\lambda$  de  $PL_+^\lambda(S^1)$  dont les graphes sont indiqués sur la figure 1 (on suppose  $\lambda > 1$ ).

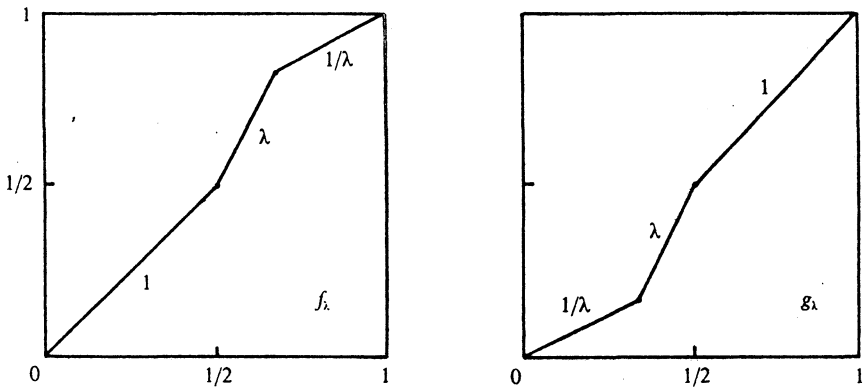


Fig. 1.

(Les nombres indiqués près de chaque tronçon du graphe de  $f_\lambda$  ou de  $g_\lambda$  indiquent les pentes de ces tronçons.)

Évidemment,  $f_\lambda$  et  $g_\lambda$  commutent et définissent donc une représentation  $\Phi_\lambda$  de  $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$  dans  $PL_+^\lambda(S^1) \subset \text{PDiff}_+^2(S^1)$  qui envoie  $e_1 = (1,0)$  sur  $f_\lambda$  et  $e_2 = (0,1)$  sur  $g_\lambda$ . Rappelons le fait élémentaire suivant : si  $u_1$  et  $u_2$

sont deux homéomorphismes de  $[0,1]$  tels que  $u_1(x) < x$  et  $u_2(x) < x$  pour  $x \in ]0,1[$ , alors  $u_1$  et  $u_2$  sont topologiquement conjugués. On en déduit immédiatement que les représentations  $\Phi_\lambda$  sont toutes topologiquement conjuguées deux à deux. Pour évaluer  $\Phi_\lambda^*(\bar{g}v)$  sur la classe fondamentale de  $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ , il suffit de remarquer que celle-ci est représentée par le 2-cycle  $(e_1, e_2) - (e_2, e_1)$ . On obtient :

$$\bar{g}v(f_\lambda, g_\lambda) - \bar{g}v(g_\lambda, f_\lambda).$$

Puisque seul le point  $x = 1/2$  est une singularité commune à  $f_\lambda$  et  $g_\lambda$ , on trouve :

$$\begin{aligned} & 1/2 \left( \begin{vmatrix} \text{Log } g'_\lambda(1/2) & \text{Log } (f_\lambda \circ g_\lambda)'(1/2) \\ (\Delta \text{Log } g'_\lambda)(1/2) & (\Delta \text{Log } (f_\lambda \circ g_\lambda)')(1/2) \end{vmatrix} \right) \\ & - 1/2 \left( \begin{vmatrix} \text{Log } f'_\lambda(1/2) & \text{Log } (g_\lambda \circ f_\lambda)'(1/2) \\ (\Delta \text{Log } f'_\lambda)(1/2) & (\Delta \text{Log } (g_\lambda \circ f_\lambda)')(1/2) \end{vmatrix} \right) \\ & = \frac{1}{2} \left( \begin{vmatrix} 0 & \text{Log } \lambda \\ -\text{Log } \lambda & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \text{Log } \lambda & \text{Log } \lambda \\ \text{Log } \lambda & 0 \end{vmatrix} \right) = (\text{Log } \lambda)^2. \end{aligned}$$

Puisque ce nombre dépend effectivement de  $\lambda$  alors que toutes les représentations  $\Phi_\lambda(\lambda > 1)$  sont topologiquement conjuguées, nous avons montré que  $\bar{g}v$  n'est pas un invariant topologiquement.

### 3. Sections de Birkhoff.

Choisissons une métrique à courbure  $-1$  sur la surface  $\Sigma_g$  et considérons le flot géodésique  $F_t$  de cette métrique, agissant sur le fibré unitaire tangent  $T_1\Sigma_g$  à  $\Sigma_g$ . Rappelons que ce flot est tangent à deux feuilletages de codimension 1 qui sont les feuilletages stables et instables faibles de  $F_t$ , notés respectivement  $\mathcal{F}^s$  et  $\mathcal{F}^u$ . Ces deux feuilletages sont conjugués par l'involution naturelle échangeant deux vecteurs opposés et sont transverses à la fibration en cercles de  $T_1\Sigma_g$ . Le morphisme d'holonomie globale qui s'en déduit :

$$\Gamma_g \rightarrow \text{Diff}_+^2(S^1)$$

est évidemment conjugué à la représentation  $\Phi$  de  $\Gamma_g$  dans  $\text{PSL}(2, \mathbf{R}) \subset \text{Diff}_+^2(S^1)$  associée à la métrique.

Pour démontrer le théorème 2, nous allons utiliser de manière essentielle une construction due à G. D. Birkhoff [1] et que nous

décrivons ici sous une forme inspirée de [8]. Découpons la surface  $\Sigma_g$  le long de  $(2g+2)$  géodésiques fermées  $\gamma_1, \dots, \gamma_{2g+2}$  comme indiqué sur la figure 2.

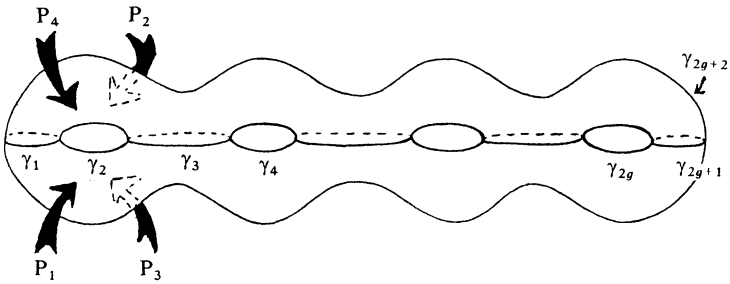


Fig. 2.

Ces géodésiques découpent 4 domaines polygonaux  $P_1, P_2, P_3, P_4$  (à  $2g+2$  côtés). On numérote ces domaines de telle sorte que  $P_1$  et  $P_2$  (resp.  $P_3$  et  $P_4$ ) n'aient que des sommets en commun (voir fig. 2). On choisit alors dans  $P_1$  et  $P_2$  une famille de courbes strictement convexes comme indiqué sur la figure 3.

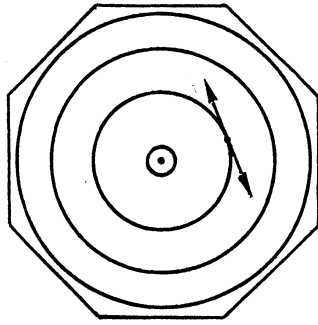


Fig. 3.

Soit  $S \subset T_1\Sigma_g$  l'adhérence de l'ensemble des vecteurs unitaires tangents à l'une de ces courbes. On vérifie alors des points suivants (voir [1] et [8]) :

1. —  $S$  est une surface lisse orientable dont le bord  $\partial S$  est constitué de  $2(2g+2) = 4g + 4$  orbites périodiques de  $F_1$ .

2. — L'intérieur  $S - \partial S$  est transverse au flot  $F$ , et l'application de premier retour  $F : S - \partial S \rightarrow S - \partial S$  qui s'en déduit se prolonge en un difféomorphisme  $F : S \rightarrow S$ .

3. — Un calcul simple de caractéristique d'Euler-Poincaré montre que  $S$  est difféomorphe à un tore  $T^2$  auquel on a ôté  $4g + 4$  disques.

4. — Les feuilletages  $\mathcal{F}^s$  et  $\mathcal{F}^u$  de  $T_1\Sigma_g$  sont transverses à  $S - \partial S$ . Au voisinage d'une composante du bord de  $S$ , les traces de  $\mathcal{F}^s$  et  $\mathcal{F}^u$  sur  $S$  sont comme indiqué sur la figure 4.

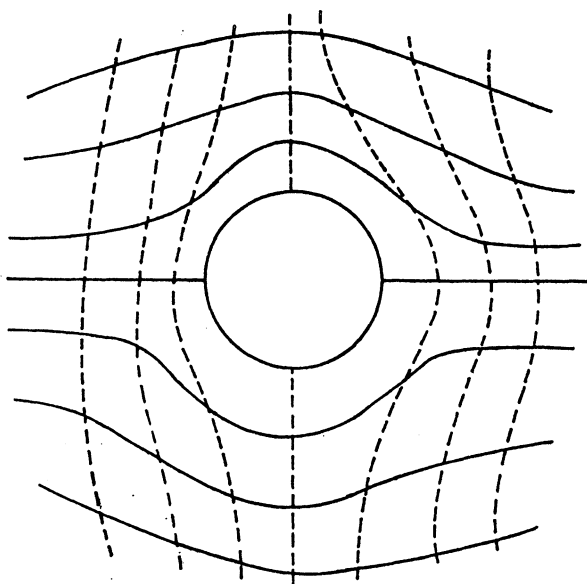


Fig. 4

L'application  $F : S \rightarrow S$  a toutes les propriétés qualitatives d'un difféomorphisme pseudo-Anosov (voir [7]). A strictement parler,  $F$  n'est cependant pas un difféomorphisme pseudo-Anosov car il n'existe pas de mesure transverse lisse pour les feuilletages induits sur  $S$  qui soit multipliée par une constante sous l'action de  $F$ . Cependant,  $F$  est topologiquement conjugué à un pseudo-Anosov. Plus précisément, soit  $\hat{S}$  la surface torique obtenue en identifiant les points de chaque composante du bord de  $S$  et soit  $\hat{F}$  l'homéomorphisme naturel de  $\hat{S}$  (qui fixe  $4g + 4$  points correspondant aux  $4g + 4$  composantes de  $\partial S$ ). La figure 4 montre que les traces de  $\mathcal{F}^s$  et  $\mathcal{F}^u$  sur  $S$  produisent, sur  $\hat{S}$ , deux feuilletages topologiques non singuliers notés  $\hat{\mathcal{F}}^s$  et  $\hat{\mathcal{F}}^u$ .

LEMME 1. — *L'homéomorphisme  $\hat{F}$  est topologiquement conjugué à un difféomorphisme linéaire du tore  $T^2 = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ . Plus précisément, il existe une matrice  $A_g$  de  $SL(2, \mathbf{Z})$  ayant deux valeurs propres réelles distinctes et un homéomorphisme  $H : T^2 \rightarrow \hat{S}$  tels que :*

a)  $\bar{A}_g = H^{-1} \circ \hat{F} \circ H$  où  $\bar{A}_g$  est le difféomorphisme de  $T^2$  induit par  $A_g$ .

b)  $H$  envoie les feuilletages linéaires de  $T^2$  associés aux directions propres de  $A_g$  sur les feuilletages  $\hat{\mathcal{F}}^s$  et  $\hat{\mathcal{F}}^u$ .

*Démonstration.* — Admettons pour un instant que les feuilles de  $\hat{\mathcal{F}}^s$  et  $\hat{\mathcal{F}}^u$  sont toutes denses dans  $\hat{S}$ . Dans ces conditions, il est bien connu que  $\hat{\mathcal{F}}^s$  et  $\hat{\mathcal{F}}^u$  sont uniquement ergodiques, c'est-à-dire que, à multiplication par une constante près, il existe une unique mesure transverse invariante  $\mu_s$  (resp.  $\mu_u$ ) pour  $\hat{\mathcal{F}}^s$  (resp.  $\hat{\mathcal{F}}^u$ ). Ces mesures (dont le support est  $\hat{S}$  tout entier) permettent facilement de construire des cartes locales sur  $\hat{S}$ ; au voisinage d'un point donné, il existe des coordonnées  $(x, y)$  telles que les feuilletages  $\hat{\mathcal{F}}^s$  et  $\hat{\mathcal{F}}^u$  soient donnés par  $x = \text{Cst}$  et  $y = \text{Cst}$  et telles que  $\mu_s$  et  $\mu_u$  soient «  $dy$  » et «  $dx$  ». Si l'on choisit des orientations transverses pour  $\hat{\mathcal{F}}^u$  et  $\hat{\mathcal{F}}^s$ , on impose par ailleurs une condition naturelle d'orientation pour ces coordonnées. Évidemment, sur l'intersection de deux telles cartes, les coordonnées diffèrent par une translation de  $\mathbf{R}^2$ , de sorte que l'on munit ainsi  $\hat{S}$  d'une structure d'espace homogène de  $\mathbf{R}^2$ . En d'autres termes, nous exhibons un homéomorphisme  $H$  entre  $\hat{S}$  et un quotient  $\mathbf{R}^2/\Lambda$  où  $\Lambda$  est un réseau de  $\mathbf{R}^2$ . On observe alors que, vu l'unique ergodicité, l'homéomorphisme  $\hat{F}$  doit multiplier  $\mu_s$  et  $\mu_u$  par des constantes. Ceci signifie précisément que  $\hat{F}$ , conjugué par  $H$ , est un difféomorphisme affine du tore  $\mathbf{R}^2/\Lambda$ . Il est alors facile de conclure.

Il nous reste à montrer que les feuilles de  $\hat{\mathcal{F}}^s$  (ou de  $\hat{\mathcal{F}}^u$ ) sont denses dans  $\hat{S}$ . Supposons que ce ne soit pas le cas et notons  $C \subset \hat{S}$  la réunion des minimaux de  $\hat{\mathcal{F}}^s$  (qui est fermée). Évidemment,  $\hat{F}$  préserve  $C$ . Par ailleurs, il est bien connu que le feuilletage  $\hat{\mathcal{F}}^s$  de  $T_1\Sigma_g$  a toutes ses feuilles denses. Il s'en suit que si  $\ell$  est une feuille de  $\hat{\mathcal{F}}^s$ , la réunion  $\bigcup_{n \in \mathbf{Z}} \hat{F}^n(\ell)$  est dense dans  $\hat{S}$ . Si l'on choisit  $\ell$  dans  $C$ , on voit donc que  $C = \hat{S}$ . Un feuilletage non minimal du tore dont toutes les feuilles sont contenues dans un minimal est en fait une fibration en cercles. Ceci est impossible pour la raison suivante. Soit  $x \in \hat{S}$  un point périodique de  $\hat{F}$ , autre que l'un des  $4g + 4$  points fixes que nous avons signalés. Ce point  $x$  correspond à une orbite périodique

de  $F_t$  qui coupe l'intérieur de  $S$ . Alors la feuille  $\hat{\mathcal{F}}^s$  passant par  $x$  est fixe par un itéré  $\hat{F}^N$  tout en étant contractée car  $F_t$  est un flot d'Anosov ; cette feuille ne peut donc être un cercle. Cette dernière contradiction achève la démonstration du lemme.  $\square$

Nous aurons besoin du calcul des valeurs propres de  $A_g$ .

LEMME 2. — *Les valeurs propres de  $A_g$  sont  $2g^2 - 1 \pm 2g\sqrt{g^2 - 1}$ .*

*Démonstration.* — Bien entendu, pour calculer les valeurs propres  $\lambda$  et  $\lambda'$  de  $A_g$ , il suffit de connaître la trace de  $A_g$ . Il est clair que  $\hat{F}$  respecte les orientations transverses de  $\hat{\mathcal{F}}^s$  et  $\hat{\mathcal{F}}^u$  de sorte que  $\lambda$  et  $\lambda'$  sont positifs (et  $\lambda\lambda' = 1$ ). Le nombre  $N$  de points fixes de  $\hat{F}$  est égal au nombre de solutions, mod  $\mathbb{Z}^2$ , de l'équation :

$$A_g(x,y) = (x,y) \text{ mod } \mathbb{Z}^2$$

i.e.  $N = |\det(A_g - \text{id})| = |(\lambda - 1)(\lambda' - 1)| = \text{tr } A_g - 2$ . Pour calculer  $\text{tr } A_g$ , il nous suffit donc de connaître  $N$ .

Nous connaissons déjà  $4g + 4$  points fixes de  $\hat{F}$ , en l'occurrence ceux qui correspondent aux composantes de  $\partial S$ . Les autres points fixes sont en bijection avec les orbites périodiques de  $F_t$  qui coupent  $S - \partial S$  exactement une fois, c'est-à-dire avec les géodésiques fermées orientées de  $\Sigma_g$  qui pénètrent exactement une fois dans l'un des domaines  $P_1$  ou  $P_2$ . Calculons donc le nombre de géodésiques fermées qui pénètrent exactement une fois dans  $P_1$  et ne rencontrent pas  $P_2$  et nous multiplierons ce nombre par 2. Rappelons que  $P_1$  est un domaine polygonal à  $2g + 2$  côtés qui sont alternativement adjacents à  $P_3$  et  $P_4$ .

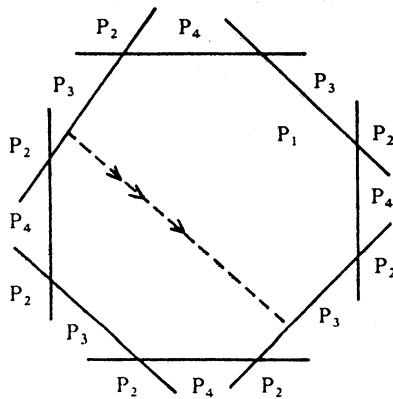


Fig. 5.

Une géodésique fermée orientée qui ne pénètre qu'une fois dans  $P_1$  et ne coupe pas  $P_2$  est contenue dans  $P_1 \cup P_3$  ou  $P_1 \cup P_4$ . Une telle géodésique pénètre dans  $P_1$  par l'un des  $2g + 2$  côtés de  $P_1$  car si elle passait par un sommet, elle couperait aussi  $P_2$ . Une fois ce « côté d'entrée » connu, la géodésique ne peut quitter  $P_1$  que par  $(g+1) - 3 = g - 2$  côtés. Il faut en effet tenir compte de plusieurs faits. D'une part, les côtés d'entrée et de sortie doivent être simultanément adjacents à  $P_3$  ou à  $P_4$ , ce qui laisse  $(2g+2)/2 = g + 1$  possibilités. D'autre part, les côtés d'entrée et de sortie sont distincts. Enfin, les côtés d'entrée et de sortie ne peuvent pas être séparés que par un seul côté de  $P_1$  car sinon la géodésique fermée correspondante serait homotope à l'une des  $4g + 4$  géodésiques fermées orientées initialement choisies. On vérifie que ces contraintes sont effectivement les seules ; toute association entrée-sortie qui satisfait à ces conditions permet de construire naturellement une classe d'homotopie libre de lacets sur  $\Sigma_g$  et l'unique géodésique fermée dans cette classe d'homotopie donne un point fixe de  $\hat{F}$ . Au total, le nombre de points fixes de  $\hat{F}$  est  $4g + 4 + 2(2g+2)(g-2)$ . Il est alors facile de calculer  $\text{tr } A_g$  et d'en déduire les valeurs propres de  $A_g$ .  $\square$

La démonstration du théorème 2 est maintenant facile. Considérons la variété ouverte  $M'$  obtenue en ôtant les  $4g + 4$  orbites périodiques considérées à  $T_1\Sigma_g$ . Il est clair que nous avons montré que la restriction de  $\mathcal{F}^u$  à  $M'$  est topologiquement conjuguée à un feuilletage transversalement affine et, plus précisément, à un feuilletage dont le pseudo-groupe transverse est constitué d'applications affines dont les dérivées sont des puissances entières de  $\lambda_g = 2g^2 - 1 + 2g\sqrt{g^2 - 1}$ .

Soit  $x_0$  un point de  $\Sigma_g$  qui n'est pas situé sur l'une des  $2g + 2$  géodésiques fermées initiales. La fibre  $S^1$  au-dessus de  $x_0$  dans  $T_1\Sigma_g$  est contenue dans  $M'$ . Il existe donc un homéomorphisme  $h$  du cercle  $S^1$  vérifiant la condition suivante. Si  $u$  est un difféomorphisme local de  $S^1$  qui provient du pseudo-groupe d'holonomie de la restriction de  $\mathcal{F}^u$  à  $M'$ , alors  $h \circ u \circ h^{-1}$  est localement affine (avec une dérivée qui est une puissance de  $\lambda_g$ ).

On considère alors un lacet  $\gamma : [0,1] \rightarrow \Sigma_g$  en  $x_0$  que l'on suppose transverse aux  $(2g+2)$  géodésiques initiales. Soit  $\bar{\gamma} : [0,1] \times S^1 \rightarrow T_1\Sigma_g$  le « cylindre feuilleté » au-dessus de  $\gamma$ , i.e. l'application telle que  $\bar{\gamma}(t,\theta)$  se projette sur  $\gamma(t)$  et telle que, pour chaque  $\theta$  de  $S^1$ , la courbe  $t \rightarrow \bar{\gamma}(t,\theta)$  soit contenue dans une feuille de  $\mathcal{F}^u$ . Alors  $\bar{\gamma}([0,1] \times S^1)$  ne coupe les  $4g + 4$  orbites périodiques de  $F$ , qu'en un nombre fini de

points. L'holonomie globale de  $\mathcal{F}^u$  le long de  $\gamma$  est, comme nous l'avons vu, la transformation de Möbius  $\Phi(\gamma)$  (nous identifions ici le lacet  $\gamma$  et sa classe d'homotopie dans  $\pi_1(\Sigma_g, x_0) \simeq \Gamma_g$ ). Il résulte de la description que nous venons de faire qu'il existe un nombre fini d'intervalles ouverts disjoints  $I_1, \dots, I_i, \dots$  dont les adhérences recouvrent  $S^1$  et tels que la restriction de  $\Phi(\gamma)$  à chaque  $I_i$  soit un élément du pseudo-groupe de la restriction de  $\mathcal{F}^u$  à  $M'$ . Il est maintenant clair que l'homéomorphisme  $h$  de  $S^1$  est tel que  $h \circ \Phi(\gamma) \circ h^{-1}$  est un élément de  $PL^{\lambda_g}(S^1)$ .

#### 4. Quelques remarques.

Nous commençons par remarquer que l'homéomorphisme  $h$  du théorème 2 qui conjugue le groupe fuchsien  $\Phi(\Gamma_g)$  avec un sous-groupe de  $PL^{\lambda_g}(S^1)$  n'est pas absolument continu. Il suffit en effet de rappeler que le « ratio-set » d'un groupe fuchsien tel que  $\Phi(\Gamma_g)$  est  $[0, \infty[$  (voir [3] pour ce fait ainsi qu'un rappel de la définition du « ratio-set » ici considéré par rapport à la mesure de Lebesgue sur  $S^1$ , quasi-invariante par  $\Phi(\Gamma_g)$ ). Quant au « ratio-set » d'un sous-groupe de  $PL^{\lambda_g}(S^1)$  (toujours par rapport à la mesure de Lebesgue), c'est évidemment un sous-groupe du groupe des puissances de  $\lambda_g$ . Ceci exclut une conjugaison absolument continue.

Alors que les exemples que nous venons de construire suggèrent que l'invariant de Godbillon-Vey (en classe  $C^2$ ) pourrait ne pas être un invariant topologique, il nous semble cependant raisonnable de penser que  $gv$  est invariant par conjugaison absolument continue (pour cette question, voir [16]). Notons cependant que l'invariant discret  $\overline{gv}$  n'est pas invariant par conjugaison absolument continue comme le montre l'exemple de la famille de représentations  $\Phi_\lambda$  que nous avons considérée au paragraphe 2.

Nous terminons ce paragraphe par la description d'une construction proche de celle que nous venons de faire. Dans [4], R. Bowen et C. Series montrent que si  $\Phi: \Gamma_g \rightarrow \text{PSL}(2, \mathbf{R})$  est du type que nous avons considéré, alors il est possible de trouver une partition du cercle par des intervalles  $I_1, \dots, I_n$  et de choisir des éléments  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  de  $\Gamma_g$  de telle sorte que la propriété suivante soit réalisée. Soit  $f: S^1 \rightarrow S^1$  l'application qui coïncide avec la transformation de Möbius  $\Phi(\gamma_i)$  sur  $I_i$ . Alors,  $f$  est orbitalement équivalente à  $\Phi(\Gamma_g)$  dans le sens suivant.



Deux points  $x$  et  $y$  de  $S^1$  sont dans la même orbite de  $\Phi(\Gamma_g)$  si et seulement si il existe deux entiers positifs  $m, m'$  tels que  $f^m(x) = f^{m'}(y)$  (avec peut-être quelques exceptions qui constituent au plus un nombre fini d'orbites de  $\Phi(\Gamma_g)$ ). On peut reformuler cette dernière propriété de manière équivalente. Considérons le pseudo-groupe  $\mathcal{P}$  de difféomorphismes locaux de  $S^1$  engendré par les restrictions de  $f$  à l'intérieur des  $I_i$ . Alors pour chaque  $x$  de  $S^1$  (n'appartenant pas à un nombre fini d'orbites de  $\Phi(\Gamma_g)$ ), l'orbite de  $x$  sous l'action de  $\Phi(\Gamma_g)$  coïncide avec l'orbite de  $x$  sous l'action de  $\mathcal{P}$ . Ceci permet de démontrer le résultat suivant :

**PROPOSITION.** — Soit  $\lambda$  un réel strictement positif quelconque et  $\Phi: \Gamma_g \rightarrow \text{PSL}(2, \mathbf{R}) \subset \text{Diff}_+^2(S^1)$  un plongement associé à une métrique à courbure  $-1$  sur  $\Sigma_g$ . Alors, il existe un homéomorphisme  $h$  du cercle tel que tous les homéomorphismes  $h \circ \Phi(\gamma) \circ h^{-1}$  sont affines en dehors d'un ensemble dénombrable fermé (qui dépend de  $\gamma$ ) et sont tels que les pentes de chaque composante affine sont des puissances entières de  $\lambda$ .

*Démonstration.* — L'application  $f$  construite dans [4] vérifie deux propriétés importantes. Tout d'abord, la partition  $I_1, \dots, I_n$  est de Markov pour  $f$ , c'est-à-dire que si  $f(I_i)$  coupe  $I_j$  alors  $f(I_i)$  contient  $I_j$ . Par ailleurs  $f$  est expansive dans le sens qu'il existe un itéré positif  $f^N$  de  $f$  dont la dérivée soit partout supérieure à une constante  $k > 1$ . Dans ces conditions, il est classique (et élémentaire) que si une application  $g: S^1 \rightarrow S^1$  est elle aussi expansive et de Markov pour la même partition, alors  $f$  et  $g$  sont topologiquement conjugués. Dans le cas qui nous intéresse, il est clair que l'on peut choisir  $g$  affine par morceaux (en nombre fini) de telle sorte que la dérivée de  $g$  ne prenne que des valeurs qui sont des puissances entières de  $\lambda$ . Soit  $h: S^1 \rightarrow S^1$  un homéomorphisme qui conjugue  $f$  et  $g$ . Nous allons montrer que  $h$  vérifie la condition de la proposition.

Soit  $\gamma \in \Gamma_g$ . Puisque  $f$  et  $\Phi(\Gamma_g)$  sont orbitalement équivalents, nous pouvons écrire  $S^1$  comme une union  $E \cup (S^1 - E)$  où  $E$  est dénombrable et où, pour tout  $x$  de  $S^1 - E$ , il existe un élément  $p$  du pseudo-groupe  $\mathcal{P}$  tel que  $\Phi(\gamma)(x) = p(x)$ . Observons alors que si  $p$  et  $p'$  sont dans  $\mathcal{P}$ , alors l'ensemble des points  $x$  où  $p(x) = p'(x)$  est ou bien fini ou bien une réunion d'intervalles. La dénombrabilité de  $\mathcal{P}$  permet alors d'écrire  $S^1$  sous la forme  $E' \cup \left( \bigcup_{p \in \mathcal{P}} X_p \right)$  où  $E'$  est dénombrable et où  $X_p$  est une réunion d'intervalles sur lesquels  $p$  et  $\Phi(\gamma)$  coïncident. Il

suffit alors de remarquer que  $h$  conjugue  $f$  et  $g$  de sorte que le conjugué de  $\mathcal{P}$  par  $h$  ne contient que des applications affines dont les pentes sont des puissances entières de  $\lambda$ .  $\square$

La construction que nous venons de décrire, bien que très simple, a l'inconvénient de produire des applications affines par morceaux qui ont une infinité de morceaux. Cette infinité provient du fait suivant. Un élément donné  $\gamma$  de  $\Phi(\Gamma_g)$  ne peut pas être décrit sur  $S^1$  par un nombre fini d'éléments du pseudo-groupe  $\mathcal{P}$  en général. Le pseudo-groupe  $\mathcal{P}$  et le groupe  $\Gamma_g$  ont en effet une structure géométrique très différente ;  $\Gamma_g$  n'a qu'un seul bout alors que  $\mathcal{P}$  a une structure d'arbre et a un ensemble de Cantor de bouts.

Pour quelles valeurs de  $\lambda$  un groupe fuchsien  $\Phi(\Gamma_g) \subset \mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$  est-il topologiquement conjugué à un sous-groupe de  $\mathrm{PL}_+^\lambda(S^1)$ ? Nous avons déjà exhibé quelques valeurs de  $\lambda$ , quadratiques sur  $\mathbf{Q}$ . Il ne serait pas difficile de produire d'autres valeurs (algébriques) en utilisant des surfaces de Birkhoff de genre supérieur. Est-il possible de trouver de tels  $\lambda$  qui soient transcendants ?

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] G. D. BIRKHOFF, Dynamical systems with two degrees of freedom, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 18 (1917), 199-300.
- [2] R. BOTT, On some formulas for the characteristic classes of group actions, Differential topology, foliations and Gelfand-Fuks cohomology, Proceed. Rio de Janeiro, 1976, *Springer Lecture Notes*, vol. 652 (1978).
- [3] R. BOWEN, Anosov foliations are hyperfinite, *Ann. of Maths*, vol. 106 (1977), 549-565.
- [4] R. BOWEN, C. SERIES, Markov maps associated with Fuchsian groups, *Inst. Hautes Etudes Sci. Pub. Math.*, n° 50 (1979), 153-170.
- [5] G. DUMINY, L'invariant de Godbillon-Vey se localise dans les feuilles ressort, preprint, Université de Lille (1982).
- [6] G. DUMINY, V. SERGIESCU, Sur la nullité de l'invariant de Godbillon-Vey, *C.R. Acad. Sci. Paris*, 292 (1981), 821-824.
- [7] A. FATHI, F. LAUDENBACH, V. POENARU, Travaux de Thurston sur les surfaces, *Astérisque*, 66-67 (1979).
- [8] D. FRIED, Transitive Anosov flows and pseudo-Anosov maps, *Topology*, vol 22, n° 3 (1983), 299-303.
- [9] D. B. FUCHS, A. M. GABRIELOV, I. M. GELFAND, The Gauss-Bonnet theorem and the Atiyah - Patodi - Singer functionals for the characteristic classes of foliations, *Topology*, 15 (1976), 165-188.
- [10] E. GHYS, Flots d'Anosov dont les feuilletages stables sont différentiables, *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.*, 20 (1987), 251-270.

- [11] E. GHYS, V. SERGIESCU, Sur un groupe remarquable de difféomorphismes du cercle, *Comment. Math. Helvetici*, 62 (1987), 185-239.
- [12] E. GHYS, T. SUBOI, Différentiabilité des conjugaisons entre systèmes dynamiques de dimension 1, à paraître aux *Annales de l'Institut Fourier*, Grenoble, 38-1 (1988).
- [13] C. GODBILLON, J. VEY, Un invariant des feuilletages de codimension 1, *C.R. Acad. Sci. Paris*, 273 (1971), 92-95.
- [14] M. HERMAN, Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations, *Inst. Hautes Études Sci. Pub. Math.*, n° 49 (1978), 5-234.
- [15] S. HURDER, The Godbillon measure for amenable foliations, *J. Differential Geometry*, 23 (1986), 347-365.
- [16] S. HURDER, A. KATOK, Differentiability, rigidity and Godbillon-Vey classes for Anosov foliations, preprint, University of Illinois (1986).
- [17] H. B. LAWSON, Lectures on the quantitative theory of foliations, Nat. Sci. Foundations Regional Conf., Saint-Louis (1975) Am. Math. Soc.
- [18] J. MATHER, The vanishing of the homology of certain groups of homeomorphisms, *Topology*, 10 (1971), 297-298.
- [19] Y. MITSUMATSU, A relation between the topological invariance of the Godbillon-Vey invariant and the differentiability of Anosov foliations, *Advanced Studies in Pure Mathematics*, University of Tokyo 5 (1985).
- [20] R. MOUSSU, F. PELLETIER, Sur le théorème de Poincaré-Bendixson, *Ann. Inst. Fourier*, 24-1 (1974), 131-148.
- [21] I. NIVEN, Irrational numbers, *The Corus mathematical monographs* (Math. Ass. of America) n° 11 (1956).
- [22] G. RABY, L'invariant de Godbillon-Vey est stable par  $C^1$ -difféomorphisme, à paraître aux *Annales de l'Institut Fourier*, Grenoble, 38-1 (1988).
- [23] P. A. SCHWEITZER, editor, Some problems in foliation theory and related area, Differential topology, foliations and Gelfand-Fuks cohomology, Rio de Janeiro (1976), *Springer Lecture Notes in Math.*, 652 (1978), 240-252.
- [24] T. SUBOI, On the foliated products of class  $C^1$ , preprint.

Étienne GHYS,

Université des Sciences et Techniques de Lille I  
U.F.R. de Mathématique  
U.A. 751 C.N.R.S.  
59655 Villeneuve d'Ascq (France).