ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

STEPHEN HALPERIN

Le complexe de Koszul en algèbre et topologie

Annales de l'institut Fourier, tome 37, nº 4 (1987), p. 77-97

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1987__37_4_77_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
37, 4 (1987), 77-97.

LE COMPLEXE DE KOSZUL EN ALGÈBRE ET TOPOLOGIE

par Stephen HALPERIN

1. Introduction.

Le complexe de Koszul était, à l'origine, une algèbre différentielle graduée (ADG) de la forme $B \otimes \Lambda(x_1, \ldots, x_r)$, $dx_i = b_i \in B$, où B était une sous ADG (dite la *base*). Ce sont les recherches de Cartan, Chevalley, Koszul et Weil qui ont mis en évidence le fait que la cohomologie réelle d'un fibré principal pouvait se calculer à partir de pareils complexes, B étant dans ce cas l'algèbre des formes de Rham sur la base du fibré. En même temps Koszul a commencé l'étude propre de ces complexes, d'où il a tiré un beau résultat sur la cohomologie des espaces symétriques compacts.

Presque aussitôt après, ce complexe a été abandonné par les topologues et adopté par les algébristes, puis repris par les topologues, ... En effet, depuis les trente-sept ans qu'il a été introduit ce complexe a été appliqué, étudié, et généralisé d'un côté comme de l'autre, sinon des deux à la fois.

Dans cet article j'ai essayé de résumer cette histoire, avec quelques détails sur les propriétés et techniques qui tournent autour de ce complexe. Pour des raisons de place ce résumé est très loin d'être complet ; par contre, j'ai essayé qu'il soit lisible par un jeune chercheur aussi bien en topologie qu'en algèbre.

Les œuvres de Koszul (et tout particulièrement son complexe) ont eu une influence profonde sur mes propres travaux. C'est donc avec un plaisir réel que je lui offre ce petit « cadeau d'anniversaire » et je remercie vivement les organisateurs du Colloque de m'en avoir donné l'occasion.

Mots-clés : Complexe de Koszul - ADGC - M-suites - Déviations d'un anneau local - Modèles de Tate, Sullivan, Avramov.

2. Le premier complexe de Koszul.

D'après un théorème de Hopf-Samelson [20, 25], l'algèbre de cohomologie, $H^*(G;\mathbf{R})$, d'un groupe de Lie compact et connexe est l'algèbre extérieure, ΛP_G, sur le sous-espace P_G des éléments primitifs, qui sont tous de degré impair.

La généralisation de ce résultat à un fibré principal C^∞ quelconque, $G \xrightarrow{j} E \xrightarrow{\pi} M$, est décrit dans les conférences de H. Cartan [12] et Koszul [22] au célèbre « Colloque de Topologie » tenu à Bruxelles il y a trente-sept ans. Fixons une base $\{x_i\}$ de P_G, et notons $A_{DR}(\ )$ et $H_{DR}(\ )$ les foncteurs « formes différentielles » et « cohomologie de de Rham ». Le premier pas consiste à montrer que tout x_i est transgressif ; c'est-à-dire qu'il existe des formes G-invariantes $\Phi_i \in A_{DR}(E)$ et des formes fermées $z_i \in A_{DR}(M)$ telles que

$$d\Phi_i = A_{DR}(\pi)z_i \text{ et } A_{DR}(j)\Phi_i \text{ est fermée et représente } x_i.$$

Ceci a été démontré d'abord par Koszul dans sa thèse [21] pour le cas où E était un groupe de Lie, G un sous-groupe et M = E/G l'espace homogène, et ensuite en général par Weil et Chevalley. (La réciproque est aussi vraie, comme l'a montré H. Cartan.)

Ceci étant, une algèbre différentielle graduée commutative (ADGC), $(A_{DR}(M) \otimes \Lambda P_G, d)$ est alors définie par les conditions

$$A_{DR}(M) \text{ est une sous ADGC;} \qquad dx_i = z_i,$$

et un morphisme $\varphi : (A_{DR}(M) \otimes \Lambda P_G, d) \to A_{DR}(E)$ est défini par

$$\varphi|_{A_{DR}(B)} = A_{DR}(\pi) \qquad \text{et} \qquad \varphi x_i = \Phi_i.$$

Le deuxième pas consiste, alors, à montrer que $H(\varphi)$ est un isomorphisme :

$$(2.1) \qquad H(\varphi) : H(A_{DR}(M) \otimes \Lambda P_G) \xrightarrow{\cong} H_{DR}(E).$$

En effet, φ se décompose comme

$$A_{DR}(M) \otimes \Lambda P_G \xrightarrow[\varphi_1]{} A_{DR}(E)^G \xrightarrow[\varphi_2]{} A_{DR}(E),$$

φ_2 étant l'inclusion de la sous ADGC des formes invariantes par G. Chevalley a montré que $H(\varphi_1)$ est un isomorphisme : on filtre les deux ADGC's par « le degré en M » et on constate que φ_1 induit un isomorphisme de suites spectrales à partir du niveau E_1. Le fait que $H(\varphi_2)$ soit un isomorphisme est un théorème de E. Cartan [11] remontant à 1928.

Ainsi est né le premier *complexe de Koszul*. C'était une ADGC sur un corps $\mathbf{k}$ (dans ce cas $\mathbf{k}=\mathbf{R}$) de la forme $(B\otimes\Lambda P,d)$ définie à partir d'une ADGC (B,d_B) – dite *la base* – et d'une suite $z_1,\ldots,z_r$ de cocycles pairs dans B, par les conditions : (1) $d|_B = d_B$ et (2) P est muni d'une base $x_1,\ldots,x_r$ ($\deg x_i=\deg z_i-1$) telle que $dx_i = z_i$. Aujourd'hui on dirait (suivant Tate [28]) qu'on avait ajouté des variables impaires x_i librement à B afin de tuer les z_i.

Regardons le cas $r = 1$. Le complexe est, alors, de la forme

$$(B\otimes\Lambda x,d), \qquad dx = z\in B,$$

et correspond à un fibré $S^n \to E \to M$ où $n = \deg x$ est impair. La suite exacte courte

$$0\to B\to B\otimes\Lambda x\to B\otimes x\cong B\to 0$$

donne lieu à une longue suite exacte de cohomologie :

$$\text{(2.2)} \qquad \cdots\to H^k(B)\to H^k(B\otimes\Lambda x)\to H^{k-n}(B)\xrightarrow{\partial} H^{k+1}(B)\to\cdots$$

où le connectant, ∂, est la multiplication par $[z]$: ce n'est autre que la *suite de Gysin*. De celle-ci on tire la suite exacte courte

$$\text{(2.3)} \qquad 0\to H(B)/[z]\cdot H(B)\to H(B\otimes\Lambda x)\to \mathrm{Ann}([z])\to 0$$
$$\text{où } \mathrm{Ann}\ ([z]) = \{\alpha\in H(B)\,|\,\alpha\cdot[z]=0\}.$$

En général, comme le remarque Koszul dans sa conférence à Bruxelles, le complexe $(B\otimes\Lambda P,d)$ est muni de la filtration $F_p = B\otimes\Lambda^{\leqslant p}P$, ce qui conduit à une suite spectrale d'ADGC dont le terme E_1 est $(H(B)\otimes\Lambda P,d_1)$ avec $d_1|H(B) = 0$ et $d_1x_i = [z_i]$, c'est donc de nouveau un complexe de Koszul mais avec la différentielle de la base entièrement nulle.

Soit maintenant $S = \mathbf{k}[y_1,\ldots,y_r]$ l'algèbre de polynômes en r variables y_i avec $\deg y_i = (\deg x_i)+1$. L'application $y_i\mapsto[z_i]$ fait de $H(B)$ un S-module gradué, et des observations $H(S\otimes\Lambda P)=\mathbf{k}$ et $H(B)\otimes_S(S\otimes\Lambda P,d) = (H(B)\otimes\Lambda P,d_1)$ Koszul a presque pu tirer la conclusion (vraie) :

$$\mathrm{Tor}^S(\mathbf{k},H(B)) = H(H(B)\otimes\Lambda P,d_1)\,;$$

il ne lui manquait que le foncteur « Tor » qui ne naquit que quelques années plus tard.

De plus, cette suite spectrale de Koszul est aujourd'hui reconnaissable comme le tout premier exemple de la classe de suites spectrales dites d'« Eilenberg-Moore », convergeant d'un vrai Tor vers un Tor Différentiel. Celle utilisée par Chevalley est différente, c'est une suite spectrale de type « Leray-Serre ».

Revenons à l'ADGC $(B \otimes \Lambda P, d)$. On en construit une nouvelle de la forme $(S \otimes B \otimes \Lambda P, D)$ avec $D|_{S\otimes B} = \mathrm{id} \otimes d_B$ et $Dx_i = 1 \otimes z_i - y_i \otimes 1$. Il est facile de construire un isomorphisme $(B,d_B) \otimes (S \otimes \Lambda P, d) \xrightarrow{\cong} (S \otimes B \otimes \Lambda P, D)$; l'inclusion de (B,d_B) dans $(S \otimes B \otimes \Lambda P, D)$ induit alors un isomorphisme en homologie. D'autre part, en filtrant par le degré en S on arrive à une suite spectrale convergeant de $S \otimes H(B \otimes \Lambda P, d)$ vers $H(S \otimes B \otimes \Lambda P, D) = H(B)$.

De ces remarques, et de la suite spectrale de Koszul, il résulte les propositions suivantes :

Proposition 2.4. — *Soit* $\varphi : (B,d_B) \to (B',d_{B'})$ *un morphisme d'*ADGC, *et* $\varphi \otimes \mathrm{id} : (B \otimes \Lambda P, d) \to (B' \otimes \Lambda P, d')$ *le morphisme induit* $(d'x_i = \varphi z_i)$. *Alors*

$$H(\varphi) \textit{ est un isomorphisme} \Leftrightarrow H(\varphi \otimes \mathrm{id}) \textit{ est un isomorphisme.} \qquad \square$$

Proposition 2.5. — *Pour un complexe de Koszul* $(B \otimes \Lambda P, d)$ *les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) $H(B \otimes \Lambda P, d)$ *est de dimension totale finie.*

(2) $H(H(B) \otimes \Lambda P, d_1)$ *est de dimension totale finie.*

(3) $H(B)$ *est un S-module finement engendré.* $\square$

La propriété de « dimension totale finie » remonte, alors, la suite spectrale de Koszul jusqu'au terme E_2. Il n'en est pas de même pour la propriété « dualité de Poincaré » — même si la suite spectrale dégénère au terme E_2 — comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 2.6. — Posons $B = [\mathbf{k}[a,b] \otimes \Lambda\omega]/(ab, \omega b, b^3)$ et posons $da = db = 0$, $d\omega = b^2$. Construisons ensuite le complexe de Koszul $(B \otimes \Lambda x, d)$ avec $dx = a$. Les éléments

$$1, b, b \otimes x \quad \text{et} \quad a\omega$$

représentent alors une base de $H(H(B) \otimes \Lambda x)$ et de $H(B \otimes \Lambda x)$.

Mais dans H(B), $b^2 = 0$, et il en résulte que dans $H(H(B)\otimes \Lambda x)$ la multiplication est triviale. Par contre, dans $H(B\otimes \Lambda x)$, $[b][b\otimes x] = [a\omega]$ et $H(B\otimes\Lambda x)$ satisfait donc à la dualité de Poincaré.

Cet exemple montre la différence entre les algèbres $H(B\otimes\Lambda P)$ et $H(H(B)\otimes\Lambda P)$, même dans le cas d'une dégénérescence de suite spectrale. Néanmoins, dans un cas bien classique on peut identifier ces deux algèbres. En effet, si K/G est un espace symétrique compact, E. Cartan construit un morphisme d'ADGC, $H_{DR}(K/G,0) \to A_{DR}(K/G,d)$, qui induit l'identité en cohomologie. Puisque un complexe de Koszul $(B\otimes\Lambda P,d)$ ne dépend (à isomorphisme près) que des classes $[z_i] \in H(B)$ il en résulte que

$$H(H(K/G)\otimes\Lambda P) \underset{\text{algèbres}}{\cong} H(A_{DR}(K/G)\otimes\Lambda P)$$

pour tout complexe de Koszul à base $A_{DR}(K/G)$.

En particulier, appliqué au fibré principal $G \to K \to K/G$. Koszul en déduit que $H(H(K/G)\otimes\Lambda P) \cong H(K) = \Lambda P_K$. D'autre part, motivé par ceci, il démontre le très beau théorème :

THÉORÈME 2.7 ([22;(6)]). — *Soit* $(H\otimes\Lambda P,d)$ *un complexe de Koszul où* H *est une algèbre de dimension finie et* $d|_H = 0$. *Si* $H(H\otimes\Lambda P)$ *est une algèbre extérieure alors*

$$(2.8)\qquad H \cong \mathbf{k}[b_1,\dots,b_n]\otimes\Lambda(u_1,\dots,u_r)/(w_1,\dots,w_n),$$

les w_i *formant une* A-*suite dans l'algèbre*

$$A = \mathbf{k}[b_1,\dots,b_n]\otimes\Lambda(u_1,\dots,u_r). \qquad \square$$

(Une A-suite est une suite d'éléments w_i tels que w_i n'est pas un diviseur de zéro en $A/(w_1,\dots,w_{i-1})$.)

Il résulte de (2.7) que la cohomologie réelle d'un espace symétrique est de la forme (2.8). Ces espaces rentrent donc dans la classe des espaces homogènes pour lesquelles la théorie de H. Cartan et Weil donne une forme explicite pour la cohomologie ; en particulier les w_i peuvent être choisis entièrement dans $\mathbf{k}[b_1,\dots,b_n]$.

Mentionnons enfin que des démonstrations détaillées des résultats de [12], [22] se trouvent dans [1] et dans [16].

3. Le complexe de Koszul en algèbre.

Le complexe de Koszul était introduit dans le cadre des formes différentielles pour étudier la cohomologie des fibrés principaux. Les ADGC en question contenaient donc le corps de base (normalement **R**) et elles étaient graduées supérieurement, avec différentielle de degré $+1$. Néanmoins, dans les vingt ans qui suivaient le Colloque de Bruxelles la cohomologie en caractéristique zéro (et avec celle-ci le complexe de Koszul) s'est perdue de vue des topologues.

Par contre, et juste à ce moment, les algébristes l'ont adopté comme outil important dans l'étude homologique des anneaux commutatifs. Koszul lui-même l'utilise dans son article pour démontrer facilement le théorème de syzygies d'Hilbert. L'intérêt du complexe est ensuite signalé par Cartan et Eilenberg dans leur livre « Homological Algebra » [10; p. 152], et ses propriétés sont développées après par Serre [26], Auslander-Buchsbaum [4] et Assmus [3], entre autres.

Dans ce contexte les ADGC sont définies sur un anneau commutatif quelconque (concentré en degré zéro), les degrés bien que positifs sont écrits inférieurement, et les différentielles sont de degré -1. Le complexe de Koszul est défini à partir d'un anneau commutatif R (en degré zéro) et d'une suite $a_1, \ldots, a_r$ d'éléments de R comme suit : soit P un **Z**-module libre de base $x_1, \ldots, x_r$ en degré 1 ; on définit alors le complexe comme l'ADGC

(3.1) $$(R \otimes_Z \Lambda P, d); \qquad d|_R = 0, \quad dx_i = a_i.$$

Ensuite on peut (comme dans [10]) former les complexes

(3.2) $$(M \otimes_Z \Lambda P, d) ; = M \otimes_R (R \otimes_Z \Lambda P, d)$$

où M est un R-module. Si (M, d_M) est un R-module gradué différentiel les complexes

(3.3) $$(M \otimes_Z \Lambda P, d) = (M, d_M) \otimes_R (R \otimes_Z \Lambda P, d)$$

sont ceux considérés dans [4]. Ils admettent une suite spectrale « de Koszul » convergeant de $(H(M) \otimes_Z \Lambda P, d)$ vers $H(M \otimes_Z \Lambda P, d)$ – (filtration par le degré extérieur dans ΛP) ; en particulier on a l'analogue de (2.4). Enfin, si M est une ADGC sur R alors (3.3) est de nouveau une ADGC, analogue à celles introduites par Koszul.

Donnons maintenant quelques propriétés du complexe dans ce contexte. Nous supposerons désormais que R est noetherien, et que l'idéal $\mathfrak{a} = (a_1, \ldots, a_r)$ est contenu dans tout idéal maximal de R. Ceci entraîne le *lemme de Nakayama :* si M est un R-module noetherien alors $\mathfrak{a}M = M$ entraîne $M = 0$.

Soient alors $a_1, \ldots, a_r \in R$ satisfaisant à ces restrictions, et soit M un R module noetherien. La structure évidente de $M \otimes_Z \Lambda P$ comme $R \otimes_Z \Lambda P$-module fait de $H(M \otimes_Z \Lambda P)$ un module gradué sur $H(R \otimes_Z \Lambda P)$, d'où en particulier une structure de $R/\mathfrak{a}$ module dans chaque $H_i(M \otimes_Z \Lambda P)$, puisque $R/\mathfrak{a} = H_0(R \otimes_Z \Lambda P)$. De plus,

$$(3.4)\quad \begin{cases} H_0(M \otimes_Z \Lambda P) = M/\mathfrak{a}M. \\ H_r(M \otimes_Z \Lambda P) = N \otimes x_1 \wedge \cdots \wedge x_r\,; \ N = \{m \in M \mid \mathfrak{a} \cdot m = 0\}. \\ \text{Chaque } H_i(M \otimes_Z \Lambda P) \text{ est un } R/\mathfrak{a} \text{ module noetherien.} \end{cases}$$

Enfin, à l'aide de (2.2) et du lemme de Nakayama on établit la

PROPOSITION 3.5 ([22 ; Cor. au Théorème II], [4 ; Proposition 2.4]). — *Soit* M *un* R *module noetherien. Si* $H_p(M \otimes_Z \Lambda P) = 0$ *alors*

(1) $H_q(M \otimes_Z \Lambda P) = 0$, $q \geqslant p$.

(2) $H_p(M \otimes_Z \Lambda(x_1, \ldots, x_i)) = 0$, $i \leqslant r$. □

Soit toujours M un R module noetherien. Rappelons que $b \in R$ est un M-*diviseur de zéro* s'il y a un $m \neq 0$ dans M tel que $bm = 0$. Une M-*suite* est une suite $b_1, \ldots, b_s \in R$ tel que $(b_1, \ldots, b_s).M \subsetneq M$ et tel que pour tout i, b_i n'est pas un diviseur de zéro dans $M/(b_1, \ldots, b_{i-1})M$.

Si b n'est pas un M diviseur de zéro, alors

$$0 \to M \xrightarrow{\cdot b} M \to M/bM \to 0$$

est une suite exacte courte. Le foncteur $\otimes_Z \Lambda P$ étant exact, on en déduit une suite exacte courte de complexes de Koszul et une longue suite exacte en homologie. Si $b \in \mathfrak{a}$ la multiplication par b est nulle en homologie, puisque la structure de R-module induit une structure de $R/\mathfrak{a}$ module en homologie. La longue suite exacte d'homologie devient, alors, la suite exacte courte :

$$(3.6)\quad 0 \to H_*(M \otimes_Z \Lambda P) \to H_*(M/bM \otimes_Z \Lambda P) \xrightarrow{\partial} H_{*-1}(M \otimes_Z \Lambda P) \to 0.$$

A l'aide de ces remarques on établit facilement les deux propositions suivantes :

PROPOSITION 3.6 ([4 ; Proposition 2.8], [26 ; IV Proposition 3]). — *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) $a_1, \ldots, a_r$ *est une* M-*suite.*

(2) $H_p(M \otimes_Z \Lambda P) = 0$, $p \geqslant 1$.

(3) $H_1(M \otimes_Z \Lambda P) = 0$.

En particulier, si $a_1, \ldots, a_r$ *est une* M *suite il en est de même pour toute permutation des* a_i. □

PROPOSITION 3.7 ([4 ; Theorem 1.7]). — *Soit* n *le degré maximum tel que* $H_n(M \otimes_Z \Lambda P) \neq 0$, *et* q *la longueur d'une* M-*suite maximale d'éléments de* $\mathfrak{a}$. *Alors :*

(1) $r = n + q$.

(2) *Toute* M *suite d'éléments de* $\mathfrak{a}$ *se complète en une* M-*suite de longueur* q.

(3) *Si* R *contient un corps infini, alors toute* M-*suite d'éléments de* $\mathfrak{a}$ *se complète, par des combinaisons linéaires des* a_i, *en une* M-*suite de longueur* q. □

Le complexe de Koszul a connu diverses applications en algèbre, par exemple à des questions de multiplicité ([4], [26]). Nous nous restreindrons ici à ses applications à la structure d'anneaux locaux.

4. Anneaux locaux.

Dans cette section $(R, \mathfrak{m}, \mathbf{k})$ désigne un anneau local : c'est-à-dire que R est noetherien avec un seul idéal maximal $\mathfrak{m}$ et corps résiduel $\mathbf{k} = R/\mathfrak{m}$. A la filtration de R par les idéaux $\mathfrak{m}^q$ sont associés deux autres anneaux noetheriens : (1) le *gradué associé* $\mathrm{gr}\, R = R/\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \ldots$; c'est une $\mathbf{k}$-algèbre engendrée par $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$, et (2) le *complété* $\hat{R} = \varprojlim R/\mathfrak{m}^q$. Si $R = \hat{R}$, alors R est *complet ;* $\hat{R}$ est toujours complet.

Rappelons une dernière propriété de ces anneaux, qui se déduit du lemme de Nakayama. Si M est un R-module noetherien un ensemble $\{m_i\}$ de M engendre M si et seulement si son image dans $M/\mathfrak{m}M$ engendre ce $\mathbf{k}$ espace. Les ensembles minimaux de générateurs correspondent donc exactement aux **k**-bases de $M/\mathfrak{m}M$. Si $\{m_i\}$ et $\{m'_i\}$ sont deux tels ensembles et r_{ij} une matrice telle que $m'_i = \Sigma r_i m_j$ il résulte que det $(r_{ij}) \notin \mathfrak{m}$. Ce déterminant est donc inversible, et il en est de même, alors, pour la matrice.

Passons à l'exemple $M = \mathfrak{m}$. La longueur, r, d'une suite minimale $a_1, \ldots, a_r$ de générateurs de $\mathfrak{m}$ est la **k**-dimension de $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$, c'est la *dimension de plongement* de R qui est notée $e_1(R)$:

$$(4.1) \qquad e_1(R) = \dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 .$$

De plus, le complexe

$$K^R = R \otimes_Z \Lambda(x_1, \ldots, x_r); \quad dx_i = a_i$$

est indépendant (à R-isomorphisme près) du choix des a_i : si $a'_i = \Sigma r_{ij} a_j$ l'isomorphisme $(K^R, d^1) \xrightarrow{\cong} (K^R, d)$ est donné par $x_i \mapsto \Sigma r_{ij} x_j$. Ce complexe (K^R, d) est appelé *le complexe de Koszul de l'anneau local*, R. De (3.4) résulte

$$(4.2) \qquad \begin{cases} H_0(K^R) = \mathbf{k}. \\ H_r(K^R) \cong \{a \in \mathfrak{m} \mid a\bullet\mathfrak{m} = 0\}. \\ H_i(K^R) \text{ est de } \mathbf{k}\text{-dimension finie pour tout } i. \end{cases}$$

Parmi les anneaux locaux ont été particulièrement étudiées quatre classes : les anneaux réguliers, les intersections complètes, les anneaux de Gorenstein, et ceux de Cohen-Macaulay. (Chacune de ces classes contient la classe précédente.) Nous rappelons maintenant leur interprétation à travers le complexe de Koszul.

Tout d'abord R est *régulier* si gr R est un anneau de polynômes. Des Propositions 3.6, 3.7 on déduit ([4]) la caractérisation par Eilenberg de ceux-ci en termes de $H(K^R)$:

THÉORÈME 4.3. — *Pour un anneau local* $(R, m, \mathbf{k})$ *les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) R *est régulier.*

(2) $\mathfrak{m}$ *est engendré par une* R*-suite.*

(3) $\mathfrak{m}$ *contient une* R*-suite de longueur* $= \dim_k m/m^2$.

(4) $H(K^R) = \mathbf{k}$.

(5) $H_1(K^R) = 0$. □

Remarquons maintenant que le foncteur $\hat{\mathrm{R}} \otimes_{\mathrm{R}}$ est plat, et que le complexe de Koszul du complété n'est autre que $\mathrm{R}^{\hat{\mathrm{R}}} = \hat{\mathrm{R}} \otimes_{\mathrm{R}} \mathrm{K}^{\mathrm{R}}$; d'où $\mathrm{H}(\mathrm{K}^{\hat{\mathrm{R}}}) = \hat{\mathrm{R}} \otimes_{\mathrm{R}} \mathrm{H}(\mathrm{K}^{\mathrm{R}}) = \mathrm{H}(\mathrm{K}^{\mathrm{R}})$, $\mathfrak{m}$ agissant trivialement sur $\mathrm{H}_0(\mathrm{K}^{\mathrm{R}})$. Dans l'analyse des complexes de Koszul on ne perd donc rien en supposant R complet, hypothèse que nous adopterons : *désormais* R *est supposé complet.*

L'avantage de cette hypothèse est que tout anneau local complet est de la forme $\mathrm{R} = \tilde{\mathrm{R}}/\mathrm{I}$ où $(\tilde{\mathrm{R}}, \tilde{\mathfrak{m}}, \mathbf{k})$ est un anneau régulier et $\mathrm{I} \subset \tilde{\mathfrak{m}}^2$ (Théorème de Cohen [13]). Soit $b_1, \ldots, b_s$ un système minimal de générateurs de I. Le complexe de Koszul :

$$(4.4) \qquad \tilde{\mathrm{K}} = \tilde{\mathrm{R}} \otimes_{\mathrm{Z}} \Lambda(u_1, \ldots, u_s); \quad du_i = b_i,$$

ne dépend pas, alors, du choix des b_i. De (3.4) résulte

(4.5) $\mathrm{H}_0(\tilde{\mathrm{K}}) = \mathrm{R}$, et chaque $\mathrm{H}_i(\tilde{\mathrm{K}})$ est une R-module noetherien.

Du fait que le système $\{b_i\}$ est minimal on déduit le

LEMME 4.6. — *Tout cycle de* $\tilde{\mathrm{K}}_+$ *est contenu dans*

$$\tilde{\mathfrak{m}} \otimes_{\mathrm{Z}} \Lambda(u_1, \ldots, u_s).$$

□

Du fait que $\mathrm{I} \subset \tilde{\mathfrak{m}}^2$ on déduit que $\tilde{\mathfrak{m}}/\tilde{\mathfrak{m}}^2 = \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$; un système minimal $a_1, \ldots, a_r$, de générateurs de $\mathfrak{m}$ se relève alors en un système minimal, $\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_r$ de générateurs de $\tilde{\mathfrak{m}}$. Notons $\mathrm{K}^{\tilde{\mathrm{R}}} = \tilde{\mathrm{R}} \otimes_{\mathrm{Z}} \Lambda(x_1, \ldots, x_r)$; $dx_i = \tilde{a}_i$ et $\mathrm{K}^{\mathrm{R}} = \mathrm{R} \otimes_{\mathrm{Z}} \Lambda(x_1, \ldots, x_r)$; $dx_i = a_i$ les complexes de Koszul correspondants. Les premiers pas de l'analyse homologique de R tournent alors autour du complexe

$$\mathrm{K} = \tilde{\mathrm{K}} \otimes_{\tilde{\mathrm{R}}} \mathrm{K}^{\tilde{\mathrm{R}}} = \tilde{\mathrm{R}} \otimes_{\mathrm{Z}} \Lambda(u_1, \ldots, u_s) \otimes_{\mathrm{Z}} \Lambda(x_1, \ldots, x_r).$$

En effet, d'une part la projection $\rho : \mathrm{K}^{\tilde{\mathrm{R}}} \to \mathbf{k}$ induit un isomorphisme en homologie puisque $\tilde{\mathrm{R}}$ est régulier. Il en résulte (2.4) que

$$\rho \otimes \mathrm{id} : \mathrm{K} = \mathrm{K}^{\tilde{\mathrm{R}}} \otimes_{\mathrm{Z}} \Lambda(u_1, \ldots, u_s) \to \mathbf{k} \otimes_{\mathrm{Z}} \Lambda(u_1, \ldots, u_s)$$

induit aussi un isomorphisme :

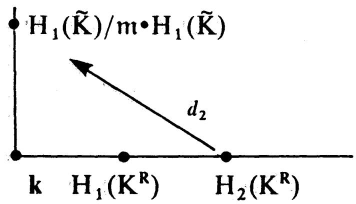
$$(4.7) \qquad \mathrm{H}(\rho \otimes \mathrm{id}) : \mathrm{H}(\mathrm{K}) \xrightarrow{\cong} \mathbf{k} \otimes_{\mathrm{Z}} \Lambda(u_1, \ldots, u_s).$$

D'autre part on peut également considérer K comme le complexe de Koszul $\tilde{\mathrm{K}} \otimes_{\mathrm{Z}} \Lambda(x_1, \ldots, x_r)$ à base $\tilde{\mathrm{K}}$. Ceci conduit à une suite spectrale de Koszul. Puisque $H_0(\tilde{K}) = R$ on voit que le premier terme de cette suite spectrale est

$E^1_{\bullet,i} = H_i(\tilde{K}) \otimes_Z \Lambda(x_1, \ldots, x_r) = H_i(\tilde{K}) \otimes_R (K^R, d)$; en particulier $E^1_{\bullet,0} = K^R$.

Le deuxième terme prend alors la forme

(4.8)



Il résulte de (4.6) que la flèche

$$H_+(\tilde{K}) \to H_+(K) \xrightarrow[H(\rho \otimes id)]{\cong} \mathbf{k} \otimes \Lambda^+(u_1, \ldots, u_s)$$

est nulle. Ceci entraîne (argument banal de suites spectrales) que la flèche d_2 indiquée ci-dessus est surjective. Nous en déduisons la

PROPOSITION 4.9. — *Avec les notations ci-dessus*

$$H_1(K^R) \cong H_1(K) \cong \bigoplus_{i=1}^{s} \mathbf{k}\bullet u_i. \qquad \square$$

Rappelons (4.1) que $e_1(R)$ est le nombre de générateurs de $\mathfrak{m}$ dans un système minimal. La Proposition 4.9 montre que $\dim H_1(K^R) = s$ = nombre minimal de relations b_i dans la présentation $R = \tilde{R}/(b_1, \ldots, b_s)$. On pose donc la

DÉFINITION 4.10. — $e_2(R) = \dim H_1(K^R)$.

Retournons maintenant à nos quatre classes. L'anneau R est appelé *intersection complète* si la suite $b_1, \ldots, b_s$ est une $\tilde{R}$-suite ; d'après (3.6) ceci équivaut à $H_1(\tilde{K}) = 0$. Une caractérisation intrinsèque a été donnée par Assmus :

THÉORÈME 4.11 [3 ; Theorem 2.7]. — *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) R *est une intersection complète.*

(2) $H(K^R)$ *est l'algèbre extérieure sur* $H_1(K^R)$.

(3) $H_2(K^R) = H_1(K^R)^2$. $\square$

Remarque. — L'implication $(2) \Rightarrow (1)$ est essentiellement le Théorème 2.7 ci-dessus (de Koszul).

Une deuxième démonstration de ce résultat est donné par Gulliksen et Levin [18 ; 3.3.4] de la manière suivante. Si $b_1, \ldots, b_s$ est une $\tilde{\mathrm{R}}$-suite alors $\mathrm{H}_+(\tilde{\mathrm{K}}) = 0$ et on en déduit un isomorphisme $\mathbf{k} \otimes_{\mathrm{Z}} \Lambda(u_1, \ldots, u_s) \cong \mathrm{H}(\mathrm{K}) \xrightarrow{\cong} \mathrm{H}(\mathrm{K}^{\mathrm{R}})$. Ceci entraîne que $(1) \Rightarrow (2)$.

Si, par contre, $\mathrm{H}_2(\mathrm{K}^{\mathrm{R}}) = \mathrm{H}_1(\mathrm{K}^{\mathrm{R}})^2$ alors le fait que d_2 est une dérivation (dans (4.8)) entraîne que $d_2 | \mathrm{H}_2(\mathrm{K}^{\mathrm{R}}) = 0$. Puisque d_2 est surjective il résulte que $0 = \mathrm{H}_1(\tilde{\mathrm{K}})/\mathfrak{m}\mathrm{H}_1(\tilde{\mathrm{K}})$ d'où (Nakayama) $\mathrm{H}_1(\tilde{\mathrm{K}}) = 0$ et $b_1, \ldots, b_s$ est une $\tilde{\mathrm{R}}$-suite.

Une autre caractérisation des intersections complètes se déduit à l'aide de pareils arguments comme corollaire d'un théorème de Wiebe [29, Satz III].

THÉORÈME 4.12. — *Soit n le degré maximum tel que* $\mathrm{H}_n(\mathrm{K}^{\mathrm{R}}) \neq 0$. *Alors* R *est une intersection complète si et seulement si* $\mathrm{H}_1(\mathrm{K}^{\mathrm{R}})^n \neq 0$. □

La troisième classe d'anneaux = les *anneaux de Gorenstein* — sont ceux qui satisfont à la condition $\dim_{\mathbf{k}} \mathrm{Ext}^*_{\mathrm{R}}(\mathbf{k}, \mathbf{R}) = 1$ ([9]). Ils ont été caractérisés en termes de K^{R} par Avramov et Golod [5] :

THÉORÈME 4.13. — R *est un anneau de Gorenstein si et seulement si l'algèbre* $\mathrm{H}_*(\mathrm{K}^{\mathrm{R}})$ *satisfait à la dualité de Poincaré.* □

Enfin, R est un *anneau de Cohen-Macaulay* si $\mathfrak{m}$ contient une R-suite égale à la dimension de Krull de R ([26 ; IV (B)]). De (3.7) on déduit

THÉORÈME 4.14. — *Soit n le degré maximum tel que* $\mathrm{H}_n(\mathrm{K}^{\mathrm{R}}) \neq 0$. *Alors* $n \geqslant e_1(\mathrm{R})$-dim Krull (R) *et l'égalité tient si et seulement si* R *est un anneau de Cohen-Macaulay.* □

Le fait que Gorenstein ⇒ Cohen-Macauley résulte immédiatement d'une autre caractérisation de ceux-ci, donnée par Avramov, Strogalov et Todorov [6] :

THÉORÈME 4.15. — R *est un anneau de Cohen-Macauley si et seulement si il existe un* R *module noetherien* M *et un entier* $n \geqslant 0$ *tel que* $(\mathrm{K}^{\mathrm{M}} = \mathrm{M} \otimes_{\mathrm{R}} \mathrm{K}^{\mathrm{R}})$ $\mathrm{H}_n(\mathrm{K}^{\mathrm{M}}) = \mathbf{k}$ *et les formes bilinéaires* $\mathrm{H}_i(\mathrm{K}^{\mathrm{R}}) \times \mathrm{H}_{n-i}(\mathrm{K}^{\mathrm{M}}) \to \mathrm{H}_n(\mathrm{K}^{\mathrm{M}})$ *sont toutes non-dégénérées.* □

5. Modèles de Tate et déviations d'un anneau local.

Le complexe de Koszul provenait, au départ, des données géométriques et était muni d'un morphisme $(A_{DR}(M) \otimes \Lambda P_G, d) \to A_{DR}(E)$ induisant un isomorphisme en cohomologie.

En algèbre le complexe $K = R \otimes_Z \Lambda(x_1, \ldots, x_r)$; $dx_i = a_i$ s'envoie naturellement sur $R/\mathfrak{a}$ – $\mathfrak{a} = (a_1, \ldots, a_r)$ – mais $H(K) \to R/\mathfrak{a}$ n'est pas un isomorphisme si $a_1, \ldots, a_r$ n'est pas une R-suite. En 1957 Tate [28] rectifie cette situation en prolongeant K en une ADGC (C,d) qui s'envoit sur $R/\mathfrak{a}$ et induit un isomorphisme $H(C) \xrightarrow{\cong} R/\mathfrak{a}$.

Pour décrire cette construction nous rappelons que si x est un symbole de degré pair > 0, alors l'algèbre à puissances divisées sur x, Γx, est le Z-module libre de base $1 = x^{(0)}$, $x = x^{(1)}$, $x^{(2)}, \ldots, x^{(m)}, \ldots$ muni du produit $x^{(p)} \cdot x^{(q)} = \binom{p+q}{p} x^{(p+q)}$. Pour toute algèbre graduée B, on pose

$$B\langle x \rangle = \begin{cases} B \otimes_Z \Lambda x & \text{si deg } x \text{ est impair.} \\ B \otimes_Z Z[x] & \text{si deg } x = 0. \\ B \otimes_Z \Gamma x & \text{autrement.} \end{cases}$$

Ensuite on note $B\langle x_1 \rangle \langle x_2 \rangle \ldots$ par $B\langle x_1, x_2, \ldots \rangle$, et on dit qu'on a ajouté les variables à puissances divisées x_i (librement) à B.

L'idée de Tate était, alors, d'ajouter des variables $x_{r+1}, \ldots, x_{r+s}$ à puissances divisées et de degré 2 au complexe de Koszul $K = R\langle x_1, \ldots, x_r \rangle$ et de poser $dx_{r+i} = b_i$ où $b_i \in K_i$ représentaient un système minimal de générateurs de $H_1(K)$. Le complexe $R\langle x_1, \ldots, x_{r+s} \rangle$ avait alors un $H_1 = 0$, et on ajoutait des variables de degré 3 afin de tuer H_2, et ainsi de suite, arrivant dans la limite à un complexe $C = R\langle x_1, \ldots \rangle$ et un isomorphisme $H(C) \xrightarrow{\cong} R/\mathfrak{a}$.

Cette extension du complexe de Koszul est devenu un outil puissant dans la théorie homologique des anneaux. Par exemple, appliquée à l'augmentation $R \to \mathbf{k}$ d'un anneau local, cette construction donne un complexe

$$C^R = R\langle x_1, \ldots, x_r, \ldots \rangle = K^R \langle x_{r+1}, \ldots \rangle$$

tel que $H_*(C^R) = \mathbf{k}$. Ce complexe est donc une R-résolution libre de $\mathbf{k}$. Un très beau résultat de Gulliksen ([17]) avère que la différentielle induite dans $\mathbf{k}\langle x_1, \ldots \rangle = \mathbf{k} \otimes_{\mathrm{R}} \mathrm{C}^{\mathrm{R}}$ est zéro ; c'est-à-dire

$$\mathrm{Tor}^{\mathrm{R}}(\mathbf{k},\mathbf{k}) = \mathbf{k}\langle x_1, x_2, \ldots \rangle. \tag{5.1}$$

Ceci exhibe donc $\mathrm{Tor}^{\mathrm{R}}(\mathbf{k},\mathbf{k})$ comme $\mathbf{k}$-algèbre libre à puissances divisées. Notons maintenant X le $\mathbf{k}$ espace gradué de base les x_i, et remarquons que

$$\dim \mathrm{X}_1 = r = e_1(\mathrm{R})$$

et

$$\dim \mathrm{X}_2 = \dim \mathrm{H}_1(\mathrm{K}^{\mathrm{R}}) = e_2(\mathrm{R}).$$

On adopte par conséquence la définition suivante, cohérente avec (4.1) et (4.10),

DÉFINITION 5.2. — $e_i(\mathrm{R}) = \dim \mathrm{X}_i$ *est la* i-*ième déviation de* R.

De (5.1) on déduit alors la formule de Gulliksen :

$$\sum_{i\geqslant 0} [\dim \mathrm{Tor}_i^{\mathrm{R}}(\mathbf{k},\mathbf{k})]\, z^i = \frac{\prod_{i>0} (1+z^{2i-1})^{e_{2i-1}(\mathrm{R})}}{\prod_{i>0} (1-z^{2i})^{e_{2i}(\mathrm{R})}}.$$

Si R est régulier, $\mathrm{H}(\mathrm{K}^{\mathrm{R}})$ est déjà $\mathbf{k}$ et donc $\mathrm{K}^{\mathrm{R}} = \mathrm{C}^{\mathrm{R}}$; d'où

(5.3) Si R est régulier alors $e_i(\mathrm{R}) = 0,\ i \geqslant 2$.

Soit R non régulier et soient $b_1, \ldots, b_s \in \mathrm{K}_1^{\mathrm{R}}$ des cycles représentant une base de $\mathrm{H}_1(\mathrm{K}^{\mathrm{R}})$, et $\mathrm{K}^{\mathrm{R}}\langle x_{r+1}, \ldots, x_{r+s};\, dx_{r+i} = b_i\rangle$ le « 2^{ieme}-étage » de la construction C^{R}. En analogie avec la suite spectrale de Koszul — et définie de la même façon — il y a une suite spectrale convergeant de $\mathrm{H}(\mathrm{K}^{\mathrm{R}})\langle x_{r+1}, \ldots, x_{r+s};\, dx_{r+i} = [b_i]\rangle$ vers $\mathrm{H}(\mathrm{K}^{\mathrm{R}}\langle x_{r+1}, \ldots, x_{r+s}\rangle)$.

Si R est une intersection complète, ce terme E_2 prend la forme $\Lambda([b_1], \ldots, [b_s])\langle x_{r+1}, \ldots, x_{r+s};\, dx_{r+i} = [b_i]\rangle$ et est donc acyclique. D'où $\mathrm{C}^{\mathrm{R}} = \mathrm{K}^{\mathrm{R}}\langle x_{r+1}, \ldots, x_{r+s}\rangle$ et la conclusion :

(5.4) Si R est une intersection complète alors $e_i(\mathrm{R}) = 0 \quad i \geqslant 3$.

Pour un R quelconque on vérifie facilement que l'inclusion $\mathrm{K}^{\mathrm{R}} \to \mathrm{K}^{\mathrm{R}}\langle x_{r+1}, \ldots, x_{r+s}\rangle$ induit un isomorphisme

$$\mathrm{H}_2(\mathrm{K}^{\mathrm{R}})/\mathrm{H}_1(\mathrm{K}^{\mathrm{R}})^2 \xrightarrow{\cong} \mathrm{H}_2(\mathrm{K}^{\mathrm{R}}\langle x_{r+1}, \ldots, x_{r+s}\rangle),$$

d'où

$$e_3(\mathrm{R}) = \dim(\mathrm{H}_2(\mathrm{K}^{\mathrm{R}})/\mathrm{H}_1(\mathrm{K}^{\mathrm{R}})^2). \tag{5.5}$$

A l'aide d'un peu plus de travail, on vérifie (Levin [18 ; Prop. 3.3.4], Sakuma-Okayama [24]) que

(5.6) $\quad e_4(\mathrm{R}) = \dim\,[\mathrm{H}_3(\mathrm{K}^{\mathrm{R}})/\mathrm{H}_1(\mathrm{K}^{\mathrm{R}})\mathrm{H}_2(\mathrm{K}^{\mathrm{R}})] + \binom{e_2(\mathrm{R})}{2} - \dim \mathrm{H}_1(\mathrm{K}^{\mathrm{R}})^2$.

On a vu que si R est une intersection complète alors $e_i(\mathrm{R}) = 0$, $i \geqslant 3$. D'autre part, en vue de (5.5) le théorème (4.11) d'Assmus revient à dire que si R n'est pas une intersection complète alors $e_3(\mathrm{R}) \neq 0$. Gulliksen [18 ; Theorem 3.5.1] a montré que dans ce cas $e_4(\mathrm{R}) \neq 0$, et ensuite une série de résultats partiels de Gulliksen, Löfwall, Jacobsson, Avramov, ... ont abouti dans le théorème récent ([19])

THÉORÈME 5.7. — *Si* R *n'est pas une intersection complète, alors* $e_i(\mathrm{R}) \neq 0$ *pour tout* i. □

6. Modèles de Sullivan et homotopie rationnelle.

Ce n'est qu'au début des années soixante-dix que ces techniques d'algèbre différentielle commutative réapparaissent en topologie. Le point de départ était l'observation de Quillen [23] qu'un foncteur suffisamment gentil des espaces topologiques 1-connexes dans les ADGC sur **Q** conserverait non seulement la cohomologie, mais tout le type d'homotopie rationnel, et Quillen lui-même a construit un pareil foncteur.

Cette construction de Quillen étant très indirecte, Sullivan [27] en a proposé une deuxième, très simple, qui provient de manière évidente des formes de de Rham. (Il ignorait que cette construction avait été déjà trouvée par Thom en 1954, elle s'était complètement perdue de vue depuis.) Ce foncteur est désigné $\mathrm{S} \to (\mathrm{A}^*_{\mathrm{PL}}(\mathrm{S}), d)$, et satisfait à $\mathrm{H}^*(\mathrm{S};\mathbf{Q}) \cong \mathrm{H}(\mathrm{A}_{\mathrm{PL}}(\mathrm{S}))$.

Soit alors $\mathrm{F} \to \mathrm{E} \xrightarrow{\pi} \mathrm{B}$ une fibration d'espaces 1-connexes à nombres de Betti finis. Elle admet une décomposition en tour de Moore-Postnikov, qui exprime E comme limite projective d'une suite

$$\to \mathrm{E}_n \xrightarrow{p_n} \mathrm{E}_{n-1} \to \cdots \to \mathrm{B}$$

de fibrations principales, la fibre de p_n étant $\mathrm{K}(\pi_n(\mathrm{F}), n)$. Posons $\mathrm{X}^n = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Z}}(\pi_n(\mathrm{F}), \mathrm{Q})$ et (suivant Sullivan)

$$\Lambda \mathrm{X}^n = \begin{cases} \text{l'algèbre extérieure sur } \mathrm{X}^n \text{ si } n \text{ est impair,} \\ \text{l'algèbre symétrique sur } \mathrm{X}^n \text{ si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

S'inspirant alors directement des travaux de Cartan, Chevalley, Koszul et Weil décrits ci-dessus dans le § 2, Sullivan établit l'existence de morphismes

$$\varphi_n : (A_{PL}(E_{n-1}) \otimes \Lambda X^n, d) \to A_{PL}(E_n); \quad d : X^n \to A_{PL}(E_{n-1})$$

tels que $H(\varphi_n)$ sont des isomorphismes. Passant à la limite donne, alors, un morphisme de la forme

$$\varphi : (A_{PL}(B) \otimes \Lambda X, d) \to A_{PL}(E)$$

induisant un isomorphisme en cohomologie. (ΛX notant le produit tensoriel des ΛX^n.) C'est le *modèle minimal de Sullivan* de π.

Nous nous limiterons maintenant au cas $B = \{\text{point}\}$, $E = F$; φ devient donc un morphisme $(\Lambda X, d) \to A_{PL}(F)$ et satisfait aux conditions

$$(6.1) \qquad \begin{cases} H(\varphi) \text{ est un isomorphisme} \\ \operatorname{Im} d \subset (\Lambda X)^+ \cdot (\Lambda X)^+ . \end{cases}$$

Pour ce cas Sullivan [27] démontre le

THÉORÈME 6.2. — (1) L'ADGC $(\Lambda X, d)$ *est déterminée, à isomorphisme près, par les conditions* (6.1).

(2) *La donnée du type d'homotopie rationnel de* F *équivaut à la donnée de la classe d'isomorphisme de* $(\Lambda X, d)$. □

Il résulte immédiatement de (6.2) que le modèle minimal $(\Lambda X, d)$ de F aurait pu être construit directement de $(A_{PL}(F), d)$ sans passer par la tour de Moore-Postnikov. En effet il suffisait de suivre la procédure de Tate en partant de la flèche $\mathbf{Q} \hookrightarrow (A_{PL}(F), d)$ et en ajoutant de façon minimale des variables extérieures ou symétriques afin de tuer ou créer des classes de cohomologie. (Ce n'est pas très étonnant, vu que la procédure de Tate avait été, à son tour, inspirée de la construction topologique de Moore-Postnikov.) Cette procédure aboutit aussi dans un morphisme satisfaisant à (6.1), donc d'après le théorème c'est le modèle minimal de Sullivan.

Considérons le modèle minimal $(\Lambda X, d)$ de F. L'algèbre ΛX admet la décomposition en somme directe des sous-espaces $\Lambda^p X$ engendré par les éléments $x_1 \wedge \cdots \wedge x_p$, $x_i \in X$. Il résulte de (6.1) que la différentielle d est la somme

$$d = d_2 + d_3 + \cdots$$

où d_i est une dérivation envoyant chaque $\Lambda^p X$ en $\Lambda^{p+i} X$.

En particulier d_2 est aussi une différentielle et $(\Lambda X, d_2)$ n'est autre que l'algèbre de cochaînes sur l'algèbre de Lie graduée L_X définie par

$$(L_X)_q = (X^{q+1})^*; \quad \langle x\,;[\alpha\,;\,\beta]\rangle = \pm\,\langle d_2 x\,;\,\alpha,\beta\rangle$$

pour $x \in X$, α, $\beta \in L_X$. Il est intéressant de constater qu'on retrouve ainsi (au signe et à la graduation près) le point de départ de la thèse de Koszul [21].

De toute façon cette algèbre de Lie, L_X, s'identifie à un invariant topologique classique : il résulte directement de la construction via les tours de Moore-Postnikov que

$$(L_X)_q = \pi_{q+1}(F) \otimes \mathbf{Q} = \pi_q(\Omega F) \otimes \mathbf{Q}\,;$$

de plus le crochet n'est autre que le crochet de Samelson ([2]).

Le modèle de Sullivan nous fournit donc un outil qui lie étroitement la cohomologie rationnelle et l'homotopie rationnelle. Ceci a permis de nombreuses applications dont en voici deux :

THÉORÈME 6.3 (Félix-Halperin [14]). — *Si* $H^i(F;\mathbf{Q}) = 0, i > n$, *alors ou* $\dim \pi_*(F) \otimes \mathbf{Q}$ *est finie, ou les entiers* $\sum_{j<i} \dim \pi_j(F) \otimes \mathbf{Q}$ *croissent de façon exponentielle en* i.

THÉORÈME 6.4 (Félix-Halperin-Jacobsson-Löfwall-Thomas [15]). — *Si* $H^i(F;\mathbf{Q}) = 0$, $i > n$ *alors la somme de tous les idéaux résolubles dans* L_x *est un sous-espace de dimension finie.* □

7. Les modèles d'Avramov.

Retournons au cadre de morphismes surjectifs $\varphi : R \to S$ d'anneaux locaux. La construction de Tate donne un morphisme

$$\Phi : (R\langle x_1, \ldots\rangle, d) \to S$$

tel que $H(\Phi) : H(R\langle x_1, \ldots\rangle) \xrightarrow{\cong} S$. En particulier c'est une résolution R-libre de S en tant que R module, et donc l'homologie du complexe $\mathbf{k}\langle x_1, \ldots\rangle = \mathbf{k} \otimes_R R\langle x_1, \ldots\rangle$ n'est autre que $\mathrm{Tor}^R(S, \mathbf{k})$.

Reprenant les observations de Quillen et Sullivan, Avramov [8] a remarqué que cette ADGC $\mathbf{k}\langle x_1, \ldots,\rangle$ était un invariant de la flèche φ beaucoup plus riche, et qui joue le rôle de la fibre homotopique d'une application continue. De plus il a vu l'utilité, dans ce contexte, d'ajouter des variables symétriques (comme avait fait Sullivan) au lieu des variables à puissances divisées de Tate.

Pour illustrer ces modèles et leurs applications nous nous restreindrons au cas de la surjection $\tilde{R} \to R$ d'une anneau régulier local sur un anneau local complet quelconque, induisant un isomorphisme $\tilde{R}/I \xrightarrow{\cong} R$ avec $I \subset \tilde{\mathfrak{m}}^2$ (cf. § 4). En ajoutant des variables extérieures de degré 1, ensuite des variables symétriques de degré 2, ... Avramov arrive à un morphisme

$$A = \tilde{R} \otimes_Z \Lambda Y \to R$$

qui induit un isomorphisme $H(A) \xrightarrow{\cong} R$.

Soit $K^{\tilde{R}} = \tilde{R}\langle x_1, \ldots, x_r; dx_i = \tilde{a}_i \rangle$ le complexe de Koszul de $\tilde{R}$ et posons $B = K^{\tilde{R}} \otimes_{\tilde{R}} A = A\langle x_1, \ldots, x_r; dx_i = \tilde{a}_i \rangle$. L'augmentation $\varepsilon : K^{\tilde{R}} \to \mathbf{k}$ se prolonge en un morphisme $\varepsilon \otimes \mathrm{id}$: $B \to \mathbf{k} \otimes_{\tilde{R}} A = \mathbf{k} \otimes_Z \Lambda Y$; puisque $H(\varepsilon)$ est un isomorphisme ($\tilde{R}$ étant régulier) il en est de même pour $H(\varepsilon \otimes \mathrm{id})$. D'autre part, φ se prolonge en $\mathrm{id} \otimes \varphi : B \to K^R$, morphisme qui induit également un isomorphisme en homologie. On arrive donc aux deux morphismes

$$\mathbf{k} \otimes_Z \Lambda Y \xleftarrow{\simeq} B \xrightarrow{\simeq} K^R$$

qui exhibent $\mathbf{k} \otimes_Z \Lambda Y$ comme « modèle minimal » du complexe de Koszul K^R.

Il est évident que $H_1(K^R) = H_1(\mathbf{k} \otimes_Z \Lambda Y) = \mathbf{k} \otimes Y_1$ et donc qu'en ajoutant des variables $x_{r+1}, \ldots, x_{r+s}$ à puissances divisées afin de tuer H_1 on arrive au diagramme

$$(\mathbf{k} \otimes_Z \Lambda Y)\langle x_{r+1}, \ldots, x_{r+s} \rangle \xleftarrow{\simeq} B\langle x_{r+1}, \ldots, x_{r+s} \rangle \xrightarrow{\simeq} K^R\langle x_{r+1}, \ldots, x_{r+s} \rangle$$

avec $dx_{r+i} = y_i$, base de Y_1. En particulier $\Lambda Y_1 \langle x_{r+1}, \ldots, x_{r+s} \rangle$ est de nouveau acyclique, et il en résulte que le morphisme $\mathbf{k} \otimes_Z \Lambda Y \langle x_{r+1}, \ldots, x_{r+s} \rangle \to \mathbf{k} \otimes \Lambda(Y_{\geqslant 2})$ induit, lui aussi un isomorphisme en homologie. Procédant de cette manière Avramov [7] démontre le

THÉORÈME 7.1. — *Dans le modèle minimal* $\mathbf{k} \otimes_Z \Lambda Y$ *de* K^R *on a*

$$\dim (\mathbf{k} \otimes_Z Y_i) = e_i(R) . \qquad \square$$

Ceci montre que les déviations de R jouent dans cette théorie le même rôle que les groupes d'homotopie rationnelle d'un espace topologique. Puisque $H_*(K^R)$ est de dimension totale finie, on pourrait espérer le même type de résultat que ceux cités dans le § 6, et en effet Avramov [8] démontre le

THÉORÈME 7.2. — *Ou bien* R *est une intersection complète* (et $e_i(R)=0, i\geqslant 3$), *ou bien les entiers* $\sum_{j<i} e_j(R)$ *croissent de façon exponentielle en* i. □

Rappelons enfin que l'algèbre de Yoneda, $\mathrm{Ext}_R^*(\mathbf{k},\mathbf{k})$ est l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie graduée $L_R = L_R^{\geqslant 1}$. D'autre part, la différentielle dans $\mathbf{k} \otimes_Z \Lambda Y$ s'exprime de la manière $d = d_2 + d_3 + \cdots$ exactement comme dans le § 6, et Avramov démontre que $(\mathbf{k} \otimes_Z \Lambda Y, d_2)$ est l'algèbre de cochaînes sur $L_R^{\geqslant 2}$. A partir de ceci, et du fait que $H(K^R)$ est de dimension totale finie, Félix-Halperin-Jacobsson-Löfwall-Thomas [15] démontrent le

THÉORÈME 7.3. — *La somme de tous les idéaux résolubles dans* L_R *est un sous-espace de dimension finie.* □

Il convient aussi de remarquer que la démonstration du Théorème 5.7 ci-dessus utilise fortement les modèles d'Avramov.

8. Un problème.

Pour terminer nous reviendrons au commencement, avec un problème qui aurait pu être posé déjà en 1950. Il s'agit de majorer la dimension d'un tore T agissant librement, C^∞, sur une variété compacte M. Une majoration éventuelle en termes de $H_{DR}(M)$ est donnée par la

CONJECTURE. — *Si un r-tore opère librement*, C^∞, *sur une variété* M, *alors :*

$$\dim H_{DR}^*(M) \geqslant 2^r = \dim H_{DR}^*(T).$$

Puisque la donnée d'une action libre (C^∞) d'un r-tore T dans M revient à la donnée d'un fibré principal $T \to M \to M/T$, nous avons (d'après les travaux de Cartan-Chevalley-Koszul-Weil) : $H_{DR}^*(M) \cong H^*(A_{DR}(M/T) \otimes \Lambda(x_1, \ldots, x_r))$. La conjecture ci-dessus serait donc une conséquence de la

CONJECTURE. — *Soit* $B\langle x_1, \ldots, x_r; dx_i = b_i \in B\rangle$ *un complexe de Koszul augmenté sur* $\mathbf{k}$ *et tel que* $B^0 = \mathbf{k}$ *et* $H^*(B)$ *est de dimension totale finie. Alors* $\dim_{\mathbf{k}} H(B\langle x_1, \ldots, x_r\rangle) \geqslant 2^r$. □

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. ANDRÉ, Cohomologie des algèbres différentielles où opère une algèbre de Lie, *Tohoku Math. J.*, 14 (1962), 263-311.

[2] P. ANDREWS and M. ARKOWITZ, Sullivan's minimal models and higher order Whitehead products, *Canad. J. Math.*, 30 (1978), 961-982.

[3] E. F. ASSMUS, On the homology of local rings, *Ill. J. Math.*, 3 (1959), 187-199.

[4] M. AUSLANDER and D. A. BUCHSBAUM, Codimension and multiplicity, *Annals of Math.*, 68 (1958), 625-657.

[5] L. AVRAMOV and E. S. GOLOD, On the homology of the Koszul complex of a local Gorenstein ring, *Mat. Zametki*, 19 (1971), 53-58; English translation: *Math. Notes*, 9 (1971), 30-32.

[6] L. AVRAMOV, S. STROGOLOV et A. TODOROV, On Gorenstein modules, *Uspehi Math. Nauk*, 27, no. 4 (1972), 199-200.

[7] L. AVRAMOV, On the Hopf algebra of a local ring, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 38 (1974), 2; English Translation *Math. USSR Izvestijas*, 8 (1984), 259-284.

[8] L. AVRAMOV, Local algebra and rational homotopy, in Homotopie Algébrique et Algèbre Locale, *Astérisque*, 113/114 (1984), 15-43.

[9] H. BASS, On the ubiquity of Gorenstein rings, *Math. Zeit.*, 82 (1963), 8-28.

[10] H. CARTAN and S. EILENBERG, *Homological Algebra*, Princeton University Press, 1956.

[11] E. CARTAN, Sur les invariants intégraux de certains espaces homogènes et les propriétés topologiques de ces espaces, *Ann. Soc. Pol. Math.*, 8 (1929), 181-225.

[12] H. CARTAN, La transgression dans un groupe de Lie et dans un espace fibré principal, *Colloque de Topologie (espaces fibrés) Bruxelles* (1950), 57-72. G. Thone, Liège.

[13] I. S. COHEN, On the structure and ideal theory of complete local rings, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 59 (1946), 54-106.

[14] Y. FÉLIX and S. HALPERIN, Rational LS category and its applications, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 273 (1982), 1-38.

[15] Y. FÉLIX, S. HALPERIN, C. JACOBSSON, C. LÖFWALL and J.-C. THOMAS, The radical of the homotopy Lie algebra, à paraître, *Amer. J. Math.*

[16] W. GREUB, S. HALPERIN, R. VANSTONE, *Connections, Curvature and Cohomology*, Volume III, Academic Press N.Y., 1976.

[17] T. H. GULLIKSEN, A proof of the existence of minimal R-algebra resolutions, *Acta Math.*, 120 (1968), 53-58.

[18] T. H. GULLIKSEN and G. LEVIN, Homology of Local Rings, *Queen's Papers in Pure and Applied Mathematics* No. 20, Queen's University, Kingston, Canada, 1969.
[19] S. HALPERIN, The non-vanishing of the deviations of a local ring, à paraître, *Comment. Math. Helv.*, 62 (1987).
[20] H. HOPF, Uber die Topologie der Gruppen-Mannigfeltigkeiten und ihre Verallgemeinerungen, *Annals of Math.*, 42 (1941), 22-52.
[21] J. L. KOSZUL, Homologie et cohomologie des algèbres de Lie, *Bull. Soc. Math. de France*, 78 (1950), 65-127.
[22] J. L. KOSZUL, Sur un type d'algèbres différentielles en rapport avec la transgression, *Colloque de Topologie (espaces fibrés) Bruxelles* (1950), 73-82, G. Thone, Liège.
[23] D. QUILLEN, Rational homotopy theory, *Annals of Math.*, 90 (1969), 205-295.
[24] M. SAKUMA and H. OKUYAMA, A note on higher deflections of a local ring, *J. of Math.*, Tokushima University, 3 (1969), 25-36.
[25] H. SAMELSON, Beitrage zur Topologie der Gruppen-Mannigfaltigkeiten, *Annals of Math.*, 42 (1941), 1091-1137.
[26] J. P. SERRE, Algèbre Local Multiplicités, *Lecture Notes in Math.*, 11, Springer Verlag, 3e édition 1975.
[27] D. SULLIVAN, Infinitesimal computations in topology, *Publ. Math. I.H.E.S.*, 47 (1978), 269-331.
[28] J. TATE, Homology of Noetherian rings and local rings, *Ill. J. Math.*, 1 (1957), 14-25.
[29] H. WIEBE, Uber homologische Invarianten lokaler Ringe, *Math. Annalen*, 179 (1969), 257-274.

Stephen HALPERIN,
University of Toronto
Physical Sciences Division
Scarborough College
1265 Military Trail
Scarborough, Ontario M1 C 1A4 (Canada).