ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

PIERRE BONNET

Paramétrisation du dual d'une algèbre de Lie nilpotente

Annales de l'institut Fourier, tome 38, n° 3 (1988), p. 169-197

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1988__38_3_169_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
38, 3 (1988), 169-197

PARAMÉTRISATION DU DUAL D'UNE ALGÈBRE DE LIE NILPOTENTE

par Pierre BONNET

Introduction.

Etant donné un groupe de Lie G d'algèbre de Lie $\mathfrak{G}$, la théorie de Kirilov ([5], [6]), a mis en évidence l'intérêt de l'étude des orbites de la représentation coadjointe de G, pour la construction d'au moins une partie du dual unitaire. Or, on sait que les orbites de la représentation coadjointe de G sont naturellement munies d'une structure de variété symplectique; il paraît donc naturel, afin de pouvoir décrire simultanément l'ensemble des orbites, et la géométrie de chacune d'elles, de chercher à paramétrer au moins certaines parties de l'espace vectoriel $\mathfrak{G}^*$ dual de $\mathfrak{G}$, au moyen de triplets (λ, q, p) de fonctions vectorielles ayant les propriétés suivantes :

— à chaque valeur de λ correspond une orbite Ω_λ et une seule,

— pour λ fixé, le couple (q, p) constitue une carte de Ω_λ dans laquelle la forme symplectique de Ω_λ se réduit à :

$$\sum_{r=1}^{\ell} dq_r \wedge dp_r.$$

Une première restriction (nous verrons que ce n'est pas la seule) porte sur le fait qu'un tel triplet (λ, q, p) ne peut être défini que sur une partie de $\mathfrak{G}^*$ ne rencontrant que des orbites de même dimension 2ℓ; les fonctions λ, q, p sont à valeurs respectivement dans $\mathbf{R}^{n-2\ell}$, $\mathbf{R}^\ell$, $\mathbf{R}^\ell (n = \dim G)$.

Nous nous intéresserons uniquement, dans cet article, au cas des groupes de Lie nilpotents, pour lesquels ([5], [13]) la méthode de Kirilov

Mots-clés : Groupe de Lie nilpotent – Méthode des orbites – Stratification – Structure symplectique.

donne une bijection de l'ensemble des orbites, sur le dual unitaire. Dans ce cas, les orbites étant difféomorphes à des espaces $\mathbf{R}^{2\ell}$, on peut espérer obtenir des cartes (q, p) globales ; en outre, à cause de l'aspect polynomial de l'application exponentielle, on peut s'attendre à obtenir des fonctions λ, q, p, rationnelles.

Dans cette recherche de paramétrisations pour le dual d'une algèbre de Lie nilpotente, on peut distinguer 3 types de résultats :

— dans [15], M. Vergne obtient, à partir de l'algèbre enveloppante et de l'algèbre symétrique de $\mathfrak{G}$, des cartes (q, p) construites de façon cohérente pour toutes les orbites contenues dans un ouvert de Zariski de $\mathfrak{G}^*$; toujours en liaison avec l'algèbre enveloppante, signalons également les travaux de Nghien-Xuan-Hai ([7],[8],[9]) ;

— dans [1] et [2], D. Arnal et J.C. Cortet montrent l'existence pour chaque orbite Ω de cartes (q, p) telles que la fonction sur Ω associée à un élément de $\mathfrak{G}$ s'écrive :

$$\Pi_0(q) + \sum_{r=1}^{\ell} \Pi_r(q) p_r,$$

où, pour $0 \leq r \leq \ell$, Π_r est un polynôme ne dépendant que des variables $q_{r+1}, \ldots, q_\ell$;

— dans [11], L. Pukansky construit une stratification de l'ensemble des orbites et pour chaque strate un couple (λ, ξ) de fonctions vectorielles, telles que : à chaque λ correspond une orbite et une seule de la strate, et pour λ fixé, la fonction ξ est une carte globale de l'orbite Ω_λ ; d'ailleurs, les composantes de ξ sont tout simplement des fonctions coordonnées dans une base de $\mathfrak{G}^*$.

Le présent travail consiste à construire une stratification de $\mathfrak{G}^*$ (plus fine en général que celle de Pukansky), et pour chaque strate un triplet (λ, q, p) vérifiant les conditions que nous avons indiquées.

On commence, dans la section 1, par travailler sur chaque orbite prise isolément. On construit pour l'orbite Ω une carte (q, p) du type de celles obtenues par D. Arnal et J.C. Cortet, mais en procédant de façon différente : au lieu d'effectuer un raisonnement par récurrence, on commence par se donner, en un point x de Ω choisi comme origine, une polarisation $\mathfrak{B}(x)$ et une base complémentaire de $\mathfrak{B}(x)$ dans $\mathfrak{G}$; on construit d'abord une carte globale q de l'espace homogène Y associée à $\mathfrak{B}(x)$, puis la carte (q, p) de Ω en utilisant le fait que Ω est un fibré en espaces affines, associé au fibré tangent $T(Y)$.

Les sections 2 et 3 sont consacrées à la stratification des orbites. Moyennant la donnée d'une suite de Jordan-Hölder $(\mathfrak{G}_i)_{1\leq i\leq n}$ d'idéaux de $\mathfrak{G}$, on procède en s'inspirant de la méthode utilisée par Pukansky dans [11], mais en la modifiant. En effet, afin de rendre cohérentes les constructions de la section 1, pour toutes les orbites d'une même strate, nous devons introduire pour chacune d'elles une polarisation et une base complémentaire. La façon la plus naturelle d'obtenir explicitement des polarisations est celle introduite par M. Vergne dans [14]. Or, la méthode de Pukansky classe les points de $\mathfrak{G}^*$ suivant les dimensions des stabilisateurs dans G de leurs projections sur les $\mathfrak{G}_i^*$, alors que la construction de M. Vergne fait intervenir la dimension des stabilisateurs de ces mêmes projections dans le sous-groupe G_i d'algèbre de Lie $\mathfrak{G}_i$.

On propose à la section 2 une classification des points x de $\mathfrak{G}^*$ d'après le tableau à double entrée des dimensions d_{ji} des orbites des projections de x dans $\mathfrak{G}_j^*$ suivant l'action de G_i. On montre que les entiers d_{ji} sont entièrement déterminés par la donnée d'un sous-ensemble I de $\{1,\ldots,n\}$ et d'une suite I^* d'entiers de $\{1,\ldots,n\}$ n'appartenant pas à I. On obtient donc une partition de $\mathfrak{G}^*$ en sous-ensembles $\mathfrak{G}^*_{I,I^*}$ stables par action coadjointe de G.

La section 3 est axée sur la recherche de bases complémentaires. La suite $(\mathfrak{G}_i)$ étant toujours fixée, on associe à chaque point x de $\mathfrak{G}^*_{I,I^*}$ sa polarisation de M. Vergne $\mathfrak{B}(x)$ et l'algèbre de Lie $\mathfrak{G}(x)$ de son stabilisateur; on définit trois suites de sous-algèbres de $\mathfrak{G}$, l'une croissante de $\mathfrak{B}(x)$ à $\mathfrak{G}$, les autres décroissantes de $\mathfrak{B}(x)$ à $\mathfrak{G}(x)$. On introduit certains déterminants $\Delta_k(x)$ dépendant polynomialement de x, et on montre que les fonctions Δ_k sont constantes sur les orbites de $\mathfrak{G}^*_{I,I^*}$ et ne s'annulent pas dans $\mathfrak{G}^*_{I,I^*}$. On peut ainsi, en résolvant des systèmes de Kramer, construire une base complémentaire de $\mathfrak{B}(x)$ dans $\mathfrak{G}$ et une base complémentaire de $\mathfrak{G}(x)$ dans $\mathfrak{B}(x)$; les éléments de ces bases varient rationnellement en fonction du point x de $\mathfrak{G}^*_{I,I^*}$. Désormais toutes les fonctions rationnelles et définies dans $\mathfrak{G}^*_{I,I^*}$ que nous obtiendrons seront en fait polynomiales par rapport aux coordonnées de x et aux $\Delta_k(x)^{-1}$. Pour terminer la section, on munit l'ensemble des couples (I,I^*) d'un ordre total et après avoir numéroté ces couples dans l'ordre croissant on construit une suite $F_0,\ldots,F_L$ de polynômes sur $\mathfrak{G}^*$, tels que le K^e ensemble $\mathfrak{G}^*_{I,I^*}$ soit celui des points où s'annulent $F_0,\ldots,F_{K-1}$, mais pas F_K. Ainsi, les ensembles $\mathfrak{G}^*_{I,I^*}$ sont pseudo-algébriques (i.e. localement fermés pour la topologie de Zariski) et forment une stratification de l'ensemble des orbites.

A la section 4 on met chaque ensemble d'orbites $\mathfrak{G}^*_{I,I^*}/G$ en bijection avec un sous-ensemble pseudo-algébrique Λ_{I,I^*} de $\mathbf{R}^{n-2\ell}$ et on associe à chaque λ de Λ_{I,I^*} un point x^λ de l'orbite Ω_λ. On définit ainsi les fonctions λ du triplet (λ, q, p) pour chaque strate. On complète le triplet (λ, q, p) en appliquant à chaque point x^λ la construction de la section 1. On démontre en outre que les fonctions λ, q, p, sont rationnelles dans $\mathfrak{G}^*_{I,I^*}$.

Enfin à la section 5, on indique un plan possible, pour le calcul explicite des strates, des fonctions λ, q, p et du point x à partir de ses coordonnées λ, q, p. On donne les résultats pour 2 exemples de groupes nilpotents.

Notations.

Dans tout ce qui suit, G désigne un groupe de Lie nilpotent réel, connexe et simplement connexe de dimension n. On note $\mathfrak{G}$ l'algèbre de Lie de G et $\mathfrak{G}^*$ l'espace vectoriel dual de $\mathfrak{G}$.

Etant donné $g \in G$ (resp. $a \in \mathfrak{G}$) on note Ad_g (resp. ad_a) l'action adjointe de g (resp. a) dans $\mathfrak{G}$ et Ad^*_g (resp. ad^*_a) l'action coadjointe de g (resp. a) dans $\mathfrak{G}^*$.

Soit x un point de $\mathfrak{G}^*$. On note :

— $G(x)$ le stabilisateur de x dans G,

— $\mathfrak{G}(x)$ l'algèbre de Lie de $G(x)$ et on a :

$$\mathfrak{G}(x) = \{a \in \mathfrak{G} / \mathrm{ad}^*_a x = 0\}.$$

On note σ_x la forme bilinéaire alternée définie sur $\mathfrak{G}$ par :

$$\sigma_x(a,b) = \langle [a,b], x\rangle = \langle a, \mathrm{ad}^*_b x\rangle, \tag{1}$$

et on rappelle que σ_x admet $\mathfrak{G}(x)$ comme noyau.

Si Ω est l'orbite du point x pour la représentation coadjointe de G, l'espace tangent en x à la variété Ω est :

$$T_x(\Omega) = \{\mathrm{ad}^*_a x / a \in \mathfrak{G}\}.$$

Ainsi, on définit une forme bilinéaire alternée ω_x sur $T_x(\Omega)$ par :

$$\omega_x(\mathrm{ad}^*_a x, \mathrm{ad}^*_b x) = \sigma_x(a,b) = \langle a, \mathrm{ad}^*_b x\rangle. \tag{2}$$

La forme différentielle de degré 2 :

$$\omega : x \in \Omega \longmapsto \omega_x$$

est fermée et fait de Ω une variété symplectique.

Pour $q \in \mathbf{R}^\ell$, on notera $\widetilde{q_r}$ et $\widehat{q_r}$ $(0 \leq r \leq \ell)$ les points de $\mathbf{R}^\ell$ définis par

$$\widetilde{q_r} = (q_1, \ldots, q_r, 0, \ldots, 0),$$
$$\widehat{q_r} = (0, \ldots, 0, q_{r+1}, \ldots, q_\ell),$$

et on identifiera $\widetilde{q_r}$ (resp. $\widehat{q_r}$) à un point de $\mathbf{R}^r$ (resp. $\mathbf{R}^{\ell-r}$) en posant également

$$\widetilde{q_r} = (q_1, \ldots, q_r),$$
$$\widehat{q_r} = (q_{r+1}, \ldots, q_\ell).$$

On notera évidemment $\mathbf{R}[X_1, \ldots, X_m]$ l'algèbre des polynômes réels à m indéterminées et $\mathbf{R}[X_1, \ldots, X_r]_1[X_{r+1}, \ldots, X_m]$ le sous-$\mathbf{R}[X_1, \ldots, X_r]$-module formé des polynômes de degré ≤ 1 par rapport à $X_{r+1}, \ldots, X_m$. Ces notations désigneront également les fonctions polynomiales de variables réelles $X_1, \ldots, X_m$, ainsi que leurs restrictions à des sous-ensembles de $\mathbf{R}^m$ localement fermés pour la topologie de Zariski; nous nous permettrons ce dernier abus de langage lorsque la construction des fonctions ne laissera aucune ambiguïté sur leur prolongement à $\mathbf{R}^m$.

1. Paramétrisation d'une orbite.

Dans cette section, on considère un point x de $\mathfrak{G}^*$, dont on note Ω l'orbite. On pose $\dim \Omega = 2\ell$. On considère une polarisation $\mathfrak{B}(x)$ en x et on note $B(x)$ le sous-groupe connexe fermé de G admettant $\mathfrak{B}(x)$ comme algèbre de Lie. Soit :

$$B(x) = N_0(x) \underset{\neq}{\subset} N_1(x) \underset{\neq}{\subset} \ldots \underset{\neq}{\subset} N_\ell(x) = G,$$

une suite de sous-groupes connexes fermés et soit :

$$\mathfrak{B}(x) = \mathfrak{N}_0(x) \underset{\neq}{\subset} \mathfrak{N}_1(x) \underset{\neq}{\subset} \ldots \underset{\neq}{\subset} \mathfrak{N}_\ell(x) = \mathfrak{G},$$

la suite correspondante d'algèbres de Lie. Alors, pour $1 \leq r \leq \ell$, $\mathfrak{N}_{r-1}(x)$ (resp. $N_{r-1}(x)$) est un idéal (resp. un sous-groupe distingué) de $\mathfrak{N}_r(x)$ (resp. $N_r(x)$). On choisit un élément b_r dans $\mathfrak{N}_r(x) - \mathfrak{N}_{r-1}(x)$, de sorte que $(b_1, \ldots, b_\ell)$ est une base complémentaire de $\mathfrak{B}(x)$ dans $\mathfrak{G}$.

Notons Y l'espace homogène $G/B(x)$. L'orbite Ω est un fibré au-dessus de Y, dont on note $\mathbf{p}$ l'application de projection. On obtient une paramétrisation globale de Y en posant

$$\left\{\begin{array}{l} y = \mathbf{p}(x), \\ y_q = g(q) \cdot y, \end{array}\right. \tag{3}$$

avec, pour $q = (q_1, \ldots, q_\ell) \in \mathbf{R}^\ell$ et $1 \leq r \leq \ell$:

$$\left\{\begin{array}{l} g_r(q_r) = \exp(q_r b_r), \\ \text{et } g(q) = g_\ell(q_\ell) \ldots g_1(q_1). \end{array}\right. \tag{4}$$

L'application :

$$q \in \mathbf{R}^\ell \longmapsto y_q \in Y$$

est un difféomorphisme dont on déduit une carte :

$$y \in Y \longmapsto q(y) = (q_1(y), \ldots, q_\ell(y)) \in \mathbf{R}^\ell.$$

On pose :

$$\overline{\varepsilon}_r(q) = \frac{\partial y_q}{\partial q_r}, \tag{5}$$

de sorte que $(\overline{\varepsilon}_1(q), \ldots, \overline{\varepsilon}_\ell(q))$ est une base de l'espace tangent $T_{y_q}(Y)$.

Pour $a \in \mathfrak{G}$, on note :

$$y_q \longmapsto a \cdot y_q,$$

le champ de vecteurs sur Y défini par :

$$a \cdot y_q = \frac{d}{dt}((\exp ta) \cdot y_q)_{t=0}, \tag{6}$$

de sorte que

$$\overline{\varepsilon}_r(q) = b_r(q) \cdot y_q, \tag{7}$$

avec

$$b_r(q) = \mathrm{Ad}_{g(\widehat{q_r})} b_r. \tag{8}$$

Posons encore :

— $\mathfrak{B}(y) = \mathfrak{B}(x)$,

— $\mathfrak{B}(y_q) = \mathrm{Ad}_{g(q)} \mathfrak{B}(y)$,

— $\mathfrak{N}_r(y) = \mathfrak{N}_r(x)$,

— $\mathfrak{N}_r(y_q) = \mathrm{Ad}_{g(q)} \mathfrak{N}_r(y)$,

et soient $B(y)$, $B(y_q)$, $N_r(y)$, $N_r(y_q)$ les sous-groupes correspondants. Chaque $\mathfrak{N}_{r-1}(y)$ étant un idéal de $\mathfrak{N}_r(y)$, est stable par $\mathrm{Ad}_{g(\widetilde{q_r})}$; il en résulte que $b_r(q) \in \mathfrak{N}_r(y_q) - \mathfrak{N}_{r-1}(y_q)$, de sorte que $(b_r(q))_{1 \leq r \leq \ell}$ est une base complémentaire de $\mathfrak{B}(y_q)$ dans $\mathfrak{G}$. Par ailleurs, $\mathfrak{B}(y_q)$ est polarisation en tout point de la fibre $\mathbf{p}^{-1}(y_q)$. Chaque polarisation satisfaisant à la condition de Pukansky, il vient :

$$\mathbf{p}^{-1}(y_q) = \mathrm{Ad}^*_{g(q)}x + \mathfrak{B}(y_q)^\perp. \tag{9}$$

On définit un isomorphisme R_q de l'espace cotangent $T^*_{y_q}(Y)$ sur $\mathfrak{B}(y_q)^\perp$, par :

$$\langle a, R_q\zeta\rangle = \langle a \cdot y_q, \zeta\rangle, \text{ pour } a \in \mathfrak{G},\ \zeta \in T^*_{y_q}(Y). \tag{10}$$

En particulier on obtient une base $(\varepsilon_1^*(q), \ldots, \varepsilon_\ell^*(q))$ de $\mathfrak{B}(y_q)^\perp$, en posant :

$$\varepsilon_r^*(q) = R_q dq_r(y_q), \tag{11}$$

et il vient :

$$\langle b_s(q), \varepsilon_r^*(q)\rangle = \langle \overline{\varepsilon}_s(q), dq_r(y_q)\rangle = \delta_{rs}. \tag{12}$$

THÉORÈME 1.1. — *Il existe un unique difféomorphisme*

$$(q, p) \longmapsto x_{q,p}$$

de $\mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^\ell$ *sur* Ω, *vérifiant les propriétés suivantes :*

i) $x_{q,p} = \mathrm{Ad}^*_{g(q)}x + \sum_{r=1}^{\ell}(c_r(q) + p_r)\varepsilon_r^*(q)$, *où* $c_r(q)$ *est polynomial en* $q_1, \ldots, q_{r-1}$, *et s'annule en* 0;

ii) dans la carte (q,p) *de* Ω *associée à ce difféomorphisme, la forme symplectique* ω *s'ecrit :*

$$\omega = \sum_{r=1}^{\ell} dq_r \wedge dp_r.$$

Preuve. — On construit une 1^{re} paramétrisation de Ω en posant :

$$x_{q,p^0} = \mathrm{Ad}^*_{g(q)}x + \sum_{r=1}^{\ell} p_r^0 \varepsilon_r^*(q). \tag{13}$$

On montre que, dans la carte ainsi obtenue, la forme symplectique ω s'écrit :

$$\omega = \sum_{1 \le r < s \le \ell} \omega_{rs}(\widetilde{q_{s-1}}) dq_r \wedge dq_s + \sum_{1 \le r \le \ell} dq_r \wedge dp_r^0.$$

Posons alors :

$$C_r(q) = C_r(\widetilde{q_{r-1}}) = \sum_{m=1}^{r-1} \int_0^{q_m} \omega_{mr}(q_1, \ldots, q_{m-1}, t, 0, \ldots, 0)dt. \tag{14}$$

On obtient :

$$\omega = d\varphi \tag{15}$$

avec

$$\varphi = \sum_{r=1}^{\ell}(p_r^0 - C_r(q))dq_r. \tag{16}$$

Il suffit alors de poser :

$$p_r = p_r^0 - C_r(q). \tag{17}$$

Q.E.D.

Nous aurons besoin de préciser la façon dont les vecteurs $\varepsilon_r^*(q)$ et le point $x_{q,p}$ dépendent de q et p. Remarquons d'abord que, $\varepsilon_r^*(0)$ appartenant à $\mathfrak{N}_{r-1}(y)^\perp - \mathfrak{N}_r(y)^\perp$ et $\mathfrak{N}_{r-1}(y)$ étant un idéal de $\mathfrak{N}_r(y)$, le vecteur $\mathrm{Ad}^*_{g(\widehat{q_r})}\varepsilon_r^*(0)$ appartient à $\mathfrak{N}_{r-1}(y_q)^\perp - \mathfrak{N}_r(y_q)^\perp$; il en résulte que $(\mathrm{Ad}^*_{g(\widehat{q_r})}\varepsilon_r^*(0))_{1\leq r\leq \ell}$ est une base de $\mathfrak{B}(y_q)^\perp$.

Notons $P(q) = (\alpha_r^s(q))$ la matrice de passage de la base $(\mathrm{Ad}^*_{g(\widehat{q_r})}\varepsilon_r^*(0))$ à la base $(\varepsilon_r^*(q))$ de $\mathfrak{B}(y_q)^\perp$.

LEMME 1.1. — i) *Pour tout q de $\mathbf{R}^\ell$ la matrice $P(q)$ est triangulaire inférieure et unipotente;*

ii) *pour $s > r$ le coefficient $\alpha_r^s(q)$ est dans $\mathbf{R}[q_{r+1},\dots,q_{s-1}]$.*

Notation. — Nous poserons désormais :

$$x_q = x_{q,0}. \tag{18}$$

PROPOSITION 1.1. — *Pour tout élément a de $\mathfrak{G}$ il existe des polynômes $\Pi_0, \Pi_1, \dots, \Pi_\ell$ (avec $\Pi_r \in \mathbf{R}[q_{r+1},\dots,q_\ell]$ pour $0 \leq r \leq \ell$), tels que :*

$$\langle a, x_{q,p}\rangle = \Pi_0(q) + \sum_{r=1}^{\ell}\Pi_r(q)p_r. \tag{19}$$

Preuve. — Nous avons, d'après le théorème 1.1

$$x_{q,p} = x_q + \sum_{r=1}^{\ell} p_r\varepsilon_r^*(q),$$

avec

$$x_q = \mathrm{Ad}_{g(q)} x + \sum_{r=1}^{\ell} C_r(q) \varepsilon_r^*(q)$$

et d'après le lemme 1.1 :

$$\langle a, \varepsilon_r^*(q) \rangle = \langle a, \mathrm{Ad}^*_{g(\widehat{q_r})} \varepsilon_r^*(0) \rangle + \sum_{s=r+1}^{\ell} \alpha_r^s(q) \langle a, \mathrm{Ad}^*_{g(\widehat{q_s})} \varepsilon_s^*(0) \rangle,$$

de sorte que, toujours d'après le théorème 1.1 et le lemme 1.1 :

$$\langle a, \varepsilon_r^*(q) \rangle \in \mathbf{R}[q_{r+1}, \ldots, q_\ell].$$

Il suffit alors de poser

$$\Pi_0(q) = \langle a, \mathrm{Ad}^*_{g(q)} x \rangle + \sum_{r=1}^{\ell} C_r(q) \langle a, \varepsilon_r^*(q) \rangle,$$

et, pour $1 \leq r \leq \ell$:

$$\Pi_r(q) = \langle a, \varepsilon_r^*(q) \rangle.$$

Q.E.D.

Remarque. — La relation (19) est la propriété fondamentale des cartes construites par D. Arnal et J.C. Cortet dans [1] et [2].

2. Stratification des orbites.

Nous nous sommes jusqu'ici intéressés à une orbite prise isolément. Afin de globaliser les constructions qui précèdent à certaines familles d'orbites, nous allons tout d'abord donner une classification des points de $\mathfrak{G}^*$, classification qui dépend du choix d'une suite de Jordan-Hölder d'idéaux de $\mathfrak{G}$.

Nous nous fixons donc désormais une suite de Jordan-Hölder :

$$\{0\} = \mathfrak{G}_0 \underset{\neq}{\subset} \mathfrak{G}_1 \underset{\neq}{\subset} \ldots \underset{\neq}{\subset} \mathfrak{G}_n = \mathfrak{G}$$

d'idéaux de $\mathfrak{G}$ et nous notons G_i le sous-groupe fermé connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{G}_i$.

Soit $\mathbf{p}_j$ l'application de projection de $\mathfrak{G}^*$ sur $\mathfrak{G}_j^*$. Le groupe G et chaque groupe G_i opèrent dans $\mathfrak{G}_j^*$ par passage au quotient de l'action coadjointe. Notons :

– $\Omega_{i,\mathbf{p}_j(x)}$ l'orbite de $\mathbf{p}_j(x)$ pour l'action de G_i,

– $G^j(x)$ le stabilisateur de $\mathbf{p}_j(x)$ dans G et $\mathfrak{G}^j(x)$ son algèbre de Lie.

Posons encore :

– $\mathfrak{G}_i^j(x) = \mathfrak{G}^j(x) \cap \mathfrak{G}_i$,

– $\mathfrak{G}_i(x) = \mathfrak{G}_i^i(x)$.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de $\mathfrak{G}$ telle que

$$e_i \in \mathfrak{G}_i - \mathfrak{G}_{i-1}$$

et soit $\mathcal{B}^* = (e_1^*, \ldots, e_n^*)$ la base duale de $\mathfrak{G}^*$.

Nous noterons $\Sigma(x)$ la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de la forme bilinéaire σ_x définie par (1) et $\Sigma_{ji}(x)$ la matrice rectangulaire formée des j premières lignes et des i premières colonnes de $\Sigma(x)$; on remarque que $\Sigma_{ji}(x)$ est aussi la matrice dans $(e_1, \ldots, e_i)$ et $(\mathbf{p}_j(e_1^*), \ldots, \mathbf{p}_j(e_j^*))$ de l'application linéaire :

$$a \in \mathfrak{G}_i \longmapsto \mathbf{p}_j(\mathrm{ad}_a^* x) \in \mathfrak{G}_j^*.$$

Nous noterons $d_{ji}(x)$ (ou d_{ji} lorsqu'il n'y aura pas risque d'ambiguïté) la dimension de l'orbite $\Omega_{i,\mathbf{p}_j(x)}$, qui est aussi le rang de la matrice $\Sigma_{ji}(x)$. En particulier : $d_{nn} = d = 2\ell$ est la dimension de l'orbite Ω_x.

Les premières propriétés des entiers d_{ji} sont rassemblées dans la :

PROPOSITION 2.1.

i) $d_{ji} = d_{ij}$

ii) $d_{ji} = d_{j-1,i} + \begin{cases} 0 \\ \text{ou } 1 \end{cases}$

iii) $d_{ii} = d_{i-1,i-1} + \begin{cases} 0 \\ \text{ou } 2 \end{cases}$

iv) *Si* $d_{ji} = d_{j-1,i}$, *alors* $d_{jk} = d_{j-1,k}$ *pour* $1 \leq k \leq i$

v) $d_{ji}(\mathrm{Ad}_g^* x) = d_{ji}(x)$.

La proposition 2.1 nous conduit à introduire les ensembles suivants :

$$\begin{aligned}
&J_i = \{j \in \{1, \ldots, i\} / d_{ji} = d_{j-1,i} + 1\}, \\
&J = J_n, \\
&I = \{i \in \{1, \ldots, n\} / d_{ii} = d_{i-1,i-1} + 2\}, \\
&I' = J - I, \\
&I'' = \{1, \ldots, n\} - J.
\end{aligned}$$

Bien entendu, lorsqu'il y aura risque d'ambiguïté, ces ensembles seront notés respectivement $J_i(x), J(x), I(x), I'(x)$ et $I''(x)$.

PROPOSITION 2.2.

i) $J_1 = J_2 = \emptyset$

ii) $J_{i-1} \subset J_i$

iii) $I = \{i \in \{1, \ldots, n\} / i \in J_i\}$.

Nous allons maintenant introduire une involution de l'ensemble J sur lui-même.

Notation. — Pour $j \in J$, posons

(20) $$j^* = \mathrm{Min}\{i \in \{1, \ldots, n\} / d_{ji} = d_{j-1,i} + 1\}.$$

PROPOSITION 2.3. — *L'entier j^* est entièrement déterminé par l'une des conditions suivantes :*

(21) $$d_{jj^*} = d_{j-1,j^*} + 1 = d_{j,j^*-1} + 1 = d_{j-1,j^*-1} + 1,$$

(22) $$\mathfrak{G}^j_{j^*}(x) \subsetneq \mathfrak{G}^{j-1}_{j^*}(x) \text{ et } \mathfrak{G}^j_{j^*-1}(x) = \mathfrak{G}^{j-1}_{j^*-1}(x).$$

En outre, on peut trouver un élément a de $\mathfrak{G}_{j^*}$ vérifiant

(23) $$\langle e_i, \mathrm{ad}^*_a x\rangle = \delta_{ij} \text{ pour } i \leq j.$$

PROPOSITION 2.4. — i) *L'application*

$$j \longmapsto j^*$$

est une bijection involutive de J sur lui-même, qui échange les ensembles I et I'.

ii) $I = \{i \in J / i^* < i\}$.

Notations. — Nous poserons désormais

$$J = \{j_1, \ldots, j_d\}, \text{ avec } 1 \leq j_1 < \ldots < j_d \leq n,$$
$$I = \{i_1, \ldots, i_\ell\}, \text{ avec } 1 \leq i_1 < \ldots < i_\ell \leq n, \text{ et}$$
$$I^* = (i_1^*, \ldots, i_\ell^*).$$

La donnée de l'ensemble I et de la suite I^* déterminent évidemment J et l'involution $j \longmapsto j^*$. Elle détermine également les ensembles J_i et les entiers d_{ji} comme le montre la :

PROPOSITION 2.5.

Si $i \notin I$, $J_i = J_{i-1}$.

Si $i \in I$, $J_i = J_{i-1} \cup \{i, i^*\}$.

Nous sommes amenés à introduire une partition de $\mathfrak{G}^*$ par des ensembles $\mathfrak{G}^*_{I,I^*}$ où $I = \{i_1, \ldots, i_\ell\}$ est un sous-ensemble de $\{1, \ldots, n\}$ et $I^* = (i_1^*, \ldots, i_\ell^*)$.

$$\mathfrak{G}^*_{I,I^*} = \{x \in \mathfrak{G}^* / I(x) = I \text{ et } I^*(x) = I^*\}.$$

Bien entendu, on ne considère que les couples (I, I^*) pour lesquels $\mathfrak{G}^*_{I,I^*}$ est non vide. Il résulte de v) de la proposition 2.1 que chaque $\mathfrak{G}^*_{I,I^*}$ est stable par l'action coadjointe de G. Ainsi, on obtient également des partitions de l'ensemble $\mathfrak{G}^*/G$ des orbites et du dual unitaire $\hat{G}$ de G.

Remarque. — Dans [11], Pukansky introduit une partition moins fine de $\mathfrak{G}^*$. Avec les notations adoptées ici, il s'agit de la partition par les ensembles

$$\mathfrak{G}^*_J = \{x \in \mathfrak{G}^* / J(x) = J\}.$$

Nous verrons dans la section 5 que la partition par les $\mathfrak{G}^*_{I,I^*}$ peut être strictement plus fine que la partition par les $\mathfrak{G}^*_J$; cela signifie que pour un groupe G et une suite de Jordan-Hölder fixés, la donnée de J ne détermine pas le couple (I, I^*). Plus précisément, on peut obtenir des I différents pour un même J, ainsi que des suites I^* différentes pour un même J et un même I.

3. Bases complémentaires.

Sauf mention du contraire, nous fixons désormais le couple (I, I^*), donc aussi les ensembles J, J_i, I', I'' et les entiers ℓ, d et d_{ji}.

Nous introduisons les sous-algèbres suivantes :

— $\mathfrak{B}(x) = \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{G}_i(x)$ ($\mathfrak{B}(x)$ est la polarisation de M. Vergne en x, introduite par exemple dans [14]),

$$\left.\begin{array}{l} —\ \mathfrak{B}_i(x) = \mathfrak{B}(x) \cap \mathfrak{G}_i \\ —\ \mathfrak{B}^i(x) = \mathfrak{B}(x) \cap \mathfrak{G}^i(x) \end{array}\right\} 0 \le i \le n.$$

Nous utiliserons également l'orthogonal $\mathfrak{B}_i'(x)$ et le biorthogonal $\mathfrak{B}_i''(x)$ de $\mathfrak{B}_i(x)$ par rapport à σ_x.

On a évidemment :

$$\mathfrak{B}'(x) = \mathfrak{B}(x),$$
$$\mathfrak{B}'_i(x) = \mathfrak{G}^i(x) + \mathfrak{B}(x),$$
$$\mathfrak{B}''_i(x) = (\mathfrak{G}_i + \mathfrak{G}(x)) \cap \mathfrak{B}(x).$$

La somme d'une sous-algèbre et d'un idéal étant une sous-algèbre, $\mathfrak{B}''_i(x)$ est une sous-algèbre. Nous verrons qu'il en est de même pour $\mathfrak{B}'_i(x)$.

Les propriétés immédiates des suites de sous-espaces de $\mathfrak{G}$ qui viennent d'être introduites se résument dans la

Proposition 3.1. — i) *Les suites* $(\mathfrak{B}_i(x))$ *et* $(\mathfrak{B}''_i(x))$ *sont croissantes et la dimension augmente de 0 ou 1 à chaque pas. En outre :*

$$\mathfrak{B}_0(x) = \{0\} \quad \mathfrak{B}''_0(x) = \mathfrak{G}(x)$$
$$\mathfrak{B}_n(x) = \mathfrak{B}''_n(x) = \mathfrak{B}(x).$$

ii) *Les suites* $(\mathfrak{B}^i(x))$ *et* $(\mathfrak{B}'_i(x))$ *sont décroissantes et la dimension diminue de 0 ou 1 à chaque pas. En outre :*

$$\mathfrak{B}^0(x) = \mathfrak{B}(x) \qquad \mathfrak{B}'_0(x) = \mathfrak{G}$$
$$\mathfrak{B}^n(x) = \mathfrak{G}(x) \qquad \mathfrak{B}'_n(x) = \mathfrak{B}(x).$$

Proposition 3.2.

i) $\mathfrak{B}_i(x) = \sum_{k=0}^{i} \mathfrak{G}_k(x),$

ii) $\mathfrak{B}^i(x) = \sum_{k=i}^{n} \mathfrak{G}_k(x).$

Corollaire 1.

$$\mathfrak{B}'_i(x) = \bigcap_{k=0}^{i} (\mathfrak{G}_k + \mathfrak{G}^k(x)).$$

Corollaire 2.

$\mathfrak{B}'_i(x)$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{G}$.

Il résulte de la définition de J que $j \in J$ si et seulement si $\mathfrak{G}^j(x) \underset{\neq}{\subset} \mathfrak{G}^{j-1}(x)$. De même, nous allons maintenant établir le lien entre les sous-algèbres $\mathfrak{B}_i(x)$, $\mathfrak{B}'_i(x)$, $\mathfrak{B}''_i(x)$, $\mathfrak{B}^i(x)$ et les ensembles I, I', I''.

PROPOSITION 3.3.

i) $\mathfrak{B}_i(x) \underset{\neq}{\supset} \mathfrak{B}_{i-1}(x) \Longleftrightarrow i \in I' \cup I''$.

ii) $\mathfrak{B}'_i(x) \underset{\neq}{\subset} \mathfrak{B}'_{i-1}(x) \Longleftrightarrow \mathfrak{B}''_i(x) \underset{\neq}{\supset} \mathfrak{B}''_{i-1}(x) \Longleftrightarrow i \in I'$.

iii) $\mathfrak{B}^i(x) \underset{\neq}{\subset} \mathfrak{B}^{i-1}(x) \Longleftrightarrow i \in I$.

Notations. — Nous poserons désormais :

$$I' = \{i'_1, \dots, i'_\ell\} \text{ avec } n \geq i'_1 > \dots > i'_\ell \geq 1$$

et, pour $0 \leq r \leq \ell$

$$\mathfrak{M}_r(x) = \mathfrak{B}^{i_r}(x) = \dots = \mathfrak{B}^{i-1_{r+1}}(x)$$

$$\mathfrak{N}_r(x) = \mathfrak{B}'_{i'_r-1}(x) = \dots = \mathfrak{B}'_{i'_{r+1}}(x),$$

et

$$\mathfrak{N}'_r(x) = \mathfrak{B}''_{i'_r-1}(x) = \dots = \mathfrak{B}''_{i'_{r+1}}(x)$$

de sorte que nous avons

$$\mathfrak{B}(x) = \mathfrak{M}_0(x) \underset{\neq}{\supset} \mathfrak{M}_1(x) \underset{\neq}{\supset} \dots \underset{\neq}{\supset} \mathfrak{M}_\ell(x) = \mathfrak{G}(x).$$

$$\mathfrak{B}(x) = \mathfrak{N}_0(x) \underset{\neq}{\subset} \mathfrak{N}_1(x) \underset{\neq}{\subset} \dots \underset{\neq}{\subset} \mathfrak{N}_\ell(x) = \mathfrak{G}$$

et

$$\mathfrak{B}(x) = \mathfrak{N}'_0(x) \underset{\neq}{\supset} \mathfrak{N}'_1(x) \underset{\neq}{\supset} \dots \underset{\neq}{\supset} \mathfrak{N}'_\ell(x) = \mathfrak{G}(x).$$

Les constructions que nous allons effectuer maintenant nous permettront :

— d'une part d'obtenir des bases complémentaires de $\mathfrak{G}(x)$ dans $\mathfrak{B}(x)$ et de $\mathfrak{B}(x)$ dans $\mathfrak{G}$, dépendant rationnellement de x;

— d'autre part de préciser les propriétés des ensembles $\mathfrak{G}^*_{I,I^*}$.

Le lemme qui suit nous sera utile à plusieurs reprises :

LEMME 3.1. — *On ne peut avoir, pour $j \in J$,*

$$\mathfrak{G}_{j^*} \subset \mathfrak{G}_{j^*-1} + \mathfrak{G}^j(x).$$

Notation. — Posons, pour $1 \leq k \leq d$

$$\Delta_k(x) = \begin{vmatrix} \sigma_x(e_{j_1}, e_{j_1^*}) & \dots & \sigma_x(e_{j_1}, e_{j_k^*}) \\ \vdots & & \vdots \\ \sigma_x(e_{j_k}, e_{j_1^*}) & \dots & \sigma_x(e_{j_k}, e_{j_k^*}) \end{vmatrix} \tag{24}$$

de sorte que Δ_k est une fonction polynomiale sur $\mathfrak{G}^*$.

PROPOSITION 3.4.

i) Δ_k *ne s'annule pas dans* $\mathfrak{G}^*_{I,I^*}$,

ii) Δ_k *est constante sur les orbites contenues dans* $\mathfrak{G}^*_{I,I^*}$.

Preuve. — i) Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ des réels tels que

$$\sum_{m=1}^{k} \lambda_m \sigma_x(e_{j_{m'}}, e_{j^*_m}) = 0, \quad \text{pour } 1 \leq m' \leq k, \tag{25}$$

ce qui s'écrit encore :

$$\langle e_{j_{m'}}, \mathrm{ad}^*_{\sum_{m=1}^{k} \lambda_m e_{j^*_m}} x \rangle = 0 \quad \text{pour } 1 \leq m' \leq k. \tag{26}$$

En utilisant le fait que $\mathfrak{G}^j(x) = \mathfrak{G}^{j-1}(x)$ pour $j \in I''$, on déduit de proche en proche, à l'aide de (26), que

$$\sum_{m=1}^{k} \lambda_m e_{j^*_m} \in \mathfrak{G}^{j_{m'}}(x) \text{ pour } 1 \leq m' \leq k$$

et en particulier

$$\sum_{m=1}^{k} \lambda_m e_{j^*_m} \in \mathfrak{G}^{j_k}(x).$$

Supposons les λ_m non tous nuls et soit $M \in \{1, \dots, k\}$ tel que

$$j^*_M = \mathrm{Max}\{j^*_m / \lambda_m \neq 0\}.$$

Il vient :

$$e_{j^*_M} = - \sum_{m \neq M} \frac{\lambda_m}{\lambda_M} e_{j^*_m} \text{ modulo } \mathfrak{G}^{j_M}(x),$$

de sorte que

$$e_{j^*_M} \in \mathfrak{G}_{j^*_M - 1} + \mathfrak{G}^{j_M}(x)$$

et, par conséquent,

$$\mathfrak{G}_{j^*_m} \subset \mathfrak{G}_{j^*_M - 1} + \mathfrak{G}^{j_M}(x),$$

ce qui est impossible d'après le lemme 3.1.

ii) Soit σ^k_x la forme bilinéaire définie sur la k^e puissance extérieure de $\mathfrak{G}$ par

$$\sigma^k_x(a_1 \wedge \dots \wedge a_k, b_1 \wedge \dots \wedge b_k) = \begin{vmatrix} \sigma_x(a_1, b_1) & \dots & \sigma_x(a_1, b_k) \\ \vdots & & \vdots \\ \sigma_x(a_k, b_1) & \dots & \sigma_x(a_k, b_k) \end{vmatrix} \tag{27}$$

de sorte que

$$\Delta_k(x) = \sigma_x^k(e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_k}, e_{j_1^*} \wedge \ldots \wedge e_{j_k^*}),$$

et, pour $g \in G$,

$$\Delta_k(\mathrm{Ad}_g^* x) = \sigma_x^k(\mathrm{Ad}_g^{-1} e_{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{Ad}_g^{-1} e_{j_k}, \mathrm{Ad}_g^{-1} e_{j_1^*} \wedge \ldots \wedge \mathrm{Ad}_g^{-1} e_{j_k^*}).$$

La différentielle en g de l'application

$$g \longmapsto \Delta_k(\mathrm{Ad}_g^* x)$$

est, en écrivant $a.g (a \in \mathfrak{G})$ les vecteurs de l'espace tangent $T_g(G)$:

$$a.g \in T_g(G) \longmapsto -\sum_{m=1}^{k} \sigma_x^k(\mathrm{Ad}_g^{-1} e_{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{Ad}_g^{-1} \mathrm{ad}_a e_{j_m} \wedge \ldots \wedge \mathrm{Ad}_g^{-1} e_j, \\ \mathrm{Ad}_g^{-1} e_{j_1^*} \wedge \ldots \wedge \mathrm{Ad}_g^{-1} e_{j_k^*})$$

$$-\sum_{m=1}^{k} \sigma_x^k(\mathrm{Ad}_g^{-1} e_{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{Ad}_g^{-1} e_{j_k}, \mathrm{Ad}_g^{-1} e_{j_1^*} \wedge \ldots \\ \wedge \mathrm{Ad}_g^{-1} \mathrm{ad}_a e_{j_m^*} \wedge \ldots \wedge \mathrm{Ad}_g^{-1} e_{j_k^*}),$$

ou encore :

$$a.g \in T_g(G) \longmapsto -\sum_{m=1}^{k} \sigma_{\mathrm{Ad}_g^* x}^k(e_{j_1} \wedge \ldots \wedge [a, e_{j_m}] \wedge \ldots \wedge e_{j_k}, e_{j_1^*} \wedge \ldots \wedge e_{j_k^*})$$

$$-\sum_{m=1}^{k} \sigma_{\mathrm{Ad}_g^* x}^k(e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_k}, e_{j_1^*} \wedge \ldots \wedge [a, e_{j_m^*}] \wedge \ldots \wedge e_{j_k^*}).$$

Or, chaque déterminant $\sigma_{\mathrm{Ad}_g^* x}^k(e_{j_1} \wedge \ldots \wedge [a, e_{j_m}] \wedge \ldots \wedge e_{j_k}, e_{j_1^*} \wedge \ldots \wedge e_{j_k^*})$ est nul; en effet les m premières lignes sont associées à des éléments de $\mathfrak{G}_{j_{m-1}}$ et de tels éléments de $\mathfrak{G}$ sont dépendants modulo $\mathfrak{G}^{j_k}(\mathrm{Ad}_g^* x)$. De même, supposons indépendantes les m premières colonnes du déterminant

$$\sigma_{\mathrm{Ad}_g^* x}^k(e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_k}, e_{j_1^*} \wedge \ldots \wedge [a, e_{j_m^*}] \wedge \ldots \wedge e_{j_k^*}).$$

Alors il existerait des réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}$ et β tels que :

$$e_{j_m^*} = \sum_{m'=1}^{m-1} \alpha_{m'} e_{j_{m'}^*} + \beta[a, e_{j_m^*}] \text{modulo } \mathfrak{G}^{j_k}(\mathrm{Ad}_g^* x).$$

En posant, lorsque les $\alpha_{m'}$ ne sont pas tous nuls

$$j_M^* = \mathrm{Max}\,\{j_{m'}^* / \alpha_{m'} \neq 0\},$$

il vient :

$$e_{j_M^*} = -\sum_{m' \neq M} \frac{\alpha_{m'}}{\alpha_M} e_{j_{m'}^*} - \frac{\beta}{\alpha_M}[a, e_{j_m^*}] + \frac{1}{\alpha_M} e_{j_M^*} \text{modulo } \mathfrak{G}^{j_k}(\mathrm{Ad}_g^* x).$$

Des 3 dernières relations, on déduit :

— si $j_M^* < j_{m'}^*$

$$e_{j_m^*} \in \mathfrak{G}_{j_m^*-1} + \mathfrak{G}^{j_m}(\mathrm{Ad}_g^* x),$$

donc,

$$\mathfrak{G}_{j_m^*} \subset \mathfrak{G}_{j_m^*-1} + \mathfrak{G}^{j_m}(\mathrm{Ad}_g^* x),$$

— si $j_M^* > j_{m'}^*$

$$e_{j_M^*} \in \mathfrak{G}_{j_M^*-1} + \mathfrak{G}^{j_M}(\mathrm{Ad}_g^* x)$$
$$\mathfrak{G}_{j_M^*} \subset \mathfrak{G}_{j_M^*-1} + \mathfrak{G}^{j_M}(\mathrm{Ad}_g^* x)$$

ce qui est impossible d'après le lemme 3.1.

Enfin, si tous les $\alpha_{m'}$ sont nuls, comme $e_{j_m^*}$ ne peut appartenir à $\mathfrak{G}^{j_m}(\mathrm{Ad}_g^* x)$, donc à $\mathfrak{G}^{j_k}(\mathrm{Ad}_g^* x)$, on a obligatoirement

$$\beta \neq 0$$

d'où l'on déduit

$$\mathfrak{G}_{j_m^*} \subset \mathfrak{G}_{j_m^*-1} + \mathfrak{G}^{j_m}(\mathrm{Ad}_g^* x).$$

Q.E.D.

Notation. — Nous poserons désormais

$$\Delta(x) = \Delta_1(x) \dots \Delta_d(x).$$

Ainsi l'ensemble $\mathbf{R}[x, \Delta^{-1}(x)]$ des fonctions sur $\mathfrak{G}^*$ qui s'écrivent comme des polynômes par rapport aux composantes ξ_j de x et par rapport aux $\Delta_k^{-1}(x)$ est une sous-algèbre de l'algèbre $\mathcal{O}(\mathfrak{G}^*_{I,I^*})$ des fonctions rationnelles sur $\mathfrak{G}^*$ et définies dans $\mathfrak{G}^*_{I,I^*}$.

PROPOSITION 3.5. — *Pour chaque $j \in J$, il existe une application*

$$a_j : x \in \mathfrak{G}^*_{I,I^*} \longmapsto a_j(x) \in \mathfrak{G}$$

(dont les composantes dans $\mathcal{B}$ appartiennent à $\mathbf{R}[x, \Delta^{-1}(x)]$) ayant les propriétés suivantes :

i) $a_j(x) \in \mathfrak{G}_{j^*}$

ii) $a_j(x) \in \mathfrak{G}^{j-1}(x) - \mathfrak{G}^j(x)$ *et plus précisément*

(28) $$\langle e_i, \mathrm{ad}^*_{a_j(x)} x \rangle = \delta_{ij} \text{ pour } 1 \leq i \leq j.$$

En outre, cette application est unique si l'on impose à $a_j(x) = a_{j_k}(x)$ d'être combinaison linéaire de $e_{j_1^*}, \dots, e_{j_k^*}$.

Preuve. — Posons $j = j_k$ et cherchons $a_j(x)$ sous la forme

$$a_{j_k}(x) = \sum_{m=1}^{k} \alpha_m(x) e_{j_m^*}. \tag{29}$$

Le système (28) est équivalent à

$$\langle e_{i_r}, \mathrm{ad}^*_{a_{j_k}(x)} x \rangle = \delta_{rk}, \text{pour } 1 \leq r \leq k, \tag{30}$$

donc à

$$\sum_{m=1}^{k} \alpha_m(x) \sigma_x(e_{j_r}, e_{j_m^*}) = \delta_{rk}, \text{pour } 1 \leq r \leq k, \tag{31}$$

qui, d'après le i) de la proposition 3.4, est un système de Kramer.

Il reste à démontrer i). Soit encore M, tel que :

$$j_M^* = \mathrm{Max}\{j_m^* / \alpha_m(x) \neq 0\}.$$

Il vient, d'après (28) :

$$e_{j_M^*} = - \sum_{m \neq M} \frac{\alpha_m(x)}{\alpha_M(x)} e_{j_m^*} \text{ modulo } \mathfrak{G}^{j_k - 1}(x),$$

d'où :

$$e_{j_M^*} \in \mathfrak{G}_{j_M^* - 1} + \mathfrak{G}^{j_k - 1}(x).$$

On ne peut donc avoir $M < k$, sinon le lemme 3.1 se trouverait contredit. On obtient donc :

$$a_{j_k}(x) = \sum_{\substack{1 \leq m \leq k \\ \text{et } j_m^* \leq j_k^*}} \alpha_m(x) e_{j_m^*},$$

d'où :

$$a_{j_k}(x) \in \mathfrak{G}_{j_k^*}.$$

Q.E.D.

Le lemme 3.1 sert encore à démontrer la

PROPOSITION 3.6. — i) $(a_{i_\ell}(x), \ldots, a_{i_1}(x))$ *est une base complémentaire de* $\mathfrak{G}(x)$ *dans* $\mathfrak{B}(x)$ *telle que* $a_{i_r}(x) \in \mathfrak{M}_{r-1}(x) - \mathfrak{M}_r(x)$,

ii) $(a_{i'_1}(x), \ldots, a_{i'_\ell}(x))$ *est une base complémentaire de* $\mathfrak{B}(x)$ *dans* $\mathfrak{G}$ *telle que* $a_{i'_r}(x) \in \mathfrak{N}_r(x) - \mathfrak{N}_{r-1}(x)$.

Remarque. — Le i) de la proposition 3.4 montre en particulier que $\Delta_d(x)$ ne s'annule pas dans $\mathfrak{G}_J^*$ (voir la remarque à la fin de la section 2).

On peut alors construire des applications rationnelles c_{j_k} de $\mathfrak{G}^*_J$ dans $\mathfrak{G}$ vérifiant :

$$\langle e_i, \mathrm{ad}^*_{c_{j_k}(x)}.x\rangle = \delta_{i,j_k} \text{pour } 1 \leq i \leq j_k.$$

Ce sont ces applications qui sont considérées par Pukansky dans [11].

Comme nous l'avions annoncé, nous terminons cette section par quelques compléments sur les ensembles $\mathfrak{G}^*_{I,I^*}$.

Tout d'abord, nous pouvons munir l'ensemble des (I, I^*) d'un ordre total, de la manière suivante :

— l'indice i étant fixé, nous munissons l'ensemble des J_i de l'ordre total suivant :

$$(32)\quad \begin{cases} J_i(x) \leq J_i(x') \text{ si et seulement si } d_{j_0,i}(x) \geq d_{j_0,i}(x'), \text{ où } j_0 \text{ est} \\ \qquad\qquad \text{le plus grand indice } j \text{ tel que } d_{j,i}(x) \neq d_{j,i}(x'). \end{cases}$$

— on pose alors

$$(33)\begin{cases} (I(x), I^*(x)) \leq (I(x'), I^*(x')) \text{ si et seulement si } J_{i_0}(x) \leq J_{i_0}(x'), \\ \qquad \text{où } i_0 \text{ est le plus grand indice } i \text{ tel que } J_i(x) \neq J_i(x'). \end{cases}$$

On note alors les couples (I, I^*) dans l'ordre croissant : $(I_0, I_0^*), \ldots (I_N, I_N^*)$, et on pose $\mathfrak{G}^*_K = \mathfrak{G}^*_{I_K, I_K^*}$.

THÉORÈME 3.1. — *Il existe une famille de polynômes $F_0, \ldots, F_N$ sur $\mathfrak{G}^*$ telle que :*

$$\mathfrak{G}^*_K = \{x \in \mathfrak{G}^* / F_0(x) = \ldots = F_{K-1}(x) = 0 \text{ et } F_K(x) \neq 0\}.$$

Preuve. — Posons tout d'abord

$$\Gamma_K = \mathfrak{G}^*_0 \cup \ldots \cup \mathfrak{G}^*_K,$$

de sorte que

$$\mathfrak{G}^*_K = \Gamma_K - \Gamma_{K-1}.$$

Nous devons construire un polynôme F_K tel que, si $x \notin \Gamma_{K-1}$, alors :

$$x \in \mathfrak{G}^*_K \Longleftrightarrow F_K(x) \neq 0.$$

Soit donc $x \notin \Gamma_{K-1}$. Alors x est dans $\mathfrak{G}^*_K$ s'il n'appartient à aucun des $\mathfrak{G}^*_L$ pour $K < L$. Pour $L > K$, posons :

$$i_{KL} = \mathrm{Max}\ \{i / J_i(x) \neq J_i(x') \text{ pour } x \in \mathfrak{G}^*_K \text{ et } x' \in \mathfrak{G}^*_L\},$$
$$j_{KL} = \mathrm{Max}\ \{j / d_{j,i_{KL}}(x) \neq d_{j,i_{KL}}(x') \text{ pour } x \in \mathfrak{G}^*_K \text{ et } x' \in \mathfrak{G}^*_L\}.$$

On a donc, d'après (32) et (33),

$$d_{j_{KL},i_{KL}}(x) > d_{j_{KL},i_{KL}}(x') \text{ pour } x \in \mathfrak{G}^*_K \text{ et } x' \in \mathfrak{G}^*_L. \tag{34}$$

Posons alors, pour $x \in \mathfrak{G}^*_K$,

$$J_{i_{KL}}(x) = \{j_1, \ldots, j_m, \ldots, j_k\} \text{ avec}$$
$$m = d_{j_{KL},i_{KL}}(x),\ j_m = j_{KL}, j_k = i_{KL},$$

et soit Δ_{KL} la fonction définie sur $\mathfrak{G}^*$ par

$$\Delta_{KL}(x) = \begin{vmatrix} \sigma_x(e_{j_1}, e_{j_1^*}) & \ldots & \sigma_x(e_{j_1}, e_{j_m^*}) \\ \vdots & & \vdots \\ \sigma_x(e_{j_m}, e_{j_1^*}) & \ldots & \sigma_x(e_{j_m}, e_{j_m^*}) \end{vmatrix}.$$

Il vient :

— pour $x \in \mathfrak{G}^*_K$, $\Delta_{KL}(x) \neq 0$ d'après le i) de la proposition 3.4 appliqué au groupe $G_{i_{KL}}$.

— pour $x' \in \mathfrak{G}^*_L$, $\Delta_{KL}(x') = 0$, les lignes étant dépendantes à cause de (34).

Il suffit alors de poser :

$$F_K(x) = \prod_{K<L\leq N} \Delta_{KL}(x).$$

Q.E.D.

Remarque. — Un résultat analogue est obtenu dans [11] par Pukansky pour les ensembles $\mathfrak{G}^*_J$.

4. Paramétrisation d'une famille d'orbites.

Nous revenons à la situation de la section 1, mais cette fois, grâce aux résultats des sections 2 et 3 nous pouvons choisir, de manière cohérente, pour chaque point $x \in \mathfrak{G}^*_{I,I^*}$, la polarisation $\mathfrak{B}(x)$ (polarisation de M. Vergne), la famille de sous-algèbres $(\mathfrak{N}_r(x))_{1\leq r\leq \ell-1}$ intercalées entre $\mathfrak{B}(x)$ et $\mathfrak{G}$ et la base complémentaire $(b_1 = a_{i'_1}(x), \ldots, b_\ell = a_{i'_\ell}(x))$ de $\mathfrak{B}(x)$ dans $\mathfrak{G}$; de même, nous disposons de deux familles $(\mathfrak{M}_r(x))_{1\leq r\leq \ell-1}$ et $(\mathfrak{N}'_r(x))_{1\leq r\leq \ell-1}$ de sous-algèbres intercalées entre $\mathfrak{B}(x)$ et $\mathfrak{G}(x)$ et d'une base complémentaire $(a_{i_\ell}(x), \ldots, a_{i_1}(x))$ de $\mathfrak{G}(x)$ dans $\mathfrak{B}(x)$; en outre $a_{i'_r}(x)$ et $a_{i_s}(x)$ dépendent rationnellement de $x \in \mathfrak{G}^*_{I,I^*}$. Nous avons besoin d'une paramétrisation de l'orbite $\Omega = \Omega_x$ distincte de celle obtenue au théorème 1.1. Pour cela, nous commençons par identifier $\mathbf{R}^d$ et $\mathbf{R}^\ell \times \mathbf{R}^\ell$ en posant $t = (q, u)$ avec

$$\begin{cases} t_k = q_r, \text{ si } j_k = i'_r \in I' \text{ et} \\ t_k = u_s, \text{ si } j_k = i_s \in I. \end{cases} \tag{35}$$

Nous définissons alors, pour $t = (t_k) = (q,u) \in \mathbf{R}^d$, une famille $(\gamma_k(t_k))$ d'applications de $\mathfrak{G}^*$ dans $\mathfrak{G}^*$ par :

$$\begin{cases} \gamma_k(t_k)x' = \mathrm{Ad}^*_{g_r(q_r)}x', \text{ si } j_k = i'_r \in I' \\ \gamma_k(t_k)x' = x' + u_s \ \mathrm{ad}^*_{a_{i_s}(x)}x, \text{ si } j_k = i_s \in I, \end{cases} \tag{36}$$

où $g_r(q_r)$ est défini par (4).

Nous posons encore :

$$\gamma(t) = \gamma_1(t_1)\ldots\gamma_d(t_d) \tag{37}$$

et

$$x_t = x_{q,u} = \gamma(t)x = \gamma(q,u)x. \tag{38}$$

PROPOSITION 4.1. — *L'application*

$$t \longmapsto x_t$$

est un difféomorphisme de $\mathbf{R}^d$ *sur* Ω *tel que*

$$\mathrm{p}(x_{q,u}) = y_q.$$

Preuve. — Posons, pour $0 \le r \le \ell$

$$S_r = \{s \in \{1,\ldots,\ell\}/i'_{r+1} < i_s < i'_r\}$$

(avec les conventions $i'_{\ell+1} = 0$ $i'_0 = r+1$).

On déduit des relations (35) à (38) :

$$x_t = x_{q,u} = \mathrm{Ad}^*_{g(q)}x + \sum_{r=0}^{\ell}\Big(\sum_{s\in S_r} u_s \mathrm{Ad}^*_{g(\widehat{q_r})}\mathrm{ad}^*_{a_{i_s}(x)}x\Big). \tag{39}$$

Il suffit donc de prouver que la famille $(\mathrm{Ad}^*_{g(\widehat{q_r})}\mathrm{ad}^*_{a_{i_s}(x)}x)_{\substack{0\le r\le \ell \\ \text{et } s\in S_r}}$ est une base de $\mathfrak{B}(y_q)^\perp$, ou encore que la famille $(\mathrm{Ad}^*_{g(\widetilde{q_r})^{-1}}\mathrm{ad}^*_{a_{i_s}(x)}x)_{\substack{0\le r\le \ell \\ \text{et } s\in S_r}}$ est une base de $\mathfrak{B}(y)^\perp = \mathfrak{B}(x)^\perp$. Ceci se démontre en utilisant les propriétés des algèbres $\mathfrak{B}''_i(x)$ et $\mathfrak{N}'_r(x)$.

Q.E.D.

PROPOSITION 4.2. — *On peut définir dans $\mathfrak{G}^*_{I,I^*} \times \mathbf{R}^d$ des fonctions $P_j(j_1 \leq j \leq n)$ et $Q_k(1 \leq k \leq d)$, ayant les propriétés suivantes :*

i) $P_j \in \mathbf{R}[x, \Delta^{-1}(x), t_1, \dots, t_k]$ *pour* $j_k \leq j < j_{k+1}$ *et* $Q_k \in \mathbf{R}[x, \Delta^{-1}(x), t_1, \dots, t_{k-1}]$,

ii) P_j *et* $Q_k \in \mathbf{R}[x, \Delta^{-1}(x), q]_1[u]$ *(autrement dit,* P_j *et* Q_k *sont de degré 1 par rapport à* t_m *pour* $j_m \in I$*),*

iii) $P_{j_k}(x,t) = t_k + Q_k(x,t)$, *pour* $1 \leq k \leq d$,

iv) $x_t = x + \sum_{j=j_1}^{n} P_j(x,t) e_j^*$.

Preuve. — Elle consiste à construire de proche en proche des fonctions P_j^m et Q_k^m des variables x et $\widehat{t_m} = (t_{m+1}, \dots, t_d)$, avec les propriétés suivantes :

i) $P_j^m \in \mathbf{R}[x, \Delta^{-1}(x), t_{m+1}, \dots, t_k]$ pour $k > m$ et $j_k \leq j \leq j_{k+1}$ et $Q_k^m \in \mathbf{R}[x, \Delta^{-1}(x), t_{m+1}, \dots, t_{k-1}]$ pour $k > m$,

ii) P_j^m et $Q_k^m \in \mathbf{R}[x, \Delta^{-1}(x), q]_1[u]$,

iii) $P_{j_k}^m(x, \widehat{t_m}) = t_k + Q_k^m(x, \widehat{t_m})$ pour $k > m$,

iv) $x_{\widehat{t_m}} = x + \sum_{j=j_{m+1}}^{n} P_j^m(x, \widehat{t_m}) e_j^*$.

Q.E.D.

Posons, pour tout point x' de Ω_x,

$$x' = \sum_{j=1}^{n} \xi'_j e_j^*.$$

De la proposition 4.2 nous déduisons le

COROLLAIRE 1. — i) *L'application*

$$x' \in \Omega_x \longmapsto (\xi'_{j_1}, \dots, \xi'_{j_d}) \in \mathbf{R}^d$$

est un difféomorphisme; en particulier, l'orbite Ω_x *contient un unique point* x' *tel que*

$$\xi'_{j_1} = \dots \xi'_{j_d} = 0;$$

ii) *pour* $x' = x_t$, *nous avons*

$$t_k = \xi'_{j_k} - \xi_{j_k} + Q'_k(x, \xi'_{j_1}, \dots, \xi'_{j_{k-1}}),$$

avec $Q'_k \in \mathbf{R}[x, \Delta^{-1}(x), \xi'_{i'_{r+1}}, \ldots, \xi'_{i'_\ell}]_1[\xi'_{i_1}, \ldots, \xi'_{i_{s-1}}]$

$$\textit{pour } i'_{r+1} < j_k \leq i'_r \textit{ et } i_{s-1} < j_k \leq i_s.$$

iii) *pour* $j \in I''$, *nous avons :*

$$\xi'_j = \xi_j + T_j(x, \xi'_{j_1}, \ldots, \xi'_{j_d}),$$
$$T_j \in \mathbf{R}[x, \Delta^{-1}(x), \xi'_{i_{r+1}}, \ldots, \xi'_{i_\ell}]_1[\xi'_{i_1}, \ldots, \xi'_{i_{s-1}}]$$
$$\textit{pour } i'_{r+1} < j < i_r \textit{ et } i_{s-1} < j < i_s.$$

Nous pouvons maintenant considérer les coordonnées q_r et p_r comme fonctions de $x \in \mathfrak{G}^*_{I,I^*}$ et des coordonnées $\xi'_{j_1}, \ldots, \xi'_{j_d}$. Comme $q_r = t_k$ pour $i'_r = j_k$, nous obtenons immédiatement le

Corollaire 2.

$$q_r \in \mathbf{R}[x, \Delta^{-1}(x), \xi'_{i'_{r+1}}, \ldots, \xi'_{i'_\ell}]_1\ [\xi_{i'_r}, \xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_{s-1}}] \text{ pour } i_{s-1} < i'_r < i_s.$$

Nous sommes maintenant en mesure de donner une paramétrisation de l'ensemble $\mathfrak{G}^*_{I,I^*}/G$ des orbites contenues dans $\mathfrak{G}^*_{I,I^*}$.

Posons :

$$I'' = \{i''_1, \ldots, i''_{n-d}\}, \text{ avec } 1 \leq i''_i < \ldots < i''_{n-d} \leq n,$$

et, pour $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-d}) \in \mathbf{R}^{n-d}$, posons :

$$x^\lambda = \sum_{k=1}^{n-d} \lambda_k e^*_{i''_k}. \tag{40}$$

Soit :

$$\Lambda_{I,I^*} = \{\lambda \in \mathbf{R}^{n-d} / x^\lambda \in \mathfrak{G}^*_{I,I^*}\}.$$

Pour $\lambda \in \Lambda_{I,I^*}$, nous noterons Ω_λ l'orbite de x^λ.

Proposition 4.3. — i) Λ_{I,I^*} *est un sous-ensemble pseudo-algébrique (i.e. localement fermé pour la topologie de Zariski) de* $\mathbf{R}^{n-d}$.

ii) *L'application*

$$\lambda \longmapsto \Omega_\lambda$$

est un homéomorphisme de Λ_{I,I^*} *(muni de la topologie euclidienne de* $\mathbf{R}^{n-d}$*) sur* $\mathfrak{G}^*_{I,I^*}/G$ *(muni de sa topologie quotient).*

Nous pouvons considérer les λ_k comme des fonctions de $x \in \mathfrak{G}^*_{I,I^*}$.

PROPOSITION. 4.4.

$$\lambda_k \in \mathbf{R}[x, \Delta^{-1}(x)].$$

Remarque. — Dans [11] Pukansky obtient une paramétrisation analogue pour l'ensemble $\mathfrak{G}^*_J/G$. Pour cela il paramètre Ω_x en posant

$$x_t = \mathrm{Ad}^*_{\exp\, t_1 c_1(x) \ldots \exp\, t_k c_k(x)} x$$

(voir la remarque qui suit la proposition 3.7). Nous avons modifié la construction de Pukansky en utilisant la paramétrisation (38), cela nous était indispensable afin d'obtenir les propriétés de rationnalité des fonctions $q(x)$ au corollaire 2 de la proposition 4.2.

Nous sommes maintenant en mesure de choisir une origine x^λ pour chaque orbite Ω_λ contenue dans $\mathfrak{G}^*_{I,I^*}$; les coordonnées du point x^λ tel que $\Omega_x = \Omega_\lambda$ dépendent rationnellement des coordonnées du point x de $\mathfrak{G}^*_{I,I^*}$. Nous pouvons alors reprendre les constructions de la section 1 à partir de chaque point x^λ.

Les notations sont adaptées en ajoutant λ en indice supérieur.

Notons également :

$$\Delta_k(\lambda) = \Delta_k(x^\lambda),$$

de sorte que, d'après le ii) de la proposition 3.4, il vient :

$$\Delta_k(x) = \Delta_k(\lambda), \quad \text{pour } x \in \Omega_\lambda. \tag{41}$$

Les résultats qui précèdent et des considérations semblables à celles du lemme 1.1 nous permettent d'établir le

LEMME 4.1. — i) *pour $1 \leq r \leq \ell$, les coordonnées de $b_r^\lambda(q)$ dans $\mathcal{B}$ et de $\varepsilon_r^{*\lambda}(q)$ dans $\mathcal{B}^*$ sont des fonctions appartenant à $\mathbf{R}[\lambda, \Delta^{-1}(\lambda), \widehat{q_r}]$;*

ii) *pour $1 \leq r \leq \ell$, $C_r^\lambda(q) \in \mathbf{R}[\lambda, \Delta^{-1}(\lambda), \widehat{q_{r-1}}]$.*

THÉORÈME 4.1. — *Pour tout élément a de $\mathfrak{G}$, il existe des fonctions $\Pi_0, \Pi_1, \ldots, \Pi_\ell$ (avec $\Pi_r \in \mathbf{R}[\lambda, \Delta^{-1}(\lambda), \widehat{q_r}]$, pour $0 \leq r \leq \ell$), telles que :*

$$\langle a, x^\lambda_{q,p} \rangle = \Pi_0(\lambda, q) + \sum_{r+1}^{\ell} \Pi_r(\lambda, \widehat{q_r}) p_r.$$

Preuve. — Les fonctions Π_r sont définies comme à la proposition 1.1. Pour le comportement par rapport à λ, il suffit d'appliquer le lemme 4.1.

Q.E.D.

THÉORÈME. 4.2. — *Les fonctions λ_k, p_r et $q_r (1 \leq k \leq n-2\ell,\ 1 \leq r \leq \ell)$ appartient à $R[x, \Delta^{-1}(x)]$.*

Preuve. — i) Pour λ_k, le résultat a été obtenu à la proposition 4.4;

ii) Pour q_r, on applique la proposition 4.4 et le corollaire 2 de la proposition 4.2.

iii) D'après (12) et le i) du théorème 1.1, nous avons :

$$\begin{aligned} p_r(x) &= \langle b_r^{\lambda(x)}(q(x)),\ x - \mathrm{Ad}^*_{g_r^{\lambda(x)}(q(x))} x^{\lambda(x)} \rangle - C_r^{\lambda(x)}(q(x)) \\ &= H_r(x) - H'_r(x). \end{aligned}$$

Or, $H_r \in \mathbf{R}[x, \Delta^{-1}(x)]$ d'après i), ii) et le lemme 4.1, tandis que $H'_r \in \mathbf{R}[x, \Delta^{-1}(x)]$ d'après ii) et le lemme 4.1.

Q.E.D.

5. Exemples.

Le groupe de Lie nilpotent G étant donné, et une suite de Jordan-Hölder $(\mathfrak{G}_i)$ étant choisie dans $\mathfrak{G}$, la construction explicite des divers objets introduits au cours des sections précédentes, peut être réalisée de la manière suivante :

1) A l'aide de la matrice $\Sigma(x)$ de la forme bilinéaire σ_x, détermination pour chaque point x de $\mathfrak{G}^*$, des entiers $d_{ji}(x)$ et par conséquent des ensembles $J_i(x)$, $I(x)$ et de la suite $I^*(x)$; il s'ensuit la détermination des divers ensembles $\mathfrak{G}^*_{I,I^*}$ et Λ_{I,I^*}.

2) Pour chaque couple (I, I^*), calcul des fonctions Δ_k et des éléments $a_{j_k}(x)$ $(1 \leq k \leq d)$; éventuellement, détermination des sous-algèbres $\mathfrak{G}_i(x)$ et de la polarisation $\mathfrak{B}(x)$.

3) Calcul, à partir d'un point x de $\mathfrak{G}^*_{I,I^*}$, des points $x_{q,u}$ de Ω_x définis par (38), puis, en déterminant q et u tels que $\langle e_j, x_{q,u} \rangle = 0$ pour $j \in J$, calcul des fonctions $\lambda_k(x)$ et $q_r(x)$.

4) Calcul des éléments $b_r^{\lambda}(q)$ au moyen de (8), puis détermination des

vecteurs $\varepsilon_r^{*\lambda}(q)$; pour cela on écrit

$$\varepsilon_r^{*\lambda}(q) = \sum_{s=1}^{\ell} \mu_s \frac{\partial x_{q,u}}{\partial u_s},$$

et on détermine les scalaires μ_s de manière à satisfaire les conditions d'orthogonalité (12). Les points 3) et 4) fournissant des bases de chaque espace $\mathfrak{B}(y_q^\lambda)^\perp$, on en déduit, si cela n'a déjà été fait, les polarisations $\mathfrak{B}(y_q^\lambda)$.

5) Calcul des coefficients $\omega_{rs}^\lambda(q)$, puis des fonctions $C_r^\lambda(q)$; détermination des points $x_{q,p}^\lambda$ et des fonctions $p_r(x)$.

Nous reproduisons ici le tableau des principaux résultats ainsi obtenus pour les 2 algèbres de Lie suivantes :

— l'algèbre $\mathfrak{G}_{6,10}$ de dimension 6 définie par les crochets non nuls :

$$[e_6, e_5] = e_4, [e_6, e_4] = e_3, [e_6, e_3] = e_2, [e_5, e_2] = [e_4, e_3] = e_1.$$

Cette algèbre présente l'intérêt d'être l'une des plus simples pour lesquelles, dans le cas de la 1^{re} strate, la polarisation $\mathfrak{B}(x^\lambda)$ n'est ni invariante, ni indépendante de λ ;

— l'algèbre de dimension 7 définie par les crochets non nuls :

$$[e_7, e_4] = e_3, \ [e_6, e_5] = e_2, \ [e_6, e_4] = e_1.$$

Cet exemple illustre le fait que la suite I^* n'est pas déterminée par J. Notons que, pour la même algèbre, le changement de base :

$$\begin{aligned} e'_1 &= e_1, & e'_4 &= e_4, \\ e'_2 &= e_2, & e'_5 &= e_6, \\ e'_3 &= e_3, & e'_6 &= -e_5, \\ & & e'_7 &= e_7, \end{aligned}$$

permet d'obtenir une autre suite de Jordan-Hölder pour laquelle l'ensemble I n'est pas, lui non plus, déterminé par J.

Remarquons que dans les 2 exemples ici présentés, les calculs du 5) sont simplifiés, du fait qu'on obtient :

$$\omega_{rs}^\lambda(q) = \delta_{rs} \quad \text{pour} \quad r < s, \quad \text{d'où } C_r^\lambda(q) = 0.$$

Un contre-exemple à cette situation est fourni par le groupe d'Heisenberg de dimension 5, pour un choix convenable (et un peu inhabituel) de la base (e_i).

Notons enfin que, dans chacun des 2 tableaux, on retrouve facilement la polarisation $\mathfrak{B}(y_q^\lambda)$, comme orthogonal dans $\mathfrak{G}$ des vecteurs $\varepsilon_r^{*\lambda}(q)$.

Tableau 1. – Groupe $G_{6\ 10}$

$[e_6, e_5] = e_4 \quad [e_6, e_4] = e_3 \quad [e_6, e_3] = e_2 [e_5, e_2] = [e_4, e_3] = e_1$

$\mathfrak{O}^*_{I,I^*}$	$\xi_1 \neq 0$	$\xi_1 = 0 \quad \xi_2 \neq 0$	$\xi_1 = \xi_2 = 0$ $\xi_3 \neq 0$	$\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0$ $\xi_4 \neq 0$	$\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = 0$
I	$\{4,5\}$	$\{6\}$	$\{6\}$	$\{6\}$	$\emptyset$
I^*	$(3,2)$	(3)	(4)	(5)	$\emptyset$
$\Delta(x)$	$\Delta_1 = -\xi_1 \quad \Delta_3 = \xi_1^3$ $\Delta_2 = \xi_1^2 \quad \Delta_4 = \xi_1^4$	$\Delta_1 = -\xi_2$ $\Delta_2 = -\xi_2^2$	$\Delta_1 = -\xi_3$ $\Delta_2 = -\xi_3^2$	$\Delta_1 = -\xi_4$ $\Delta_2 = -\xi_4^2$	
$\lambda(x)$	$\lambda_1 = \xi_1$ $\lambda_2 = \xi_6 + \dfrac{\frac{1}{2}\xi_3^2 - \xi_2\xi_4}{\xi_1}$	$\lambda_1 = 0$ $\lambda_2 = \xi_2$ $\lambda_3 = \xi_4 - \frac{1}{2}\frac{\xi_3^2}{\xi_2}$ $\lambda_4 = \xi_5 - \frac{\xi_3\xi_4}{\xi_2} + \frac{1}{3}\frac{\xi_3^3}{\xi_2^2}$	$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ $\lambda_3 = \xi_3$ $\lambda_4 = \xi_5 - \frac{1}{2}\frac{\xi_4^2}{\xi_3}$	$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ $\lambda_4 = \xi_4$	$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$ $\lambda_5 = \xi_5$ $\lambda_6 = \xi_6$
$q(x)$	$q_1 = \xi_3 \quad q_2 = \xi_2$	$q = \xi_3$	$q = \xi_4$	$q = \xi_5$	
$p(x)$	$p_1 = -\frac{\xi_4}{\xi_1} \quad p_2 = -\frac{\xi_5}{\xi_1}$	$p = -\frac{\xi_6}{\xi_2}$	$p = -\frac{\xi_6}{\xi_3}$	$p = -\frac{\xi_6}{\xi_4}$	
x^λ_{qp}	λ_1 q_2 q_1 $-\lambda_1 p_1$ $-\lambda_1 p_2$ $\lambda_2 - \frac{1}{2}\frac{q_1^2}{\lambda_1} - p_1 q_2$	0 λ_2 q $\lambda_3 + \frac{1}{2}\frac{q^2}{\lambda_2}$ $\lambda_4 + \frac{\lambda_3}{\lambda_2}q + \frac{1}{6}\frac{q^3}{\lambda_2^2}$ $-\lambda_2 p$	0 0 λ_3 q $\lambda_4 + \frac{1}{2}\frac{q^2}{\lambda_3}$ $-\lambda_3 p$	0 0 0 λ_4 q $-\lambda_4 p$	0 0 0 0 λ_5 λ_6

Tableau 2. – Un groupe nilpotent de dimension 7

$[e_7, e_4] = e_3 \quad [e_6, e_5] = e_2 \quad [e_6, e_4] = e_1$

$\mathfrak{G}^*_{I,I^*}$	$\xi_1\xi_2\xi_3 \neq 0$	$\xi_1\xi_2\xi_3 = 0$ $\xi_2\xi_3 \neq 0$	$\xi_2\xi_3 = 0$ $\xi_1 \neq 0$	$\xi_1 = \xi_2\ \xi_3 = 0$ $\xi_2 \neq 0$	$\xi_1 = \xi_2 = 0$ $\xi_3 \neq 0$	$\xi_1 = \xi_2 = \xi_3$
I	$\{6,7\}$	$\{6,7\}$	$\{6\}$	$\{6\}$	$\{7\}$	$\emptyset$
I^*	$(4,5)$	$(5,4)$	(4)	(5)	(4)	$\emptyset$
$\Delta(x)$	$\Delta_1 = -\xi_1,\ \Delta_3 = -\xi_1\xi_2\xi_3$ $\Delta_2 = -\xi_2\xi_3,\ \Delta_4 = \xi_2^2\xi_3^2$	$\Delta_1 = -\xi_3,\ \Delta_3 = \xi_2\xi_3^2$ $\Delta_2 = \xi_2\xi_3,\ \Delta_4 = \xi_2^2\xi_3^2$	$\Delta_1 = -\xi_1$ $\Delta_2 = -\xi_1^2$	$\Delta_1 = -\xi_2$ $\Delta_2 = -\xi_2^2$	$\Delta_1 = -\xi_3$ $\Delta_2 = -\xi_3^2$	
$\lambda(x)$	$\lambda_1 = \xi_1$ $\lambda_2 = \xi_2$ $\lambda_3 = \xi_3$	$\lambda_1 = 0$ $\lambda_2 = \xi_2$ $\lambda_3 = \xi_3$	$\lambda_1 = \xi_1$ $\lambda_2 = \xi_2$ $\lambda_3 = \xi_3$ $\lambda_4 = \xi_5$ $\lambda_5 = \xi_7$	$\lambda_1 = \lambda_3 = 0$ $\lambda_2 = \xi_2$ $\lambda_4 = \xi_4$ $\lambda_5 = \xi_7$	$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ $\lambda_3 = \xi_3$ $\lambda_4 = \xi_5$ $\lambda_5 = \xi_6$	$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ $\lambda_4 = \xi_4$ $\lambda_5 = \xi_5$ $\lambda_6 = \xi_6$ $\lambda_7 = \xi_7$
$q(x)$	$q_1 = \xi_5 - \dfrac{\xi_2\xi_4}{\xi_1}$ $q_2 = \xi_4$	$q_1 = \xi_5$ $q_2 = \xi_4$	$q = \xi_4$	$q = \xi_5$	$q = \xi_4$	
$p(x)$	$p_1 = \dfrac{\xi_1\xi_7 - \xi_3\xi_6}{\xi_2\xi_3}$ $p_2 = -\dfrac{\xi_6}{\xi_1}$	$p_1 = -\dfrac{\xi_6}{\xi_2}$ $p_2 = -\dfrac{\xi_7}{\xi_3}$	$p = -\dfrac{\xi_6}{\xi_1}$	$p = -\dfrac{\xi_6}{\xi_2}$	$p = -\dfrac{\xi_7}{\xi_3}$	
x^λ_{qp}	λ_1 λ_2 λ_3 q_2 $q_1 + \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}q_2$ $-\lambda_1 p_2$ $\dfrac{\lambda_2\lambda_3}{\lambda_1}p_1 - \lambda_3 p_2$	0 λ_2 λ_3 q_2 q_1 $-\lambda_2 p_1$ $-\lambda_3 p_2$	λ_1 λ_2 λ_3 q λ_4 $-\lambda_1 p$ λ_5	0 λ_2 0 λ_4 q $-\lambda_2 p$ λ_5	0 0 λ_3 q λ_4 λ_5 $-\lambda_3 p$	0 0 0 λ_4 λ_5 λ_6 λ_7

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. ARNAL, * Products and representations of nilpotent groups, Pacific Journ. of Math., 114, n° 2 (1984), 285-308.

[2] D. ARNAL, J.C. CORTET, * Products in the method of orbits for nilpotent Lie groups, Journ. of Geom. and Physics, 2, n° 2 (1985).

[3] P. BONNET, Analyse de Fourier explicite sur certains groupes de Lie nilpotents, Publications du Dép. de Math. de Lyon. Actes du Colloque Jean Braconnier 1/B-1987, 117-146.

[4] G. GODFREY, Table of coadjoint orbits for nilpotent Lie algebras, Université de Massachussets, Boston, preprint.

[5] A.A. KIRILOV, Représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents, Uspekhi Mat. Nauk., 17 (1962), 57-110.

[6] A.A. KIRILOV, Eléments de la théorie des représentations, Ed. Mir, Moscou (1974).

[7] NGHIEM-XUAN-HAI, La transformée de Fourier-Plancherel analytique des groupes de Lie, I. Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 33-4 (1983), 95-133.

[8] NGHIEM-XUAN-HAI, La transformée de Fourier-Plancherel analytique des groupes de Lie, II. Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 34-1 (1984), 1-37.

[9] NGHIEM-XUAN-HAI, Transformation Fourier intégrale et résolubilité locale, Preprint, Université d'Orsay.

[10] O.A. NIELSEN, Unitary representations and coadjoints orbits of low-dimensional nilpotent Lie groups, Queen's papers on pure and applied math., n° 63 Queen's University, Kingston, Ontario.

[11] L. PUKANSKY, Unitary representations of solvable Lie groups, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. Paris, 4 (1971), 457-608.

[12] L. PUKANSKY, Leçons sur les représentations des groupes, Dunod, Paris (1967).

[13] M. RAIS, Représentations des groupes de Lie nilpotents et méthode des orbites, Analyse harmonique, Les cours du C.I.M.P.A. (1982), 447-710.

[14] M. VERGNE, Représentations des groupes de Lie résolubles, chapitre 4, Polarisations (ouvrage collectif), Monographies de la Soc. Math. de France, Dunod, Paris (1972).

[15] M. VERGNE, La structure de Poisson sur l'algèbre symétrique d'une algèbre de Lie nilpotente, Bull. Soc. Math. France, 100 (1972), 301-335.

Manuscrit reçu le 5 décembre 1986,
révisé le 7 juillet 1987.

Pierre BONNET,
Université Claude Bernard, Lyon I
Institut de Mathématiques
U.A. C.N.R.S. n° 04 0746
43, bd du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne Cedex (France).