JEAN-PIERRE LAFON

Anneau des endomorphismes d'un module de type fini sur un anneau local

Annales de l'institut Fourier, tome 11 (1961), p. 313-384
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1961__11__313_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
11 (1961), 313-384.

ANNEAU DES ENDOMORPHISMES D'UN MODULE DE TYPE FINI SUR UN ANNEAU LOCAL

par **Jean-Pierre LAFON** (Clermont-Ferrand).

INTRODUCTION

Ce travail est consacré à l'étude de l'anneau $\mathfrak{L}(E)$ des A-endomorphismes d'un module de type fini E sur un anneau local A d'idéal maximal m et de corps des restes k. Toutefois, certains des résultats obtenus sont valables dans le cas plus général où A est un anneau commutatif à élément unité et, d'autre part, quand seule intervient la structure de A-module de $\mathfrak{L}(E)$, il n'est souvent pas plus difficile d'étudier le A-module $\mathrm{Hom}_A(E,F)$ où E et F sont deux A-modules de type fini.

Nous rappelons dans un chapitre préliminaire quelques définitions et résultats classiques.

Le chapitre 1 traite de propriétés générales de l'anneau $\mathfrak{L}(E)$: représentation matricielle, comparaison de topologies naturelles. Nous montrons que le radical de Jacobson r de l'anneau $\mathfrak{L}(E)$ contient l'idéal bilatère $\mathrm{Hom}_A(E, mE)$. Enfin, l'utilisation d'un théorème d'Azumaya nous donne une condition nécessaire pour que r soit égal à $m\mathfrak{L}(E)$ dans le cas où A est hensélien.

Nous exposons dans le chapitre 2 une technique utilisée très souvent dans tout ce travail. A tout sous-module caractéristique C est associée une suite exacte :

$$O \to \mathrm{Hom}_A(E, C) \to \mathfrak{L}(E) \to \mathfrak{L}(E/C)$$

et l'image de $\mathfrak{L}(E)$ dans $\mathfrak{L}(E/C)$, c'est-à-dire $\mathfrak{L}(E)/\mathrm{Hom}_A(E, C)$, est une approximation de $\mathfrak{L}(E)$ par un sous-anneau de $\mathfrak{L}(E/C)$.

Le cas où $C = mE$ est intéressant par sa simplicité et conduit déjà à des résultats; l'anneau $\mathfrak{L}(E)/\mathrm{Hom}_A(E, mE)$ est alors une sous-algèbre de l'algèbre $\mathfrak{L}(E/mE)$ sur k et nous obtenons même ainsi une représentation fidèle de cette algèbre. La réciproque est, évidemment, intéressante pour la construction d'exemples et de contre-exemples : toute représentation fidèle d'une algèbre à élément unité de dimension finie sur un corps k peut être obtenue par le procédé ci-dessus à partir d'un anneau local A de corps des restes k et d'un A-module de type fini E convenablement choisis. La technique utilisée conduit naturellement à la conjecture suivante : tout anneau qui est un module de type fini sur son centre est le quotient d'un anneau $\mathfrak{L}(E)$ où E est un module de type fini sur un anneau convenable. Nous vérifions la validité de cette conjecture dans quelques cas particuliers.

Si E et F sont deux A-modules de type fini, l'étude de la surjectivité de l'application naturelle de $\mathrm{Hom}_A(E, F)$ dans $\mathrm{Hom}_k(E/mE, F/mF)$ conduit à des critères simples de liberté pour E.

Nous caractérisons les algèbres à élément unité de dimension finie sur un corps k qui peuvent être obtenues par le procédé précédent à partir d'un module somme directe de modules monogènes.

Nous montrons, enfin, que l'homomorphisme naturel de $\mathfrak{L}(E)$ dans $\mathfrak{L}(E/m^iE)$ n'est pas en général surjectif pour i grand mais qu'il en est ainsi si A est un anneau de valuation discrète.

Le chapitre 3 contient une ébauche de théorie des idéaux de l'anneau $\mathfrak{L}(E)$. En fait, notre étude se limite à l'étude des idéaux maximaux bilatères, à droite et à gauche. Par exemple, les idéaux bilatères maximaux sont de deux types : si I est un tel idéal, il peut effectivement se produire que $\Sigma_{u\in I}u(E)$ soit E tout entier. S'il n'en est pas ainsi, I est de la forme $\mathrm{Hom}_A(E, C)$ où C est un sous module caractéristique qui peut être choisi maximal. Réciproquement, si C est un sous-module caractéristique maximal, l'idéal $\mathrm{Hom}_A(E, C)$ est bilatère maximal. Pour un idéal à droite maximal, on a une situation analogue : il suffit de remplacer sous module caractéristique par sous-module. Il n'est pas vrai, toutefois, que si R est un sous module maximal, $\mathrm{Hom}_A(E, R)$ est un idéal à droite maximal.

Le chapitre 4 contient une étude du dual $E^* = \mathrm{Hom}_A(E, A)$ du A-module E. Une partie est destinée à expliciter des lemmes utiles pour le chapitre suivant. Nous cherchons ensuite des conditions pour que l'anneau $\mathfrak{L}(E^*)$ soit anti-isomorphe à l'anneau $\mathfrak{L}(E)$. Nous étudions enfin la forme bilinéaire induite sur $(E^*/mE^*) \times (E/mE)$ par la forme bilinéaire canonique sur $E^* \times E$.

Nous cherchons dans le chapitre 5 à caractériser les modules de type fini E sur un anneau commutatif A tels que l'anneau $\mathfrak{L}(E)$ soit commutatif. Il en est ainsi si E est isomorphe à un idéal a de A contenant au moins un élément régulier. Par passage au contre-module, nous nous ramenons à la recherche des A-modules E tels que $\mathfrak{L}(E) = A$. Si l'anneau A est intègre ou plus généralement somme directe d'un nombre fini d'anneaux intègres, cette condition implique que le module E est isomorphe à un idéal de A. Des contre-exemples montrent qu'il n'en est plus ainsi dans le cas général. Ce problème conduit assez naturellement à la recherche de structures de A-algèbres sur un A-module de type fini E : un élément du dual conduit à une telle structure et l'algèbre obtenue est associative.

Le chapitre 6 est réservé à l'étude d'un endomorphisme particulier sous les hypothèses successives A local hensélien, puis A local factoriel hensélien. Nous généralisons des propositions bien connues pour les endomorphismes d'espaces vectoriels de dimension finie, notamment en ce qui concerne la diagonalisation éventuelle de tels endomorphismes.

Je suis heureux de pouvoir témoigner ma reconnaissance à M. Samuel, M. Dubreil, M. le Doyen Pérès et M. Chevalley pour l'intérêt qu'ils ont bien voulu porter à ce travail.

PRÉLIMINAIRES

1. — Anneaux.

Un anneau local A est un anneau commutatif à élément unité tel que l'ensemble des éléments non inversibles de A soit un groupe additif qui est alors le plus grand idéal de A, idéal que nous noterons m. Nous désignerons parfois par k le corps des restes A/m. Nous ne supposerons pas nécessairement qu'un anneau local est noethérien mais il en sera ainsi le plus souvent. En ce cas, $\hat{A}$ sera le complété de A.

L'analogue non commutatif sera appelé complètement primaire : c'est un anneau C tel que l'ensemble des éléments non inversibles à droite soit un idéal à droite. Nous renvoyons à (8) où de tels anneaux sont appelés locaux pour la démonstration du fait que cet idéal I, bilatère puisqu'il est le radical de Jacobson de C est aussi l'ensemble des éléments non inversibles à gauche. L'anneau quotient C/I est un corps non nécessairement commutatif.

Un anneau local A sera dit hensélien si : pour tout polynôme unitaire $f(X)$ de $A[X]$ et toute décomposition $\bar{f}(X) = \bar{g}(X)\bar{h}(X)$ du polynome $\bar{f}(X)$ obtenu en réduisant modulo m les coefficients de $f(X)$ en produit de deux polynômes unitaires étrangers $\bar{g}$ et $\bar{h}$ de $k[X]$, il existe deux représentants $g(X)$ et $h(X)$ de $\bar{g}(X)$ et $\bar{h}(X)$ respectivement tels que $f(X) = g(X)h(X)$. Nous utiliserons pour l'étude d'un endomorphisme particulier les caractérisations données par Azumaya [1] et plus particulièrement le théorème suivant :

THÉORÈME A. — *Soient* A *un anneau local hensélien*, R *une* A-*algèbre* A-*module de type fini et* I *un idéal bilatère de* R.

Pour tout système $\bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_n$ d'idempotents deux à deux orthogonaux de R/I, *il existe dans* R *un système $p_1, \ldots, p_n$ d'idempotents deux à deux orthogonaux tels que p_i soit un représentant de $\bar{p}_i$ pour $i = 1, \ldots, n$.*

Nous ne redonnerons pas ici la démonstration de ce théorème. Rappelons qu'un anneau local complet est hensélien (Cohen). Dans ce cas important, le lemme bilinéaire de Samuel [18] permet de simplifier sensiblement la démonstration du théorème A, théorème qui généralise des résultats classiques pour les algèbres de dimension finie sur un corps k.

2. — Modules.

Les modules seront toujours supposés *unitaires*. Un A-module E est dit de type fini s'il existe un système fini $e_1, \ldots, e_n$ de générateurs de E sur A.

Si A est local d'idéal maximal m, le A-module E/mE est, en fait, muni d'une structure de k-espace vectoriel et c'est cette structure que nous considérerons. Si E est de type fini il résulte du lemme de Nakayama qu'une condition nécessaire et suffisante pour que $e_1, \ldots, e_n$ engendrent E sur A est que les classes $\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n$ modulo mE engendrent le k-espace vectoriel E/mE. Si $\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n$ constituent une base de E/mE sur k, nous dirons que le système $e_1, \ldots, e_n$ est un système *minimal* de générateurs de E sur A. Il en résulte immédiatement que deux systèmes minimaux de générateurs ont le même nombre d'éléments et que, si $e_1, \ldots, e_n$ est un système minimal, aucun e_i ne peut s'exprimer comme combinaison linéaire des e_j avec $j \neq i$.

Nous utiliserons souvent le A-module libre L engendré par un système minimal donné. Nous appellerons parfois *premier terme d'une résolution minimale pour* E la suite exacte

$$O \to R \to L \to E \to O$$

où R est le sous-module des relations.

Ce sous module est contenu dans mL et le k-espace vectoriel L/mL est isomorphe au k-espace vectoriel E/mE.

Nous noterons $\mathfrak{L}(E)$ l'anneau des A-endomorphismes du A-module E. Un sous-module C de E est dit complètement caractéristique si $u(C) \subset C$ pour tout endomorphisme u de E. Pour simplifier nous dirons qu'un tel sous-module est *caractéristique*; ce terme est en général réservé pour désigner un sous module C tel que $u(C) \subset C$ pour tout automorphisme u de E mais comme cette notion ne sera pas utilisée dans ce travail, notre convention ne saurait créer de confusions.

Si A est un anneau local noethérien de complétion $\hat{A}$ et si E est un A-module de type fini, rappelons que le complété $\hat{E}$ de E dans la topologie m-adique s'identifie canoniquement à $\hat{A} \otimes_A E$: il a une structure de $\hat{A}$-module de type fini. Il résulte des propriétés décrites dans le paragraphe suivant que si F est un sous module $\widehat{E/F} = \hat{E}/\hat{F}$ et, en particulier, $\hat{E}/\hat{m}\hat{E}$ s'identifie à E/mE. Un système minimal de générateurs de E sur A est aussi un système minimal de générateurs de $\hat{E}$ sur $\hat{A}$.

3. — Propriétés de platitude.

Rappelons que, si A est un anneau et si B est un A-module, B est dit A-plat si le foncteur $T(M) = B \otimes_A M$ est exact.

Le théorème qui suit sera pour nous d'un grand intérêt :

Théorème 19. — *Soit* A *un anneau noethérien et soit* B *un anneau* A-*plat. Si* M *et* N *sont deux* A-*modules*, N *étant de type fini, on a un isomorphisme canonique :*

$$B \otimes_A \mathrm{Hom}_A(M, N) \simeq \mathrm{Hom}_B(M \otimes_A B, N \otimes_A B).$$

Deux exemples importants sont fournis par la complétion et la localisation. Si A est local noethérien de complétion $\hat{A}$ et si E et F sont deux A-modules de type fini, $\widehat{\mathrm{Hom}_A(E, F)}$ s'identifie canoniquement à $\mathrm{Hom}_{\hat{A}}(\hat{E}, \hat{F})$. Il en résulte que, dans un certain nombre de questions, on peut se ramener au cas où l'anneau A est complet mais cette simplification apparente est souvent illusoire.

Si S est une partie multiplicative de A, c'est-à-dire une partie de A telle que $S.S \subset S$, $1 \in S$ et $0 \notin S$, on peut former l'anneau généralisé des quotients par rapport à S. Rappelons que si n est l'ensemble des a de A tels qu'il existe s de S avec $sa = 0$, n est un idéal de A distinct de A. Si ε est l'homomorphisme canonique de A sur A/n, dans l'anneau total des fractions de A/n, les éléments $\varepsilon(a)\varepsilon(s)^{-1}$ avec $a \in A$ et $s \in S$ forment un sous-anneau A_S. Nous noterons comme dans (7) a/s l'élément $\varepsilon(a)\varepsilon(s)^{-1}$. On vérifie sur ces éléments les règles habituelles du calcul des fractions. De plus, $a/s = 0$ signifie qu'il existe s' dans S tel que $s'a = 0$.

Si M est un A-module, désignons par M_S le A_S-module $A_S \underset{A}{\otimes} M$ et posons $m/s = \varepsilon(s)^{-1} \otimes m$ si $s \in S$ et $m \in M$. On vérifie les formules usuelles et que tout élément de M_S est de la forme m/s (7). Nous utiliserons, enfin, le lemme suivant dont la démonstration se trouve dans (7) :

LEMME. — *Soient* M *un* A-*module et* S *une partie multiplicative de* A. *Pour que* $m/s = 0$ *avec* $m \in M$ *et* $s \in S$, *il faut et il suffit qu'il existe* $s' \in S$ *tel que* $s'm = 0$.

La démonstration de la platitude de A_S se trouve dans (7) par exemple.

CHAPITRE PREMIER

GÉNÉRALITÉS SUR $\mathfrak{L}(E)$

I. Représentation matricielle de $\mathfrak{L}(E)$.

Si, en principe, nous essayons d'obtenir des démonstrations intrinsèques, la représentation matricielle de $\mathfrak{L}(E)$ nous sera utile dans certaines questions et au moins pour les exemples.

On connait bien l'anneau d'endomorphismes d'un module libre L de type fini sur un anneau commutatif A : c'est, en effet, un anneau total de matrices $M_n(A)$ sur l'anneau A. L'étude d'un anneau $\mathfrak{L}(E)$ pour un A-module E non libre est bien plus compliquée car, pour qu'une matrice agisse sur un système de générateurs comme un endomorphisme il faut qu'elle respecte les relations. De façon plus précise.

Proposition 1. — *Soient* A *un anneau commutatif et* E *un* A-*module. Si* $E = L/R$ *où* L *est un* A-*module libre,* $\mathfrak{L}(E)$ *est le quotient* $M(L, R)/\mathrm{Hom}_A(L, R)$ *où* $M(L, R)$ *est l'anneau des endomorphismes* u^* *de* L *tels que* $u^*(R) \subset R$.

Cette démonstration est très classique et le résultat ne serait pas changé si on supposait seulement L projectif mais cette distinction est pour nous sans intérêt. Considérons le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & R & \longrightarrow & L & \xrightarrow{p} & E & \longrightarrow & 0 \\ & & & & & & \downarrow{\scriptstyle u} & & \\ 0 & \longrightarrow & R & \longrightarrow & L & \xrightarrow[p]{} & E & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

up est un homomorphisme de L dans E; la projectivité de L implique, alors, l'existence d'un u^* : $L \to L$ tel que le rectangle

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "p"] \arrow[d, "u^*"'] & E \arrow[d, "u"] \\ L \arrow[r, "p"] & E \end{tikzcd}$$

soit commutatif. Désignons par v la restriction de u^* à R; le fait que $pu^* = up$ nous donne $pv(R) = up(R) = 0$; donc, $v(R)$ est contenu dans le noyau de p qui est R et u^* satisfait bien à $u^*(R) \subset R$.

Réciproquement, si u^* : $L \to L$ est tel que $u^*(R) \subset R$, u^* induit un homomorphisme u : $L/R = E \to E$.

Nous avons, donc, une application surjective de M(L, R) sur $\mathfrak{L}(E)$ et le noyau en est, évidemment, $\mathrm{Hom}_A(L, R)$.

COROLLAIRE. — *Soient* A *un anneau noethérien,* E *un* A-*module engendré par n éléments. Les matrices que nous allons considérer seront toutes à coefficients dans* A. *Il existe une matrice* P *à n lignes et p colonnes telle que si* $\tilde{M}$ *est l'anneau des matrices carrées* M *d'ordre n satisfaisant à l'équation matricielle* $MP = PM'$ *et si* $\tilde{O}$ *est l'idéal de* M *formé des matrices de la forme* PB' *avec* B' *matrice à p lignes et colonnes, l'anneau* $\mathfrak{L}(E)$ *soit isomorphe à l'anneau quotient* $\tilde{M}/\tilde{O}$.

Ceci est la simple traduction matricielle de la proposition 1. Les hypothèses faites sur A et E permettent de prendre L et R de type fini. Faisons choix d'une base $x_1, \ldots, x_n$ pour L et d'un système (fini) de générateurs $(y_1, \ldots, y_p)$ pour le sous-module des relations R. Alors, $\tilde{M}$ est isomorphe à M(L, R) : on traduit la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "i"] \arrow[d, "v"'] & L \arrow[d, "u^*"] \\ R \arrow[r, "i"] & L \end{tikzcd}$$

oú i est l'injection de R dans L; la matrice P est la matrice (a_{ji}) si $y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} x_i$ $(j = 1, \ldots, p)$. Quant à $\tilde{O}$, il est isomorphe à $\mathrm{Hom}_A(L, R)$, la traduction matricielle résultant du fait que si u^* : $L \to L$ est tel que $u^*(L) \subset R$, il peut, en fait, s'écrire iu^* et réciproquement.

Si $u \in \mathfrak{L}(E)$ et si $e_1, \ldots, e_n$ est un système de générateurs de

E supposé de type fini sur A, nous appellerons *matrice de représentation* de u par rapport au système de générateurs ci-dessus une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans A, (a_{ji}) telle que $u(e_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}e_j$.

Il résulte immédiatement de ce qui précède :

COROLLAIRE. — *Si* A *est noethérien,* $\mathfrak{L}(E)$ *est de type fini.*

Remarque très importante. — Si A est local d'idéal maximal m, on peut choisir pour E un système *minimal* de générateurs $e_1, \ldots, e_n$ et prendre pour L le A-module libre de base $x_1, \ldots, x_n$. Dans ces conditions $i(R) \subset mL$ car, sinon, on aurait une relation $a_1e_1 + \cdots + a_ne_n = 0$ avec, au moins, un coefficient, soit a_1 par exemple, non dans m, c'est-à-dire inversible; on pourrait alors, obtenir e_1 comme combinaison linéaire de $e_2, \ldots, e_n$, contrairement à l'hypothèse de minimalité faite sur les e_i.

Bien entendu, nous aurions pu énoncer des résultats analogues à la proposition 1 pour Hom_A (E, F). Nous n'aurons pas ici à utiliser de tels résultats.

2. Une filtration sur $\mathfrak{L}(E)$.

Les sous-modules $\mathrm{Hom}_A(E, m^iE)$ $(i = 1, \ldots)$ définissent une filtration décroissante de $\mathfrak{L}(E)$. Montrons, d'abord, que $\mathrm{Hom}_A(E, mE)$ est contenu dans le radical de Jacobson r de L(E). Nous nous appuierons sur le :

LEMME. — *Soient* A *un anneau, noethérien,* L *un* A-*module de type fini,* R *un sous-module et* u *un automorphisme de* L *tel que* $u(R) \subset R$. *Alors,* $u^{-1}(R) \subset R$ *et, par suite,* u *induit un automorphisme sur* R *et* L/R.

Nous supposons, en effet, $u(R) \subset R$, soit $R = u^{-1}u(R) \subset u^{-1}(R)$. Nous obtenons une chaîne croissante $R \subset u^{-1}(R) \subset \cdots \subset u^{-p}(R) \subset \cdots$ qui doit être stationnaire. Il existe donc un entier p, tel que $u^{-p}(R) = u^{-p-1}(R)$ et on en déduit $R = u(R)$; la restriction de u à R est, donc, surjective; elle est injective comme u et c'est donc un automorphisme de R. Si $\bar{u}$ est induit par u sur L/R, $\bar{u}$ est, évidemment surjective. Elle est injective car $\bar{u}(\bar{x}) = 0$ implique $u(x) \in R$, donc, $x \in R$ et $\bar{x} = 0$.

Voici une démonstration différente où A n'est plus supposé noethérien mais où L est supposé libre. Elle est moins agréable mais assez utile.

LEMME *bis.* — *Soit* A *un anneau commutatif et soit* R *un sous-module du* A*-module libre de type fini* L. *Si* u *est un automorphisme de* L *tel que* $u(\mathrm{R}) \subset \mathrm{R}$, *alors* $u^{-1}(\mathrm{R}) \subset \mathrm{R}$ *et* u *induit un automorphisme sur* R *et* L/R.

Soit, en effet, $x_1, \ldots, x_n$ une base de L sur A et soit (a_{ji}) la matrice de u par rapport à cette base. Désignons par $\chi_u(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^n + a_1\mathrm{X}^{n-1} + \cdots + a_n$ le polynôme caractéristique de (a_{ji}). Il résulte du théorème d'Hamilton Cayley que $\chi_u(u) = 0$ et, d'autre part, puisque u est un automorphisme de L, $a_n = \det(a_{ji})$ est inversible dans A. On écrira, alors, $u^{-1} = -(a_n)^{-1}(u^{n-1} + a_1u^{n-2} + \cdots + a_{n-1})$, formule qui montre que u^{-1} est un polynôme en u à coefficients dans A. Il est, donc, tel que $u^{-1}(\mathrm{R}) \subset \mathrm{R}$. D'où le résultat.

Revenons au cas où A est local et soit $\mathrm{E} = \mathrm{L}/\mathrm{R}$ où L est le A-module libre engendré par un système minimal de générateurs de E. Le lemme nous montre que si $u : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ est induit par un automorphisme u^* de L, c'est un automorphisme de E. Réciproquement, si u est un automorphisme de E, il existe $u^{-1} : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ tel que $uu^{-1} = 1$. Si u^{-1} est induit par w^* de $\mathfrak{L}(\mathrm{L})$, $u^*w^*(x_i) = x_i + z_i$ où $z_i \in \mathrm{R}$ et donc est dans $m\mathrm{L}$, (x_i) désignant une base de E. Alors, u^*w^* est inversible dans $\mathfrak{L}(\mathrm{L})$ car le déterminant de sa matrice par rapport à la base considérée est congru à 1 modulo m; u^* est, donc, un automorphisme de L.

PROPOSITION 2. — *Soit* A *local et soit* $0 \to \mathrm{R} \to \mathrm{L} \to \mathrm{E} \to 0$ *le premier terme d'une résolution minimale de* E. *Tout automorphisme de* E *est induit par un automorphisme de* L *et, réciproquement, tout automorphisme* u^* *de* L *tel que* $u^*(\mathrm{R}) \subset \mathrm{R}$ *induit un automorphisme de* E.

On en déduit.

COROLLAIRE. — *Soient* A *un anneau local et* E *un* A*-module de type fini. Une condition nécessaire et suffisante pour que l'élément* u *de* $\mathfrak{L}(\mathrm{E})$ *soit un automorphisme de* E *est que, par rapport à un système minimal de générateurs,* u *possède une matrice de représentation inversible. Il en est, alors, de même de toute matrice de représentation par rapport à ce système.*

Il est immédiat que $m^i\mathfrak{L}(E) \subset \mathrm{Hom}_A(E, m^iE)$ car, une condition nécessaire et suffisante pour que $u \in \mathrm{Hom}_A(E, m^iE)$ est que u admette une matrice de représentation (au moins une) à coefficients dans m^i et ceci est, évidemment, le cas si $u \in m^i\mathfrak{L}(E)$. D'autre part, le corollaire ci-dessus nous montre que si $u \in 1 + \mathrm{Hom}_A(E, mE)$, u est inversible. Une caractérisation classique du radical de Jacobson r comme plus grand idéal à gauche (ou à droite) tel que tout élément de $1 + r$ soit inversible montre :

Corollaire. — *On a les inclusions* $m^i\mathfrak{L}(E) \subset \mathrm{Hom}_A(E, m^iE) \subset r$ *pour* $i = 1, \ldots$

On n'a pas forcément $\mathrm{Hom}_A(E, m^i) = m^i\mathfrak{L}(E)$ comme le montre l'exemple suivant : $A = k[[X_1, X_2]]$ et $E = Ae_1 + Ae_2$ avec les relations $X_1e_1 = 0$ et $X_2^2e_2 = 0$. On vérifie, sans difficulté, que $\mathfrak{L}(E)/m\mathfrak{L}(E)$ est isomorphe à l'algèbre des matrices à coefficients dans k de la forme $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & b \end{vmatrix}$, tandis que $\mathfrak{L}(E)/\mathrm{Hom}_A(E, mE)$ est isomorphe à la sous-algèbre obtenue pour $c = 0$.

Nous verrons de nombreux exemples montrant que, en général, $\mathrm{Hom}_A(E, mE)$ est différent de r.

3. Comparaisons de trois topologies.

On peut considérer sur $\mathfrak{L}(E)$ trois topologies naturelles : a) la topologie m-adique; b) la topologie définie par les puissances du radical de Jacobson r; c) la topologie définie par les $\mathrm{Hom}_A(E, m^iE)$.

Si A est noethérien, ces trois topologies sont séparées : c'est clair pour la m-adique et pour celle définie par les $\mathrm{Hom}_A(E, m^iE)$. Dans le cas général, le radical de Jacobson de $\mathfrak{L}(E)/m\mathfrak{L}(E)$ est $r/mL(E)$. Comme $\mathfrak{L}(E)/m\mathfrak{L}(E)$ a une structure de k-algèbre de dimension finie, donc d'anneau artinien, ce radical est nilpotent et il existe un entier p tel que $[r^p + m\mathfrak{L}(E)]/m\mathfrak{L}(E) = 0$ d'où $r^p \subset m\mathfrak{L}(E) \subset r$. La topologie r-adique coïncide, donc, avec la m-adique.

Proposition 3. — *Si* A *est noethérien, il existe un entier* p *tel que pour* $n \geqslant p$, $m^n \operatorname{Hom}_A(E, m^q F) = \operatorname{Hom}_A(E, m^{n+q} F)$ *si* E *et* F *sont deux* A-*modules de type fini.*

On écrit $E = L/R$ où L est libre de type fini; alors, $\operatorname{Hom}_A(E, F)$ est contenu dans $\operatorname{Hom}_A(L, F)$ et $\operatorname{Hom}_A(E, m^n F)$ est contenu dans $\operatorname{Hom}_A(L, m^n F)$. De plus, $\operatorname{Hom}_A(L, m^n F) = m^n \operatorname{Hom}_A(L, F)$ et $\operatorname{Hom}_A(E, m^n F) = \operatorname{Hom}_A(E, F) \cap \operatorname{Hom}_A(L, m^n F)$. On applique alors, le lemme d'Artin-Rees au module $\operatorname{Hom}_A(L, F)$ et au sous-module $\operatorname{Hom}_A(E, F)$. D'où le résultat. Ceci montre, évidemment, que la topologie définie sur $\operatorname{Hom}_A(E, F)$ par les $\operatorname{Hom}_A(E, m^n F)$ coïncide avec la topologie m-adique car, $\operatorname{Hom}_A(E, m^q F)$ est contenu dans $\operatorname{Hom}_A(E, F)$ et on en déduit que $m^n \operatorname{Hom}_A(E, F)$ contient $\operatorname{Hom}_A(E, m^{n'} F)$ pour n' grand.

4. Rappels et interprétation de résultats d'Azumaya.

Dans tout ce paragraphe, nous supposerons l'anneau A local hensélien. Ce sera le cas d'un anneau local noethérien complet mais, aussi, par exemple, de l'anneau $C\{\{X_1, \ldots, X_n\}\}$ des séries convergentes en $X_1, \ldots, X_n$, à coefficients complexes. Le mot « algèbre » aura le sens que lui donne Azumaya : en tant que module, c'est un module de type fini.

Proposition 4 *(Azumaya).* — *Si* A *est hensélien et si* R *est une algèbre sur* A, *alors* $R = M_{m_1}(C_1) \oplus \cdots \oplus M_{m_p}(C_p) \oplus N$ *où chacun des* C_i *est complètement primaire et où* N *est un sous-groupe du radical de Jacobson* r.

Nous ne démontrerons pas, en détail, cette proposition (1) : la technique est de relever les idempotents, puis les bases canoniques de sous-algèbres de matrices de R/r en idempotents et bases canoniques d'algèbres de matrices de R. Le relèvement ne peut se faire en idempotents centraux en général, ce qui introduit le sous-groupe N de r, sur lequel nous n'avons, d'ailleurs, que peu de contrôle. Nous voyons qu'il y a équivalence entre :

1) *On peut relever les idempotents correspondant aux parties simples de* R/r *en des idempotents centraux de* E.

et

2) R *est une somme directe d'algèbres complètes de matrices sur des anneaux complétement primaires.*

En effet, si $R = e_1Re_1 \oplus \cdots \oplus e_nRe_n$ où les e_i sont des idempotents correspondant aux parties simples de R/r, l'élément x de R s'écrit $x = e_1xe_1 + \cdots + e_nxe_n$ et il en résulte que $xe_i = e_ix$ Si, réciproquement, les e_i sont centraux, on peut écrire

$$x = e_1x + \cdots + e_nx_n, \quad \text{puis} \quad x = e_1xe_1 + \cdots + e_nxe_n.$$

Les conditions ci-dessus seront réalisées dans les deux cas suivants :

3) R *est commutative.*

4) $r = m\mathrm{R}$ *(non ramification).*

On peut, en effet, écrire alors $R = (e_1Re_1 + \cdots + e_nRe_n) \oplus mR$ et il suffit d'appliquer le lemme de Nakayama.

Interprétons dans notre cas particulier la condition 1 :

E est un A-module de type fini et nous prenons $R = \mathfrak{L}(E)$, ce qui est licite si A est noethérien. Notons, alors, p_i un idempotent pour éviter une confusion possible. Quel que soit $u \in \mathfrak{L}(E)$, $up_i = p_iu$ implique $u(E_i) = p_i(u(E)) \subset E_i$ si $E_i = p_i(E)$. Ce sous-module E_i est, donc, caractéristique et E est somme directe des E_i. On a, de plus, $\mathfrak{L}(E_i) = M_{n_i}(C_i)$ où C_i est complètement primaire, car $\mathfrak{L}(E) = \mathrm{Hom}_A(E_1, E) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Hom}_A(E_n, E)$ et, puisque E_i est caractéristique, $\mathrm{Hom}_A(E_i, E) = \mathfrak{L}(E_i)$. Or, $\mathrm{Hom}_A(E_i, E) = p_i\mathfrak{L}(E) = M_{n_i}(C_i)$.

Réciproquement, soit $E = \oplus E_i$ où les E_i sont caractéristiques et tels que $\mathfrak{L}(E_i) = M_{n_i}(C_i)$. Si p_i est le projecteur associé à E_i, E_i caractéristique implique : $up_i(E) \subset p_i(E)$ pour tout u de L(E), soit $(1 - p_i)up_i(E) = 0$ et $up_i = p_iup_i$. Mais, on a de même $u(\sum_{j\neq i}p_j) = \sum_{j\neq i}(p_jup_j)$, soit $p_iu(\sum_{j\neq i}p_j) = 0$, Il en résulte que $p_iu = up_i$. Nous avons, donc, montré :

Corollaire. — *Soit* A *un anneau local noethérien hensélien et soit* E *un* A*-module de type fini. Une condition nécessaire pour que* $r = m\mathfrak{L}(E)$ *est que* E *soit somme directe de sous-modules caractéristiques* E_i *tels que* $\mathfrak{L}(E_i)$ *soit égal à* $M_{n_i}(C_i)$ *où* C_i *est complètement primaire. Une condition suffisante est que les* C_i *soient non ramifiés, c'est-à-dire d'idéal maximal* mC_i.

Voici un exemple simple : $A = k[[X_1, X_2]]$ et $E = k[[X_1]] \oplus k[[X_2]]$ d'où $\mathfrak{L}(E) = k[[X_1]] \oplus k[[X_2]]$. Si, en particulier, $\mathfrak{L}(E) = C_1 \oplus \cdots \oplus C_p$ où C_i est complètement primaires, nous voyons que $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_p$ où les E_i sont caractéristiques indécomposables. On vérifie, alors, sans difficulté (Bourbaki [5] chap. 7, § 4, ex. 16) qu'il y a unicité de la décomposition de E en somme directe de sous-modules indécomposables.

Ceci constitue dans un cas très particulier une interprétation d'un théorème de Krull-Remak-Schmidt-Azumaya.

Tout ce qui précède est très imprécis. Les problèmes suivants se posent naturellement :

1) Quels anneaux complètement primaires apparaissent dans la décomposition des $\mathfrak{L}(E)$; ce sont évidemment des A-modules de type fini si A est noethérien.

2) Dans le cas $A = Z/p^n$ où Z est l'anneau des entiers et p un nombre premier, Shiffman, Baer et Kaplansky ont montré que si E et F sont des modules non nécessairement de type fini, un isomorphisme de $\mathfrak{L}(E)$ sur $\mathfrak{L}(F)$ provient d'un isomorphisme de E sur F. Quels résultats peut-on espérer pour A local quelconque E et F étant tous deux de type fini ? Nous verrons que le résultat ne peut être que bien plus faible, à propos des $\mathfrak{L}(E)$ commutatifs.

Si A est intègre, de corps des fractions K, $\mathfrak{L}(E) \simeq \mathfrak{L}(F)$ implique $\mathfrak{L}(E \otimes_A K) \simeq \mathfrak{L}(F \otimes_A K)$, soit $E \otimes_A K \simeq F \otimes_A K$. Un invariant est, donc, le rang du quotient du module par son sous-module de torsion.

3) Étant donnée une algèbre R à élément unité sur A, à quelle condition existe-t-il un A-module de type fini E tel que $R = \mathfrak{L}(E)$. Si A est intègre, de corps des fractions K, on doit avoir $R \otimes_A K = \mathfrak{L}(E) \otimes_A K$ et $R \otimes_A K$ doit être isomorphe à un $M_n(K)$.

Remarque. — K. Morita dans « Duality for Modules and its Applications to the Theory of Rings with minimum conditions ». Science Reports of the Tokyo Kyoiku Daigaku. Sec A, vol 16, n° 150, 1958, donne des résultats sur les problèmes 2) et 3) pour A anneau quasi-Frobeniusien.

CHAPITRE II

1. Suite exacte liée à un sous-module caractéristique.

Proposition 1. — *Soit* A *un anneau commutatif à élément unité et soit* E *un* A-*module. Si* C *est un sous-module caractéristique de* E, $\mathrm{Hom}_A(E, C)$ *est un idéal bilatère de* $\mathfrak{L}(E)$.

En effet, C est un sous-module et il en résulte que $\mathrm{Hom}_A(E, C)$ est un idéal à droite car, si u, $v \in \mathrm{Hom}_A(E, C)$ et $w \in \mathfrak{L}(E)$, $(u+v)(E) \subset C$ et $uw(E) \subset u(E) \subset C$. Comme C est caractéristique, si $u \in \mathrm{Hom}_A(E, C)$ et $w \in \mathfrak{L}(E)$, $wu(E) \subset w(C) \subset C$. Donc, $\mathrm{Hom}_A(E, C)$ est aussi un idéal à gauche et, par suite, un idéal bilatère. Nous verrons ultérieurement que $\mathrm{Hom}_A(E, F)$ peut être un idéal bilatère sans que F soit caractéristique.

Proposition 2. — *Avec les mêmes notations, la suite :*

$$(1) \qquad O \to \mathrm{Hom}_A(E, C) \to \mathrm{Hom}_A(E, E) \to \mathrm{Hom}_A(E, E/C)$$

est exacte et l'image de $\mathrm{Hom}_A(E, E)$ *dans* $\mathrm{Hom}_A(E, E/C)$ *est un sous-anneau de* $\mathrm{Hom}_A(E/C, E/C)$.

Il est classique que la suite (1) est exacte. Soit $u : E \to E$. Puisque C est caractéristique, $u(C) \subset C$ et u induit un endomorphisme $u : E/C \to E/C$ comme suit : si $x = y$ modulo C, alors, $u(x) = u(y)$ modulo C et si ξ est la classe de x modulo C, nous poserons $\tilde{u}(\xi) =$ classe de $u(x)$ modulo C. L'application $u \to \tilde{u}$ ainsi définie est un homomorphisme de $\mathfrak{L}(E)$ dans $\mathfrak{L}(E/C)$ dont le noyau est, évidemment, l'ensemble des u tels que $u(x) \in C$ quel que soit $x \in E$, c'est-à-dire $\mathrm{Hom}_A(E, C)$.

Le plongement de $\mathrm{Hom}_A(E/C, E/C)$ dans $\mathrm{Hom}_A(E, E/C)$ résulte, d'ailleurs, du fait que la suite exacte $O \to C \to E \to E/C$ fournit la suite exacte

$$O \to \mathrm{Hom}_A(E/C, E/C) \to \mathrm{Hom}_A(E, E/C) \to \mathrm{Hom}_A(C, E/C).$$

En définitive, nous pouvons associer à tout sous-module caractéristique C la suite exacte :

$$O \to \mathrm{Hom}_A(E, C) \to \mathfrak{L}(E) \to \mathfrak{L}(E/C)$$

qui nous sera très utile dans tout ce travail.

Un cas important de sous-module caractéristique est celui où $C = IE$ si I est un idéal de A; le fait que C soit caractéristique résulte de ce que x de C peut s'écrire au moins d'une manière $x = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$ avec $a_i \in I$ et $x_i \in E$ et $u(x) = a_1u(x_1) + \cdots + a_nu(x_n)$ est bien dans C.

On a, plus généralement :

Proposition 3. — *Soit* A *un anneau commutatif et soient* E *et* F *deux* A*-modules. Si le sous-module caractéristique* C *de* F *est de la forme* IF *où* I *est un idéal de* A, $\mathrm{Hom}_A(E, F/C)$ *s'identifie canoniquement à* $\mathrm{Hom}_A(E/IE, F/IF)$ *et on a la suite exacte :*

$$O \to \mathrm{Hom}_A(E, IF) \to \mathrm{Hom}_A(E, F) \to \mathrm{Hom}_{A/I}(E/IE, F/IF) \to \mathrm{Ext}^1_A(E, IF) \to .$$

Si, en effet, $u \in \mathrm{Hom}_A(E, F/IF)$ et si $x \in IE$, un raisonnement analogue à celui fait ci-dessus montre que $u(x) \in I.F/IF = 0$. Le noyau de u contient, donc, IE et u induit un élément $\tilde{u}$ de $\mathrm{Hom}_A(E/IE, F/IF)$, d'où une application $i : u \to \tilde{u}$ de $\mathrm{Hom}_A(E, F/IF)$ dans $\mathrm{Hom}_A(E/IE, F/IF)$.

Réciproquement, à $\tilde{u}$ de $\mathrm{Hom}_A(E/IE, F/IF)$ faisons correspondre $j(u) = \tilde{u}\varphi$ où φ est l'homomorphisme canonique de E sur E/IE. Il est immédiat que ji (resp. ij) est l'application identique de $\mathrm{Hom}_A(E, F/IF)$ (resp. $\mathrm{Hom}_A(E/IE, F/IF)$. Donc, i est un isomorphisme de $\mathrm{Hom}_A(E, F/IF)$ et j son isomorphisme réciproque.

Un raisonnement analogue montre que $\mathrm{Hom}_A(E/IE, F/IF)$ s'identifie canoniquement à $\mathrm{Hom}_{A/I}(E/IE, F/IF)$, d'où la suite exacte ci-dessus.

Remarque. — On pourrait pour l'étude de $\mathrm{Hom}_A(E, F)$ considérer des « couples caractéristiques », c'est-à-dire des couples (C, C′) formés du sous-module C de E et d'un sous-module C′ de F tels que $u(C) \subset C'$ pour tout $u \in \mathrm{Hom}_A(E, F)$. On a pour un tel couple, une suite exacte :

$$O \to \mathrm{Hom}_A(E, C') \to \mathrm{Hom}_A(E, F) \to \mathrm{Hom}_A(E/C, F/C').$$

Il n'est probablement pas vrai, en général, si C est un sous-module caractéristique que $\mathrm{Hom}_A(E, E/C)$ soit isomorphe à $\mathrm{Hom}_A(E/C, E/C)$. C'est vrai si C est projectif car $u : E \to E/C$ se factorise en $\varphi\nu$ où φ est l'application canonique $E \to E/C$ et $\nu \in \mathfrak{L}(E)$ et on en déduit $u(C) = \varphi[\nu(C)] \subset \varphi(C) = 0$ et le noyau de u contient C. La démonstration s'achève, alors, sans difficulté.

Nous voyons, d'après ce qui précède, que si A est un anneau local d'idéal maximal m, le quotient $\mathfrak{L}(E)/\mathrm{Hom}_A(E, m^i E)$ se plonge dans $\mathfrak{L}(E/m^i E)$. En particulier le premier terme $\mathrm{Hom}_A(E, mE)$ de la filtration décroissante $(\mathrm{Hom}_A(E, m^i E))$ fournit une première approximation de $\mathfrak{L}(E)$ par une sous-algèbre de $\mathfrak{L}(E/mE)$ où E/mE est muni de sa structure d'espace vectoriel sur le corps A/m. Tout le reste de ce chapitre sera consacré à l'étude de cette approximation.

Supposons que A soit local noethérien de complétion $\hat{A}$. Alors, les propriétés de platitude montrent que $\mathfrak{L}(E)/\mathrm{Hom}_A(E, m^i E)$ s'identifie à $\mathfrak{L}(\hat{E})/\mathrm{Hom}_{\hat{A}}(\hat{E}, \hat{m}^i \hat{E})$, ces deux quotients se plongeant dans $\mathfrak{L}(E)/m^i E$. D'autre part, en vertu des théorèmes de Cohen, un anneau local complet est quotient d'un anneau local régulier complet B de même corps des restes et nous voyons que si l'on munit $\hat{E}$ d'une structure naturelle de B-module E_B, $\mathfrak{L}(E_B)/\mathrm{Hom}_B(E_B, mE_B)$ s'identifie canoniquement à $\mathfrak{L}(E)/\mathrm{Hom}_A(E, mE)$. Ceci nous donne une limitation des résultats que l'on pourrait espérer obtenir au moyen de l'approximation que nous avons en vue. D'éventuels contre-exemples liés à une structure pathologique de l'anneau A ne sauraient être donnés par ce procédé.

2. Surjectivité de $\mathrm{Hom}_A(E, F) \to \mathrm{Hom}_k(E/mE, F/mF)$.

Nous avons déjà vu des exemples simples montrant que l'homomorphisme $\mathfrak{L}(E) \to \mathfrak{L}(E)/mE)$ n'est pas surjectif en général. Il le sera, évidemment, si E est libre ou monogène, et, plus généralement, si E est A/a-libre où a est l'annulateur de E.

Considérons, plus généralement, la suite exacte :

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(E, mF) \to \mathrm{Hom}_A(E, F) \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Hom}_k(E/mE, F/mF) \to \mathrm{Ext}^1_A(E, mF) \to \cdots.$$

où E et F sont deux modules de type fini. Nous supposons F fidèle et φ surjectif. Désignons par $\overline{x}_i (i = 1, \ldots, n)$ (resp. $(\overline{y}_j)$ $(j = 1, \ldots, p)$) une base de E/mE (resp. F/mF) sur k et par $\overline{u}_{ji}$ l'élément de $\mathrm{Hom}_k(E/mE, F/mF)$ défini par : $\overline{u}_{ji}(\overline{x}_i) = \overline{y}_j$ et $\overline{u}_{ji}(\overline{x}_k) = 0$ si $k \neq i$. La surjectivité de φ assure l'existence de u_{ji} dans $\mathrm{Hom}_A(E, F)$ tel que :

$$u_{ji}(x_i) = y_j \text{ modulo } mF (i = 1, \ldots, n ; j = 1, \ldots, p)$$

$u_{ji}(x_k) \in mF$ si $k \neq i$, où x_i (resp. y_j) est un représentant de $\overline{x}_i$ (resp. $\overline{y}_j$) dans E (resp. F).

Donnons nous une relation $a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0$ à coefficients a_i dans A. On en déduit $u_{ji}(a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n) = 0$, soit $a_i y_j \in (a_1, \ldots, a_n) mF$, puis $a_i F \subset (a_1, \ldots, a_n) mF$ et, finalement, $(a_1, \ldots, a_n) F \subset m(a_1, \ldots, a_n) F$. Le lemme de Nakayama appliqué au module $(a_1, \ldots, a_n) F$ montre, alors, que $(a_1, \ldots, a_n) F = 0$ et, puisque F a été supposé fidèle, $a_i = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$. Il en résulte que $(x_1, \ldots, x_n)$ qui, à priori, est un système minimal de générateurs de E sur A est une base. Donc, E est libre.

Remarquons que $\mathrm{Ext}^1_A(E, mF) = 0$ implique la surjectivité de φ et que la réciproque est évidente. D'où

Théorème. — *Soient* A *un anneau local d'idéal maximal* m *et de corps des restes* k, E *un* A-*module de type fini*, F *un* A-*module de type fini fidèle. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :*

1) E *est* A-*libre.*

2) $\mathrm{Ext}^1_A(E, mF) = 0$.

3) *L'application canonique de* $\mathrm{Hom}_A(E, F)$ *dans* $\mathrm{Hom}_k(E/mE, F/mF)$ *est surjective.*

Remarquons que nous n'avons pas eu besoin de supposer A noethérien.

Le corollaire qui suit nous sera utile ultérieurement.

Corollaire 1. — *Sous les mêmes hypothèses pour* A, *il y a équivalence pour un* A-*module de type fini* E *entre :*

1) E *est* A-*libre.*

2) $\mathrm{Ext}^1_A(E, m) = 0$.

3) *L'application canonique du dual* E^* *de* E *dans le dual* $(E/mE)^*$ *du* k-*espace vectoriel* E/mE *est surjective.*

Si F n'est plus supposé fidèle et admet a pour annulateur, $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ s'identifie canoniquement à $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}/a}(\mathrm{E}/a\mathrm{E}, \mathrm{F}/a\mathrm{F})$ et on obtient.

COROLLAIRE 2. — *Sous les mêmes hypothèses pour l'anneau* A *et pour le module* E, *si* F *est un* A-*module de type fini d'annulateur a il y a équivalence entre :*

1) $\mathrm{E}/a\mathrm{E}$ *est* A/a-*libre.*

2) *L'homomorphisme canonique de* $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ *dans* $\mathrm{Hom}_k(\mathrm{E}/m\mathrm{E}, \mathrm{F}/m\mathrm{F})$ *est surjectif. Ces deux assertions équivalentes sont impliquées par* $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(\mathrm{E}, m\mathrm{F}) = 0$.

Il est, d'ailleurs, facile de montrer que $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}/a}(\mathrm{E}/a\mathrm{E}, m\mathrm{F}/a\mathrm{F})$ se plonge dans $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(\mathrm{E}, m\mathrm{F})$.

Nous obtenons comme cas particulier :

COROLLAIRE 3. — *Il y a équivalence pour un* A-*module de type fini* E *entre :*

1) E *est* A/a-*libre.*

2) *L'homomorphisme canonique de* $\mathfrak{L}(\mathrm{E})$ *dans* $\mathfrak{L}(\mathrm{E}/m\mathrm{E})$ *est surjectif.*

Il est, enfin, possible de donner une forme un peu plus générale au théorème. Supposons que A soit un anneau semi-local noethérien d'idéaux maximaux $m_1, \ldots, m_p$ et de radical de Jacobson r. En localisant par rapport à m_i, nous voyons que la surjectivité de $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{E}, \mathrm{F}) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}/r}(\mathrm{E}/r\mathrm{E}, \mathrm{F}/r\mathrm{F})$ implique celle de $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}_{m_i}}(\mathrm{E}_{m_i}, \mathrm{F}_{m_i}) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}/m_i}(\mathrm{E}_{m_i}/m_i\mathrm{E}_{m_i}, \mathrm{F}_{m_i}/m_i\mathrm{F}_{m_i})$. Si F a été supposé fidèle, le A_{m_i}-module F_{m_i} est aussi fidèle.

La surjectivité en question montre, donc, que E_{m_i} est A_{m_i}-libre pour $i = 1, \ldots, p$. Il est classique que ceci implique que E est projectif. D'où

COROLLAIRE 4. — *Soit* A *un anneau semi-local noethérien de radical de Jacobson* r, *soient* E *un* A-*module de type fini et* F *un* A-*module de type fini fidèle. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1) E *est un* A-*module projectif.*

2) $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{A}}(\mathrm{E}, r\mathrm{F}) = 0$.

3) *L'homomorphisme canonique*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{E}, \mathrm{F}) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}/r}(\mathrm{E}/r\mathrm{E}, \mathrm{F}/r\mathrm{F})$$

est surjectif.

Remarquons que nous avons du supposer A noethérien pour pouvoir appliquer le théorème de platitude

$$(\mathrm{Hom}_A(E, F))_{m_i} = \mathrm{Hom}_{A_{m_i}}(E_{m_i}, F_{m_i}).$$

Rappelons, d'autre part, que si le spectre premier de A est connexe [1], il y a équivalence entre E est projectif et E est libre.

Il n'est pas vrai si A n'est pas semi-local de radical de Jacobson r que $rA_m = mA_m$ si m est un idéal maximal comme le montre l'exemple $A = Z$, anneau des entiers.

On peut se demander ce qu'implique la nullité de certains des termes suivants de la suite des Ext :

$$\cdots \to \mathrm{Ext}^1_A(E, mF) \to \mathrm{Ext}^1_A(E, F) \to \mathrm{Ext}^1_A(E, E/mF).$$

La nullité de $\mathrm{Ext}^1_A(E, F/mF)$ implique la liberté de F : en effet, si $O \to R \xrightarrow{i} L \to E \to O$ est le premier terme d'une résolution minimale de E, $\mathrm{Ext}^1_A(E, F/mF)$ est isomorphe à $\mathrm{Hom}_k(E/mE, F/mF)$ d'après la suite exacte :

$$\begin{aligned} O &\to \mathrm{Hom}_k(E/mE, F/mF) \to \mathrm{Hom}_k(L/mL, F/mF) \\ &\to \mathrm{Hom}_k(R/mR, F/mF) \to \mathrm{Ext}^1_A(E, F/mF \to O. \end{aligned}$$

Et $\mathrm{Ext}^1_A(E, F/mF) = 0$ implique, donc, $R = mR$ et $R = 0$, puisque L/mL est isomorphe à E/mE.

Nous ne savons pratiquement rien sur la condition $\mathrm{Ext}^1_A(E, F) = 0$. Avec les mêmes notations que précédemment, elle implique l'exactitude de la suite :

$$O \to \mathrm{Hom}_A(E, F) \to \mathrm{Hom}_A(L, E) \to \mathrm{Hom}_A(R, F) \to O.$$

Si $u \in \mathrm{Hom}_A(R, F)$, il existe $v \in \mathrm{Hom}_A(L, F)$ tel que $u = vi$, ce qui donne $u(R) = vi(L) \subset v(mL) \subset mF$. Donc,

$$\mathrm{Hom}_A(R, F) = \mathrm{Hom}_A(R, mF).$$

Si A est un anneau de valuation discrète ou plus généralement si E est de dimension homologique $\leqslant 1$, R est projectif, donc, $\mathrm{Hom}_A(R, mF) = m\,\mathrm{Hom}_A(R, F)$ et on en déduit $\mathrm{Hom}_A(R, F) = 0$ et $R = 0$. Donc, $dh(E) \leqslant 1$ et $\mathrm{Ext}^1_A(E, F) = 0$ sont équivalents à E est libre.

[1] Jean Pierre Serre. Modules projectifs et espaces fibrés à fibre vectorielle. *Séminaire*. P. Dubreil. M. M. Dubreil-Jacotin et C. Pisot. Année 1957-1958.

Remarque. — Le problème reste ouvert de savoir ce qu'implique la sujectivité de $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{E}, \mathrm{F}) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}/a}(\mathrm{E}/a\mathrm{E}, \mathrm{F}/a\mathrm{F})$ si a est un idéal quelconque de A. Si a est une intersection d'idéaux premiers $p_i (i = 1, \ldots, q)$ la méthode déjà employée montre que si F est fidèle et A noethérien, E_{p_i} est A_{p_i}-libre pour $i = 1, \ldots, q$. Un problème plus général est celui de la surjectivité de $\mathfrak{L}(\mathrm{E}) \to \mathfrak{L}(\mathrm{E}/\mathrm{C})$ si C est un sous-module caractéristique de E et le problème analogue pour $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$. Nous obtiendrons, néanmoins, quelques précisions dans le cas où C est un sous-module caractéristique maximal.

3. Toute algèbre à élément unité de dimension finie sur un corps k peut être obtenue comme image d'un anneau $\mathfrak{L}(\mathrm{E})$.

1. Ce paragraphe est essentiellement destiné à montrer qu'une représentation fidèle d'une algèbre à élément unité de dimension finie sur un corps k peut, au moins d'une manière être obtenue par réduction d'un anneau $\mathfrak{L}(\mathrm{E})$ de A-endomorphismes d'un module de type fini E convenable sur un anneau local A de corps des restes k.

Nous allons nous placer pour les préliminaires dans une situation plus générale. Nous désignerons par B un anneau commutatif à élément unité et par H une algèbre à élément unité sur B. Nous identifions B à un sous-anneau de H. L'application $x \to u_x$ de H dans $\mathfrak{L}(\mathrm{H})$ définie par $u_x(y) = xy$ est un homomorphisme de B-algèbres. Elle est injective car de $u_x = u_{x'}$ on déduit $u_x(1) = x = u_{x'}(1) = x'$. C'est donc un isomorphisme d'algèbres de H dans $\mathfrak{L}(\mathrm{H})$. L'image G(H) de H dans $\mathfrak{L}(\mathrm{H})$ est donc isomorphe à H et nous l'appellerons la *représentation régulière gauche de* H.

On définirait de manière analogue, à partir de l'anti-isomorphisme de B-algèbres de H dans $\mathfrak{L}(\mathrm{H})$ défini par $x \to v_x$ où $v_x(y) = yx$ pour y dans H, la *représentation régulière droite* D(H) de H, qui est en fait une anti-représentation. La vérification du fait que le commutant de G(H) (resp. D(H)) dans $\mathfrak{L}(\mathrm{H})$ est D(H) (resp. G(H)) se fait comme dans le cas classique : si u de $\mathfrak{L}(\mathrm{H})$ est tel que $u_x u = u u_x$ pour tout x de H, $u_x u(y) = u u_x(y)$

s'écrit $xu(y) = u(xy)$ et en prenant $y = 1$, $u(x) = xu(1)$, soit $u = \varphi_{u(1)}$. Le bicommutant de G(H) (resp. D(H)) dans $\mathfrak{L}$(H) est donc G(H) (resp. D(H)).

Voici une généralisation de ce résultat. C'est essentiellement sous une forme plus générale et plus naturelle l'exposé d'une technique matricielle de Brauer-Nesbitt [15]. Nous nous limiterons au cas d'une représentation.

Nous nous donnons donc une représentation fidèle de H dans $\mathfrak{L}$(V) où V est un B-module, c'est-à-dire un homomorphisme injectif i de B-algèbres de H dans $\mathfrak{L}$(V) tel que $i(1) = 1$ où 1 désigne dans le membre de droite l'application identique de V.

Soit W le B-module des applications B-linéaires : $\varphi : H \to V$ telles que $i(x)\varphi = \varphi u_x$ pour tout x de H. Si φ appartient à W, nous avons $i(x)\varphi(y) = \varphi(xy)$ pour tout couple x, y d'éléments de H et, en prenant $y = 1$, $\varphi(x) = i(x)(\varphi(1))$. Réciproquement soit z dans V et posons $\varphi_z(x) = i(x)(z)$ pour x dans H. Il est clair que φ_z est B-linéaire; d'autre part, φ_z appartient à W car $i(x)\varphi_z(y) = i(x)(i(y)(z)) = i(x)i(y)(z) = i(xy)(z)$ et

$$\varphi_z u_x(y) = \varphi_z(xy) = i(xy)(z)$$

et, par comparaison, $i(x)\varphi_z = \varphi_z u_x$ pour tout x de H.

L'application $z \to \varphi_z$ de V dans W est un isomorphisme de B-modules de V sur W; il suffit, en effet, de montrer qu'elle est injective et il en est bien ainsi, car de $\varphi_z = \varphi_{z'}$, on déduit $\varphi_z(1) = z = \varphi_{z'}(1) = z'$.

Réciproquement, donnons-nous u dans $\mathfrak{L}$(H) et u' dans $\mathfrak{L}$(V) tels que $u'\varphi_z = \varphi_z u$ pour tout z de V. On en déduit $u'\varphi_z(y) = \varphi_z u(y)$ pour tout y de H, c'est-à-dire :

$$u'i(y)(z) = i(u(y)(z))$$

et, en prenant $y = 1$, $u'(z) = i(u(1))(z)$, soit $u' = i(u(1))$ et u' est élément de i(H). Posons pour simplifier $u(1) = x$. Il vient $i(x)i(y)(z) = i(u(y))(z)$, soit $i(xy)(z) = i(u(y))(z)$ et $i(xy) = i(u(y))$ mais i a été supposé injectif et, par suite, $u(x) = xy$ et $u = u_x$.

Plaçons-nous dans la situation suivante : H est un B-module libre et V un B-module libre également. Soient $z_1, \ldots, z_m$ et $x_1, \ldots, x_n$ des bases respectives de V et H sur B. Par rapport à ces bases, l'application B-linéaire $\varphi_i = \varphi_{z_i}$ admet une matrice

P_i de représentation. Posons $A = B[[X_1, \ldots, X_m]]$ et

$$P = X_1P_1 + \cdots + X_mP_m = (C_{ji}),$$

matrice dont les coefficients sont des formes linéaires en $X_1, \ldots, X_m$ à coefficients dans B et d'autre part matrice à m lignes et n colonnes. Enfin, désignons par E le A-module défini comme quotient du A-module libre $V \otimes_B A$ par le sous-module $R = Ay_1 + \cdots + Ay_n$ où $y_i = \sum_{j=1}^m C_{ji}z_j$. Si a est l'idéal $(X_1, \ldots, X_m)$ de A, il est clair que E/aE s'identifie à V en tant que B-module.

Si M(U) est la matrice d'un endomorphisme U de E, il existe une matrice carrée M(U′) d'ordre n à coefficients dans A telle que $M(U)P = PM(U')$. La matrice $M(u)$ obtenue en ne conservant que les parties constantes des coefficients de M(U) définit l'endomorphisme induit u sur V et on a les relations : $M(u)P_i = P_iM(u')$ $(i = 1, \ldots, m)$, avec des notations évidentes, en raison de la forme même de P. La traduction matricielle des résultats précédents montre que u appartient à i(H). Nous voyons, donc, que $\mathrm{I}m(\mathfrak{L}(E) \to \mathfrak{L}(E/aE))$ est contenu dans i(H).

L'inclusion en sens inverse est immédiate : on considére, en effet, les endomorphismes de E dont une matrice de représentation est à coefficients dans B ; la matrice $M(u')$ correspondante est aussi à coefficients dans B. Un tel endomorphisme est puisque $E/aE = V$, un élément de i(H) et il définit bien un élément de $\mathrm{I}m(\mathfrak{L}(E) \to \mathfrak{L}(E/aE))$. Le cas qui nous intéresse le plus est celui où B est un corps k, ce qui assure toutes les conditions imposées et nous obtenons :

Théorème 2. — *Soient* H *une algèbre à élément unité de dimension finie n sur un corps k et* i(H) *une représentation fidèle de* H *dans* $\mathfrak{L}(V)$ *où* V *est un k-espace vectoriel de dimension finie m. Il existe un anneau local* A *de corps des restes k et un* A-*module de type fini* E *tel que :*

1) $E \otimes_A k$ *s'identifie à* V.

2) *Après identification,* $i(H) = \mathrm{I}m(\mathfrak{L}(E) \to \mathfrak{L}(V))$.

Explicitons un peu en vue des exemples la représentation matricielle. Avec les notations ci-dessus, $v_j(x) = i(x)(z_j)$ et $v_j(x_k) = i(x_k)(z_j)$. La matrice de v_j par rapport aux bases choisies est donc obtenue par juxtaposition des j-èmes colonnes des matrices de représentation de $i(x_k)$ par rapport à la base z_j.

Exemple 1. — H est l'algèbre des matrices à coefficients dans le corps k de la forme $\begin{vmatrix} a & 0 \\ c & b \end{vmatrix}$.

P_1 est alors $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ et P_2 est $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

D'où $P = \begin{vmatrix} X_1 & 0 & 0 \\ 0 & X_2 & X_1 \end{vmatrix}$ et H est obtenue, à partir de $A = k[[X_1, X_2]]$ et du module $E = Ae_1 + Ae_2 + Ae_3$ tel que $X_1e_1 = X_2e_2 = X_1e_3 = 0$.

Exemple 2. — H est l'algèbre des matrices à coefficients dans k de la forme :

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{vmatrix}.$$

La matrice P est alors $\begin{vmatrix} X_1 & X_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X_1 & X_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X_3 \end{vmatrix}$.

On prend $A = k[[X_1, X_2, X_3]]$ et $E = Ae_1 + Ae_2 + Ae_3$ avec $X_1e_1 = X_2e_1 = X_1e_2 = X_2e_2 = X_3e_3 = 0$.

Exemple 3. — H est l'algèbre *commutative* des matrices à coefficients dans k de la forme $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix}$.

La représentation donnée est la représentation régulière et P est simplement la matrice générique de H. On prendra, donc, $A = k[[X_1, X_2, X_3]]$ et $E = Ae_1 + Ae_2 + Ae_3$ avec les relations $X_1e_1 = 0$; $X_2e_1 + X_1e_2 = 0$; $X_3e_1 + X_1e_3 = 0$.

Remarques. — Nous aurions pu prendre des polynômes au lieu de séries formelles sans changer le résultat.

Dans le cas général envisagé au début du paragraphe : B anneau, H algèbre sur B, V, B-module, la difficulté qui se présente pour démontrer un théorème analogue à celui que nous avons obtenu est de tenir compte des relations de V et H.

Soit A un anneau principal et soit H une algèbre à élément unité sur A, de type fini en tant que A-module. Si $H = L/R$ où L est un A-module libre de type fini, en utilisant la représentation régulière de H, on voit que H est isomorphe au quotient d'un sous-anneau de $\mathfrak{L}(L)$. Or, ce sous-anneau est un A-module libre et on peut lui appliquer ce qui précède. Il existe donc un anneau B, un B-module de type fini E et un idéal I de l'anneau $\mathfrak{L}(E)$ tel que $H = \mathfrak{L}(E)/I$.

4. Cas d'un module de type fini somme directe de modules monogènes.

On suppose que E est somme directe de sous-modules monogènes, $E = \sum_{i=1}^{n} Ae_i$; notons a_i l'annulateur de Ae_i, de sorte que $Ae_i = A/a_i$.

Les formules $\varphi_{ji}(e_i) = \lambda e_j$ et $\varphi_{ji}(e_k) = 0$ si $k \neq i$ définiront, effectivement, un endomorphisme de E si et seulement si $\varphi_{ji}(a_ie_i) = 0$; cette condition se traduit par $\lambda a_ie_j = 0$, c'est-à-dire $\lambda a_i \subseteq a_j$ et, finalement, $\lambda \in (a_j : a_i)$.

Un endomorphisme u de E est combinaison linéaire à coefficients dans A de tels endomorphismes: en effet, si $u(e_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}e_j$, nous poserons $\varphi_{ji}(e_i) = a_{ji}e_j$ et $\varphi_{ji}(e_k) = 0$ si $k \neq i$. Le fait que u soit un endomorphisme implique $\sum_{j=1}^{n} a_{ji}a_ie_j = 0$, soit $a_{ji}a_i \subset a_j (j = 1, \ldots, n)$ et nous déduisons que φ_{ji} est bien un endomorphisme de E.

Il résulte de ce qui précède que $\varphi_{ji}(e_i)$ appartient à $(a_j : a_i)/a_j$. Nous avons alors deux possibilités :

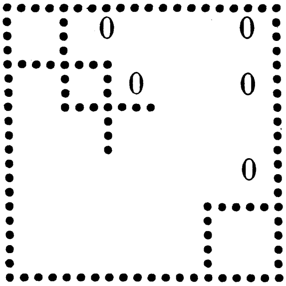
1) $(a_j : a_i)/a_j$ n'est pas A/a_j, c'est-à-dire a_i n'est pas contenu dans a_j. Alors $\varphi_{ji}(e_i)$ appartient forcément à mE.

2) a_i est contenu dans a_j et on peut prendre pour $\varphi_{ji}(e_i)$ n'importe quel élément de A/a_j.

Proposition 4. — *Soient* E *un* A-*module somme directe de modules monogènes,* $E = \sum_{i=1}^{n} Ae_i$ *et* a_i *l'annulateur de* Ae_i. *Soit* $(\bar{e}_i)$ *la base correspondante de* E/mE. *Par rapport à cette base, les matrices des éléments de* $\mathrm{Im}(\mathfrak{L}(E) \to \mathfrak{L}(E/mE))$ *ne sont autres que les matrices* (a_{ij}) *telles que* $a_{ij} = 0$ *toutes les fois que* $a_i \not\subset a_j$.

Soit I l'ensemble des indices $(1, \ldots, n)$. Si on écrit $i < j$ chaque fois que $a_i \subset a_j$, on obtient une relation de *préordre* sur I et l'ensemble des couples (i, j) tels que $a_{ij} \neq 0$ n'est autre que le *graphe* de cette relation de préordre.

Cas où A *est un anneau de valuation discrète:* la relation de préordre devient alors totale. On en déduit, en prenant les a_i dans l'ordre croissant qu'une algèbre qui peut être obtenue à partir d'un module de type fini sur A admet une représentation de la forme ci-contre; où les blocs diagonaux contiennent des éléments arbitraires de k et représentent la partie semi-simple, les blocs inférieurs formés eux aussi d'éléments arbitraires forment le radical; les autres coefficients sont nuls. La réciproque est immédiate.



Nous allons démontrer la réciproque du résultat plus général obtenu ci-dessus. Plus précisément, soit G le graphe d'une relation de préordre sur $I = (1, \ldots, n)$. Nous allons montrer qu'il existe un anneau local A et un A-module E somme directe de n modules monogènes, tels que, par rapport à une base convenable, les matrices des éléments de $\mathrm{I}m(\mathfrak{L}(E) \to \mathfrak{L}(E/mE))$ ne soient autres que les matrices (a_{ij}) telles que $a_{ij} = 0$ pour $(i, j) \notin G$.

Pour cela notons I′ l'ensemble ordonné associé à l'ensemble préordonné I. Il nous suffira de montrer :

Lemme. — *Soit* A *un anneau local (noethérien) de dimension supérieure ou égale à* 2 *et soit* I′ *un ensemble ordonné fini. Il existe une famille* $(a_i)_{i \in I'}$ *d'idéaux de* A *deux à deux distincts telle que* $i \to a_i$ *soit un isomorphisme d'ensembles ordonnés.*

Montrons d'abord que si A est un anneau noethérien de dimension supérieure ou égale à 2, A admet une infinité d'idéaux premiers de hauteur 1, donc sans relation d'inclusion. Soit, en effet, q un idéal premier de hauteur 2 et supposons qu'il ne contienne qu'un nombre fini $p_1, \ldots, p_n$ d'idéaux premiers de hauteur 1. Il en résulte que $q = p_1 \cup \cdots \cup p_n$.

En effet, s'il n'en était pas ainsi soit $a \in q - p_1 \cup \cdots \cup p_n$; nous savons que a n'est pas diviseur de 0 car il devrait appartenir à $p_1 \cup \cdots \cup p_n$. Le Hauptidealsatz nous montre, alors, qu'un idéal premier minimal de (a) est de hauteur 1 : or, il est nécessairement contenu dans q et ce ne pourrait être qu'un des p_i, d'où contradiction. Nous sommes donc certains que $q = p_1 \cup \cdots \cup p_n$ mais ceci implique que q est l'un des p_i et ceci est impossible. En résumé, nous savons que si A est un anneau local noethérien de dimension au moins 2, il existe une suite infinie $(p_1, \ldots, p_n, \ldots)$ d'idéaux premiers de hauteur 1.

Désignons par S l'ensemble des suites $s = (s(i))_{i \in \mathbf{N}}$ d'entiers naturels telles que $s(i) = 0$ sauf pour un nombre fini d'indices i et munissons S de la relation d'ordre produit $s \leqslant s'$ si et seulement si $s(i) \leqslant s'(i)$ pour tout i. L'application de S dans l'ensemble J des idéaux de A intersections finies de puissances symboliques des p_i définie par $s \rightarrow a_s = \bigcap_i p_i^{(s(i))}$ est, évidemment, une application décroissante. Montrons que c'est un anti-isomorphisme de structures ordonnées :

En effet, si $a_s \subset a_{s'}$, en localisant en p_i, nous obtenons $a_s A_{p_i} \subset a_{s'} A_{p_i}$, c'est-à-dire $p_i^{s(A)} A_{p_i} \subset p_i^{s'(i)} A_{p_i}$, donc $s(i) > s'(i)$ et $s > s'$.

Nous voulons, en fait, montrer qu'étant donné un ensemble G fini à n éléments toute relation d'ordre sur cet ensemble peut être réalisée avec n idéaux de J muni de la relation d'inclusion. Il nous suffira, d'après ce qui précède, de montrer que la relation d'ordre opposée sur G peut être réalisée avec un sous-ensemble convenable de S. Ceci va résulter du fait que pour tout ordre Υ sur G, le graphe de Υ est l'intersection des graphes des ordres totaux moins fins que Υ et que le graphe de l'ordre produit s'identifie à l'intersection des graphes des ordres des facteurs. (Nous renvoyons à Bourbaki, Livre I, *Théorie des ensembles*, chap. III, § 2, ex. 1).

On sait donc que G muni de la relation d'ordre opposée à la relation d'ordre de départ s'identifie à un sous-ensemble du produit G^n où chaque facteur G est muni d'une relation d'ordre total moins fin que l'ordre considéré sur G. Il est alors immédiat que cet ordre pourra être réalisé au moyen d'un sous-ensemble de S.

Voici des exemples d'algèbres du type précédent en dimension 3 :

$$\begin{vmatrix} z_1 & 0 & 0 \\ 0 & z_2 & 0 \\ 0 & 0 & z_3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} z_1 & 0 & 0 \\ z_2 & z_3 & 0 \\ z_4 & z_5 & z_6 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} z_1 & 0 & 0 \\ 0 & z_2 & 0 \\ z_3 & z_4 & z_5 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} z_1 & z_2 & 0 \\ z_3 & z_4 & 0 \\ z_5 & z_6 & z_7 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} z_1 & 0 & 0 \\ z_2 & z_3 & z_4 \\ z_5 & z_6 & z_2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} z_1 & 0 & 0 \\ z_2 & z_3 & 0 \\ 0 & 0 & z_4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ z_4 & z_5 & z_6 \\ z_7 & z_8 & z_9 \end{vmatrix}$$

Remarque. — Une condition nécessaire et suffisante pour que le procédé donne comme $Im(L(E) \to L(E/mE))$ une algèbre semi-simple si $E = A/a_1 \oplus \cdots \oplus A/a_n$ est qu'il n'y ait pas de relation d'inclusion entre les a_i. Il en est de même pour que cette algèbre soit commutative :

En effet, s'il n'en est pas ainsi, si l'on prend les matrices :

$$M = \begin{vmatrix} \ddots & & & \\ & a_{ii} & & \\ & & \ddots & \\ & a_{ij} & a_{jj} & \\ & & & \ddots \end{vmatrix}$$

les coefficients non explicités étant 0, et M' analogue avec des a' de telle sorte que $a_{ii}a'_{ji} + a_{ji}a'_{jj}$ soit différent de $a'_{ii}a_{ji} + a'_{ii}a_{jj}$, ce qui sera toujours possible, nous voyons que $MM' \neq M'M$, car les expressions ci-dessus sont les coefficients b_{ji} et b'_{ji} de MM' et $M'M$.

5. Quelques résultats sur l'homomorphisme $\mathfrak{L}(E) \to \mathfrak{L}(E/m^pE)$.

Il résulte d'un théorème d'isomorphisme que $E/m^pE/m.E/m^pE$ est isomorphe à E/mE et, par conséquent, que si $e_1, \ldots, e_n$ est un système minimal de générateurs de E sur A, les classes $\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n$ module m^pE fournissent un système minimal de générateurs de E/m^pE sur A/p.

D'autre part, la définition même de l'endomorphisme $\tilde{u}$ de E/m^pE induit par l'endomorphisme u de E montre que si (a_{ji}) est, par rapport aux e_i, une matrice de représentation de u, la matrice $(\tilde{a}_{ji})$ obtenue par réduction modulo m^p des coefficients de (a_{ji}) est une matrice de représentation de $\tilde{u}$, par rapport aux $\tilde{e}_i$.

Le premier terme $O \to R \to L \to E \to O$ d'une résolution minimale pour E conduit à la suite exacte

$$O \to (R + m^pL)/m^pL \to L/m^pL \to E/m^pE \to O$$

qui est le premier terme d'une résolution minimale du A/m^p-module E/m^pE.

Les classes modulo m^pL de générateurs $f_i (i = 1, \ldots, m)$ de R forment un système $\tilde{f}_i$ de générateurs de $R + m^pL/m^pL$; il n'est pas exclus que f_i appartienne à m^pL et, par suite, donne O par passage au quotient. De toute façon, si la matrice P a la signification de chapitre I, § 1 corollaire de la proposition 1, la matrice $\tilde{\mathrm{P}}$ obtenue par réduction modulo m^p des coefficients de P aura un rôle analogue pour $\mathrm{E}/m^p\mathrm{E}$.

Si E est A/a-libre où a désigne l'annulateur de E, il est clair que l'application $\mathfrak{L}(\mathrm{E}) \to \mathfrak{L}(\mathrm{E}/m^p\mathrm{E})$ est surjective pour tout p supérieur ou égal à 1.

On aurait pu espérer, dans le cas général, que cet homomorphisme deviendrait surjectif pour p grand. L'exemple ci-dessous va nous montrer qu'il n'en est pas ainsi.

Prenons $\mathrm{A} = k[[\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2]]$ où k est un corps et

$$\mathrm{E} = \mathrm{A}/(\mathrm{X}_1) \oplus \mathrm{A}/(\mathrm{X}_2)^2.$$

Désignons par e_1 et e_2 les classes de 1 modulo (X_1) et $(\mathrm{X}_2)^2$ respectivement. Elles engendrent E et satisfont aux relations $\mathrm{X}_1 e_1 = 0$ et $\mathrm{X}_2^2 e_2 = 0$. Enfin, désignons par x_1 et x_2 les classes respectives de X_1 et X_2 modulo $m^p = (\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2)^p$ et par e'_1 et e'_2 les classes de e_1 et e_2 modulo $m^p\mathrm{E}$. Elles engendrent $\mathrm{E}/m^p\mathrm{E}$ sur A/m^p et satisfont aux relations $x_1 e'_1 = 0$ et $x_2^2 e'_2 = 0$. Les formules $u'(e'_2) = x_2^{p-1} e'_1$ et $u'(e'_1) = x_1^{p-1} e'_2$ définissent effectivement un endomorphisme de $\mathrm{E}/m^p\mathrm{E}$ car $u'(x_1 e'_1) = u'(x_2^2 e'_2) = 0$. S'il existait un représentant u de u' dans $\mathfrak{L}(\mathrm{E})$, il serait nécessairement de la forme :

$$\begin{aligned} u(e_2) &= (\mathrm{X}_2^{p-1} + g(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2))e_1 + g(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2)e_2, \\ u(e_1) &= h(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2)e_1 + (\mathrm{X}_1^{p-2} + k(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2))e_2, \end{aligned}$$

où f, g, h sont des séries formelles d'ordre au moins p et k une série formelle d'ordre au moins $p - 1$. Or, il est clair que $u(\mathrm{X}_1 e_1) \neq 0$ par exemple et u n'est pas un A-endomorphisme de E.

Un calcul sans difficultés montre que $\mathrm{I}m(\mathfrak{L}(\mathrm{E}) \to \mathfrak{L}(\mathrm{E}/m\mathrm{E}))$ est l'ensemble des matrices de la forme $\begin{vmatrix} a & 0 \\ b & c \end{vmatrix}$, tandis que $\mathrm{I}m(\mathfrak{L}(\mathrm{E}/m^p\mathrm{E}) \to \mathfrak{L}(\mathrm{E}/m\mathrm{E}))$ est isomorphe à k si p est supérieur ou égal à 2.

Cas d'un anneau de valuation discrète. — Il est clair que la validité du contre-exemple ci-dessus tient à des conditions de non divisibilité. Cette constatation est renforcée par :

Proposition 5. — *Soit* A *un anneau de valuation discrète d'idéal maximal* (t) *et soit* E *un* A-*module de type fini. L'homomorphisme* $\mathfrak{L}(\mathrm{E}) \to \mathfrak{L}(\mathrm{E}/t^p\mathrm{E})$ *est surjectif pour p grand.*

Si $\mathrm{E} = \mathrm{L} \oplus \mathrm{A}/t^{n_1} \oplus \cdots \oplus \mathrm{A}/t^{n_r}$ où L est A-libre et où $n_1, \ldots, n$ est une suite décroissante d'entiers positifs, prenons p supérieur ou égal à n_1. Le A/t^p-module $\mathrm{E}/t^p\mathrm{E}$ s'écrit alors

$$\mathrm{L}/t^p\mathrm{L} \oplus \mathrm{A}/t^{n_1} \oplus \cdots \oplus \mathrm{A}/t^{n_r}.$$

Or, nous avons vu qu'un endomorphisme quelconque de E s'obtenait comme combinaison linéaire d'endomorphismes de la forme $u(e_i) = a_{ji}e_j$; $u(e_k) = 0$ si $k \neq i$ où $e_1, \ldots, e_n$ est le système minimal de générateurs choisi et où $a_{ji} \in \mathrm{A}$. Nous laissons dans ces conditions le soin de vérifier que tout endomorphisme de $\mathrm{E}/t^p\mathrm{E}$, nécessairement combinaison linéaire à coefficients dans A/t^p d'endomorphismes du type analogue à celui décrit ci-dessus, se laisse relever en un endomorphisme de E.

Remarque. — On a les trois diagrammes commutatifs suivants :

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{L}(\mathrm{E}) \arrow[rr] \arrow[dr, "\theta_\infty"'] & & \mathfrak{L}(\mathrm{E}/m^p\mathrm{E}) \arrow[dl, "\theta_p"] \\
& \mathfrak{L}(\mathrm{E}/m\mathrm{E}) &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathfrak{L}(\mathrm{E}/m^{p+1}\mathrm{E}) \arrow[rr, "\psi_p"] \arrow[dr, "\theta_{p+1}"'] & & \mathfrak{L}(\mathrm{E}/m^p\mathrm{E}) \arrow[dl, "\theta_p"] \\
& \mathfrak{L}(\mathrm{E}/m\mathrm{E}) &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{L}(\mathrm{E}/m^{p+1}\mathrm{E}) \arrow[rr, "\psi_p"] \arrow[dr] & & \mathfrak{L}(\mathrm{E}/m^p\mathrm{E}) \arrow[dl, "\psi_{p-1}"] \\
& \mathfrak{L}(\mathrm{E}/m^{p-1}\mathrm{E}) &
\end{tikzcd}$$

Désignons par S l'image de θ_∞ et S_p l'image de θ_p. Les inclusions suivantes sont immédiates :

$$\mathrm{S} \subset \cdots \subset \mathrm{S}_{p+1} \cdots \subset \mathrm{S}_p \subset \cdots \subset \mathrm{S}_1 = \mathfrak{L}(\mathrm{E}/m\mathrm{E}).$$

La suite (S_p) est évidemment stationnaire car les S_p sont des sous-espaces du k-espace vectoriel S_1 qui est de dimension finie. Le problème se pose donc de savoir quelle est la limite des S_p ou ce qui est équivalent leur intersection. Les remarques qui suivent n'apportent que peu de lumière sur cette question.

Si $\bar{u}$ appartient à $\cap S_p$, supposons que nous sachions relever $\bar{u}$ en u_p de $\mathfrak{L}(E/m^pE)$ de telle sorte que soit satisfaite la condition :

$$(C) \qquad u_p = \psi_p(u_{p+1}).$$

Montrons qu'il en résulte que $S = \bigcap S_p$. En effet, il est possible de supposer A complet car un passage éventuel au complété ne modifie ni S_p ni S. Or, nous savons (8) que les Hom commutent aux limites projectives et que, d'autre part, le complété $\hat{E}$ de E s'identifie à $\varprojlim (E/m^pE)$ Si (C) est satisfaite, l'élément $(u_1, \ldots, u_p, u_{p+1}, \ldots)$ est donc un élément de $\varprojlim (\mathfrak{L}(E/m^pE)) = \mathfrak{L}(\hat{E}) = \mathfrak{L}(E)$. Son image dans $\mathfrak{L}(E/mE)$ est bien $\bar{u}$ car l'élément $(\bar{u}, \bar{u}, \ldots, \bar{u}, \ldots)$ s'identifie à $\bar{u}$.

Réciproquement, une condition nécessaire pour que $S = \cap S_p$ est que (C) soit satisfaite. Nous n'avons pas résolu le problème de savoir si on peut toujours satisfaire à (C). Bien entendu, si ψ_p est surjectif pour p grand, (C) sera satisfaite de manière évidente mais l'exemple déjà donné dans ce paragraphe montrerait que l'on peut avoir $S = \bigcap S_p$ sans que ψ_p soit surjectif pour p grand.

CHAPITRE III

IDÉAUX DE L'ANNEAU $\mathfrak{L}(E)$.

1. Historique et formulaire :

L'étude des idéaux de l'anneau $\mathfrak{L}(E)$ a été faite dans le cas où A est un anneau local dont l'idéal maximal est engendré par un élément nilpotent, A n'étant pas nécessairement commutatif, par Shiffman [20] pour les idéaux bilatères puis par Baer [2] pour les idéaux à droite et à gauche. On peut, dans ce cas simple, donner, explicitement la structure des sous-modules caractéristiques. Dans le cas A local quelconque et E A-module de type fini ou non, on a un formulaire partiel analogue mais certaines des formules de Shiffman-Baer ne sont plus vraies, même si E est de type fini.

Nous allons nous borner à rappeler le formulaire de Shiffman-Baer pour les idéaux bilatères; le cas des idéaux à droite ou à gauche se traiterait de manière analogue et il suffirait, en fait, de supprimer « caractéristique » pour les modules et de rajouter « à droite » ou « à gauche » pour les idéaux. On peut attacher à un sous-module caractéristique C deux idéaux bilatères : $d(C) = \mathrm{Hom}_A(E, C)$ et $g(C)$ ensemble des $u \in \mathfrak{L}(E)$ dont le noyau contient C. Si C n'était pas caractéristique, $d(C)$ serait un idéal à droite et $g(C)$ un idéal à gauche.

A un idéal bilatère i, on peut associer deux sous-modules caractéristiques :

$$D(i) = \Sigma_{u \in i} u(E)$$

et

$$G(i) = (x \in E / u(x) = 0 \text{ pour tout } u \text{ de } i).$$

Les applications g, G (resp. d, D) définissent une correspondance de Galois (resp. une correspondance de Galois inversée), ce qui entraîne les formules :

$1a)$	$G(g(C)) \supset C$		$g(G(i)) \supset i$		
$1b)$	$D(d(C)) \subset C$		$d(D(i)) \subset i$		
$2a)$	$g(C_1) \supset g(C_2)$	et	$d(C_1) \subset d(C_2)$	si	$C_1 \subset C_2$
$2b)$	$G(i) \supset G(j)$	et	$D(i) \subset D(j)$	si	$i \subset j$
$3a)$	$g(G(g(C))) = g(C)$		$G(g(G(i))) = G(i)$		
$3b)$	$d(D(d(G))) = d(C)$		$D(d(D(i))) = D(i)$		

auxquelles viennent s'ajouter

4) $j.i = 0$ est équivalent à $D(i) \subset G(j)$

5) $g(C).d(C) = 0.$

Shiffman déduisait de la validité de ces formules et de la formule :

6) $d(D(C)) = C \qquad g(G(C)) = C$

que nous montrerons inexacte dans le cas général, qu'il y avait identité entre idéaux de la forme $d(C)$ (resp. $g(C)$) et idéaux caractéristiques à droite (resp. à gauche) : un idéal d est dit caractéristique à droite (resp. à gauche) s'il existe un idéal a tel que d soit l'annulateur à droite de a (resp. l'annulateur à gauche).

Une partie du résultat de Shiffman se transpose littéralement et on peut montrer :

Proposition 1. — *Un idéal caractéristique à droite (resp. à gauche) est du type* $d(C)$ (*resp.* $g(C)$).

J'ignore si la réciproque est exacte dans notre cas, c'est-à-dire si un idéal $d(C)$ (resp. $g(C)$) est caractéristique à droite (resp. à gauche). Elle l'est dans le cas envisagé par Shiffman.

On peut évidemment mettre sur l'ensemble des sous-modules caractéristiques deux relations d'équivalence par $d(C) = d(C')$ et $g(C) = g(C')$ et leur étude se révélerait peut être fructueuse.

2. Quelques remarques sur les sous-modules caractéristiques.

Si C et C′ sont caractéristiques, il en est de même de $C + C'$ car, si $u \in L(E)$, $u(C + C') = u(C) + u(C') \subset C + C'$. En particulier, si C est caractéristique, il en est de même de $C + mE$

et il résulte du lemme de Nakayama que tout sous-module caractéristique maximal parmi les sous-modules caractéristiques distincts de E contient mE.

PROPOSITION 2. — $\sum_{u \in \mathrm{Hom}_A(E, mE)} u(E) = mE$.

En effet, si (μ_j) $(j = 1, \ldots, p)$ est une base minimale de m sur A, un système de générateurs de mE sur A est constitué par les $\mu_j e_i$ $(j = 1, \ldots, p;\ i = 1, \ldots, n)$. Il suffit, donc, de montrer que $\mu_j e_i$ peut être obtenu dans le premier membre et c'est évident si on prend l'application $\mu_j . 1$ où 1 est l'application identique de E. Il est, d'ailleurs, clair que l'on a un résultat analogue si l'on remplace m par un idéal a quelconque de A.

Si C est un sous-module caractéristique maximal, il peut se faire que l'application canonique de $\mathfrak{L}(E)$ dans $\mathfrak{L}(E/C)$ soit surjective sans que E soit A/Ann(E)-libre.

Exemple. — $A = k[[X_1, X_2]]$ et $E \simeq \mathfrak{L}(E) = k[[X_1]] \oplus k[[X_2]]$.

Un sous-module caractéristique maximal est, par exemple,

$$C = X_1 k[[X_1]] \oplus k[[X_2]] \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{L}(E/C) = k;$$

or,

$$\mathrm{Hom}_A(E,\ C) = X_1 k[[X_1]] \oplus k[[X_2]]$$

et donc,

$$\mathfrak{L}(E)/\mathrm{Hom}_A(E, C) = k.$$

Il n'en est pas toujours ainsi : on prend, par exemple, $A = R[[X_1, X_2]]$ où R est le corps des réels et E quotient du A-module libre $Ax_1 \oplus Ax_2$ par le sous-module engendré par

$$y_1 = X_1 x_1 + X_2 x_2 \qquad \text{et} \qquad y_2 = X_2 x_1 + X_1 x_2.$$

Alors, $\mathfrak{L}(E)/\mathrm{Hom}_A(E, mE)$ est isomorphe au corps C des complexes. Le seul sous-module caractéristique maximal est mE mais $\mathfrak{L}(E/mE)$ n'est pas isomorphe à C.

En fait, on a deux possibilités pour un sous-module maximal : il est fidèle ou il ne l'est pas. Dans ce cas, soient F ce module et a son annulateur; il est clair que $F = Ann(a)$, ensemble des $x \in E$ tels que $ax = 0$ si E est lui-même fidèle. Il en résulte que F est caractéristique et que E/F est simple, donc isomorphe au corps des restes k. D'autre part,

$$\mathrm{Hom}_A(E, F) \cap A \subset \mathrm{Hom}_A(E, mE) \cap A = m$$

et, donc, $\mathrm{Hom}_A(E, F) \cap A = m$ et on en déduit que A/m se plonge dans $\mathfrak{L}(E)/\mathrm{Hom}_A(E, F)$, et que ce quotient est $A/m = k$, d'où la surjectivité.

3. Idéaux bilatères maximaux de $\mathfrak{L}(E)$.

LEMME. — *Soit* R *un anneau, non nécessairement commutatif, à élément unité et soit* I *un idéal bilatère maximal de* R, *alors* I *contient le radical de Jacobson* r *de* R.

En effet, si I ne contenait pas r, puisque I est maximal et r bilatère, $I + r = R$: il existerait, donc, $a \in r$ et $b \in I$ tel que $b = 1 - a$ mais $1 - a$ est inversible et ceci impliquerait $I = R$.

Soit, alors, I un idéal bilatère maximal de $\mathfrak{L}(E)$ où E est un module de type fini sur A local. L'idéal I contient le radical de Jacobson r, donc, à fortiori, $\mathrm{Hom}_A(E, mE)$. Le A-module $\mathfrak{L}(E)$ est un A-module noethérien comme quotient d'un sous-anneau de $M_n(A)$ si nous faisons l'hypothèse A *noethérien.* Le A-module I est, donc, engendré par des éléments $u_1, \ldots, u_p$ en nombre fini et si $u \in I$, il s'écrit $a_1u_1 + \cdots + a_pu_p$ avec $a_i \in A$ $(i = 1, \ldots, p)$ et, par suite, $u(E)$ est contenu dans $u_1(E) + \cdots + u_p(E)$ en sorte que $D(I) = u_1(E) + \cdots + u_p(E)$. Nous poserons pour simplifier $D(I) = C$.

Soit φ l'application canonique de $\mathfrak{L}(E)$ dans

$$S = \mathfrak{L}(E)/\mathrm{Hom}_A(E, mE)$$

et soit $\varphi(I) = \bar{I}$: c'est un k-espace vectoriel engendré par les classes $\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_p$ de $u_1, \ldots, u_p$ respectivement modulo $\mathrm{Hom}_A(E, mE)$. Posons, enfin, $\bar{C} = C/mE = \bar{u}_1(\bar{E}) + \cdots + \bar{u}_p(\bar{E})$ où $\bar{E}$ est E/mE. Si $v \in \mathrm{Hom}_A(E, C)$ et si $\bar{v} = \varphi(v)$, alors $\bar{v}(\bar{E})$ est contenu dans $\bar{C}$.

Considérons l'idéal à droite I' de $\mathfrak{L}(\bar{E})$ engendré par $\bar{I}$: il est, en tant qu'idéal engendré par $\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_p$. Si donc $\bar{u} \in I'$, $\bar{u}$ peut s'écrire $\bar{u}_1\bar{w}_1 + \cdots + \bar{u}_p\bar{w}_p$ où $\bar{w}_i \in \mathfrak{L}(\bar{E})$ pour $i = 1, \ldots, p$. On en déduit que $\bar{u}(\bar{E}) \subset \bar{C}$. Un résultat classique sur les idéaux à droite de $\mathfrak{L}(\bar{E})$ montre que I' est l'ensemble des $\bar{v}$ de $\mathfrak{L}(\bar{E})$ tels que $\bar{v}(\bar{E}) \subset \bar{C}$. Donc $\bar{v}(\bar{E}) \subset \bar{C}$ implique que $\bar{v} \in I'$. En définitive, $v(E) \subset C$ implique $\bar{v} \in I' \cap S$.

$I' \cap S$ est un idéal à droite de S mais c'est également un idéal à gauche car, si $\bar{v} \in \mathrm{I}'$, $\bar{v}$ s'écrit $\bar{u}_1\bar{w}_1 + \cdots + \bar{u}_p\bar{w}_p$ avec les notations ci-dessus. Si $\bar{w} \in \mathrm{S}$, $\overline{wv} = \bar{w}_1\overline{wu}_1, \cdots + \overline{wu}_p\bar{w}_p$ mais, comme $\overline{wu}_i \in \mathrm{I}'(i = 1, ..., p)$, on voit que $\overline{wv} \in \mathrm{I}'$ donc $\overline{wv} \in \mathrm{I}' \cap \mathrm{S}$.

Tout ce qui précède est évidemment valable si I est un idéal bilatère contenant $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{E}, m\mathrm{E})$. Nous voyons, donc,

Proposition 3. — *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un idéal bilatère* I *contenant* $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{E}, m\mathrm{E})$ *soit de la forme* $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{E}, \mathrm{C})$ *est que* $\mathrm{I}' \cap \mathrm{S} = \bar{\mathrm{I}}$ *si* $\bar{\mathrm{I}} = \mathrm{I}/\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{E}, m\mathrm{E})$ *et* $\mathrm{I}' = \bar{\mathrm{I}}\mathfrak{L}(\bar{\mathrm{E}})$.

En effet, s'il en est ainsi $v(\mathrm{E}) \subset \mathrm{C}$ implique $\bar{v}(\bar{\mathrm{E}}) \subset \bar{\mathrm{C}}$ et ceci implique $\bar{v}$ dans $\bar{\mathrm{I}}$, soit, puisque I contient $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{E}, m\mathrm{E})$, v dans I. Il en résulte l'inclusion $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{E}, \mathrm{C}) \subset \mathrm{I}$ mais l'inclusion en sens inverse est immédiate. La condition est, donc, suffisante et elle est évidemment nécessaire.

Corollaire. — *Si* S *est commutatif, tout idéal bilatère* I *contenant* $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{E}, m\mathrm{E})$ *est de la forme* $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{E}, \mathrm{C})$ *où* C *est caractéristique.*

Nous reportons la démonstration de ce corollaire au paragraphe 8.

Revenons au cas où I est un idéal bilatère maximal : $\mathfrak{L}(\mathrm{E})/\mathrm{I} = \mathrm{S}/\bar{\mathrm{I}}$ est alors une algèbre simple et on a les seules possibilités :

1) $\mathrm{I}' \cap \mathrm{S} = \bar{\mathrm{I}}$, soit $\mathrm{I} = \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{E}, \mathrm{C})$. Si C′ est un sous-module caractéristique maximal contenant C et distinct de E, $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{E}, \mathrm{C})$ est contenu dans $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{E}, \mathrm{C}')$ et donc $\mathrm{I} = \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{E}, \mathrm{C}')$.

2) $\mathrm{I}' \cap \mathrm{S} = \mathrm{S}$. Ceci implique $\mathrm{I}' = \mathfrak{L}(\bar{\mathrm{E}})$, soit $\bar{\mathrm{C}} = \bar{\mathrm{E}}$ et, par suite, $\mathrm{C} = \mathrm{E}$. Nous verrons ultérieurement que ceci est possible.

4. Réciproque.

Nous nous proposons de montrer, réciproquement, que si C est un sous-module caractéristique maximal, $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{E}, \mathrm{C})$ est un idéal bilatère maximal.

Soit $u \notin \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{E}, \mathrm{C})$. Considérons l'idéal bilatère engendré par u dans $\mathfrak{L}(\mathrm{E})$, c'est-à-dire l'ensemble des sommes finies $x_1uy_1 + \cdots + x_puy_p$ où x_i, $y_i \in \mathfrak{L}(\mathrm{E})$. Il est évident que

$(x_1uy_1 + \cdots + x_puy_p)\,(\mathrm{E})$ est contenu dans $x_1u(\mathrm{E}) + \cdots + x_pu\mathrm{E}$. Considérons le sous-module $\Sigma_{x_i \in \mathrm{L}(\mathrm{E})}\, x_iu(\mathrm{E})$: il est caractéristique et non contenu dans C car $u(\mathrm{E})$ n'est pas contenu dans C. Il s'ensuit que

$$\mathrm{C} + \Sigma_{x_i \in \mathfrak{L}(\mathrm{E})}\, x_iu(\mathrm{E}) = \mathrm{E}.$$

Nous passons au quotient par C pour les modules et par $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}\,(\mathrm{E},\ \mathrm{C})$ pour les idéaux : dans ces deux cas $\tilde{y}$ désignera la classe de y. Il vient si $\tilde{\mathrm{S}}$ est l'image de $\mathfrak{L}(\mathrm{E})$ dans $\mathfrak{L}(\mathrm{E}/\mathrm{C})$

$$\Sigma_{\tilde{x}_i \in \tilde{\mathrm{S}}}\, \tilde{x}_i\tilde{u}(\mathrm{E}) = \tilde{\mathrm{E}}$$

1) $\tilde{\mathrm{S}}$ *est semi-simple.* — Désignons par rad $(\tilde{\mathrm{S}})$ le radical de Jacobson de $\tilde{\mathrm{S}}$. L'anneau $\tilde{\mathrm{S}}$ est artinien. Soit donc p l'entier tel que rad $(\tilde{\mathrm{S}})^p = 0$ et rad $(\tilde{\mathrm{S}})^{p-1} \neq 0$. Si $\tilde{\varphi}$ est un élément non nul de rad $(\tilde{\mathrm{S}})^{p-1}$ et si $\tilde{u}$ appartient à rad $(\tilde{\mathrm{S}})$, il résulte de ce que $\tilde{x}_i\tilde{u}$ appartient à rad $(\tilde{\mathrm{S}})$ que $\tilde{\varphi}\tilde{x}_i\tilde{u}$ appartient à rad $(\tilde{\mathrm{S}})^p = 0$. Mais, alors, $\tilde{\varphi}(\tilde{\mathrm{E}})$ est contenu dans $\tilde{\varphi}(\Sigma_{\tilde{x}_i \in \tilde{\mathrm{S}}}\, \tilde{x}_i\tilde{u}(\tilde{\mathrm{E}}))$ et, a fortiori, dans $\Sigma_{\tilde{x}_i \in \tilde{\mathrm{S}}}\, \tilde{\varphi}\tilde{x}_i\tilde{u}(\tilde{\mathrm{E}})$ qui est 0. Ceci contredit l'hypothèse faite sur $\tilde{\varphi}$ et il s'ensuit que $p = 0$ et rad $(\tilde{\mathrm{S}}) = 0$. Puisque $\tilde{\mathrm{S}}$ est artinien, il est semi-simple.

2) $\tilde{\mathrm{S}}$ *est simple.* — Soit, en effet, $\tilde{u}$ un idempotent non nul dans le centre de $\tilde{\mathrm{S}}$. Alors,

$$(\tilde{1} - \tilde{u})\,(\tilde{\mathrm{E}}) = \Sigma_{\tilde{x}_i \in \tilde{\mathrm{S}}}\tilde{x}_i(\tilde{1} - \tilde{u})\tilde{u}(\tilde{\mathrm{E}}) = 0 \qquad \text{et} \qquad \tilde{u} = \tilde{1}.$$

En vertu de (6) (corollaire 1 de la proposition 12 du n° 5, § 5), le centre de $\tilde{\mathrm{S}}$ est un corps et $\tilde{\mathrm{S}}$ est simple. Puisque $\mathfrak{L}(\mathrm{E})/\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}\,(\mathrm{E},\ \mathrm{C}) = \tilde{\mathrm{S}}$ est simple, $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}\,(\mathrm{E},\ \mathrm{C})$ est un idéal bilatère maximal et nous pouvons énoncer :

Théorème 1. — *Si* I *est un idéal bilatère maximal de* $\mathfrak{L}(\mathrm{E})$, *ou bien* I *est de la forme* $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}\,(\mathrm{E},\ \mathrm{C})$ *où* C *est un sous-module qui peut être choisi caractéristique maximal ou bien le sous-module* $\mathrm{D}(\mathrm{I}) = \Sigma_{u \in \mathrm{I}}\, u(\mathrm{E})$ *est* E *tout entier.*

Réciproquement, si C *est un sous-module caractéristique maximal,* $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}\,(\mathrm{E},\ \mathrm{C})$ *est un idéal bilatère maximal.*

On pourra remarquer l'analogie avec la structure des idéaux maximaux (à droite) d'un espace vectoriel de dimension infinie. Cette analogie est assez naturelle dans le cas où l'anneau local A contient un corps isomorphe à A/m.

5. Idéaux à droite maximaux.

Nous reviendrons ultérieurement sur les idéaux bilatères maximaux. En ce qui concerne les idéaux à droite maximaux, le § 3 se transpose littéralement, c'est-à-dire :

THÉORÈME 2. — *Si* I *est un idéal à droite maximal,* I *est ou bien de la forme* $\mathrm{Hom}_A(E, F)$ *où* F *peut être choisi maximal ou bien tel que* $\Sigma_{u \in I}\, u(E) = E$.

La réciproque n'est plus vraie; si F est un sous-module maximal $\mathrm{Hom}_A(E, F)$ n'est pas forcément un idéal à droite maximal. La raison en est facile à comprendre; admettons l'analogue du corollaire de la proposition 3 :
Si S *est commutatif, tout idéal à droite maximal est de la forme* $\mathrm{Hom}_A(E, F)$ *où* F *peut être choisi maximal,* forme qui résulte du fait qu'un idéal à droite contenant $\mathrm{Hom}_A(E, mE)$ est nécessairement bilatère.

Si la réciproque était vraie, on aurait si r désigne le radical de Jacobson de $\mathfrak{L}(E)$, $r = \bigcap \mathrm{Hom}_A(E, F)$ où F parcourt l'ensemble des sous-modules maximaux, soit

$$r = \mathrm{Hom}_A(E, \bigcap F) = \mathrm{Hom}_A(E, mE)$$

puisque F est le radical de E, c'est-à-dire mE ((6) § 6 ex. 29). Or, S commutatif n'implique pas S semi-simple :

Exemple : $A = k[[X_1, X_2, X_3]]$ où k est un corps et où X_1, X_2, X_3 sont des variables. On prend $E = Ae_1 + Ae_2 + Ae_3$ avec les relations $X_1e_1 = 0$; $X_2e_1 + X_1e_2 = 0$, $X_3e_3 = 0$.

$S = \mathrm{Im}\mathfrak{L}((E) \to \mathfrak{L}(\overline{E}))$ est l'ensemble des matrices de la forme :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

à coefficients dans k.

Considérons le sous-module $F = me_1 + Ae_2 + Ae_3$ où m est l'idéal (X_1, X_2, X_3). Il est clair que F est maximal et on voit, sans difficulté, que $F = Ae_2 + Ae_3$. Il n'est pas caractéristique car si $\overline{F}$ est F/mE, $\overline{F} = k\overline{x}_2 + k\overline{x}_3$ avec des notations évidentes et si $\overline{u} \in S$, $\overline{u}(\overline{x}_2) = b\overline{x}_1 + a\overline{x}_2$ et $\overline{u}(\overline{x}_3) = c\overline{x}_1 + a\overline{x}_3$ et $\overline{F}$ n'est pas invariant par S.

$\mathrm{Hom}_A(E, mE) = \mathrm{Hom}_A(E, F)$. — En effet, $u \in \mathrm{Hom}_A(E, F)$ est équivalent à $\overline{u} \in \mathrm{Hom}_k(\overline{E}, \overline{F}) \cap S$. Or, $\mathrm{Hom}_k(\overline{E}, \overline{F})$ est l'ensemble des matrices de la forme :

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

et on en déduit que $\mathrm{Hom}_k(\overline{E}, \overline{F}) \cap S = (0)$, c'est-à-dire $\mathrm{Hom}_A(E, F)$ contenu dans $\mathrm{Hom}_A(E, mE)$ et puisque l'inclusion en sens inverse résulte de ce que $mE \subset F$, $\mathrm{Hom}_A(E, F) = \mathrm{Hom}_A(E, mE)$.

Nous voyons donc :

1) *Un sous-module non caractéristique peut donner lieu à un idéal bilatère.*

2) *Un sous-module maximal ne donne pas forcément un idéal à droite maximal.*

Si on considère maintenant les deux sous-modules maximaux :

$$C_1 = Ae_1 + Ae_2 + me_3$$
$$C_2 = Ae_1 + me_2 + Ae_3$$

on vérifie comme ci-dessus qu'ils sont caractéristiques et donnent par suite deux idéaux bilatères maximaux $\mathrm{Hom}_A(E, C_1)$ et $\mathrm{Hom}_A(E, C_2)$. Comme S est local, on doit avoir

$$\mathrm{Hom}_A(E, C_1) = \mathrm{Hom}_A(E, C_2) = \mathrm{Hom}_A(E, C_1 \cap C_2)$$

où

$$C_1 \cap C_2 = Ae_1 + me_2 + me_3.$$

D'où

3) *Deux sous-modules caractéristiques distincts peuvent donner le même idéal bilatère.*

6. Idéaux à gauche maximaux.

Tout ce qui sera dit dans ce paragraphe sur les idéaux à gauche maximaux se transpose facilement aux idéaux bilatères maximaux.

Soit I un idéal à gauche maximal de $\mathfrak{L}(E)$. Désignons par $F = F(I)$ l'ensemble des x de E tels que $u(x) \in mE$ pour tout u de I. Si A est noethérien, le A-module I est engendré par $u_1, \ldots, u_p$ et $F = \bigcap F_i$ si F_i est l'ensemble des x de E tels que $u_i(x) \in mE$:

En effet, si $x \in \bigcap F_i$ et $u \in I$, on peut écrire $u = a_1u_1 + \cdots + a_pu_p$ avec a_i dans A et on en déduit

$$u(x) = a_1u_1(x) + \cdots + a_pu_p(x) \in mE \qquad \text{et} \qquad x \in F.$$

Soient $\bar{I} = I/\mathrm{Hom}_A(E, mE)$ et $\bar{F} = F/mE$ et désignons par $'I$ l'idéal à gauche engendré par $\bar{I}$ dans $\mathfrak{L}(\bar{E})$; il est immédiat que $'I$ est l'ensemble des $\bar{\varphi} \in \mathfrak{L}(\bar{E})$ tels que $\bar{\varphi}(\bar{F}) = 0$.

L'idéal $'I \cap S$ est un idéal à gauche de S et nous avons les deux possibilités :

1) $'I \cap S = S$: ceci implique $I' = \mathfrak{L}(\bar{E})$ puis $\bar{F} = 0$ et, finalement, $F = mE$.

2) $'I \cap S = \bar{I}$: l'appartenance de $\bar{u}$ à $\bar{I}$ est équivalente à la conjonction des deux conditions : $\bar{u}$ est dans S et $\bar{u}(\bar{F}) = 0$. On en déduit que u est dans I est équivalent à $u(F) \subset mE$.

Théorème 2. — *Soit* I *un idéal à gauche maximal de* $\mathfrak{L}(E)$. *Soit* F *l'ensemble des x de* E *tels que $u(x)$ appartienne à mE pour tout u de* I. *Si* F *est distinct de mE,* I *est l'ensemble des u de* $\mathfrak{L}(E)$ *tels que $u(F)$ soit contenu dans mE. Dans ce cas,* I *est aussi l'ensemble des u de* $\mathfrak{L}(E)$ *tels que $u(F')$ soit contenu dans mE où* F' *est un sous-module qui peut être pris minimal parmi les sous-modules contenant mE.*

7. Quelques exemples montrant l'existence éventuelle d'idéaux bilatères présentant les anomalies rencontrées ci-dessus.

Prenons $A = k[[X]]$ et $E = k \oplus k[[X]]/(X^2) \oplus k[[X]]/(X^3)$. L'algèbre S est alors l'ensemble des matrices triangulaires :

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ a_2 & a_3 & 0 \\ a_4 & a_5 & a_6 \end{vmatrix}$$

à coefficients dans k.

Désignons par R l'anneau $\mathfrak{L}(\bar{E})$ et prenons I tel que son image $\bar{I}$ dans S soit l'idéal de S formé des matrices pour lesquelles $a_3 = 0$. Le quotient $S/\bar{I}$ est isomorphe à k et, par suite, I est maximal.

Considérons d'abord I comme idéal à droite et montrons que $\bar{I}R = R$:

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 b_1 & a_2 b_1 & a_3 b_1 \\ a_1 b_2 & a_2 b_2 & a_3 b_2 \\ a_1 b_3 & a_2 b_3 & a_2 b_3 \end{vmatrix}$$

Il suffit de choisir $b_1, \ldots, b'_3$ de telle sorte que

$$\det \begin{vmatrix} b_1 & b'_1 & b_1 \\ b_2 & b'_2 & b''_2 \\ b_3 & b'_3 & b''_3 \end{vmatrix}$$

soit différent de 0 pour qu'au moyen d'une somme de trois termes convenables du type (1) avec dans le premier les b_i, dans le second les b'_i et dans le troisième les b''_i, on puisse obtenir n'importe quel élément de R par résolution d'un système de Cramer.

Ceci montre que $\Sigma_{u \in I}\, u(E) = E$.

Si nous considérons maintenant I comme un idéal à gauche, un procédé analogue (qui revient à faire la symétrie par rapport à la diagonale secondaire) montre que $R\bar{I} = R$ et, par suite, que le sous-module F considéré dans le § 6 est mE.

En compliquant très légèrement cet exemple et plus précisément en prenant des matrices triangulaires d'ordre 4, on verrait que deux idéaux maximaux distincts peuvent donner lieu à cette circonstance.

8. Il est, toutefois, deux cas simples dans lesquels cette circonstance est impossible :

a) *On suppose que* $\mathfrak{L}(E)$ *est complètement primaire.*

Il y a alors dans E au moins un sous-module caractéristique maximal et il fournit l'idéal bilatère maximal. Comme il n'y en a pas d'autre, le résultat annoncé est évident. Ce résultat pourrait être déduit directement du lemme de Nakayama.

b) *On suppose que* $S = \mathfrak{L}(E)/\mathrm{Hom}_A(E, mE)$ *est commutatif.*

Ceci constitue la démonstration du corollaire de la proposition 3. Soit I un idéal bilatère contenant $\mathrm{Hom}_A(E, mE)$ et tel que $\bar{I} = I/\mathrm{Hom}_A(E, mE)$ soit premier et montrons que $\bar{I}R \cap S = \bar{I}$.

Le S-module R est, en effet, de type fini. Soit $(1, Z_2, \ldots, Z_p)$ un système de générateurs de R sur S. On peut écrire si $a \in \bar{I}R$

$$a.1 = i_{11} + i_{12}Z_2 + \cdots + i_{1p}Z_p$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a.Z_p = i_{p1} + i_{p2}Z_2 + \cdots + i_{pp}Z_p$$

La méthode du déterminant de Krull, valable parce que S est commutatif, donne alors pour a une équation de dépendance intégrale $a^p + q_1{}^{p-1} + \cdots + q_p = 0$ où $q_j \in \bar{I}^j$. Donc $a^p \in \bar{I}$ et si $\bar{I}$ est premier ou plus généralement intersection d'idéaux premiers $a \in \bar{I}$. Ceci constitue la démonstration annoncée.

En particulier, un idéal bilatère maximal I est tel que $\bar{I}$ soit premier et I est, donc, de la forme $\mathrm{Hom}_A(E, C)$ avec C caractéristique maximal.

Remarquons que la démonstration faite ci-dessus reste valable si l'on suppose $\bar{I}$ intégralement clos.

9. Un contre-exemple à la formule $D(d(C)) = C$.

Reprenons l'exemple de § 5. Le sous-module C_1 est caractéristique. Posons $I = \mathrm{Hom}_A(E, C_1) = d(C_1)$: il est clair que I contient $\mathrm{Hom}_A(E, mE)$ et, par suite, que $D(I)$ contient mE. Le lemme de Nakayama montre que $D(I) \neq C_1$ équivaut à $D(I)/mE \neq C_1/mE$; $\bar{u}$ appartient à $\bar{I}$ si et seulement si il appartient à $S \cap \mathrm{Hom}_k(E, C_1)$ car S est commutatif. Mais il est immédiat que $\mathrm{Hom}_k(\bar{E}, \bar{C}_1)$ est l'idéal à droite de $\mathfrak{L}(\bar{E})$ formé des matrices de la forme :

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

par rapport à la base considérée dans § 5.

Donc, $\mathrm{Hom}_k(\bar{E}, \bar{C})$ est l'ensemble $\bar{I}$ des matrices de la forme :

$$\begin{vmatrix} 0 & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

qui est, d'ailleurs, le radical de S. Il est, alors, immédiat que $D(I)/mE$ est $k\bar{x}_1$ et est contenu strictement dans $\bar{C}_1$ qui est $k\bar{x}_1 + k\bar{x}_2$, car $D(I)/mE$ est $\Sigma_{\bar{u} \in \bar{I}}\bar{u}(\bar{E})$.

CHAPITRE IV

Nous nous proposons de rassembler dans ce chapitre un certain nombre de résultats sur le dual E^* de E.

1. Une généralisation du sous-module de torsion.

Proposition 1 et définition. — *Soient* A *un anneau commutatif,* K *son anneau total des fractions,* E *un* A*-module et* T *un sous-module. Il y a équivalence entre :*

1) T *est le noyau de l'homorphisme* $E \to E \otimes_A K$.

2) T *est l'ensemble des* x *de* E *dont l'annulateur contient un élément régulier de* A.

T *sera dit le sous-module de torsion généralisée de* E.

L'équivalence de 1) et 2) résulte, immédiatement, du lemme 3 des Préliminaires. Le fait pour x de E d'appartenir à T est, donc, équivalent à l'existence de a régulier de A, tel que $ax = 0$. Cette définition a les conséquences suivantes :

T_1) Si l'anneau A est intègre, le sous-module de torsion généralisée coïncide avec le sous-module de torsion.

T_2) T est caractéristique : en effet, si $x \in T$, il existe a régulier de A tel que $ax = 0$ et pour tout $u \in \mathfrak{L}(E)$, $au(x) = 0$ et $u(x) \in T$.

T_3) Le quotient E/T du module E par son sous-module de torsion généralisée n'a pas de torsion généralisée : si $\bar{x} \in E/T$ est tel qu'il existe a régulier de A avec $a\bar{x} = 0$, $ax \in T$ si x est un représentant de $\bar{x}$; il existe, donc, b régulier dans A tel que $bax = 0$ et, par suite, $x \in T$ et $\bar{x} = 0$.

T_4) Si E est fidèle et T de type fini, par exemple si E est noethérien fidèle, E/T est fidèle. Il existe, en effet, a régulier dans A tel que $a\mathrm{T} = 0$. Si b de A est tel que $b\,.\,\mathrm{E/T} = 0$, alors $b\mathrm{E} \subset \mathrm{T}$ et $ab\mathrm{E} = 0$. La fidélité de E montre alors que $ab = 0$ et $b = 0$.

Toutes ses propriétés sont vraies pour le sous-module de torsion dans le cas où A est intègre.

T_5) Contrairement à ce qui se passe dans ce dernier cas, il n'y a pas de raison pour que le sous-module de torsion généralisée soit *pur* : on a, en effet, $b\mathrm{E} \cap \mathrm{T} = b\mathrm{T}$ si b est régulier dans A mais on ne peut rien affirmer si b est diviseur de 0.

T_6) Si E est un A-module, le dual $(\mathrm{E/T})^*$ de E/T est égal au dual E^* de E : en effet, si $u : \mathrm{E} \to \mathrm{A}$ et $x \in \mathrm{T}$, on a $au(x) = 0$ avec a régulier, d'où $u(x) = 0$ et $u(\mathrm{T}) = 0$. Donc, $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{T}, \mathrm{A}) = \mathrm{T}^* = 0$. La suite exacte :

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{E/T}, \mathrm{A}) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{E}, \mathrm{A}) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{T}, \mathrm{A})$$

donne, alors, le résultat. Le dual d'un module ne peut, donc, déterminer celui-ci qu'au sous-module de torsion généralisée près. Si A est principal, il le détermine effectivement modulo ce sous-module.

T_7) Si le A-module E n'a pas de torsion généralisée, l'application canonique de E dans $\mathrm{E} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{K}$ où K est l'anneau total des quotients de A est injective.

2. Ce paragraphe contient essentiellement une présentation légèrement différente de résultats de Rees [16] un peu généralisés.

Proposition 2. — *Soit* A *noethérien intègre, de corps des fractions* K, *et soit* E *un* A*-module de type fini, les assertions suivantes sont équivalentes :*

1) E *est fidèle.*
2) $\mathrm{E} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{K}$ *est différent de* 0.
3) $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{E}, \mathrm{A})$ *est différent de* 0.
4) $\mathrm{Hom}_{\mathrm{K}}(\mathrm{E} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{K}, \mathrm{K})$ *est différent de* 0.

L'équivalence de 2) et 4) est immédiate car $\mathrm{E} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{K}$ est un espace vectoriel sur K. Non 2) implique Non 1) car $a\mathrm{E} = 0$

implique $a\left(E \otimes_A K\right)$ si l'on remarque que $(aE) \otimes_A K$ se plonge dans $E \otimes_A K$, en raison de la platitude de K, et que $(aE) \otimes_A K = a\left(E \otimes_A K\right)$ comme on le voit en calculant dans $E \otimes_A K$.

Non 2) implique que E est un module de torsion et, puisque E est de type fini, que E n'est pas fidèle, soit Non 1).

Enfin 3) et 4) sont équivalents car

$$\mathrm{Hom}_K\left(E \otimes_A K,\ K\right) = \mathrm{Hom}_A(E,\ A) \otimes_A K \quad \text{et} \quad \mathrm{Hom}_A(E,\ A)$$

se plonge dans $\mathrm{Hom}_A(E,\ A) \otimes_A K$ car, $\mathrm{Hom}_A(E,\ A)$ est sans torsion.

Théorème 1. — *Soit* A *un anneau noethérien et soit* E *un* A-*module de type fini fidèle. Il y a équivalence pour un* A-*module* F *entre :*

1) $F = 0$.

2) $\mathrm{Hom}_A(E,\ F) = 0$.

La démonstration de ce lemme s'appuie sur le lemme :

Lemme. — *Si l'idéal p de* A *est premier (ou plus généralement intégralement clos), et si* E *est un* A-*module de type fini fidèle,* E/pE *est fidèle en tant que* A/p-*module.*

Soit, en effet, $\bar{a} \in A/p$ tel que $\bar{a}.E/pE = 0$. Si a est un représentant de $\bar{a}$ dans A, ceci équivaut à $aE \subset pE$, c'est-à-dire, si $e_1, \ldots, e_n$ sont des générateurs de E à : $ae_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ji}e_j$ où $b_{ji} \in p (i = 1, \ldots, n)$. La méthode du déterminant de Krull donne, alors, $\det(b_{ji} - \delta_{ji}a)e_i = 0$ pour $i = 1, \ldots, n$. Puisque E est fidèle, $\det(b_{ji} - \delta_{ji}a) = 0$. En développant ce déterminant, on obtient pour a une équation de dépendance intégrale : $a^n - b_1a^{n-1} - \cdots - b_n = 0$ où $b_i \in p^i$. La définition d'un idéal intégralement clos montre, alors, que $a \in p$, soit $\bar{a} = 0$. Plus simplement, si p est premier, $a^n \in p$, donc, $a \in p$.

Démonstration du théorème : il est clair que l'on peut supposer F de type fini. Si F est différent de 0, il existe un idéal premier p, en fait associé à F, et différent de A tel que A/p se plonge dans F. Il nous suffit de montrer que $\mathrm{Hom}_A(E,\ A/p)$ est différent de 0. Or, $\mathrm{Hom}_A(E,\ A/p)$ s'identifie canoniquement à $\mathrm{Hom}_{A/p}(E/pE,\ A/p)$ et E fidèle implique E/pE fidèle en tant que A/p-module, donc $\mathrm{Hom}_{A/p}(E/pE,\ A/p)$ est différent de 0. Le théorème est, donc, démontré.

3. Anneau des endomorphismes d'un dual et d'un bidual.

Rappelons la proposition suivante (4) :

Soient A *un anneau commutatif et* E, F, G *des* A-*modules, l'application qui à* $g : E \otimes_A F \to G$ *fait correspondre*

$$g' : E \to \mathrm{Hom}_A(F, G)$$

par $(g'(x))(y) = g(x \otimes y)$ *pour* $x \in E$ *et* $y \in F$ *est un isomorphisme de* $\mathrm{Hom}_A(E \otimes_A F, G)$ *sur* $\mathrm{Hom}_A(E, \mathrm{Hom}_A(F, G))$.

Soit alors φ l'application canonique de E dans son bidual E^{**} : elle est définie par $\varphi(x) = x''$ où $x''(x^*) = x^*(x)$ si $x \in E$, $x^* \in E^*$. Si $u \in \mathfrak{L}(E)$, il lui correspond $u' : E \to E^{**}$ où $u' = \varphi u$. Considérons alors la suite d'isomorphismes :

$$\mathrm{Hom}_A(E, \mathrm{Hom}_A(E^*, A)) \to \mathrm{Hom}_A(E \otimes_A E^*, A)$$
$$\to \mathrm{Hom}_A(E^*, \mathrm{Hom}_A(E, A)) = L(E^*).$$

Elle fait correspondre à $u' : E \to E^{**}$ défini ci-dessus $u'' : E^* \to E^*$ par la formule : $u'(x)(y^*) = u''(y^*)(x)$ si $x \in E$ et $y^* \in E^*$. Nous obtenons, donc, $u''(y^*)(x) = \varphi(x)(y^*) = \varphi(u(x))(y^*) = y^*(u(x))$ et ceci montre que $u'' = {}^t u$ où ${}^t u$ désigne la transposée de u.

Nous voyons, donc, que $\mathfrak{L}(E^*)$ est canoniquement isomorphe à $\mathrm{Hom}_A(E, E^{**})$ et de plus :

Proposition 3. — *Une condition nécessaire et suffisante pour que la transposition soit un isomorphisme du* A-*module* $\mathfrak{L}(E)$ *sur le* A-*module* $\mathfrak{L}(E^*)$ *est que l'application canonique* φ *de* E *dans son bidual* E^{**} *soit un isomorphisme. La transposition est alors un anti-isomorphisme d'anneaux.*

Une condition nécessaire pour qu'il en soit ainsi est, puisqu'un dual et a fortiori un bidual n'a pas de torsion généralisée, que E n'ait pas de torsion généralisée. Plaçons nous, alors, dans la situation suivante : A est un anneau noethérien intègre de corps des fractions K et E est un A-module de type fini sans torsion. Si N est le noyau de l'application canonique φ de E dans E^{**} on a, par platitude, la suite exacte :

$$0 \longrightarrow N \otimes_A K \longrightarrow E \otimes_A K \xrightarrow{\varphi \otimes 1} E^{**} \otimes_A K$$

mais, $E^{**} \underset{A}{\otimes} K$ s'identifie canoniquement à $(E \underset{A}{\otimes} K)^{**}$, toujours pour des raisons de platitude. Le K-espace vectoriel $(E \underset{A}{\otimes} K)$ est de dimension finie égale au rang de E. L'application canonique de $E \underset{A}{\otimes} K$ dans $(E \underset{A}{\otimes} K)^{**}$ est un isomorphisme de A-modules et c'est visiblement $\varphi \otimes 1$; par conséquent, $N \underset{A}{\otimes} K = 0$ et $N = 0$ car N est sans torsion et se plonge dans $N \underset{A}{\otimes} K$. Le conoyau S de 0 est tel que $S \underset{A}{\otimes} K = 0$ et S est donc un module de torsion.

Théorème 2. — *Si* E *est un module de type fini sans torsion sur l'anneau noethérien intègre* A, *l'application canonique* φ *de* E *dans son bidual* E^{**} *est injective et le conoyau de h est un module de torsion. Alors, la transposition est un isomorphisme (resp. anti-isomorphisme) de* A-*modules (resp. d'anneaux) de* $\mathfrak{L}(E)$ *dans* $\mathfrak{L}(E^{**})$.

Nous renvoyons à : Rees Polar Modules, *Proc. Cambridge phil. Soc.*, t. 52, 1956, pp. 605-610 pour la démonstration du fait que les homomorphismes canoniques font de E^* un facteur direct de E^{***} et plus généralement de $E^{(n)}$ un facteur direct de $E^{(n+2)}$ si $n \geqslant 1$ où $E^{(n+1)}$ désigne le dual de $E^{(n)}$ avec $E^{(0)} = E$. Donc,

Proposition. — *Soient* A *un anneau commutatif et* E *un* A-*module. La transposition applique* $\mathfrak{L}(E^*)$ *isomorphiquement en tant que* A-*module sur un facteur direct de* $\mathfrak{L}(E^{**})$ *et anti-isomorphiquement en tant qu'anneau.*

Remarques. — Il peut se faire qu'il existe un isomorphisme de A-modules de $\mathfrak{L}(E)$ sur $\mathfrak{L}(E^*)$ qui ne soit pas la transposition. Identifions alors $\mathfrak{L}(E^*)$ à $\mathrm{Hom}_A(E, E^{**})$ au moyen des isomorphismes canoniques et désignons par h l'homologue dans $\mathrm{Hom}_A(E, E^{**})$ de l'application identique de E. Supposons E fidèle.

1) *h est injectif :* si N, est en effet, le noyau de h, la suite exacte $O \to N \to E \xrightarrow{h} E^{**}$ donne la suite exacte :

$$O \to \mathrm{Hom}_A(E, N) \to \mathrm{Hom}_A(E, E) \to \mathrm{Hom}_A(E, E^{**}).$$

Nous en déduisons $\mathrm{Hom}_A(E, N) = 0$ et $N = 0$ puisque E est fidèle.

Remarquons que, si A est intègre $\mathfrak{L}(E) = \mathfrak{L}(E^*)$ implique la fidélité de E.

2) Le problème d'une éventuelle surjectivité est plus délicat : on a la suite exacte

$O \to \mathfrak{L}(E) \to \mathrm{Hom}_A(E, E^{**}) \to \mathrm{Hom}_A(E, S) \to \mathrm{Ext}^1_A(E, E) \ldots$

si S est le conoyau de h. Si $\mathrm{Ext}^1_A(E, E) = 0$, on en déduit $\mathrm{Hom}_A(E, S) = 0$, soit $S = 0$. Donc,

Proposition. — *Si le* A-*module* E *est fidèle et s'il existe un isomorphisme* (*éventuellement distinct de la transposition*) *du* A-*module* $\mathfrak{L}(E)$ *sur le* A-*module* $\mathfrak{L}(E^*)$, *la condition* $\mathrm{Ext}^1_A(E, E) = 0$ *implique que cet isomorphisme est induit par un isomorphisme de* E *sur* E^{**}.

Il est inutile de faire l'hypothèse E fidèle si A est intègre.

4. Nous nous proposons de résoudre le problème suivant : caractériser les modules de type fini E sur l'anneau local A d'idéal maximal m tels que :

$$\mathrm{Hom}_A(E, m) = m\,\mathrm{Hom}_A(E, A).$$

Plus généralement, si F est un A-module de type fini, supposons que $\mathrm{Hom}_A(E, mF) = m\,\mathrm{Hom}_A(E, F)$. Cette condition est satisfaite si E est libre. Si $E = L/R$ où L est libre, on peut écrire la suite exacte :

$$O \to \mathrm{Hom}_A(E, F) \to \mathrm{Hom}_A(L, F) \to \mathrm{Hom}_A(R, F) \to \mathrm{Ext}^1_A(E, F) \to 0.$$

Nous poserons $S = \mathrm{Hom}_A(L, F)/\mathrm{Hom}_A(E, F)$.

Il est clair que

$$\mathrm{Hom}_A(E, mF) = \mathrm{Hom}_A(E, F) \cap \mathrm{Hom}_A(L, mF) = \mathrm{Hom}_A(E, F) \cap m\,\mathrm{Hom}_A(L, F)$$

et ceci nous montre que les assertions suivantes sont équivalentes :

a) $\mathrm{Hom}_A(E, mF) = m\,\mathrm{Hom}_A(E, F)$.

b) $\mathrm{Hom}_A(E, F)/m\,\mathrm{Hom}_A(E, F)$ s'injecte naturellement dans $\mathrm{Hom}_A(L, F)/m\,\mathrm{Hom}_A(L, F)$.

c) L'application canonique de

$$\mathrm{Hom}_A(E, F) \otimes_A k \quad \text{dans} \quad \mathrm{Hom}_A(L, F) \otimes_A k$$

est injective. Écrivons, alors, la suite exacte :

$$\to \mathrm{Tor}_1^A(\mathrm{Hom}_A(E, F), k) \to \mathrm{Tor}_1^A(\mathrm{Hom}_A(L, F), k) \to \mathrm{Tor}_1^A(S, k) \\ \to \mathrm{Hom}_A(E, F) \otimes_A k \to \mathrm{Hom}_A(L, F) \otimes_A k \to S \otimes_A k \to 0.$$

Nous en déduisons que *a*) est équivalente à

d) $\quad Im(\mathrm{Tor}_1^A(S, k) \to \mathrm{Hom}_A(E, F) \otimes_A k) = 0.$

Cette condition se simplifie si $\mathrm{Hom}_A(L, F)$ est libre, c'est-à-dire si F est libre puisque $\mathrm{Hom}_A(L, F)$ est canoniquement isomorphe à F^n si le rang de L est *n*.

En effet, dans ces conditions $\mathrm{Tor}_1^A(\mathrm{Hom}_A(L, F), k) = 0$ et *d*) se réduit à $\mathrm{Tor}_1^A(S, k) = 0$, c'est-à-dire à S est libre (8). Il revient au même de dire que S est facteur direct de $\mathrm{Hom}_A(L, F)$ et, également, que $\mathrm{Hom}_A(E, F)$ est facteur direct de $\mathrm{Hom}_A(L, F)$ Ceci est valable si F = A, d'où

Théorème 3. — *Soient* A *un anneau local d'idéal maximal* m *et* E *un* A-*module de type fini. Si* E *est quotient du* A-*module libre* L, *une condition nécessaire et suffisante pour que* $\mathrm{Hom}_A(E, m) = m\,\mathrm{Hom}_A(E, A)$ *est que le dual* E^* *de* E *soit facteur direct du dual* L^* *de* L.

On en déduit.

Corollaire 1. — *Sous les hypothèses du théorème,* E^* *est libre.*

Corollaire 2. — *Si* A *est un anneau de valuation discrète,* $\mathrm{Hom}_A(E, m) = m\,\mathrm{Hom}_A(E, A)$ *pour tout* A-*module de type fini* E.

En effet, $E = L' \oplus T$ où L' est libre et T de torsion; il suffit de prendre T quotient du module libre L'' et $L = L' \oplus L''$ car $E^* = L'^*$. La vérification directe de ce résultat est d'ailleurs facile. D'autre part, on a un résultat analogue pour un module de type fini E sur un anneau local A intègre si E est somme directe d'un module libre et d'une module de torsion.

Remarque. — La méthode utilisée ci-dessus peut être employée pour la caractérisation des E tels que

$$\mathrm{Hom}_A(E, aF) = a\,\mathrm{Hom}_A(E, F)$$

où a est un idéal quelconque de A mais elle ne nous a pas semblé donner de résultats simples. Nous aurions aimé avoir une caractérisation des E tels que $\mathrm{Hom}_{A}(E, mE) = m\mathfrak{L}(E)$: si E possède un système minimal de générateurs $e_1, \ldots, e_n$ sur A tel que $Ann(e_1) = 0$, la condition $\mathrm{Hom}_{A}(E, mE) = m\mathfrak{L}(E)$ implique $\mathrm{Hom}_{A}(E, me_1) = m\,\mathrm{Hom}_{A}(E, Ae_1)$ car, il est clair que $\mathrm{Hom}_{A}(E, me_1) = \mathrm{Hom}_{A}(E, mE) \cap \mathrm{Hom}_{A}(E, Ae_1)$ et que $m\,\mathrm{Hom}_{A}(E, Ae_1) = m\,\mathrm{Hom}_{A}(E, E) \cap \mathrm{Hom}_{A}(E, Ae_1)$. Donc, dans ce cas, nous voyons qu'une condition *nécessaire* est que si E est quotient du A-module libre L, E^* soit facteur direct de L^*. En particulier, nous obtenons une condition nécessaire dans le cas où A est intègre et E fidèle.

5. Étude de la forme bilinéaire induite sur $(E^*/mE^*) \times (E/mE)$.

Soit h la forme bilinéaire canonique $E^* \times E \to A$ définie par $h(x^*, x) = x^*(x)$ si $x \in E$ et $x^* \in E^*$. Elle induit une forme bilinéaire $(E^*/mE^*) \times (E/mE \to A/m$ comme suit : si $x^* = y^*$ modulo mE^* et $x = y$ modulo mE, $x^*(x) = y^*(y)$ modulo m et nous poserons $\bar{h}(\bar{x}^*, \bar{x}) =$ classe de $x^*(x)$ modulo m si $\bar{x}^*$ (resp. $\bar{x}$) est la classe de x^* (resp. x) modulo mE^* (resp. modulo mE). On définit ainsi un homomorphisme φ :

$$E^*/mE^* \to (E/mE)^*$$

qui se factorise comme suit :

$$\begin{tikzcd} E^*/mE^* \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "i"'] & & (E/mE)^* \\ & E^*/\mathrm{Hom}_{A}(E, m) \arrow[ur, "j"'] & \end{tikzcd}$$

où i est l'injection canonique de $E^*/\mathrm{Hom}_{A}(E, m)$ dans $(E/mE)^*$ tel qu'il résulte de la suite exacte :

$$O \to \mathrm{Hom}_{A}(E, m) \to \mathrm{Hom}_{A}(E, A) \to \mathrm{Hom}_{A}(E/mE, k)$$

et où j est la surjection canonique

$$E^*/mE^* \to (E^*/mE^*)/(\mathrm{Hom}_{A}(E, m)/mE^*).$$

L'injectivité de φ équivaut, donc, à celle de j, c'est-à-dire à $\mathrm{Hom}_{A}(E, m) = m\,\mathrm{Hom}_{A}(E, A)$, question résolue plus haut.

La surjectivité de φ équivaut à celle de i c'est-à-dire à celle de l'application naturelle $E^* \to (E/mE)^*$. Cette condition est équivalente à E est A-libre (chap. 2 § 2, corollaire 1).

La non dégénérescence de la forme bilinéaire induite signifie que, si $\overline{x} \in E/mE$ et $\overline{x} \neq 0$, il existe $\overline{x}^* \in E^*/mE^*$ tel que $\overline{x}^*(\overline{x}) \neq 0$. Donc, si $x \in E - mE$, il doit exister $x^* \in E^*$ tel que $x^*(x) \notin m$. En choisissant y convenable proportionnel à x, $x^*(y) = 1$, soit $x^*(E) = x^*(Ay) = A$. Il en résulte que x^* est une surjection de E sur A et A est facteur direct de E. Posons $E = A \oplus F$ et recommençons avec $x \in F - mF$; nous obtenons $F = A \oplus G$ et de proche en proche $E = A^n$. La réciproque est immédiate et nous avons démontré :

Théorème 4. — *Il y a équivalence entre :*

1) *La forme bilinéaire induite sur* $(E^*/mE^*) \times (E/mE)$ *par la forme bilinéaire canonique* $E^* \times E \to A$ *est non dégénérée.*

2) E *est* A-*libre.*

Des questions analogues se posent pour la forme bilinéaire induite :

$$(E^*/m^iE^*) \times (E/m^iE) \to A/m^i$$

pour i quelconque. La solution en est, sans doute, bien plus compliquée.

CHAPITRE V

ÉTUDE DES $\mathfrak{L}(E)$ COMMUTATIFS

1. Anneau des endomorphismes d'un idéal.

Soient A un anneau commutatif à élément unité et K son anneau total des fractions, si I est un idéal de A, nous noterons $(I : I)$ l'ensemble des a de K tels que $aI \subset I$.

Proposition 1. — *Si* I, *considéré comme anneau, contient au moins un élément régulier,* $\mathfrak{L}(I)$ *est commutatif.*

Soit, en effet, y un élément régulier de I. Si u, $v \in \mathfrak{L}(I)$ et $x \in I$, on a :

$$u(xy) = xu(y) = yu(x) \qquad \text{et} \qquad v(xy) = xv(y) = yv(x)$$

puis,

$$\begin{aligned} vu(xy) &= v(x)u(y) = v(y)u(x) = xvu(y) = yvu(x) \\ uv(xy) &= u(x)v(y) = u(y)v(x) = xuv(y) = yuv(x) \end{aligned}$$

et, par comparaison, $y(vu(x) - uv(x)) = 0$ et, puisque y est régulier $vu(x) = uv(x)$, soit $uv = vu$.

Ce résultat n'est plus vrai sans l'hypothèse de l'existence d'un élément régulier : on prend

$$A = k[x, y] \quad \text{avec} \quad x^2 = xy = y^2 = 0 \quad \text{et} \quad I = (x, y).$$

Comme I est annulé par lui-même, les A-endomorphismes de I sont les mêmes que ses k-endomorphismes et forment donc un anneau non commutatif.

Proposition 2. — *Si l'idéal* I *contient un élément régulier de* A, $\mathfrak{L}(I) = (I : I)$.

Dans le cas général, si $a \in (\mathrm{I} : \mathrm{I})$, $a\mathrm{I}$ est contenu dans I et la multiplication par a définit, donc, un endomorphisme de I, d'où une application $h : (\mathrm{I} : \mathrm{I}) \to \mathfrak{L}(\mathrm{I})$ qui est évidemment, un homomorphisme pour les structures de modules et d'anneaux. Il est clair que le noyau de h est $(0 : \mathrm{I})$, ensemble des a de K tels que $a\mathrm{I} = 0$.

Si x est un élément régulier de I et si y appartient à I, $xu(y) = yu(x)$ montre que $u(y) = (u(x)/x)y$ où $(u(x)/x)$ est dans K et même dans $(\mathrm{I} : \mathrm{I})$. En ce cas, h est surjectif et puisque $(0 : \mathrm{I}) = 0$, h est un isomorphisme de A-modules et d'anneaux. Dans le cas général, nous voyons que $(\mathrm{I} : \mathrm{I})/(0 : \mathrm{I})$ se plonge dans $\mathfrak{L}(\mathrm{I})$ mais n'est pas forcément isomorphe à $\mathfrak{L}(\mathrm{I})$: dans l'exemple donné ci-dessus, $(\mathrm{I} : \mathrm{I})/(0 : \mathrm{I})$ est k et $\mathfrak{L}(\mathrm{I}) = \mathrm{M}_2(k)$.

Corollaire. — *Si* A *est intègre, il en est de même de* $\mathfrak{L}(\mathrm{I})$.

On peut remarquer que $(\mathrm{I} : \mathrm{I})$ est, en fait, le plus grand des sous-anneaux B de K contenant A et tels que I soit idéal de B.

Corollaire 2. — *Si* A *est noethérien et intégralement clos (dans* K*) et si* I *contient un élément régulier,* $\mathfrak{L}(\mathrm{I}) = \mathrm{A}$.

En effet, $\mathfrak{L}(\mathrm{I}) = (\mathrm{I} : \mathrm{I})$ est un sous-anneau de K entier sur A comme A-module de type fini. L'hypothèse faite sur A implique donc, $\mathfrak{L}(\mathrm{I}) = \mathrm{A}$.

Remarquons que l'on n'a pas forcément $\mathfrak{L}(\mathrm{I}) = \mathrm{A}$ dans le cas général. Si A′ est la cloture intégrale de A non intégralement clos et si f est le conducteur de A′ dans A, $(f : f) = \mathrm{A}'$ et $\mathfrak{L}(f) = \mathrm{A}'$ que f soit considéré comme A ou comme A′-module.

2. Passage au contre-module.

Soient A un anneau commutatif à élément unité et E un A-module. Nous désignerons par E′ le contre-module de E (6). C'est le $\mathfrak{L}(\mathrm{E})$-module à gauche défini comme suit : le groupe abélien sous-jacent est le groupe E, le produit $u.x$ où $u \in \mathfrak{L}(\mathrm{E})$ et $x \in \mathrm{E}$ est donné par $u.x = u(x)$.

Proposition 3. — *L'anneau* $\mathfrak{L}(\mathrm{E}')$ *des* $\mathfrak{L}(\mathrm{E})$*-endomorphismes de* E′ *est le centre de* $\mathfrak{L}(\mathrm{E})$.

Il suffit de remarquer qu'un endomorphisme de E′ est un endomorphisme du groupe abélien E qui commute à tout u de $\mathfrak{L}(E)$; il commute, alors, à fortiori aux homothéties de E et appartient donc, à $\mathfrak{L}(E)$; puisqu'il commute à tout u de $\mathfrak{L}(E)$, il appartient au centre de E. La réciproque est immédiate.

Corollaire. — *Si* $\mathfrak{L}(E)$ *est commutatif,* $\mathfrak{L}(E') = \mathfrak{L}(E)$.

Pour l'étude des $\mathfrak{L}(E)$ commutatifs, nous voyons donc, qu'il est naturel de chercher les E tels que $\mathfrak{L}(E) = A$. Bien entendu, le procédé de passage au contre-module nous oblige si l'anneau de départ était local à traiter le second problème avec A semi-local. Mais il ne semble pas qu'une telle restriction sur les anneaux présentent un intérêt quelconque et nous supposerons, donc, sauf mention du contraire, que A est un anneau commutatif à élément unité quelconque.

3. Théorème 1. — *Soient* A *un anneau commutatif noethérien et* E *un* A*-module de type fini tel que* $\mathfrak{L}(E) = A$. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1) E *est isomorphe à un idéal de* A.

2) *Il existe une injection h de* E *dans* A.

3) *Il existe un homomorphisme libre h de* E *dans* A, *c'est-à-dire tel que* $h(E)$ *soit fidèle.*

4) *Il existe une application bilinéaire libre h' :* $E \times E \to E$.

L'équivalence de 1) et 2), indépendante de l'hypothèse $\mathfrak{L}(E) = A$, est évidente; 3) implique 2) : en effet, $\mathfrak{L}(E) = A$ implique E fidèle. Le théorème du chapitre 4 § 2 montre alors qu'il existe $h : E \to A$ non nul et 3) nous permet de le supposer libre. Le noyau N de h est caractéristique comme tout sous-module de E, et on peut écrire la suite exacte :

$$O \to \mathrm{Hom}_A(E, N) \to \mathfrak{L}(E) \to \mathfrak{L}(E/N).$$

Les homothéties de E induisent les homothéties de $E/N = h(E)$. Puisque $\mathfrak{L}(E) = A$ et puisque $h(E)$ est fidèle, la flèche de droite correspond à une injection et $\mathrm{Hom}_A(E, N) = 0$, soit $N = O$ d'après le théorème rappelé ci-dessus. Nous avons bien montré que h est une injection de E dans A.

2) Implique 3) car si $h : E \to A$ est injectif, $h(E)$ est fidèle : en effet, $ah(E) = 0$ avec a dans A s'écrit $h(aE) = 0$ puis $aE = 0$ d'après l'injectivité de h et $a = 0$ puisque E est fidèle.

L'équivalence de 3) et 4) résulte du fait que si $\mathfrak{L}(E) = A$, on peut écrire : $\mathrm{Hom}_A(E, A)$ sous la forme $\mathrm{Hom}_A(E, \mathrm{Hom}_A(E, E))$ qui est canoniquement isomorphe à $\mathrm{Hom}_A(E \times E, E)$. La condition 4) met, partiellement, en évidence la recherche d'une structure d'anneau sur E. Nous y reviendrons à la fin de ce chapitre.

Corollaire. — *Si* A *est un anneau noethérien intègre, il y a équivalence pour un* A-*module de type fini* E *entre :*

1) $\mathfrak{L}(E) = A$.

2) E *est isomorphe à un idéal* I *de* A *tel que* $(I : I) = A$.

En effet, tout h différent de O de E dans A est non lié car $ah(E) = 0$ implique $ah(x) = 0$ si x est tel que $h(x) \neq 0$ et, par suite, $a = 0$. Or, $\mathfrak{L}(E) = A$ implique l'existence d'un tel h.

Nous verrons ultérieurement que, si A n'est pas intègre, il se peut que $\mathfrak{L}(E) = A$ n'implique pas E isomorphe à un idéal de A. Voici un contre-exemple plus faible mais plus simple à l'affirmation suivante : si E est fidèle, il existe h libre, homomorphisme de E dans A : prenons $A = k[x, y]$ où $x^2 = xy = y^2 = 0$ et où k est un corps. Le A-module E est engendré par e_1 et e_2 liés par la relation $xe_1 + ye_2 = 0$. La donnée de $h : E \to A$ est la donnée de deux éléments x_1 et x_2 de A tels que $xx_1 + yx_2 = 0$. Puisque $Ax \cap Ay = (0)$, nous déduisons de $xx_1 = -yx_2$ que x_1 et x_2 appartiennent à (x, y) ; x_1 et x_2 sont donc annulés par (x, y) et h n'est pas libre. Or, E est bien fidèle car si $ae_1 = ae_2$ où $a \in A$, il existe r et s de A tels que $a = rx = sy$ avec $sx = ry$ et $a = 0$.

4. Autre méthode.

Théorème 2. — *Soient* A *un anneau noethérien et* E *un* A-*module de type fini tel que* $\mathfrak{L}(E) = A$. *Alors,* E *n'a pas de torsion généralisée.*

Ce sous-module de torsion généralisée est caractéristique dans tous les cas et on peut écrire la suite exacte :

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(E, T) \to \mathfrak{L}(E) \to \mathfrak{L}(E/T).$$

Or, nous avons montré que E/T est fidèle en même temps que E. Les homothéties de E induisent les homothéties de E/T et, puisque $\mathfrak{L}(E) = A$, la flèche de droite correspond à une injection de $\mathfrak{L}(E)$ dans $\mathfrak{L}(E/T)$. On en déduit $\mathrm{Hom}_A(E, T) = 0$ et $T = 0$.

Dans le cas où A est intègre de corps des fractions K, la platitude de K montre que $\mathfrak{L}(E \otimes_A K) = K$ et, donc, que $E \otimes_A K = K$. Comme E s'injecte dans $E \otimes_A K$, E est isomorphe à un idéal que l'on peut supposer entier de A. Nous retrouvons ainsi le corollaire du théorème. Si A n'est plus supposé intègre et si K est son anneau total des quotients, E s'injecte encore dans $E \otimes_A K$ mais la condition $L(E \otimes_A K) = K$ ne semble pas donner de renseignements supplémentaires en général.

Remarque. — Nous aurions pu définir plus généralement la S-torsion pour un A-module si S est une partie multiplicative de A. En particulier, considérons le noyau K de l'application canonique $E \to E \otimes_A A_p$, c'est-à-dire la $(A\text{-}p)$-torsion si p est un idéal premier de A : le sous-module K est l'ensemble des éléments x de E tels qu'il existe s dans $A\text{-}p$ satisfaisant à $sx = 0$. La fidélité de E n'implique pas celle de E/K car, si $a \in A$ est tel que $aE \subset K$, on obtient $sa = 0$ si s est un élément de $A\text{-}p$ tel que $sK = 0$. Par suite, $a \in (0 : J)$ si $J = (A\text{-}p) \cap \mathrm{Ann}(K)$. Il peut se faire que $(O : J)$ soit différent de O. Si $(O : J) = 0$, le raisonnement fait précédemment montre que $K = 0$ et on a dans tous les cas $\mathfrak{L}(E_p) = A_p$. Il peut se faire que l'on ait des renseignements sur E_p : par exemple, si A est noethérien intégralement clos et si p est un *idéal premier de hauteur* 1 *contenant au moins un élément régulier*, A_p est un anneau de valuation discrète et $\mathfrak{L}(E) = A$ implique, alors $E_p = A_p$ (2).

5. L'hypothèse E de type fini est essentielle pour permettre d'affirmer que $\mathfrak{L}(E) = A$ implique que E est isomorphe à un idéal de A dans le cas où A est intègre.

Le fait que A soit noethérien entraîne, en effet, que tout idéal est de type fini mais, de plus, il existe, effectivement, au moins si A est un anneau local complet un A-module E non de type fini tel que $\mathfrak{L}(E) = A$: on prend pour E l'enveloppe injective du corps des restes A/m considéré comme A-module; E n'est pas de type fini car E est divisible et on obtiendrait une contradiction au lemme de Nakayama. Nous renvoyons à [11] pour la démonstration du fait que $\mathfrak{L}(E) = A$.

(2) Northcott, *Ideal Theory*. 4. 9 Divisons, p. 77.

On connaît des cas où, sans hypothèse de finitude pour E, $\mathfrak{L}(E) = A$ implique que E est isomorphe à A. En effet, Baer [2], Kaplansky [13] et Shiffman [20] ont établi que pour les anneaux locaux principaux avec condition de chaîne descendante tout isomorphisme de $\mathfrak{L}(E)$ sur $\mathfrak{L}(F)$ où E et F sont des A-modules est induit par un isomorphisme de E sur F.

Remarquons, d'autre part, que si A est intègre et E fidèle, A s'injecte dans E et par suite que le dual E^* s'injecte dans $\mathfrak{L}(E)$. Si $\mathfrak{L}(E) = A$, E^* est donc isomorphe à un idéal de A.

Enfin avant de donner un exemple montrant que si A n'est pas intègre, on peut avoir $\mathfrak{L}(E) = A$ sans que E soit isomorphe à un idéal de A, montrons que le corollaire du théorème 1 est, néanmoins valable sous des hypothèses un peu plus générales que A intègre.

Théorème 3. — *Soient* A *un anneau somme directe d'un nombre fini d'anneaux noethériens intègres et* E *un* A-*module de type fini. Il y a équivalence entre :*

1) $\mathfrak{L}(E) = A$.

2) E *est isomorphe à un idéal* I *de* A *tel que* $(I : I) = A$.

Soit, en effet, $A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_n$ où A_i est noethérien intègre et soient $p_1, \ldots, p_n$ les idempotents correspondant à cette décomposition en somme directe. Posons $E_i = p_i(E)$ de telle sorte que $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_n$. Il en résulte que

$$\mathfrak{L}(E) = \mathrm{Hom}_A(E_1, E) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Hom}_A(E_n, E);$$

or, comme E_i est caractéristique, $\mathrm{Hom}_A(E_i, E) = \mathfrak{L}(E_i)$. L'anneau A_i est contenu dans $\mathfrak{L}(E_i)$ et, par suite, de $\mathfrak{L}(E) = A$, résulte que $\mathfrak{L}(E_i) = A_i$. Le A-module E_i est en fait un A_i-module et est isomorphe à un idéal convenable de A_i, d'où le résultat.

6. Un contre-exemple.

L'exemple que nous avons en vue va nous montrer les trois points suivants :

1) *Si* A *est un anneau commutatif à élément unité et si* E *est un* A-*module de type fini d'annulateur* a, *il n'existe pas forcément un* A-*module de type fini fidèle* F *tel que* $E = F/aF$.

2) *Si* E *est un module de type fini sur un anneau non intègre la fidélité de* E *n'implique pas que le dual* E^* *de* E *ne soit pas formé uniquement d'éléments liés.*

3) *Si* A *est non intègre,* $\mathfrak{L}(E) = A$ *n'implique pas que le* A*-module de type fini* E *soit isomorphe à un idéal convenable de* A.

Prenons $B = k[[X, Y]]$ où k est un corps et où X et Y sont des indéterminées. Le B-module E sera défini comme quotient du module libre $L = Bx_1 \oplus Bx_2$ par le sous-module

$$R = By_1 + By_2 + By_3$$

avec $\quad y_1 = Xx_1 + Yx_2; \qquad y_2 = Yx_1; \qquad y_3 = Xx_2.$

Nous avons les formules :

$$\begin{array}{ll} X^2x_1 = Xy_1 - Yy_3 & X^2x_2 = Xy_3 \\ Y^2x_1 = Yy_2 & Y^2x_2 = Yy_1 - Xy_2 \\ XYx_1 = Xy_2 & XYx_2 = Yy_3 \end{array}$$

qui montrent que l'annulateur de E contient $n^2 = a = (X, Y^2)$. Cet annulateur est exactement n^2 car,

$$\begin{aligned} ax_1 &= r_1y_1 + r_2y_2 + r_3y_3 \\ ax_2 &= m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3 \end{aligned}$$

conduisent à

$$a = r_1X_1 + r_2Y = m_1Y = m_3X \text{ et } r_1Y_1 + r_3X = 0,$$
$$m_1X + m_2Y = 0.$$

Si, f, g, h désignent des séries formelles arbitraires, on obtient

$$\begin{array}{ll} r_1 = fX & r_3 = -fY \\ m_1 = gY & m_2 = -gX \\ r_1 - m_3 = hY; & r_2 - m_1 = -hX \end{array}$$

et $a = fX^2 - hXY + gY^2$, soit a élément arbitraire de n^2.

Soit, alors, X un sous-module de R tel que $n^2L + X = R$; comme n^2L est contenu dans nR, $nR + X = R$ et le lemme de Nakayama montre, alors, que $R = X$. Si $E = L'/R'$ avec L' libre mais non isomorphe à L, pour des raisons de minimalité de L, L se plonge dans L' et $L/R = L'/R'$ implique $L' = L + R'$ avec $R = R' \cap L$. Si on avait $R' = n^2L' + X'$, on en déduirait, puisque $n^2L' = n^2L + n^2R'$ est contenu dans nR', $R' = nR' + X'$, d'où $X' = R'$.

S'il existait un B-module fidèle F tel que $E = F/n^2F$, en prenant $F = L'/X'$, E s'écrirait $L'/n^2L' + X' = L'/R'$ avec

L'/X' fidèle. Ce qui précède montre que c'est impossible. Ceci montre, aux notations près, 1).

Pour 3), on peut remarquer qu'il existe un homomorphisme φ de n dans E défini par $\varphi(X) = -e_2$ et $\varphi(Y) = e_1$, où e_i est la classe de x_i modulo R. Cet homomorphisme est évidemment surjectif et son noyau est (X^2, Y^2) car les relations sur les e_i se traduisent par $X\varphi(X) = Y\varphi(Y) = 0$, soit $\varphi(X^2) = \varphi(Y^2) = 0$. Donc, E est isomorphe à $(X, Y)/(X^2, Y^2)$, forme sous laquelle on voit très facilement qu'il est annulé par n^2. On peut également le considérer comme un k-espace vectoriel de base X', Y', $X'Y'$ si X' et Y' désignent respectivement les classes de X et Y modulo (X^2, Y^2).

Un endomorphisme de E est donc, défini par :

$$u(X') = aX' + bY' + cX'Y'$$
$$u(Y') = a'X' + b'Y' + c'X'Y'$$
$$u(X'Y') = X'u(Y') = Y'u(X') \qquad \text{avec} \qquad a, \ldots, c' \qquad \text{dans } k.$$

Les relations $X'u(X') = 0$ et $Y'u(Y') = 0$ qui résultent de $X'^2 = Y'^2 = 0$ donnent $b = a' = 0$ et $X'u(Y') = Y'u(X')$ fournit $a = b'$ et l'on peut écrire :

$$u(X') = (a + c'X' + cY')X'$$
$$u(Y') = (a + c'X' + cY')X'$$
$$u(X'Y') = (a + c'X' + cY')X'Y',$$

formules qui montrent bien que tout endomorphisme de E est une homothétie et, donc, puisque E est un A-module fidèle si $A = B/n^2$, que $\mathfrak{L}(E) = A$.

Remarque. — Si nous avons tenu à expliciter ce contre-exemple c'est pour donner une indication de la méthode à employer pour traiter un cas concret. Nous aurions pu également expliciter $\mathfrak{L}(E)$ par la méthode matricielle exposée dans le chapitre I; c'est, d'ailleurs, par tâtonnements que nous avons obtenu cet exemple, en essayant de passer au cas d'un anneau complet, puis d'un anneau local régulier complet. Il nous est apparu ultérieurement que le module construit est l'enveloppe injective de k considéré comme B-module et notre résultat est donc la conséquence directe d'un résultat de Matlis exposé dans (11). Nous verrons dans un appendice qu'il rentre dans un autre type découvert par Courter.

7. Une structure d'algèbre.

L'anneau A est commutatif à élément unité et noethérien. Soit E un A-module de type fini *fidèle*. Une structure d'algèbre (associative ou non) sur E est la donnée d'un élément de $\mathrm{Hom}_A(E \times E, E)$ ou ce qui est équivalent de

$$\mathrm{Hom}_A(E, \mathrm{Hom}_A(E, E))$$

Puisque E est fidèle, A s'injecte dans $\mathfrak{L}(E)$ et nous obtiendrons des structures d'algèbre sur E à partir de $\mathrm{Hom}_A(E, A)$ comme suit :

Soit $h \in \mathrm{Hom}_A(E, A)$. Si $x, y \in E$, nous poserons $xy = h(x)y$ calculé dans E. Cette multiplication est doublement distributive par rapport à l'addition mais elle est également associative car

$$(xy)z = h(xy)z = h(h(x)y)z = h(x)h(y)z$$

et

$$x(yz) = h(x)yz = h(x)h(y)z.$$

Dans le cas où $h = 0$, on retrouve une structure parfois utilisée.

Les hypothèses faites sur A et E assurent l'existence de h non nul de $\mathrm{Hom}_A(E, A)$ et nous pouvons donc munir E d'une structure d'algèbre sur A non triviale. Cette algèbre n'a pas d'élément unité si $E \neq A$ car, l'existence d'un élément unité à droite implique $h(y)x = y$ pour tout y de E, soit $E = Ax = A$.

L'anneau E n'est pas, en général commutatif : dans le cas où h est tel qu'il existe x de E avec $h(x)$ régulier, la commutativité implique, en effet, $h(x)y = h(y)x$ pour tout y de E, soit $y \in Kx = K$ si K est l'anneau total des quotients de A; le A-module E se plonge donc dans K et est isomorphe à un idéal que l'on peut choisir entier de A.

Remarquons que, si $\mathfrak{L}(E) = A$ on a ainsi mis en évidence toutes les structures d'algèbre (associatives ou non a priori) possibles sur E. C'est ainsi que si $E = Ae_1 + Ae_2$ où $A = k[x, y]$ avec $x^2 = xy = y^2 = 0$ et $xe_1 + ye_2 = 0$, $ye_1 = xe_2 = 0$ (exemple du paragraphe précédent), les seules structures d'algèbres possibles sur E sont obtenues à partir des formules $e_1^2 = a_1xe_1$ $e_1e_2 = b_1ye_2$, $e_2e_1 = a_2xe_1$, $e_2^2 = b_2ye_2$ en prolongeant par linéarité, a_1, a_2, b_1, b_2 désignant des éléments arbitraires du corps k.

Si, dans le cas général, u est un élément de $\mathfrak{L}(E)$, on a $u(xy) = u(h(x)y) = h(x)\,u(y) = xu(y)$. De plus, la structure d'algèbre associée à $h \in \mathrm{Hom}_A(E, A)$ met, en évidence certains endomorphismes de E : la multiplication à droite u_z par un élément z de E. Un tel endomorphisme applique E dans le A-module monogène Az. Il est amusant de remarquer que si l'on admet que $\mathfrak{L}(E) = A$ implique que E n'a pas de torsion généralisée, la seule considération de ces endomorphismes particuliers permet de montrer que, s'il existe h libre dans $\mathrm{Hom}_A(E, A)$, E est isomorphe à un idéal de A : en effet, on se ramène à l'étude de la commutativité traitée ci-dessus.

L'exemple des espaces vectoriels montre qu'il ne faut pas trop attendre de ce qui précède car si $\mathfrak{L}(E) \neq A$ on n'obtient éventuellement que peu de structures d'algèbres par ce procédé. Un passage au contre-module fort peu gênant pour la question permet probablement d'obtenir quelques structures d'algèbres associatives supplémentaires.

Remarquons, enfin, que nous avons une condition nécessaire pour que $\mathfrak{L}(E) = A$ par $h(x)\,h(z)z' = h(x)\,h(z')z$ quels que soient x, z, z' dans E. Il suffit d'ailleurs que de telles relations soient vraies pour des générateurs. Dans l'exemple déjà traité ces relations s'évanouissent mais si A n'a pas d'éléments nilpotents, restent des relations du type $h(e_1)^2\,e_2 = h(e_1)\,h(e_2)\,e_1$ si $h(e_1) \neq 0$.

Appendice.

Il se trouve que notre exemple du § 6 rentre dans les hypothèses d'un théorème de Courter annoncé dans un preliminary report sans démonstration. Voici ce théorème et une démonstration simple que nous avons obtenu et qui peut-être n'est pas exactement celle de l'auteur.

Théorème (Courter). — *Soient* A *un anneau local artinien d'idéal maximal m et* E *un* A*-module de type fini fidèle. On désigne par* F *le sous-module de* E *formé des x de* E *annulés par m, i, e le plus grand* A/*m-espace vectoriel contenu dans* E. *On suppose que* E *possède un système minimal de générateurs* $x_1, \ldots, x_n$ *tel que :*

1) $F \subset \bigcap_{i=1}^{n} Ax_i$.

2) $\mathrm{A}nn(x_i) + \bigcap_{j \neq i} \mathrm{A}nn(x_j) = m (i = 1, \ldots, n)$.

Alors, $\mathfrak{L}(\mathrm{E}) = \mathrm{A}$.

Démonstration : remarquons, d'abord, que l'on ne peut avoir $\bigcap_{j \neq i} \mathrm{A}nn(x_j) = 0$ car, ceci impliquerait $\mathrm{A}x_i = \mathrm{A}/m$ d'après 2) et $\mathrm{A}x_i$ serait facteur direct de E, ce qui contredirait 1). Si $u \in \mathfrak{L}(\mathrm{E})$, écrivons, $u(x_i) = a_1 x_1 + \cdots + a_j x_j + \cdots + a_n x_n$. Nous devons avoir, pour $k \neq i$, $u\left(\bigcap_{j \neq k} \mathrm{A}nn(x_j) x_i\right) = 0$, soit

$$a_k \left(\bigcap_{j \neq k} \mathrm{A}nn(x_j)\right) x_k = 0$$

et
$$a_k \in \mathrm{A}nn(x_k) : \left(\bigcap_{j \neq k} \mathrm{A}nn(x_j)\right) = \mathrm{A}nn(x_k) : m$$

d'après 2). Finalement, $a_k x_k \in \mathrm{F}$ et $a_k x_k = c_{ki} x_i$ d'après 1).

Nous pouvons donc prendre u défini par :

$$u(x_1) = a_1 x_1, \ \ldots, \ u(x_i) = a_i x_i, \ \ldots, \ u(x_n) = a_n x_n,$$

en changeant de notations, avec a_i dans A.

La deuxième partie de la démonstration se fait par récurrence sur n; le théorème est vrai si $n = 1$. Supposons que $\mathrm{A}nn(x_n) : m \neq \mathrm{A}nn(x_n)$ après permutation éventuelle : ceci est légitime car si $\mathrm{A}nn(x_i) : m = \mathrm{A}nn(x_i)$ pour $i = 1, \ldots, n$, il en résulte $\bigcap_i \mathrm{A}nn(x_i) : m = \bigcap_i \mathrm{A}nn(x_i)$, c'est-à-dire, puisque $\bigcap_i \mathrm{A}nn(x_i) = 0$, $0 : m = 0$; or, $0 : m$ contient m^{p-1} si p est le plus petit entier tel que $m^p = 0$.

Le sous-module engendré par $x_1, \ldots, x_{n-1}$ satisfait à l'hypothèse du théorème et l'endomorphisme u de E est donc de la forme :

$$u(x_1) = a x_1, \ldots, u(x_{n-1}) = a x_{n-1} \qquad \text{et} \qquad u(x_n) = b x_n$$

d'après l'hypothèse de récurrence. Prenons $c \in \mathrm{A}nn(x_n) : m$; l'élément $c x_n$ appartient à F et on peut écrire $c x_n = d x_1$ avec d dans A; on en déduit $c u(x_n) = d u(x_1)$ et $c(b - a) x_n = 0$. Finalement, $b - a$ appartient à $\mathrm{A}nn(x_n) : (\mathrm{A}nn(x_n) : m)$ qui est contenu dans m. En écrivant $b - a = b' + c'$ avec b' dans $\mathrm{A}nn(x_n)$ et c' dans $\bigcap_{i \neq n} \mathrm{A}nn(x_i)$, il vient $u(x_i) = (a + c') x_i$ pour $i = 1, \ldots, n$. Le théorème est donc démontré.

CHAPITRE VI

ÉTUDE D'UN ENDOMORPHISME PARTICULIER

Comme nous l'avons indiqué dans l'introduction ce chapitre est totalement disjoint des précédents.

L'anneau A sera supposé local mais non nécessairement noethérien. Le A-module E sera déterminé par un système minimal de générateurs $(e_1, \ldots, e_n)$ choisi une fois pour toutes. Enfin, $\bar{e}_i$ désignera la classe de e_i modulo mE. Nous nous intéressons essentiellement aux endomorphismes de E n'appartenant pas à $\mathrm{Hom}_A(E, mE)$. Le cas général demanderait une étude beaucoup plus délicate.

Proposition 1. — *Les éléments $f_1, \ldots, f_n$ de* E *formeront un système minimal de générateurs de* E *sur* A *si et seulement si la matrice (r_{ji}) à coefficients dans* A *définie par $f_i = \sum_{j=1}^{n} r_{ji} e_j$ est inversible (dans $M_n(A)$).*

Il résulte, en effet, du lemme de Nakayama, qu'une condition nécessaire et suffisante pour que $f_1, \ldots, f_n$ forment un système minimal de générateurs de E sur A est que les images $\bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_n$ modulo mE forment une base de E/mE. Cette condition est équivalente à l'inversibilité de la matrice $(\bar{r}_{ji})$ où $\bar{r}_{ji}$ est la classe de r_{ji} modulo m et, par conséquent à celle de la matrice (r_{ji}) dans $M_n(A)$ comme on le voit en considérant les déterminants.

Définition. — *L'endomorphisme u de* E *sera dit diagonalisable s'il existe un système minimal $f_1, \ldots, f_n$ de générateurs de* E *sur* A *tel que $u(f_i) = a_i f_i$ avec a_i dans* A.

Si $O \to R \to L \to E \to O$ est le premier terme d'une résolution minimale pour E, il est clair que pour que u soit diagonalisable, il faut et il suffit que u soit induit par un endomorphisme diagonalisable u^* de L. Le cas le plus défavorable à la diagonalisation est donc le cas où E est A-libre et nous ferons cette hypothèse dans ce paragraphe et dans les deux suivants.

PROPOSITION 2. — *Une condition nécessaire et suffisante pour que l'endomorphisme u de* E *soit diagonalisable est qu'il existe une matrice carrée* Q *d'ordre n à coefficients dans* A *et inversible et une matrice* M *de représentation de u telles que* $Q^{-1}MQ$ *soit diagonale.*

Cette proposition est la traduction matricielle de la définition.

1. Valeurs propres et vecteurs propres de l'endomorphisme u.

DÉFINITION. — *Un élément x de* E *sera dit vecteur propre de u s'il n'appartient pas à mE et s'il existe a de* A *tel que $u(x) = ax$; l'élément a sera alors appelé valeur propre de u.*

Soit a une valeur propre de u et soit $x = \xi_1 e_1 + \cdots + \xi_n e_n$ un vecteur propre associé, si $u(e_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} e_j$, nous avons le système d'équations linéaires :

$$(\xi_1, \ldots, \xi_n)(a_{ji} - a\delta_{ji}) = 0$$

dont le déterminant est $D = \chi_u(a)$ si $\chi_u(X)$ est le polynôme caractéristique de X, c'est-à-dire $\det(a_{ji} - X\delta_{ji})$. Nous devons donc avoir $D\xi_i = 0$ ($i = 1, \ldots, n$) mais, comme un au moins des ξ_i est inversible car il n'est pas dans m, on doit avoir $D = \chi_u(a) = 0$. Donc.

PROPOSITION 3. — *Pour que a soit valeur propre de u il faut que a soit racine du polynôme caractéristique $\chi_u(X)$ de u. Cette condition n'est pas, en général, suffisante.*

Elle l'est, évidemment, si A est un corps. Plus généralement, si A est un anneau de valuation discrète, la condition $\chi_u(a) = 0$ implique l'existence de x dans E tel que $u(x) = ax$: il suffit, par exemple, de se placer dans le corps des fractions K de A et de multiplier par le dénominateur commun des ξ_i obtenus. Si $x = \xi_1 e_1 + \cdots + \xi_n e_n$, le vecteur $x' = \xi'_1 e_1 + \cdots + \xi'_n e_n$ où ξ'_i est le quotient de ξ_i par le P.G.C.D. des ξ_i est un vecteur propre.

2. Une condition suffisante pour que u soit diagonalisable.

Soit $u \in \mathfrak{L}(E) - \mathrm{Hom}_A(E, mE)$ et soit $\bar{u}$ l'endomorphisme induit par u dans $\mathcal{L}(E/mE)$. Une condition nécessaire pour que u soit diagonalisable est, évidemment, que $\bar{u}$ le soit. Si une matrice de u est $M(u)$, la matrice correspondante de $\bar{u}$ est $\overline{M}(\bar{u})$ obtenue en réduisant les coefficients de $M(u)$ modulo m. L'hypothèse faite sur u revient à dire que $\overline{M}(\bar{u}) \neq 0$. On a dans tous les cas $\chi_{\bar{u}}(X) = \bar{\chi}_u(X)$, polynôme obtenu en réduisant les coefficients de $\chi_u(X)$ modulo m.

Supposons que $\chi_u(X) = (X - a_1) \ldots (X - a_n)$ avec a_i non congru à a_j modulo m si $i \neq j$. On sait, alors, que

$$\chi_{\bar{u}}(X) = (X - \bar{a}_1) \ldots (X - \bar{a}_n)$$

avec $\bar{a}_i$ différent de $\bar{a}_j$ si $i \neq j$ et, donc, que $\bar{u}$ est diagonalisable. Choisissons le système minimal $e_1, \ldots, e_n$ de telle sorte que $\bar{u}(\bar{e}_i) = \bar{a}_i\bar{e}_i$: la matrice $M(u)$ est de la forme :

$$\begin{vmatrix} b_1 & & \\ & \ddots & \\ & & b_n \end{vmatrix}$$

où b_i est congru à a_i modulo m et où les coefficients non diagonaux sont dans m.

Désignons par $N(X)$ la transposée de $(M(u) - X1)$, matrice à coefficients dans $A[X]$. Comme a_i $(i = 1, \ldots, n)$ est racine de $\chi_u(X)$, on sait que $\det(N(a_i)) = 0$ mais il existe un mineur d'ordre $n - 1$ de ce déterminant non dans m : par exemple, le mineur du terme $b_1 - a_1$ est congru modulo m à $(b_2 - a_1) \ldots (b_n - a_1)$, c'est-à-dire à $(a_2 - a_1) \ldots (a_n - a_1)$ qui n'est pas dans m. Désignons par A_{i1} le mineur correspondant à l'élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la première colonne et posons : $x_1 = A_{11}e_1 + \cdots + A_{n1}e_n$; il est clair que $(u - a_1 1)(x_1) = 0$, soit $u(x_1) = a_1x_1$, et puisque A_{11} n'est pas dans m, x_1 n'est pas dans mE.

Nous avons ainsi pour chaque a_i $(i = 1, \ldots, n)$ un vecteur x_i non dans mE tel que $u(x_i) = a_ix_i$. Les classes $\bar{x}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ sont des vecteurs linéairement indépendants de E/mE et forment donc une base de E/mE sur k. Les éléments $x_1, \ldots, x_n$

forment, donc, un système minimal de générateurs de E sur A et u est diagonalisable.

Proposition 4. — *Si le polynôme caractéristique de l'endomorphisme u est de la forme $\chi_u(X) = (X - a_1) \ldots (X - a_n)$ où a_i est un élément de A tel que a_i ne soit pas congru à a_j modulo m si $i \neq j$, u est diagonalisable.*

On en déduit immédiatement :

Corollaire. — *Si* A *est hensélien et si le polynôme caractéristique de $\bar{u}$, endomorphisme induit par u dans* E/mE, *a toutes ses racines dans* A/m *et distinctes, alors u est diagonalisable.*

Une condition nécessaire pour que u soit diagonalisable est que $\chi_u(X)$ soit de la forme $(X - a_1)^{\alpha_1} \ldots (X - a_p)^{\alpha_p}$. C'est évident.

D'autre part, nous aurions pu démontrer une proposition analogue à la proposition 4 dans le cas où A est commutatif non forcément local en remplaçant la condition a_i non congru à a_j modulo m par $a_i - a_j$ inversible. En fait, la partie la plus intéressante de ce chapitre est constituée par ce qui suit. Nous n'insisterons donc pas...

3. Endomorphismes de modules de type fini sur un anneau local hensélien.

Dans tout ce qui suit, A sera un anneau local *hensélien*, noethérien ou non. Le A-*module de type fini* E *n'est pas supposé libre* dans tout ce paragraphe.

Supposons que $\overline{E} = \overline{E}_1 \oplus \cdots \oplus \overline{E}_n$ soit une décomposition en somme directe de l'espace vectoriel $\overline{E} = E/mE$ et supposons que les projecteurs correspondant $\bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_n$ appartiennent à $\mathrm{I}m(\mathfrak{L}(E) \to \mathfrak{L}(\overline{E}))$.

Le théorème A des préliminaires nous permet de relever ces projecteurs en des idempotents deux à deux orthogonaux de $\mathcal{L}(E)$: en effet, soient $u_1, \ldots, u_n$ des représentants de $\bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_n$ respectivement; $A[u_1, \ldots, u_u]$ est une A-algèbre au sens d'Azumaya dont $k[\bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_n]$ est un quotient et le relèvement en idempotents deux à deux orthogonaux peut se faire dans $A[u_1, \ldots, u_n]$; si A est noethérien, ces précautions sont inutiles.

Soient $p_1, \ldots, p_n$ ces idempotents relevés. Montrons que $p_1 + \cdots + p_n = 1$: nous savons que

$$p_1 + \cdots + p_n \in 1 + \mathrm{Hom}_A(E, mE)$$

et, par suite, que $p_1 + \cdots + p_n = s$ est inversible dans L(E). Si s^{-1} est son inverse, $1 = s^{-1}p_1 + \cdots + s^{-1}p_n$ et, par multiplication à droite par p_i, $s^{-1}p_i = p_i$, d'où le résultat.

Posons $E_i = p_i(E)$; nous en déduisons : $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_n$ et $E_i/mE_i = E_i + mE/mE = \overline{E}_i$ pour $i = 1, \ldots, n$. Nous avons donc relevé certaines décompositions en somme directe de $\overline{E}$ en décompositions en somme directe de E.

Cette technique va nous permettre de retrouver le corollaire de la proposition 4: en reprenant les notations utilisées, $\chi_{\bar{u}}(X) = (X - \overline{a}_1) \ldots (X - \overline{a}_n)$ avec $\overline{a}_i \neq \overline{a}_j$ si $i \neq j$ entraîne que $\overline{E} = \overline{E}_1 \oplus \cdots \oplus \overline{E}_n$ où $\overline{E}_i$ est le sous-espace propre, de dimension 1, correspondant à la valeur propre $\overline{a}_i$. Les projecteurs $\overline{p}$, ..., $\overline{p}_n$ associés sont dans $k[\overline{u}]$. Or,

$$\begin{aligned} k[\overline{u}] &= (A[u] + \mathrm{Hom}_A(E, mE))/\mathrm{Hom}_A(E, mE) \\ &= A[u]/(A[u] \cap \mathrm{Hom}_A(E, mE)) \end{aligned}$$

et nous pourrons faire le relèvement en des idempotents deux à deux orthogonaux $p_1, \ldots, p_n$ de $A[u]$. Il en résulte que le sous-module $E_i = p_i(E)$ est laissé invariant par u. Il est clair, d'autre part, que E_i est monogène, soit $E_i = Ax_i$ et il est immédiat que $u(x_i) - a_ix_i \in mE \cap E_i = mE_i$; il existe, donc, r_i dans m tel que $u(x_i) = (a_i + r_i)\, x_i = b_ix_i$ et le corollaire est démontré.

Rappelons avec nos notations la proposition 1 de (5) § 5:

Soit $\overline{E}$ un espace vectoriel de dimension finie n sur le corps commutatif k et soit $\overline{u}$ un endomorphisme de $\overline{E}$; pour tout polynôme unitaire $\overline{p}(X)$ divisant le polynôme minimal $\overline{q}(X)$ de $\overline{u}$, soit $\overline{M}_{\overline{p}}$ le sous-espace vectoriel formé des $\overline{x}$ de $\overline{E}$ tels qu'il existe un entier r avec $\overline{p}(\overline{u})^r(\overline{x}) = 0$. Alors, $\overline{M}_{\overline{p}}$ est stable par $\overline{u}$ et il existe des polynômes $\overline{s}_{\overline{p}}$ tels que, pour tout $\overline{x}$ de $\overline{E}$, le composant de $\overline{x}$ dans $\overline{M}_{\overline{p}}$ soit $\overline{s}_{\overline{p}}(\overline{u})(\overline{x})$.

Comme précédemment, les projecteurs correspondant à la décomposition en somme directe considérée pour $\overline{E}$ peuvent être relevés en des projecteurs de E dans $A[u]$ et nous obtenons une décomposition en somme directe $E = \oplus M_p$ où les M_p sont stables par u et tels que, si $p(X)$ désigne un représentant de $\overline{p}(X)$ dans $A[X]$, $p(u)^r(x)$ appartienne à $mE \cap M_p = mM_p$ si x est dans M_p. Il existe, de plus, des polynômes $s_p(X)$ de $A[X]$ tels que le composant de x dans M_p soit $s_p(u)(x)$.

En particulier, si k est algébriquement clos, par exemple si $A = C\{\{X_1, \ldots, X_n\}\}$, ou encore si $\overline{u}$ est diagonalisable, nous voyons que si $\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_e$ sont les racines distinctes du polynôme caractéristique $\chi_{\overline{u}}(X)$ de $\overline{u}$, il existe une décomposition en somme directe $E = \oplus M_i$ où les M_i sont stables par u et tels que si x appartient à M_i, il existe un entier r tel que $(u - a_i)^r(x)$ appartienne à mM_i si a_i est un représentant de $\overline{a}_i$. Si $\overline{u}$ est diagonalisable, on sait que les $M_{X-\overline{a}_i}$ coïncident avec les sous-espaces propres $\overline{V}_{\overline{a}_i}$. On en déduit une réduction partielle qui nous sera utile ultérieurement.

Proposition 5. — *Si* A *est hensélien et si* $\overline{u}$ *est diagonalisable, u admet une matrice de représentation tableau diagonal de matrices de la forme :*

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} a_{i_1} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{i_{p(i)}} \end{vmatrix}$$

où les coefficients non diagonaux sont dans m et où

$$\overline{a}_{i_1} = \cdots = \overline{a}_{i_{p(i)}} = \overline{a}_i$$

si le polynôme caractéristique de $\overline{u}$ *est* $\Pi(X - \overline{a}_i)^{p(i)}$.

Supposons maintenant que le corps des restes soit algébriquement clos et ne faisons aucune hypothèse sur $\overline{u}$. Reprenons la décomposition en somme directe ci-dessus. Si x appartient à M_i, $(u - a_i)^r(x) \in mM_i$. Définissons v par la condition que la restriction de v à M_i soit $a_i 1$. Si $w = u - v$, il existe un entier N tel que $w^N(x) \in mE$ pour tout x de E. De plus, il existe des polynômes $s_i(X)$ de $A[X]$, tels que le composant de x dans M_i soit $s_i(u)(x)$. Il en résulte que $v = a_i s_i(u)$ et que v et w sont des polynômes en u à coefficients dans A.

Proposition 6. — *Soient* A *un anneau local hensélien de corps des restes algébriquement clos et* E *un* A*-module de type fini. Tout endomorphisme u de* E *peut s'écrire* $u = v + w$ *où* v *et* w *sont des endomorphismes de* E, v *étant diagonalisable et*

w tel qu'une de ses puissances appartienne à $\mathrm{Hom}_A(E, mE)$, *v et w étant des polynômes en u à coefficients dans* A.

Si A n'est pas un corps, l'unicité n'est pas assurée. Si A est artinien, on voit que w est nilpotent.

4. Endomorphismes d'un module de type fini sur un anneau local factoriel hensélien.

L'hypothèse supplémentaire A factoriel se justifie par le fait que tout anneau local régulier est factoriel. En particulier, tout ce qui suit sera valable pour $A = C\{\{X_1, \ldots, X_n\}\}$ où $k[[X_1, \ldots, X_n]]$.

Le théorème suivant est dû à Frobénius. Il est de démonstration facile et nous renvoyons à : Jacobson (Nathan) *Lectures in abstract Algebra*, vol II, p. 102, Van Nostrand (1953).

Théorème F. — *Soit* A *un anneau factoriel et soit* M *un élément de* $M_n(A)$. *Soit* $\chi_M(X) = \det(X1 - M)$ *et désignons par* $\theta(X)$ *le plus grand commun diviseur des mineurs d'ordre* $n-1$ *de* $(X1 - M)$ *et par* $m(X)$ *le polynôme* $\chi_M(X)/\theta(X)$. *Alors,*

1) $m(M) = 0$.

2) *Si* $n(X)$ *de* $A[X]$ *est tel que* $n(M) = 0$, $n(X)$ *est divisible par* $m(X)$.

3) *Tout facteur irréductible de* $\chi_M(X)$ *est facteur de* $m(X)$.

3) résulte, en fait, de ce que $m(X)^n$ est divisible par $\chi_M(X)$.

Nous supposons dans ce paragraphe que le A-module de type fini E est *libre*. Soit u un endomorphisme de E. Si $\bar{u}$ est l'endomorphisme induit sur E/mE, on n'a pas, en général, $\overline{m_u(X)} = m_{\bar{u}}(X)$ où $m_u(X)$ et $m_{\bar{u}}(X)$ désignent respectivement les polynômes minimaux de u et $\bar{u}$ et où $\overline{m_u(X)}$ est obtenu par réduction modulo m des coefficients de $m_u(X)$. En effet, si $A = k[[Y]]$ et si u est $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1+Y \end{vmatrix}$, il est immédiat que $\overline{m_u(X)} = (X-1)^2$ tandis que $m_{\bar{u}}(X) = X - 1$.

Il est, toutefois, clair que $\overline{m_u(X)}$ est divisible par $m_{\bar{u}}(X)$. Un cas simple où l'égalité sera réalisé est celui où

$$m_u(X) = (X - a_1) \ldots (X - a_p)$$

avec a_i non congru à a_j modulo m si $i \neq j$. Ceci implique d'ailleurs :

1) $\bar{u}$ est diagonalisable.

2) $\chi_u(X) = (X - a_1)^{\alpha_1} \dots (X - a_p)^{\alpha_p}$.

Nous nous proposons de montrer :

Théorème. — *Soient* A *un anneau local factoriel hensélien d'idéal maximal* m *et* E *un* A-*module ayant une base finie. Si* u *est un endomorphisme de* E *de polynôme minimal de la forme* $(X - a_1) \dots (X - a_p)$ *avec* a_i *non congru à* a_j *modulo* m *si* $i \neq j$, *alors,* u *est diagonalisable.*

Démonstration. — Soit $E = \oplus M_i$ où les M_i ont la signification de § 4. La restriction u_i de u à M_i est de la forme $\begin{vmatrix} a_{i_1} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{i_{r(i)}} \end{vmatrix}$ où a_{i_j} est congru à a_i modulo m.

Il est immédiat que

$$\chi_u(X) = \chi_{u_i}(X) \prod_{i \neq j} \chi_{u_j}(X) = (X - a_i)^{\alpha_i} \prod_{i \neq j} (X - a_j)^{\alpha_j}.$$

Puisque $\chi_{\bar{u}_i} = (X - \bar{a}_i)^{\alpha_i}$ et a_i non congru à a_j modulo m si $i \neq j$, on en déduit que :

$$\chi_{u_i}(X) = (X - a_i)^{\alpha_i}.$$

Le polynôme minimal $m_{u_i}(X)$ de u_i divise le polynôme minimal $m_u(X)$ de u mais également $\chi_{u_i}(X)$. Donc, $m_{u_i}(X) = a_i$.

Si la matrice de représentation de u_i est d'ordre 1, il n'y a rien à démontrer. Supposons la donc d'ordre supérieur ou égal à 2. S'il y avait un coefficient b_{kl} non diagonal, le mineur de b_{kl} dans det $(X1 - u_i)$ serait un polynôme de degré $r(i) - 2$ en X et le plus grand commun diviseur des mineurs d'ordre $r(i) - 1$ de det $(X1 - u_i)$ serait de degré au plus $r(i) - 2$. Ceci est incompatible avec le fait que $m_{n_i}(X)$ est de degré 1. Les seuls coefficients non nuls sont donc diagonaux et il est alors immédiat que $a_{i_j} = a_i$ pour $j = 1, \dots, r(i)$. Le théorème est démontré.

Dans le cas où A est un corps, nous retrouvons une condition nécessaire et suffisante, d'ailleurs utilisée dans la démonstration ci-dessus, pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable. Cette condition suffisante dans le cas où A est local factoriel hensélien n'est évidemment pas nécessaire.

D'autre part, si on suppose que $m_u(X) = (X - a_1) \dots (X - a_p)$ avec seulement $a_i \neq a_j$ si $i \neq j$, l'exemple $A = k[[Y]]$ et $u = \begin{vmatrix} 1 & Y \\ 0 & 1 - Y^2 \end{vmatrix}$ montre que u n'est pas forcément diagonalisable.

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. Azumaya, On maximally central Algebras, *Nagoya math. journal*, t. 2, 1951, 119-150.

[2] R. Baer, Automorphism Rings of primary abelian operator Groups, *Ann. of math*, 1943, 192-227.

[3] N. Bourbaki, *Algèbre*, chap. 2, Hermann, 1955.

[4] N. Bourbaki, *Algèbre*, chap. 3, Hermann, 1952.

[5] N. Bourbaki, *Algèbre*, chap. 6 et 7, Hermann, 1952.

[6] N. Bourbaki, *Algèbre*, chap. 8, Hermann, 1958.

[7] P. Cartier, Questions de rationnalité des diviseurs en géométrie algébrique. Appendice, *Bull. soc. math. de France*, t. 86, fasc. 3, 1958, 245-250.

[8] Cartan-Eilenberg, Homological algebra, *Princeton University Press*, 1956.

[9] A. Chatelet, *Les groupes abéliens finis et les modules de points entiers*, Paris, Gauthier-Villars et Lille, Bibliothèque universitaire, 1924.

[10] P. Dubreil, *Algèbre*, Gauthier-Villars, 1954.

[11] P. Gabriel, *Objets injectifs dans les catégories abéliennes. Sem.*, P. Dubreil, M. L. Dubreil-Jacotin et C. Pisot, 1958-59.

[12] N. Jacobson, Structure of Rings, *Providence. Amer. math. Soc.*, 195, (*Amer. math. soc. coll. publ.* 37).

[13] I. Kaplansky, Infinite abelian Groups, *Ann. Arbor. Univ. of Michigan Providence*, 1954.

[14] K. Morita, Duality for Modules and its Applications to the Theory of Rings with minimum conditions. *Sc. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku*, sect. A, 1958, 83-142.

[15] C. Nesbitt, On the regular Representations of Algebras, *Ann. of. math.*, 39, 1938, 634-658.

[16] D. Rees, The grade of an Ideal or Module, *Proc. Cambridge. Phil. Soc.*, 53, 1957, 28-42.

[17] P. Samuel, Algèbre locale, Gauthier-Villars. *Mem. Sc. math.*, fasc. 1, 1953.

[18] P. Samuel, Remarques sur le lemme de Hensel, *Proc. of the Int. Congress of Math.*, 1954, 63-64.

[19] J. P. Serre, Géométrie algébrique et géométrique analytique, *Ann. Inst. Fourier*, t. 6, 1955-56, 1-42.

[20] M. Shiffman, The Ring of Automorphisme of an abelian Group, *Duke math. Journal*, t. 6, 1940, 579-597.

[21] Zariski-Samuel, *Commutative Algebra*, Van Nostrand, 1958.