FRANÇOIS LESCURE

Sur les compactifications équivariantes des groupes commutatifs

Annales de l'institut Fourier, tome 38, nº 4 (1988), p. 93-120

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1988__38_4_93_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
38, 4 (1988), 93-120.

SUR LES COMPACTIFICATIONS ÉQUIVARIANTES DES GROUPES COMMUTATIFS

par François LESCURE

INTRODUCTION

1. Généralités et rappels.

Soient Ω un groupe de Lie complexe connexe commutatif et X une variété analytique complexe compacte et de même dimension complexe $n \in \mathbb{N}^*$. Lorsque Ω agit holomorphiquement à gauche sur X et qu'il existe un point $x \in \Omega$ dont le stabilisateur dans Ω soit trivial, on dira (cf. [6], p. 19 et [7], p. 3) que X est une compactification $\mathbb{C}$-analytique Ω-équivariante de Ω ; le contexte étant clair, on dira plus brièvement que X est une *Ω-compactification* de Ω.

Cette définition posée rappelons maintenant, parce que cela nous sera d'une utilité constante, quelques-unes des propriétés élémentaires et classiques d'une telle Ω-compactification X. Tout d'abord il est clair que l'isomorphisme $\mathbb{C}$-analytique $\Omega \cong \Omega . x$ permet d'identifier Ω avec une partie ouverte de X. Pour être plus précis observons que le produit extérieur de n champs de Killing linéairement indépendants de la Ω-action sur X est une section holomorphe globale du fibré anticanonique K_X^* dont le lieu des zéros est exactement l'ensemble $Y := X \backslash \Omega$ qui, en tant que tel, est la réunion de ρ diviseurs irréductibles, éventuellement singuliers, de X : $Y = D_1 \cup \ldots \cup D_\rho$ ($\rho \geqslant 1$ lorsque Ω non compact...) et que le groupe de Lie Ω a donc la structure analytique d'un ouvert de Zariski de X (*).

Mots-clés : Compactification — Variété quasi-homogène — Moïshezon — Variété kälhérienne.

(*) On verra plus loin, dans un exemple comme ci-dessus, que X et Ω étant tous deux Moïshezon, il est possible que la structure algébrique induite sur $X \hookrightarrow X$ ne coïncide pas avec la structure algébrique de départ.

Rappelons aussi, afin d'en déduire quelques inégalités sur les nombres de Hodge et de Betti de X, quelques propriétés des formes holomorphes sur X. Pour cela considérons $p+1$ champs de Killing $Z_0, \ldots, Z_p$ sur X ainsi qu'une p-forme holomorphe ω sur X. On sait que :

$$d\omega(Z_0, \ldots, Z_p) = \sum_{k=1}^{k=p} (-1)^k \mathscr{L}_{Z_k}\omega(Z_0, \ldots, \hat{Z}_k, \ldots, Z_p) + \sum_{0 \leqslant k \leqslant \ell \leqslant p} (-1)^{k+\ell}\omega([Z_k, Z_\ell], Z_0, \ldots, \hat{Z}_k, \ldots, \hat{Z}_\ell, \ldots, Z_p)$$

Mais la commutativité de Ω implique l'annulation du deuxième terme du deuxième membre ce qui, puisque $\omega(Z_0, \ldots, \hat{Z}_k, \ldots, Z_n)$ holomorphe sur X compacte est constant, implique l'annulation du premier membre. L'algèbre des champs de Killing étant presque partout infinitésimalement transitive (cf. [8], p. 102) on en déduit que toute p-forme holomorphe est fermée mais aussi (cf. [12] pour un argument identique) que $H^0(X, \Omega^p) = 0 \Rightarrow H^0(X, \Omega_X^{p+1}) = 0$, $I \leqslant p \leqslant n-1$.

En particulier l'absence de $(1,0)$-formes holomorphes globales non nulles implique-t-elle l'absence de $(p,0)$-formes holomorphes globales non nulles pour $p \geqslant 2$.

Posons maintenant

$$h^{1,0} = h^{1,0}(X) = \dim_{\mathbb{C}} H^0(X, \Omega_X^1) \quad \text{et} \quad h^{0,1}(X) = \dim_{\mathbb{C}} H^1(X, \mathcal{O}_X)$$

et désignons par $b_1(X)$ le premier nombre de Betti de X. Rappelons alors les inégalités :

$$(1) \qquad 2h^{1,0} \leqslant b_1(X) \qquad \text{et} \qquad h^{1,0} \leqslant h^{0,1}.$$

Pour cela considérons une base $\omega_1, \ldots, \omega_h$ $(h = h^{1,0})$ de l'espace $H^0(X, \Omega_X^1)$. Les formes ω_k, $1 \leqslant k \leqslant h$, sont fermées (cf. ci-dessus) et il en est donc de même des $(0,1)$-formes conjuguées $\bar{\omega}_1, \ldots, \bar{\omega}_h$; mais alors une combinaison linéaire non triviale : $\sum_1^h \alpha_j\omega_j + \beta_k\bar{\omega}_j$, évidemment non nulle et d-fermée ne peut pas être d-exacte, faute de quoi il existerait une fonction f, $\mathscr{C}^\infty$ sur tout X, telle que $\partial f = \sum_1^h \alpha_j\omega_j$ et $\bar{\partial} f = \sum_1^h \beta_j\bar{\omega}_j$ ce qui impliquerait que $\bar{\partial}\partial f = 0$ et donc (compacité de X) que la fonction harmonique f serait constante. Contradiction qui montre déjà la première inégalité. Un raisonnement à peu près identique consistant à voir qu'aucune combinaison

$\sum_{1}^{h} \beta_j \bar{\omega}_j = 0$ ne peut être $\bar{\partial}$-exacte, permet de démontrer la seconde des inégalités (1).

En fait la suite spectrale de Fröhlicher (cf. [14], p. 97) ayant ici comme conséquence $b_1(X) \leqslant h^{1,0} + h^{0,1}$ on peut résumer (1) par la suite d'inégalités :

$$(2) \qquad 2h^{1,0} \leqslant b_1(X) \leqslant h^{1,0} + h^{1,0} \leqslant 2h^{0,1}.$$

2. Position du problème.

X, Y, Ω, etc., étant comme dans tout ce qui précède on sait que la Ω-action sur X se projette, via la fibration d'Albanèse $J : X \to \mathrm{Alb}(X)$ (cf. [6], p. 83) en une Ω-action holomorphe sur $\mathrm{Alb}(X)$. L'objet de la présente note est essentiellement de chercher des résultats d'algébricité relatifs pour ce morphisme Ω-équivariant J. Bien évidemment le premier cas à envisager, et auquel nous nous ramènerons en partie est celui, plus particulier, où $\mathrm{Alb}(X) = 0$; notre problème s'énonçant alors comme suit : sous quelles conditions simples une Ω-compactification X telle que $\mathrm{Alb}(X) = 0$ est-elle Moïshezon ? La généralisation aux variétés Moïshezon des identités de Hodge (cf. [14], p. 99) montre déjà immédiatement que dans ce cas plus particulier $h^{1,0}(X) = \dfrac{b_1(X)}{2} = h^{0,1}(X) = 0$ est une condition nécessaire pour qu'il en soit ainsi. Bien que, via l'inégalité (2), ces inégalités soient équivalentes à la condition $h^{0,1}(X) = 0$, on peut se demander si la Moïshezonité de X ne résulte pas, dans notre situation, de conditions *a priori* plus faibles comme, par exemple, la simple annulation de son premier nombre de Betti voire même celle de sa variété d'Albanèse. Les exemples qui vont suivre montreront déjà que tel n'est pas le cas et nous permettront de mieux situer le problème.

Exemple 1 (cf. [6], p. 106). — Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^*$, $|\beta| < 1$, $m \in \mathbb{N}^*$ et τ l'automomorphisme de $\mathbb{C}^2 \backslash (0,0)$ défini par $\tau : (x, y) \mapsto (\beta^m x + \alpha y^m, \beta y)$. τ engendre un groupe $\Gamma \cong \mathbb{Z}$ d'automorphismes analytiques agissant librement sur $\mathbb{C}^2\backslash(0,0)$ qui s'interprète donc comme revêtement universel de la surface compacte $F : = \mathbb{C}^2\backslash(0,0)/\Gamma$. Il est connu que F est de dimension algébrique zéro et que $\pi_1(F) = H_1(F, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ mais que, par contre, $H^0(F, \Omega_F^1) = \mathrm{Alb}(F) = 0$. Enfin F est une $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$-compactification de $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ car la $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$-action effective sur $\mathbb{C}^*\backslash(0,0)$ donnée par $(\lambda, \mu)(x,y) = (\mu^m x + \lambda\mu^m y^m, \mu y)$ se projette sur F avec comme ineffectivité : $\Gamma_0 = \{(k\alpha\beta^{-m}, \beta^k)/k \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ et définit donc F comme Ω-compactification de $\Omega : = \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*/\Gamma_0 \cong \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ d'ensemble exceptionnel la courbe elliptique $E \subset F$ obtenue par projection de $0 \times \mathbb{C}^* \subset \mathbb{C}^2\backslash(0,0)$.

On observe toutefois que cette Ω-compactification F d'un groupe commutatif Ω qui n'est pas algébrique, à défaut d'avoir des $(1,0)$-formes holomorphes globales non nulles, a toutefois son premier nombre de Betti non nul. On peut donc se poser la question de savoir si la condition $b_1(X) = 0$ (plus forte que la condition $h^{1,0}(X) = 0$ en vertu de (1)) suffit pour entraîner l'algébricité d'une Ω-compactification X de Ω. L'ensemble à peine plus élaboré qui suit montre que non.

Exemple 2. — Considérons α, β, m, F, etc., comme ci-dessus et soit $B \in \mathbb{C}$ tel que $e^B = \beta$. L'application $\mathbb{C} \ni t \mapsto (t\alpha\beta^{-m}, e^{tB}) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ est un morphisme de groupe de Lie qui définit, par projection, une $\mathbb{C}$-action holomorphe sur F dont l'ineffectivité est $\mathbb{Z}$. On en déduit une $\mathbb{C}^*(=\mathbb{C}/\mathbb{Z})$-action sur F et il est alors facile d'observer que, $\forall x \in F$, l'application $\Phi_x : \mathbb{C}^* \ni \zeta \mapsto \zeta . x \in F$ induit naturellement un isomorphisme $\pi_1(\Phi_x) : \pi_1(\mathbb{C}^*) \to \pi_1(F)$.

Si maintenant on considère l'inverse $\mathcal{O}(-1)$ du « twisting sheaf » de Serre au-dessous de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$, on sait que le $\mathbb{C}^*$-fibré principal P qui lui est naturellement associé est un $\mathbb{C}^*$-fibré principal $SL(2,\mathbb{C})$-équivariant dont l'espace total, simplement connexe, est isomorphe à $\mathbb{C}^2\backslash(0,0)$. La $\mathbb{C}^*$-action sur F définie plus haut permet alors de définir l'espace fibré $X := \mathbb{P} \times^{\mathbb{C}^*} F (= \mathbb{P}_1(C) \times F/\sim$ (*)) en fibre type F au-dessous de $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$, cette F-fibration étant elle aussi $SL(2,\mathbb{C})$-équivariante. Enfin l'action du groupe structural ($\cong \mathbb{C}^*$) de la F-fibration étant centrale dans $\mathrm{Aut}_0(F)$, la $\mathrm{Aut}_0(F)$-action sur une fibre de $X \to \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ se prolonge naturellement (cf. [6], p. 142 et [7], p. 67 pour une argumentation plus précise) en une $\mathrm{Aut}_0(F)$-action sur X tout entier qui stabilise chaque fibre et commute avec la $SL(2,\mathbb{C})$-action évoquée ci-dessus. Il en résulte une $SL(2,\mathbb{C}) \times \mathrm{Aut}_0(F) \cong SL(2,\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$-action holomorphe sur F telle que, pour tout sous-groupe à un paramètre complexe $H \subset SL(2,\mathbb{C})$, le sous-groupe commutatif $\Omega := H \times \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ agisse quasi-transitivement

(*) Où, ici, on a classifiquement : $(p\xi, f) \sim (p, \xi . f)$ $\forall p \in \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$, $\forall \xi \in \mathbb{C}^*$, $\forall f \in F$.

sur X qui peut donc être considérée aussi bien comme compactification $\mathbb{C}$-analytique équivariante de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ que de $(\mathbb{C}^*)^3$.

Le fait, signalé plus haut, que $\pi_1(\Phi_x)$, $x \in F$, soit un isomorphisme, combiné à la simple connexité de P permet aisément de voir que $\pi_1(X) = 0$. X est donc un exemple de Ω-compactification à $b_1(X) = 0$ qui ne soit pas Moïshezon.

Toutefois, via la suite spectrale de Leray du morphisme $X \to \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$, il est possible de voir que $H^1(X,\mathcal{O}_X) \neq 0$. De fait nous démontrons au chapitre 1 que, si X est une Ω-compactification du groupe de Lie commutatif connexe Ω telle que $h^{0,1}(X) = 0$ alors X est Moïshezon et même rationnelle. Observons que nos méthodes permettent élémentairement de voir que toute compactification lisse équivariante de $\mathbb{C}^n$ est rationnelle (et donc Moïshezon).

Les exemples qui précèdent nous permettent aussi de mieux situer la nature du problème car ils nous persuadent, qu'aussi algébrique que soit le groupe $\Omega \subset X$, on ne saurait exclure, *a priori*, que les fonctions rationnelles sur Ω aient des singularités essentielles le long de Y. Aussi nous faudra-t-il construire « ex-nihilo » suffisamment de fonctions méromorphes globales sur X. C'est essentiellement une dualité de Lefschetz « renversée » (i.e. qui introduit un morphisme entre l'homologie d'une partie *fermée* avec la cohomologie relative par rapport à son complémentaire *ouvert*) qui permet de parvenir au résultat.

Le chapitre 2 généralise les résultats du chapitre 1 ; on y montre en particulier que l'algébricité d'une Ω-compactification X comme ci-dessus est équivalente à la simultanéité des conditions $h^{1,0}(X) = h^{0,1}(X)$ et $\mathrm{Alb}(X)$ abélienne. On notera que cet énoncé serait faux si on remplaçait le mot « algébricité » par le mot « projectivité » (cf. [11], p. 71 à ce sujet). Enfin on montre que la simple condition $h^{0,1}(X) = h^{1,0}(X)$ est équivalente à l'existence d'une modification $\tilde{X} \to X$ avec $\tilde{X}$ kählérienne ; modification qui peut de surcroît être choisie Ω-équivariante.

CRITÈRE D'ALGÉBRICITÉ

1. Dualité de « Lefschetz ».

Soient, comme dans tout ce qui précède X une Ω-compactification d'un groupe de Lie complexe connexe commutatif $\Omega = (\mathbb{C}^*)^{s_1} \times \mathbb{C}^{s_2} \times G$, où G désigne la partie de Cousin de Ω (rappelons cf. [6], p. 96, qu'on appelle groupe de Cousin un groupe de Lie complexe connexe n'ayant pour seules fonctions holomorphes globales que les constantes et qu'un tel groupe est nécessairement commutatif) et $Y := X \backslash \Omega = D_1 \cup \ldots \cup D_\rho$, $\rho \in \mathbb{N}^*$ (cf. introduction). Il est alors classique (cf. [3], p. 455) que Y a ρ « classes fondamentales » d'homologie singulière ce qui signifie, plus précisément, que pour $1 \leqslant k \leqslant \rho$, $H_{2n-2}(D_k, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ et que par les inclusions $i_k : D_k \to Y$, on a la somme directe

$$H_{2n-2}(Y, \mathbb{Z}) = \bigoplus_{k=1}^{k=\rho} i_{k,*} H_{2n-2}(D_k, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^\rho .$$

On désignera alors, dans tout ce qui suivra, par $[D_k]$ la $(2n-2)$-classe d'homologie fondamentale de D_k considérée, en fonction du contexte, comme élément du groupe d'homologie $H_{2n-2}(D_k, \mathbb{Z})$, H_{2n-2} voire même du groupe d'homologie $H_{2n-2}(X, \mathbb{Z})$.

Bien que, pour la forme de l'isomorphisme de Lefschetz que nous ayons en vue, la contactibilité locale de Y (cf. [13], p. 351) permette de s'en passer, nous allons utiliser le résultat de triangulation de Łojaziewicz (cf. [10], p. 464) qui a l'avantage d'expliciter immédiatement la symétrie (du point de vue topologique) des rôles joués par Y et son complémentaire dans X et de permettre la construction de voisinages tubulaires utiles pour interpréter plus concrètement certaines flèches qui apparaîtront dans les diagrammes. Dans notre contexte ce résultat de triangulation affirme l'existence d'une paire simpliciale (K,L) où L est un sous-complexe plein de K (effectuer éventuellement une subdivision cf. [13], p. 124) telle que la paire topologique (X,Y) soit isomorphe à la paire de polyèdres $(|K|, |L|)$. On sait alors, qu'en considérant le sous-complexe M de K constitué des simplexes de K dont aucun sommet ne soit simplexe de L, que M est un sous-complexe plein de K tel que $|L|$ (resp. $|M|$) soit une rétracte de déformation de $|K| \backslash |M|$ (resp. $|K| \backslash |L|$)

et que la démonstration du Lemme 11, page 124 [13] permet en fait de construire un voisinage tubulaire ouvert N de Y dans X pour lequel les inclusions de paires $(X,Y) \hookrightarrow (X,N)$ et $(X,X\backslash N) \hookrightarrow (X,X\backslash Y)$ soient des équivalences d'homotopie. N étant ouvert dans X on peut montrer facilement ici que $(X,X\backslash N)$ est une « taut paire » et qu'on a donc la dualité de Lefschetz (cf. [13], p. 297) Lef : $H^2(X,X\backslash N;\mathbb{Z}) \cong H_{2n-2}(N,\mathbb{Z})$. Via les équivalences d'homotopie ci-dessus on a des isomorphismes naturels $H^2(X,X\backslash Y;\mathbb{Z}) \to H^2(X,X\backslash N;\mathbb{Z})$ et $H_{2n-2}(Y,\mathbb{Z}) \to H_{2n-2}(N,\mathbb{Z})$ dont la composition avec Lef permet de définir un isomorphisme de Lefschetz « renversé » :

$$\Phi : \ H^2(X,X\backslash Y;\mathbb{Z}) \xrightarrow{\approx} H_{2n-2}(Y,\mathbb{Z})$$

entre la 2-cohomologie relative de X par rapport à l'ouvert $X\backslash Y$ et la $(2n-2)$-homologie singulière de son complémentaire fermé Y (cf. [13], p. 351 à ce sujet).

Rappelons ici, brièvement, quelle interprétation « concrète » on peut donner de Φ. A cette fin, pour tout entier k compris entre 1 et ρ, choisissons un point lisse $x_k \in D_k$ de Y (*a fortiori* a-t-on $x_k \notin D_j$ pour $j \neq k$). Il existe un ouvert contractible assez petit U_k dans X tel que :

1) $x_k \in U_k$.

2) U_k ne rencontre Y qu'en des points situés sur la branche D_k (i.e. $U_k \cap Y \subset D_k$) cette intersection étant une hypersurface fermée de U_k de surcroît topologiquement contractible.

3) Plus précisément il existe une fonction holomorphe ζ_k, définie sur U_k, telle que $\zeta_k = 0$ soit une équation de D_k compté avec multiplicité 1 dans U_k.

Si on considère un 2-simplexe singulier $\mathscr{C}^\infty$ Δ_k à valeur dans U_k qui intersecte D_k en un point « intérieur » à Δ_k (ce qui signifie que $\partial\Delta_k$ est un 1-cycle singulier de $X\backslash Y$) et ce avec une intersection transversale, on voit que l'intégrale $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\partial\Delta_k}\dfrac{d\zeta_k}{\zeta_k}$ vaut ± 1. On dira que Δ_k est positivement orienté si cette intégrale vaut $+1$. Δ_k comme ci-dessus étant positivement orienté, la classe $[\Delta_k]$ qu'il définit dans $H_2(X,X\backslash Y;\mathbb{Z})$ ne dépend pas du point x_k et de l'ouvert U_k vérifiant les conditions énumérées plus haut (cf. [3], p. 455 à ce sujet). Mais alors (cf. [3], p. 455), les classes relatives $[\Delta_1], \ldots, [\Delta_p]$ forment une $\mathbb{Z}$-base du groupe

$H_2(X,X\setminus Y;\mathbb{Z})$ isomorphe donc à $\mathbb{Z}^\rho$. Mais puisque classiquement (*) $H_1(X,X\setminus Y;\mathbb{Z}) = 0$ la formule du coefficient universel en cohomologie (cf. [13], p. 243) permet d'identifier $H^2(X,X\setminus Y;\mathbb{Z})$ avec le $\mathbb{Z}$-dual de $H_2(X,X\setminus Y;\mathbb{Z})$. En conséquence une classe $\theta \in H^2(X,X\setminus Y;\mathbb{Z})$ est complètement déterminée par les ρ évaluations $\theta([\Delta_j]) = n_j \in \mathbb{Z}$, $1 \leqslant j \leqslant \rho$, à l'aide desquelles on a la description « concrète » de Φ (cf. [3], p. 455) :

$$\Phi(\theta) = \sum_{j=1}^{j=\rho} n_j[D_j] \in H_{2n-2}(Y,\mathbb{Z}) \qquad \text{avec} \qquad n_j = \theta([\Delta]).$$

Pour $\omega \in H^1(X\setminus Y,\mathbb{Z})$ appelons maintenant *résidu de* ω *le long de* D_k, noté $\mathrm{Res}_{D_k}\omega$ (**), le nombre $<\bar{\omega},\partial\Delta_k> \in \mathbb{Z}$ obtenu par l'évaluation d'un cocycle singulier $\bar{\omega} \in Z^1(X\setminus Y,\mathbb{Z})$ représentant ω sur le cycle singulier $\partial\Delta_k \in Z_1(X\setminus Y;\mathbb{Z})$. L'inclusion $X\setminus Y \hookrightarrow X$ et la suite exacte de cohomologie relative qui en résulte permet de considérer le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
H^1(X\setminus Y,\mathbb{Z}) \arrow[r, "\alpha"] & H^2(X,X\setminus Y;\mathbb{Z}) \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\Phi"'] & H^2(X,\mathbb{Z}) \arrow[d, "\text{dualité de Poincaré}"] \\
& H_{2n-2}(Y,\mathbb{Z}) \arrow[r, "i_*"] & H_{2n-2}(X,\mathbb{Z})
\end{tikzcd}$$

et donc de voir clairement que :

i) $\alpha(\omega)([\Delta_k]) = \mathrm{Res}_{D_k}\omega$, $\mathrm{I} \leqslant k \leqslant \rho$,

ii) $(\Phi \circ \alpha)(\omega) = \sum_1^\rho \mathrm{Res}_{D_k}\omega . [D] \in H_{2n-2}(\mathrm{Y},\mathbb{Z})$

et que de plus, en associant à tout diviseur de Weil $D = \sum_1^\rho n_j D_j$, d'une part sa classe d'homologie $\sum_1^\rho n_j[D_j] \in H_{2n-2}(\mathrm{Y},\mathbb{Z})$, d'autre part le fibré en droites complexes $\mathcal{O}(D)$ qui lui est naturellement associé on a :

$$(\beta \circ \Phi^{-1})\left(\sum_{j=1}^{j=\rho} n_j[D_j]\right) = c_1(\mathcal{O}(D)) = \text{classe de Chern dans } H^2(X,\mathbb{Z}).$$

(*) Tout lacet fermé dans X d'origine (et donc d'extrémité) dans $X\setminus Y$ est déformable (avec extrémités fixes) en un lacet entièrement contenu dans $X\setminus Y$.

(**) On observera que les résidus de la théorie des fonctions holomorphes sont les nôtres multipliés par le facteur $2\pi i$...

On dira alors que le diviseur $D = \sum_{1}^{\rho} n_j D_j$ est *topologiquement trivial* s'il en est de même du fibré $\mathcal{O}(D)$ i.e. si $c_1(\mathcal{O}(D))$ est nul dans $H^2(X,\mathbb{Z})$; via la dualité de Poincaré, cela est équivalent à dire que :

$$\sum_{1}^{\rho} n_j[D_j] \in \operatorname{Ker}\,(H_{2n-2}(Y,\mathbb{Z}) \xrightarrow{i_*} H_{2n-2}(X,\mathbb{Z}))\,.$$

Observons enfin le fait suivant d'une utilité constante dans tout ce qui suivra : Si $\sum_{1}^{\rho} n_j D_j$ est un diviseur principal et que $(f) = \sum_{1}^{\rho} n_j D_j$, la forme holomorphe fermée $\frac{i}{2\pi}\frac{df}{f}$ sur $X \setminus Y$ a pour résidu n_j le long de D_j. En particulier la classe de cohomologie $\left[\frac{i}{2\pi}\frac{df}{f}\right] \in H^1(X \setminus Y;\mathbb{Z})$ (*) qu'elle détermine a pour image par α la classe relative $\Phi^{-1}\left(\sum_{1}^{\rho} n_j[D_j]\right) \in \operatorname{Ker}\beta$.

2. Fonctions méromorphes sur X.

Soient X, Ω, Y etc. comme dans tout ce qui précède ; commençons, à toutes fins utiles, par des considérations élémentaires sur la topologie de Ω. Écrivons (non canoniquement) $\Omega = (\mathbb{C}^*)^{s_1} \times \mathbb{C}^{s_2} \times G$ où G est la composante de Cousin (cf. début du présent chapitre) de $\mathbb{C}$-dimension $n - s_1 - s_2$. A cette écriture sont associées pour l'homologie et la cohomologie singulière les décompositions (évidemment non canoniques) :

$$H_1(\Omega,\mathbb{Z}) = H_1((\mathbb{C}^*)^{s_1},\mathbb{Z}) \oplus H_1(G,\mathbb{Z})$$
$$H^1(\Omega,\mathbb{Z}) = H^1((\mathbb{C}^*)^{s_1},\mathbb{Z}) \oplus H^1(G,\mathbb{Z}).$$

Soit T_j, $1 \leqslant j \leqslant s_1$, le sous-groupe à un paramètre réel de $(\mathbb{C}^*)^{s_1}$ (et donc de Ω) défini par :

$$T_j(t) = (1, \ldots, 1, e^{2\pi it}_{j^{\text{ème}}\text{position}}\, 1, \ldots, 1) \in (\mathbb{C}^*)^{s_1}, \qquad t \in \mathbb{R}\,.$$

(*) Observons que ce $\mathbb{Z}$-module est sans torsion car $\pi_1(\Omega)$ est un $\mathbb{Z}$-module libre commutatif.

Il est clair que T_j définit un sous-groupe compact isomorphe à $U(1,\mathbb{C})$ de $(\mathbb{C}^*)^{s_1}$ et par là-même une classe d'homologie singulière $[T_j]$ considérée indifféremment dans $H_1((\mathbb{C}^*)^{s_1},\mathbb{Z})$ ou $H_1(\Omega,\mathbb{Z})$. Si on pose maintenant : $b = b_1(G)$, $n - s_1 - s_2 < b \leqslant 2(n-s_1-s_2)$, on peut là aussi choisir b sous-groupes de Lie réels chacuns isomorphes à $U(1,\mathbb{C})$ et tels que les 1-classes d'homologie singulière $[T_{s_1+1}], \ldots, [T_{s_1+b}]$ qu'ils définissent respectivement, forment une $\mathbb{Z}$-base de $H_1(G,\mathbb{Z}) \hookrightarrow H_1(\Omega,\mathbb{Z})$. La base $[T_1], \ldots, [T_{s_1+b}]$ du $\mathbb{Z}$-module libre $H_1(\Omega,\mathbb{Z})$ sera par la suite utile. D'une manière duale, considérons sur Ω, d'une part les formes fermées $\omega_1, \ldots, \omega_s$ images réciproques, par la projection $\Omega \to (\mathbb{C}^*)^{s_1}$, respectivement des formes fermées $\dfrac{1}{2\pi i}\dfrac{dz_1}{z_1}, \ldots, \dfrac{1}{2\pi i}\dfrac{dz_{s_1}}{z_{s_1}}$ et d'autre part, toujours avec $b = b_1(G)$, les formes fermées $\omega_{s_1+1}, \ldots, \omega_{s_1+b}$ images réciproques par la projection $\Omega \to G$, respectivement des formes G-invariantes $\theta_{s_1+1}, \ldots, \theta_{s_1+b}$ vérifiant $\displaystyle\int_{T_k} \theta_j = \delta_{jk}$, $s_1 \leqslant j, k \leqslant s_1 + b$: il est clair que leurs classes de cohomologie $[\omega_1], \ldots, [\omega_{s_1+b}]$ définissent une base de $H^1(\Omega,\mathbb{Z})$ duale de $[T_1], \ldots, [T_{s_1+b}]$.

Revenons alors à X et rappelons puisque $H^1(X\setminus Y,\mathbb{Z})$ est libre, que la flèche $\alpha : H^1(X\setminus Y,\mathbb{Z}) \to H^2(X,X\setminus Y;\mathbb{Z})$ est injective dès que $b_1(X) = 0$ puisqu'alors $H^1(X,\mathbb{Z})$ est de torsion. En sus de cette hypothèse d'annulation du premier nombre de Betti de X nous serons souvent amenés à faire sur les diviseurs de X à support dans Y l'hypothèse (H) suivante :

HYPOTHÈSE (H) : *Tout diviseur de la forme* $\sum_{k=1}^{k=\rho} n_k D_k$ *topologiquement trivial* (i.e. *tel que* $i_*\left(\sum_1^{\rho} n_k[D_k]\right) \in H_{2n-2}(X,\mathbb{Z})$ *soit nul*) *est principal.*

Lorsque X vérifie l'hypothèse (H) et que $b_1(X) = 0$ alors sa partie de Cousin G est triviale : en effet si tel n'était pas le cas $\forall j$, $1 \leqslant j \leqslant b$, l'injectivité de α montrerait que $\Phi \circ \alpha([\omega_{s_1+j}])$ est non nul et s'écrit $\sum_{k=1}^{k=\rho} m_{jk}[D_k]$. Or l'image par $\beta \circ \Phi^{-1}$ de cette $(2n-2)$-classe d'homologie étant $\beta \circ \alpha([\omega_{s_1+j}]) = 0$, on voit que le diviseur $\sum_{k=1}^{k=\rho} m_{jk} D_k$ serait topologiquement trivial et donc (Hyp. (H)) qu'il existerait une fonction méromorphe f_j sur tout X telle que :

$$(f_j) = \sum_{k=1}^{k=\rho} m_{jk} D_k .$$

Mais alors la forme méromorphe $\frac{i}{2\pi}\frac{df_j}{f_j}$, holomorphe et fermée sur $X \setminus Y$ admettrait justement, en vertu du l'injectivité de $\alpha(b_1(X)=0)$ et de l'observation faite à la toute fin du numéro qui précède, $[\omega_{s_1+j}]$ pour classe de cohomologie. Si bien que la fonction f_j, holomorphe et inversible sur Ω, ne pourrait être, restreinte au groupe de Cousin $G \hookrightarrow \Omega$, qu'une constante $\neq 0$ et vérifiant donc $\frac{i}{2\pi}\int_{T_{s_1+j}} d\,\mathrm{Log} f_j = 0$ alors que, par ailleurs, $\int_{T_{s_1+j}} \omega_{s_1+j} = +1$. Contradiction qui démontre l'annulation de G. Énonçons même en fait :

Lemme 1.1. — *Soient $\Omega = (\mathbb{C}^*)^{s_1} \times \mathbb{C}^{s_2} \times G$ un groupe de Lie complexe connexe commutatif dont G soit la « partie Cousin » et X une Ω-compactification lisse de Ω* (cf. plus haut) *d'ensemble résiduel $Y := X \setminus \Omega$ admettant la décomposition* (cf. plus haut) $Y = D_1 \cup \cdots \cup D_\rho$, $\rho \in \mathbb{N}^*$; *alors entre les propriétés suivantes de X :*

i) $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$.

ii) $b_1(X) = 0$ *et (hyp. (H)) tout diviseur $\sum_{k=1}^{k=\rho} n_k D_k$ tel que le fibré en droites complexes $\mathcal{O}\left(\sum_1^\rho n_k D_k\right)$ qui lui est associé soit topologiquement trivial est principal.*

iii) *La partie de Cousin G est nulle.*

iv) $\exists s$, $0 \leqslant s \leqslant n$, $(n = \dim_{\mathbb{C}} X)$ *tel que* $\Omega = (\mathbb{C}^*)^s \times \mathbb{C}^{n-s}$. *On a les implications :* i) $\Rightarrow$ ii) $\Rightarrow$ iii) $\Rightarrow$ iv).

Démonstration. — i) $\Rightarrow$ ii) résulte dans notre contexte, de l'inégalité $b_1(X) \leqslant 2h^{0,1}(X)$ et de ce que $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ = espace des modules des fibrés topologiquement triviaux. ii) $\Rightarrow$ iii) a été montré plus haut et iii) $\Rightarrow$ iv) est trivial.

Observons toutefois qu'il existe des compactifications équivariantes de groupes de Cousin dont la variété d'Albanèse soit nulle.

Soit donc maintenant, et pour toute la suite de ce numéro, une Ω-compactification X comme ci-dessus à $b_1(X) = 0$ qui vérifie l'hypothèse (H) et pour laquelle nous pouvons donc poser $\Omega = (\mathbb{C}^*)^s \times \mathbb{C}^{n-s} = \{(z_1, \ldots, z_s, z_{s+1}, \ldots, z_n)\}, z_j \neq 0$ lorsque $1 \leqslant j \leqslant s$. On a une base naturelle de l'espace des champs de Killing : $z_1\, \partial/\partial z_1, \ldots, z_s\, \partial/\partial z_s, \partial/\partial z_{s+1}, \ldots, \partial/\partial z_n$ dont la base duale est constituée des formes Ω-invariantes $\frac{dz_1}{z_1}, \ldots, \frac{dz_s}{z_s}, dz_{s+1}, \ldots, dz_n$. Les champs de Killing sont holomorphiquement prolongeables à tout X alors que les formes duales ne le sont que méromorphiquement. Afin de préciser ce dernier point, rappelons que le produit extérieur $z_1\, \partial/\partial z_1 \wedge \cdots \wedge z_s\, \partial/\partial z_s \wedge \partial/\partial z_{s+1} \wedge \cdots \wedge \partial/\partial z_n$ définit une section holomorphe du fibré anticanonique K_X^* ayant précisément Y pour lieu d'annulation et dont « l'inverse »

$$dz_1/z_1 \wedge \cdots \wedge dz_s/z_s \wedge dz_{s+1} \wedge \cdots \wedge dz_n$$

est donc une section méromorphe du fibré canonique K_X avec précisément Y pour lieu des pôles : par contraction avec les « $(n-1)$-vecteurs de Killing » holomorphes sur tout X on en déduit donc le caractère méromorphe des formes duales ci-dessus i.e. aussi celui des formes $\omega_j = \frac{1}{2\pi i}\frac{dz_j}{z_j}$, $1 \leqslant j \leqslant s$ (ici $s = s_1, \ldots$) évoquées plus haut.

Or, dans notre contexte $(s = s_1, n = s_1 + s_2)$ les classes $[\omega_j]$, $1 \leqslant j \leqslant s$, forment une $\mathbb{Z}$-base de $H^1(X \setminus Y; \mathbb{Z})$ et l'injectivité de α $(b_1(X) = 0)$ montre que, dans $H_{2n-2}(Y, \mathbb{Z})$, les s quantités $\Phi \circ \alpha([\omega_j]) = \sum_{k=1}^{k=\rho} m_{jk}[D_k]$, $1 \leqslant j \leqslant s$, sont $\mathbb{Z}$-linéairement indépendantes et donc que la matrice $(m_{j,k})_{1 \leqslant j, k \leqslant n}$ à coefficients entiers relatifs a un rang (sur $\mathbb{Q}$) qui est exactement s. En particulier les s diviseurs $\sum_{k=1}^{k=\rho} m_{jk} D_k$, $1 \leqslant j \leqslant s$ sont-ils $\mathbb{Z}$-linéairement indépendants. Or, mutatis mutandis, comme plus haut, pour tout j entre 1 et s le diviseur $\sum_{k=1}^{k=\rho} m_{jk} D_k$ est topologiquement trivial. Il existe donc (hyp. (H)) une fonction méromorphe f_j sur X telle que $(f_j) = \sum_{k=1}^{k=\rho} m_{jk} D_k$.

Nous allons voir que, dans notre contexte, la $\mathbb{Z}$-indépendance linéaire des diviseurs principaux (f_j), $1 \leqslant j \leqslant s$, implique l'indépendance algébrique (sur $\mathbb{C}$) des fonctions méromorphes $f_1, \ldots, f_s$. A cette fin donnons d'abord des précisions sur les fonctions f_j et pour cela considérons, pour chaque $g \in \Omega$, la translatée de f_j par g définie par :

$$(g.f_j)(x) = f_j(g^{-1}.x).$$

La Ω-invariance de Y et donc de chacune (Ω connexe !) de ses composantes irréductibles D_k, montre que le diviseur principal $(g.f_j)$ est, lui aussi, égal à $\sum_{k=1}^{k=\rho} m_{jk}D_k$. Si bien que gf_j/f_j est en fait une constante $\neq 0$ sur tout X qui est compact. Posons alors $\chi_j(g) = g.f_j/f_j \in \mathbb{C}^*$. Il est facile de vérifier que $\chi_j : \Omega \to \mathbb{C}^*$ est un caractère holomorphe. De plus l'égalité : $f_j(g) = (g^{-1}.f_j)(e) = \chi_j^{-1}(g)f_j(e)$ montre que, restreinte à Ω, la fonction f_j est proportionnelle au caractère χ_j^{-1} ; si bien qu'existent s entiers relatifs $n_{j,1}, \ldots, n_{j,s}$ et $n - s$ nombres complexes $\alpha_{j,s+1}, \ldots, \alpha_{j,n}$ tels que l'on puisse écrire, à une constante multiplicative près qui ne change rien au problème :

$$f_j(z) = z_1^{n_{j,1}}, \ldots, z_s^{n_{j,s}} e^{\alpha_{j,s+1}z_{s+1}}, \ldots, e^{\alpha_{j,n}z_n},$$
$$1 \leqslant j \leqslant s, \qquad z \in \Omega = (\mathbb{C}^*)^s \times \mathbb{C}^{n-s}.$$

Or $(f_j) = \sum_{k=1}^{k=\rho} m_{jk}D_k$ implique, par l'observation faite à la fin du numéro qui précède, que la classe de cohomologie (dans $H^1(X \setminus Y, \mathbb{Z})$) de la forme $\frac{i}{2\pi} d \operatorname{Log} f_j$ a justement pour image $\Phi \circ \alpha \sum_{k=1}^{k=\rho} m_{jk}[D_k] = (\Phi \circ \alpha)([\omega_j])$ ce qui montre, par les injectivités de α et $\Phi \circ \alpha$, qu'en termes de classes de cohomologie on a : $\left[\frac{i}{2\pi}\frac{df_j}{f_j}\right] = [\omega_j]$ et donc qu'en fait $n_{jj'} = -\delta_{jj'}$, $1 \leqslant j, j' \leqslant s$, i.e. que :

$$f_j(z) = z_j^{-1} \exp(\alpha_{j,s+1}z_{s+1}), \ldots, (\exp \alpha_{j,n}z_n), \qquad 1 \leqslant j \leqslant s.$$

On en déduit aisément l'indépendance algébrique des s-fonctions méromorphes $f_1, \ldots, f_s$ (restreindre à des sous-variétés $(\mathbb{C}^*)^s \times (z_{s+1}, \ldots, z_n) \subset \Omega$), i.e. la première étape vers la démonstration de la :

PROPOSITION 1.2. — *Soit X une Ω-compactification lisse (cf. introduction) d'un groupe de Lie complexe commutatif connexe Ω d'ensemble résiduel*

$Y \cong X \backslash \Omega$ de décomposition irréductible $Y = D_1 \cup \cdots \cup D_\rho$, $\rho \geqslant 1$ alors les conditions suivantes sont équivalentes :

i) $H^1(X, O_X) = 0$

ii) $b_1(X) = 0$ *et* X *vérifie l'hypothèse* (H) *(cf. plus haut).*

iii) X *est Moïshezon avec* $b_1(X) = 0$.

Démonstration. — i) $\Rightarrow$ ii) est déjà vu (cf. Lemme 1.1.). iii) $\Rightarrow$ i) résulte de ce que les identités de Hodge sont vraies pour les variétés Moïschezon (cf. [14]) et il faut donc montrer ii) $\Rightarrow$ iii). Pour cela on commence, via le Lemme 1.1, par écrire $\Omega = (\mathbb{C}^*)^s \times \mathbb{C}^{n-s}$ et on sait alors qu'il existe s fonctions $f_1, \ldots, f_s$ méromorphes sur X, holomorphes sur Ω, et qui s'y expriment alors par les formules :

$$1 \leqslant j \leqslant s, \qquad f_j(z_1, \ldots, z_s, z_{s+1}, \ldots, z_n) = z_j^{-1} \exp(\alpha_{j,s+1} z_{s-1}), \ldots, \exp(\alpha_{j,n} z_n)$$

et telles que le corps $\mathbb{C}(f_1, \ldots, f_s) \subset \mathbb{C}(X)$ soit de degré de transcendance s sur $\mathbb{C}$.

Par ailleurs les $n - s$ formes invariantes $dz_{s+1}, \ldots, dz_n$ s'étendent méromorphiquement à X tout entier. Ces $n - s$ formes méromorphes étant holomorphes exactes sur $X \backslash Y$ ont *a fortiori* des résidus nuls le long de chaque diviseur $D_k (1 \leqslant k \leqslant \rho)$ ce qui implique qu'elles sont chacune différentielle d'une fonction méromorphe (définie à une constante additive près) définie sur tout X (utiliser entre autres le « removing singularity Theorem » de Riemann pour les fonctions méromorphes) i.e. que les $n - s$ fonctions $z_{s+1}, \ldots, z_s$ définies sur Ω sont méromorphiquement prolongeables à X tout entier.

Enfin comme la transformation

$$(\mathbb{C}^*)^s \times \mathbb{C}^{n-s} \ni z = (z_1, \ldots, z_n) \mapsto (f_1(z), \ldots, f_j(z), z_{s+1}, \ldots, z_n) \in (\mathbb{C}^*)^s \times \mathbb{C}^{n-s}$$

est clairement une bijection de Ω sur lui-même (*) qui est un ouvert dense de $\mathbb{C}^n$, il ne peut y avoir de relations de dépendance algébrique entre les n fonctions méromorphes globales $f_1, \ldots, f_j, z_{s+1}, \ldots, z_n$.

C.Q.F.D.

(*) Et en fait même un automorphisme pour la structure de groupe de Lie $\mathbb{C}$-analytique.

Remarque. — Observons que X Moïshezon peut induire sur Ω une structure de variété affine distincte de celle de départ i.e. distincte de celle provenant de l'écriture $\Omega = (\mathbb{C}^*)^s \times \mathbb{C}^{n-s}$. En effet, avec les notations qui précèdent, l'anneau des fonctions régulières pour la structure « d'origine » sur Ω est $\mathbb{C}[z_1, z_1^{-1}, \dots, z_s, z_s^{-1}, z_{s+1}, \dots, z_n]$; alors que pour la structure affine induite par X cet anneau est $\mathbb{C}[f_1 f_1^{-1}, \dots, f_s, f_s^{-1}, z_{s+1}, \dots, z_n]$. Anneau distinct du précédent si f_k est une fonction transcendante, ce qui peut se produire.

3. Critère géométrique d'algébricité.

Soient $\Omega = (\mathbb{C}^*)^s \times \mathbb{C}^{n-s}$, X une Ω-compactification de Ω et $Y = X \backslash \Omega$. On a vu (cf. exemple 2 dans l'introduction) qu'il existait des X comme ci-dessus non Moïshezon et à premier nombre de Betti $b_1(X)$ nul. Toutefois sous cette dernière hypothèse nous allons montrer un critère géométrique faisant intervenir le sous-groupe compact maximal

$$K = \{(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_s}, 0, \dots, 0) \in (\mathbb{C}^*)^s \times \mathbb{C}^{n-s} / \theta_j \in \mathbb{R},\ 1 \leqslant j \leqslant s\}) \text{ de } \Omega .$$

A cette fin, rappelons d'abord (« Slice lemma ») que les orbites génériques de K dans Y sont de $\mathbb{R}$-dimension $\geqslant s-1$ (cf. [6], p. 128) et énonçons :

Critère géométrique d'algébricité. — *Si $\Omega = (\mathbb{C}^*)^s \times \mathbb{C}^{n-s}$ et que X est une Ω-compactification lisse de Ω à $b_1(X) = 0$ et que K (cf. plus haut) est le sous-groupe compact connexe maximal de Ω, alors une condition suffisante pour l'algébricité de X est que les K-orbites génériques dans $Y := X \backslash \Omega$ soient de $\mathbb{R}$-dimension $s-1$.*

La condition suffisante donnée ici peut aussi s'énoncer en disant que les K-orbites dans Y sont de dimension $\leqslant s-1$. Observons, lorsque Ω est le groupe réductif $(\mathbb{C}^*)^n$, que la condition suffisante est aussi nécessaire mais par contre seulement suffisante lorsque Ω a une partie additive non triviale.

Idée de la démonstration. — Il suffira, en vertu de l'application ii) $\Rightarrow$ iii) de la Proposition 1.2, de montrer (avec les notations utilisées dans l'énoncé de cette Proposition 1.2) que tout diviseur $D = \sum_{k=1}^{k=\rho} n_k D_k$ qui est topologiquement trivial est un diviseur principal, i.e. que X vérifie l'hypothèse (H).

A cette fin considérons, pour tout $x \in Y$ appartenant aux ρ' composantes irréductibles $D_{i_1}, \ldots, D_{i_{\rho'}}$, $1 \leqslant i_{1_\rho} < \cdots < i_{\rho'} \leqslant \rho$, $1 \leqslant \rho' \leqslant \rho$, et seulement à celles-là, des fonctions holomorphes ζ_{i_k}, $0 \leqslant k \leqslant \rho'$, définies simultanément dans un même voisinage ouvert U_x de x dans X telles que $\zeta_{i_k} = 0$ soit une équation réduite de D_{i_k} au voisinage de x. (Observons que le germe $\zeta_{i_k,x} \in \mathcal{O}_{X,x}$ n'est pas nécessairement irréductible bien que D_{i_k} soit globalement irréductible.) Avec cette convention on appellera section $\mathscr{C}^\infty$ du fibré $\mathcal{O}(D)$ au-dessus de U_x une expression s_{U_x} de la forme $\alpha\zeta_{i_1}^{-n_1}, \ldots, \zeta_{i_{\rho'}}^{-n_{\rho'}}$ où α est une fonction $\mathscr{C}^\infty$ définie sur U_x. Évidemment s_{U_x} définit-il une fonction $\mathscr{C}^\infty$ sur $U_x \cap \Omega$ et on voit alors très bien comment recoller de telles expressions pour définir le faisceau $\mathscr{C}^\infty(\mathcal{O}(D)) = \mathcal{O}(D) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{C}^\infty_X$ des germes de sections $\mathscr{C}^\infty$ dans le fibré $\mathcal{O}(D)$.

Avec ces conventions il est clair qu'une section inversible $\mathscr{C}^\infty$ du fibré $\mathcal{O}(D)$ est une fonction $\mathscr{C}^\infty$ et inversible sur tout Ω qui, en un voisinage U_x comme plus haut d'un quelconque point $x \in Y$, s'écrit $f = \alpha\zeta_1^{-n_1}, \ldots, \zeta_{i_{\rho'}}^{-n_{\rho'}}$ où α est une fonction $\mathscr{C}^\infty$ et inversible sur tout U_x.

Considérons donc un diviseur $D = \sum_{k=1}^{k=p} n_k D_k$ topologiquement trivial (cf. n° 1) et une section inversible $\mathscr{C}^\infty$ de $\mathcal{O}(D)$ et, par là même, une fonction $\mathscr{C}^\infty$ de Ω à valeur dans $\mathbb{C}^*$ que nous désignerons par f.

Si on considère, pour tout $x \in X \backslash Y$ et $g \in \Omega$, le nombre $\theta(x,g) \in \mathbb{C}^*$ défini par la relation $f(g^{-1}.x) = \theta(x,g)f(x)$, il est facile de voir que la classe d'homotopie de l'application $\theta(x,.) : \Omega \ni g \mapsto \theta(x,g) \in \mathbb{C}^*$ ne dépend pas de x. (Ne serait-ce que parce qu'elle est aussi celle de $f^{-1} : \Omega \to \mathbb{C}^*$.) Cette classe d'homotopie est aussi celle d'un unique caractère χ_D : $\Omega \to \mathbb{C}^*$ nul sur la partie affine et s'écrivant donc

$$\chi_D(z_1, \ldots, z_s, z_{s+1}, \ldots, z_n) = z_1^{\mu_1} \ldots z_s^{\mu_s} \quad \mu_1, \ldots, \mu_s \in \mathbb{Z}.$$

La notation χ_D n'est pas abusive car le fait que $b_1(X) = 0$ permet de démontrer que le caractère χ_D ainsi défini ne dépend que du diviseur topologiquement trivial $\mathcal{O}(D)$ et non pas de la section $\mathscr{C}^\infty$ inversible de $\mathcal{O}(D)$ utilisée pour le définir.

Le fait que le diviseur D soit Ω-équivariant permet donc de définir une Ω-action naturelle sur le fibré en droites complexes $\mathcal{O}(D)$. On en déduit une Ω-action sur l'espace $H^0(X, \mathscr{C}^\infty \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}(D))$ des sections $\mathscr{C}^\infty$ à valeur dans $\mathcal{O}(D)$. (Par la classique formule : $[\gamma(g)\sigma](x) = g.\sigma(g^{-1}.x)$.)

Interprétant $H^0(X, \mathscr{C}_X^\infty \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}(D))$ comme sous-espace de $H^0(\Omega, \mathscr{C}_\Omega^\infty)$ cette Ω-action naturelle à gauche n'est rien d'autre alors que la classique opération de translation à gauche des fonctions à valeurs scalaires $([\gamma(g)f](x) = f(g^{-1}.x))$.

Par ailleurs, $\mathscr{O}(D)$ étant $\mathscr{C}^\infty$ trivial, le complémentaire de sa section nulle est un $\mathbb{C}^*$-fibré holomorphe principal avec la même propriété. Si bien qu'il existe un $\mathbb{C}$-fibré principal holomorphe L dont le quotient à droite $L/\mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$ = groupe structural de L) s'identifie à ce $\mathbb{C}^*$-fibré ; l'unicité, à isomorphisme près, de L résultant de $b_1(X) = 0$.

Ceci dit il se trouve que la Ω-action sur $\mathscr{O}(D)$ i.e. donc sur $L/\mathbb{Z}$ ne peut en général (*) se relever en une Ω-action sur le revêtement L ; ce qui amène à considérer l'action modifiée, notée $*$, de Ω sur $\mathscr{O}(D)$ définie sur les fibres géométriques de $\mathscr{O}(D)$ par $(x \in X, g \in \Omega)$:

$$\mathscr{O}(D)_x/m_x\mathscr{O}(D)_x \ni \xi_x \mapsto g * \xi_x = \chi_D(g^{-1})(g.\xi_x) \in \mathscr{O}(D)_{g.x}/m_{g.x}\mathscr{O}(D)_x .$$

On peut montrer que cette action modifiée se relève en une véritable Ω-action sur L que nous noterons $\tilde{*}$.

$H^1(X, \mathscr{C}_X^\infty) = 0$ montre l'existence d'une section $\mathscr{C}^\infty$, notée $\tilde{\sigma}$, de X dans L. Considérons alors la mesure de Haar μ sur K telle que $\mu(K) = 1$. Sur chaque fibre $L_x (x \in X)$ nous avons pour certains sous-ensembles discrets ou continus de L_x affectés de masses ou densités une notion naturelle de barycentre ce qui permet ici de définir une section $\tilde{\sigma}_D : X \to L$ par la formule :

$$\tilde{\sigma}_D(x) = \int_K g \,\tilde{*}\, \tilde{\sigma}(g^{-1}.x)\, d\mu(g)$$

$\tilde{\sigma}_D$, $\mathscr{C}^\infty$ est de plus invariante pour la K-action modifiée $\tilde{*}$. Par la projection $L \to L/Z$ on en déduit donc une section $\sigma_D \in H^0(X, \mathscr{C}_X^\infty \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}(D))$ telle que :

i) σ_D est une section $\mathscr{C}^\infty$ partout inversible de $\mathscr{O}(D)$.

ii) σ_D est K-invariante pour l'action modifiée $\tilde{*}$.

Restreinte à $\Omega = X \backslash Y$, σ_D s'interprète donc comme une fonction numérique complexe f_D partout inversible, $\mathscr{C}^\infty$ et telle que :

1) Si $x \in Y$ appartient aux composantes irréductibles $D_{i_1}, \ldots, D_{i_\rho}$, $(1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_{\rho'} \leqslant \rho, 0 < \rho' \leqslant \rho)$ et seulement celles-là, d'équation

(*) Par contre on peut la relever en une $\tilde{\Omega}$-action sur L ou $\tilde{\Omega}$ désigne le revêtement universel de Ω.

réduite respective $\zeta_{i_1} = \cdots = \zeta_{i_{\rho'}} = 0$ dans un ouvert U_x de X contenant x (cf. plus haut), alors il existe, en rétrécissant U_x si besoin est, une fonction définie sur tout U_x en y étant $\mathscr{C}^\infty$ et partout inversible et telle que sur $U_x \backslash U_x \cap Y$ on ait $f = \alpha\zeta_{i_1}^{-n_1}, \ldots, \zeta_{i_{\rho'}}^{-n_i}\rho'$.

2) $f(g.x) = \chi_D(g^{-1})f(x)$, $\forall g \in K$ et $\forall x \in \Omega$.

Considérons alors la forme $\dfrac{1}{2\pi i} d \operatorname{Log} \chi_D = \sum_{j=1}^{j=s} \mu_j \dfrac{dz_j}{z_j}$; elle est définie et fermée sur $X \backslash Y$ mais aussi (cf. généralités et rappels) méromorphe sur tout X. Il n'est alors pas difficile de montrer que $\operatorname{Res}_{D_k}\left[\dfrac{1}{2\pi i} d \operatorname{Log} \chi_D\right] = n_k =$ multiplicité de D_k dans D. Si bien que (observation de la fin du n° 1) la forme $\omega = \dfrac{df}{f} + d \operatorname{Log} \chi_D$ a un résidu nul le long de chaque D_k. Or $b_1(X) = 0$ impliquant que les classes $[\partial\Delta_k]$, $1 \leqslant k \leqslant \rho$, (notations du n° 1) engendrent $H_1(X \backslash Y, \mathbb{C})$ l'annulation des résidus de ω montre son exactitude i.e. l'existence sur tout $X \backslash Y$ d'un logarithme uniforme pour la fonction $f z_1^{\mu_1} \ldots z_s^{\mu_s}$.

Soit maintenant $x \in D_{i_1} \cap \cdots \cap D_{i_{\rho'}}$ comme plus haut avec sur un ouvert $U_x \ni x$ l'écriture locale $f = \alpha\zeta_1^{-n_{i_1}} \ldots \zeta_{i_{\rho'}}^{-n_{i_{\rho'}}}$. Il est clair que la forme méromorphe $\omega' = -\sum_{k=1}^{k=\rho'} n_{i_k} \dfrac{d\zeta_{i_k}}{\zeta_{i_k}} + d \operatorname{Log} \chi_D$, définie sur U_x, y vérifie l'équation $\omega = \dfrac{d\alpha}{\alpha} + \omega'$ où, ici, $\dfrac{d\alpha}{\alpha}$ est $\mathscr{C}^\infty$ sur tout U_x, ω' n'ayant ses pôles éventuels que le long des diviseurs $D_{i_1}, \ldots, D_{i_{\rho'}}$ et ce avec un résidu nul. Choisissons alors pour tout k compris 1 et ρ' un point générique $x_k \in D_{i_k} \cap U_x$ lisse sur Y : au voisinage de x_k, ω' s'écrit sous la forme $\omega' = \omega_k\zeta_{i_k}^{-p}$, $p \geqslant 0$, ω_k désignant ici une forme holomorphe au voisinage de x_k non identiquement nulle le long de D_{i_k} (i.e. non divisible par ζ_{i_k}). Mais alors la K-invariance (pour l'action modifiée $\tilde{*}$) de σ_D permet de montrer la K-invariance au sens usuel de $\dfrac{df}{f}$ et donc de $d[\operatorname{Log} \chi_D] = \omega$ qui, au voisinage de x_k, s'écrit $\omega = \dfrac{d\alpha}{\alpha} + \omega' = \dfrac{d\alpha}{\alpha} + \zeta_{i_k}^{-p}\omega_k$ $(p \geqslant 0)$.

Que signifie alors ici notre hypothèse géométrique ? Elle nous dit. x_k ayant été pris « générique », que la composante connexe K_{x_k} du stabilisateur de x_k dans K est en fait isomorphe à un cercle $\cong U(1,\mathbb{C})$ et que le lacet produit par une K_{i_k}-orbite entièrement contenue dans Ω a une classe d'homologie qui est un multiple entier relatif non nul de $[\partial\Delta_k]$ (notations du n° 1); tout cela résultant d'ailleurs du théorème de linéarisation (cf. [6], p. 12).

On vérifie alors que la K_x-invariance de la forme $\omega = \dfrac{d\alpha}{\alpha} + \omega_k \zeta_{i_k}^{-p}$, $p \geqslant 0$ permet d'exclure le cas $p \geqslant 2$. En effet notre hypothèse géométrique permet de voir que, pour x générique dans $D_{i_k} \cap \mathrm{U}_x$, la composante connexe K_x^0 du stabilisateur de x_k dans K ne dépend pas de x_k et qu'existent une carte locale $(z_1, \ldots, z_n)$ de x_k dans X, une fonction holomorphe A inversible au voisinage de x_k et un caractère non trivial $\chi_k : K_x^0 \to \mathbb{C}$ tels que :

1) $z_n = A\zeta_{i_k}$, si bien que $z_n = 0$ est une équation réduite de Y_k autour de son point lisse x_k.

2) L'expression locale de la translation à gauche par $g \in K_x^0$ est donnée par $(z_1, \ldots, z_n) \mapsto (z_1, \ldots, z_{n-1}, \chi_k(g) z_n)$.

Mais alors si, au voisinage de x, $\omega_k = \sum\limits_{j=1}^{j=n} \alpha_j(z_1, \ldots, z_n)\, dz^j$ avec des fonctions α_j, $1 \leqslant j \leqslant n$, non toutes identiquement nulles en x_k le long de Y_k, il est aisé de voir que l'image réciproque $g^*(\omega)$ par la translation à gauche par $g \in K_x^0$ est donnée par :

$$g^*(\omega) = \frac{dg^*(\alpha)}{g^*(\alpha)} + \omega'_k \zeta_{i_k}^{-p}$$

ou ω'_k est donné par la formule :

$$\omega'_k = \frac{g^*(A^p)}{A^p} \left[\sum_{j=1}^{j=n-1} g^*(\alpha_j) \chi_k^{-p}(g)\, dz^j + g^*(\alpha_n) \chi_k^{-p+1}(g)\, dz^n \right].$$

Si par exemple j_0, $1 \leqslant j_0 \leqslant n-1$ est tel que α_{j_0} soit non identiquement nul le long de Y en x_k, il est clair que la fonction $g^*(A^p)/A^p g^*(\alpha_{j_0})$ génériquement inversible sur Y_k, y est égale à α_{j_0} : l'égalité $\omega = g^*(\omega)$ implique *a fortiori* l'équivalence asymptotique, ce qui montre que $p \leqslant 0$.

Si par contre $\alpha_j \equiv 0$ le long de Y_k, $1 \leqslant j \leqslant n-1$, et qu'alors, nécessairement, $\alpha_n \not\equiv 0$ le long de Y_k, le même raisonnement s'applique mutatis-mutandis pour voir que $p \leqslant 1$.

Ceci montre en conséquence l'existence d'une fonction holomorphe β et d'une (1,0)-forme $\mathscr{C}^\infty$ ω_1 définies au voisinage de x_k dans X et telle que localement: $\omega' = \omega_1 + \beta \frac{d\zeta_{i_k}}{\zeta_{i_k}}$ (on dit encore que la forme semi-méromorphe ω est au plus à pôles logarithmiques). De plus $\mathrm{Res}_{D_k}\omega = \mathrm{Res}_{D_k}\omega' = 0$ implique nécessairement que β est identiquement nul le long de D_{i_k} au voisinage de x_k: i.e. que la branche D_{i_k}, $1 \leqslant k \leqslant \rho'$, ne peut pas être un ensemble polaire pour la forme méromorphe ω' qui est donc nécessairement holomorphe sur tout U_x, ce qui montre, x étant choisi arbitrairement sur Y, que ω est en fait $\mathscr{C}^\infty$ sur tout X en y étant fermée puisque $X \backslash Y$ est dense dans X.

L'annulation de $b_1(X)$ montre alors l'existence d'une fonction $\mathscr{C}^\infty$, ψ définie sur tout X et telle que $\omega = d\psi$ et donc telle encore que $\psi|_{X \backslash Y}$ soit un logarithme de $fz^{\mu_1}, \ldots, z_s^{\mu_s}$. Mais alors $e^{-\psi}$ est une fonction $\mathscr{C}^\infty$ définie sur tout X en y étant partout inversible ; si bien que la fonction *holomorphe* $\chi_D^{-1}(=z_1^{-\mu_1}, \ldots, z_s^{-\mu_s})$ qui s'écrit aussi $e^{-\psi}f$, (avec comme plus haut si $x \in D_{i_1} \cap \cdots \cap D_{i_{\rho'}}$ localement $f = \alpha\zeta_{i_1}^{-n_1}, \ldots, \zeta_{i_\rho}^{-i_{\rho'}}$) ne peut avoir de singularités essentielles le long de Y i.e. est méromorphe sur tout X ce qui, puisque le diviseur principal $(z_1^{-\mu_1}, \ldots, z_r^{-\mu_s})$ qui lui est attaché est justement $\sum_1^\rho n_j D_j$, démontre ce que nous recherchions : à savoir que X vérifie l'hypothèse (H) et donc, puisque $b_1(X) = 0$, montre (Prop. 1.2) que X est Moïshezon.

C.Q.F.D.

GÉNÉRALISATION

L'objet de ce chapitre est de généraliser la Proposition 1.2 du chapitre précédent. On verra plus précisément (cf. prop. 2.4) qu'une Ω-compactification X d'un groupe de Lie complexe commutatif connexe Ω est Moïshezon si et seulement si (Prop. 2.4) $h^{1,0}(X) = h^{0,1}(\mathrm{X})$ et Alb(X) abélienne. Avant même de donner la démonstration de la Proposition 2.4 (mais toutefois à cette fin...) examinons les conséquences de l'égalité $h^{0,1}(X) = h^{0,1}(X)$ et tout d'abord celles concernant le morphisme d'Albanèse $J : X \to \mathrm{Alb}(X)$.

1. Structures topologiques de J lorsque $h^{0,1} = h^{1,0}$.

Les inégalités $h^{1,0}(X) \leqslant \dfrac{b_1(X)}{2} \leqslant h^{0,1}(X)$ (cf. introduction) montrent qu'alors $b_1(X) = 2h^{1,0} = 2h^{0,1}$. Toute (1,0)-forme holomorphe étant d-fermée (cf. introduction) et non d-exacte sauf lorsqu'elle est nulle, on en déduit, d'une part la suite exacte

$$0 \to H^1(X,\Omega^1_X) \to H^1(X,\mathbb{C}) \to H^1(X,\mathcal{O}_X) \to 0,$$

d'autre part l'égalité $\dim_C \mathrm{Alb}(X) = h^{0,1} = h^{1,0}$ et l'isomorphisme naturel $J^* : H^1(\mathrm{Alb}(X),\mathbb{C}) \to H^1(X,\mathbb{C})$. Tirons-en :

Proposition 2.1. — *Soit X une Ω-compactification $\mathbb{C}$-analytique équivariante d'un groupe de Lie complexe connexe commutatif Ω dont J : $X \to$ Alb (X) désigne le morphisme d'Albanèse. Alors si $h^{1,0}(X) = h^{0,1}(X)$ on a :*

i) *La variété d'Albanèse est de $\mathbb{C}$-dimension* $\dfrac{b_1(X)}{2} = h^{0,1}(X) = h^{1,0}(X)$.

ii) *Via la Ω-action holomorphe projetée par J sur* Alb (X) (cf. [9], p. 47) *le sous-groupe compact connexe maximal $K \subset \Omega$ agit transitivement sur* Alb (X).

Démonstration. — i) a déjà été démontré. Pour montrer ii) raisonnons par l'absurde : si K n'agissait pas transitivement sur Alb (X) on pourrait considérer un point $\tilde{x} \in X$ tel que la K-orbite de $x = J.\tilde{x}$ dans Alb (X) soit un sous-tore réel de Alb (X) de $\mathbb{R}$-dimension $d < 2b_1$. Or dans le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
H^1(K.\tilde{x},R) \arrow[r, "\approx"] & H^1(\Omega,R) & H^1(X,R) \arrow[l, "\text{rest.}"'] \\
\mathbb{R}^d \approx H^1(K.x,R) \arrow[u, "\wr"] & & H^1(\mathrm{Alb}(X),\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{2b_1}. \arrow[ll] \arrow[u, "\wr"']
\end{tikzcd}$$

On sait (cf. plus haut) par l'annulation de $H_1(X, X \backslash Y; \mathbb{R})$ que rest. est injectif ce qui, si d était strictement plus petit que $2b_1$, permettrait d'aboutir à une contradiction. C.Q.F.D.

Soit maintenant H le noyau de la projection $J_* : \Omega \to \mathrm{Aut}_0(\mathrm{Alb}(X))$ (cf. [6], p. 83) et donc $K \cap H$ celui de la restriction J_* à K. Il est clair que le sous-groupe $K \cap H$ a un nombre fini de composantes connexes ce qui a pour conséquence :

PROPOSITION 2.2. — *Soit X une compactification $\mathbb{C}$-analytique équivariante d'un groupe de Lie complexe commutatif Ω vérifiant la relation de Hodge* $\dim_{\mathbb{C}} H^0(X,\Omega_X^1) = \dim_{\mathbb{C}} H^1(X,\mathcal{O}_X)$ *alors la fibre F du morphisme d'Albanèse $J : X \to$ Alb (X) est à premier nombre de Betti $b_1(F)$ nul.*

Démonstration. — Soient $\mathfrak{k}$ (resp. $\mathfrak{h}$) l'algèbre de Lie de $K \subset \Omega$ (resp. du noyau H de $J_* : \Omega \to \mathrm{Aut}_0(\mathrm{Alb}(X))$. Il est alors possible de trouver un sous-groupe compact connexe $M \subset K$ dont l'algèbre de Lie $\mathfrak{m}$ vérifie $\mathfrak{k} = \mathfrak{m} \oplus (\mathfrak{k} \cap \mathfrak{h})$, et donc tel que $J_{*|M} : M \to \mathrm{Aut}_0(\mathrm{Alb}(X))$ soit un revêtement fini, ce qui permet de voir que, considérée comme $\mathscr{C}^{\infty}$-fibration, $J : X \to \mathrm{Alb}(X)$ est à groupe structural fini $M \cap H$. Il existe donc un revêtement fini (*) $\alpha : \tilde{A} \to A =$ Alb (X) tel que l'image réciproque $\alpha^*(J)$ de J par α soit une F-fibration holomorphe topologiquement triviale $\alpha^*(J) : \tilde{X} \to \tilde{A}$. Il est alors clair que l'espace total $\tilde{X} = \tilde{X} \times_A X$ de cette F-fibration est une $\tilde{\Omega}$-compactification d'un revêtement fini $\tilde{\Omega}$ de Ω. Or, dans le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} \pi_1(\tilde{\Omega}) & \to & \pi_1(\tilde{X}) & \to & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ \pi_1(\Omega) & \to & \pi_1(X) & \to & 0 \end{array}$$

les complexes horizontaux de groupes sont exacts et par là même $\pi_1(X)$ et $\pi_1(\tilde{X})$ sont commutatifs ; ce qui, puisque les morphismes verticaux sont des flèches d'inclusion de sous-groupes d'indice fini, montre, via le théorème d'Hurewicz (cf. [13], p. 389) que : $b_1(\tilde{X}) = \mathrm{rg}\,\pi_1(\tilde{X}) = \mathrm{rg}\,\pi_1(X) = b_1(X)$. La trivialité topologique de $\alpha^*(J)$ impliquant $b_1(\tilde{X}) = b_1(\tilde{A}) + b_1(F) = b_1(A) + b_1(F)$, on en déduit $b_1(\mathrm{F}) = 0$ puisque l'on sait que $b_1(A) = b_1(X)$ (cf. Prop. 2.1.*i*)).

C.Q.F.D.

2. Algébricité de *F*.

Soit toujours H le noyau du morphisme $J_* : \Omega \to \mathrm{Aut}_0(\mathrm{Alb}(X))$: la H-action à gauche sur la fibre F est nécessairement libre et transitive sur l'ouvert de Zariski $\Omega \cap F \hookrightarrow F$. Si bien que $H \cong \Omega \cap F$ est

(*) En fait d'un point de vue réel on peut prendre $\tilde{A} = M$.

nécessairement connexe puisque $\Omega \cap F$ est un ouvert de Zariski de la variété irréductible F. En particulier F est-il H-compactification de H d'ensemble exceptionnel $F \cap Y$ $(Y = X \backslash \Omega)$.

Modifiant alors maintenant un peu nos notations, nous écrirons la décomposition en composantes irréductibles :

$$Y = X \backslash \Omega = Y_1 \cup \ldots \cup Y_\rho, \rho \geqslant 1 .$$

Considérons alors les hypersurfaces analytiques fermées de F: $D_k = Y_k \cap F$, $k = 1, \ldots, \rho$. $\forall k$, D_k est irréductible dans F faute de quoi on aurait une décomposition irréductible non triviale $D_k = D_{k,1} \cup \ldots, \cup D_{k,r_k}, r_k \geqslant 2$. Mais alors, la connexité de H entraînant la H stabilité de $D_{k,\ell}$ $\ell = 1, \ldots, r_k$, on obtiendrait, en posant $Y_{k,\ell} = \Omega \times {}^H D_{k,\ell}$ $(\hookrightarrow \Omega \times {}^H F = X)$, une décomposition irréductible non triviale $Y_k = Y_{k,1} \cup \ldots \cup Y_{k,r_k}$ avec $r_k \geqslant 2$. Contradiction ! Enfin des conditions de transversalité évidentes (considérer des points de $Y \cap F$ lisses sur Y et génériques) permettent de voir que D_k apparaît dans l'intersection $Y_k \cap F$ avec la multiplicité d'intersection $+1$ ce qu'on exprimera avec plus de précision en disant que la restriction à F du fibré en droites $\mathcal{O}(Y_k)$ est justement $\mathcal{O}(D_k)$. Remarque entre autres utile pour démontrer :

LEMME 2.3. — *Soient $X, \Omega, Y, F, Y \cap F = D_1 \cup \ldots \cup D_\rho$, etc... comme ci-dessus. Alors la H-compactification F de H vérifie l'hypothèse* (H) *i.e. tout diviseur de la forme $\sum_{k=1}^{k=\rho} n_k D_k$ qui est topologiquement trivial* (*cf. Chapitre* 1) *est principal.*

Démonstration. — Considérons la classique suite spectrale de Leray de la fibration J de deuxième terme $E_2^{p,q} = H^p(\mathrm{Alb}(X), R^q J_* \mathbb{Z})$ et d'aboutissement $H^{p+q}(X,\mathbb{Z})$: sa construction même nous dit qu'il existe une filtration décroissante de

$$H^2(X,\mathbb{Z}) = F^0 H^2(X,\mathbb{Z}) \supset F^1 H^2(X,\mathbb{Z}) \supset F^2 H^2(X,\mathbb{Z})$$

telle que

$$F^2 H^2(X,\mathbb{Z}) = E_\infty^{2,0} (\subset E_2^{2,0}) = \mathrm{Im}\,(H^2(\mathrm{Alb}(X,\mathbb{Z}) \xrightarrow{J^*} H^2(X,\mathbb{Z}))$$

et telle que $F^1 H^2(X,\mathbb{Z})/F^2(X,\mathbb{Z}) = E_\infty^{1,1}$ = noyau de la deuxième différentielle $d_2 : E_2^{1,1} \to E_2^{3,0}$. Or la connexité du groupe structural H de la

F-fibration J et l'annulation de $b_1(F)$ (Prop. 2.2) implique que $R^1J_*\mathbb{Z}$ est le faisceau constant et de torsion $H^1(F,\mathbb{Z})$. Le théorème du coefficient universel en cohomologie (cf. [13], p. 243) implique donc ici que $E_2^{1,1}$ est isomorphe au $\mathbb{Z}$-module de torsion $H^1(F,\mathbb{Z})$ et qu'en conséquence $E_\infty^{1,1}$ est lui aussi de torsion. Rappelons enfin qu'on a une injection $j: F^0H^2(X,\mathbb{Z})/F^1H^2(X,\mathbb{Z}) \to E_2^{0,2}$ d'interprétation classique et évidente.

Soit maintenant, sur F, un diviseur topologiquement trivial $\sum_{k=1}^{k=\rho} n_k D_k$ ainsi que le fibré en droites $L' = \mathcal{O}\left(\sum_1^\rho n_k D_k\right)$ qui lui y est naturellement associé. On a vu plus haut que L' était justement la restriction à F du fibré en droites complexes L sur X donné par $L = \mathcal{O}\left(\sum_1^\rho n_k Y_k\right)$.

En particulier par le morphisme composé :

$$H^2(X,Z) \to E_\infty^{0,2} \xrightarrow{j} E_2^{0,2}(=H^0(X,R^2J_*Z)),$$

$c_1(L) \in H^2(X,Z)$ a-t-il une image nulle puisque $c_1(L') = 0$; ce qui signifie qu'en fait $c_1(L) \in F^1H^2(X,Z)$. $E_\infty^{1,1}(=F^1/F^2)$ étant de torsion il existe donc une puissance tensorielle L^ν de L telle que $c_1(L^\nu) \in F^2H^2(X,Z)$, ce qui implique l'existence d'un fibré $\mathscr{C}^\infty$ en droites complexes γ $(H^1(\mathrm{Alb}(X),\mathscr{C}^{\infty,*}) = H^2(\mathrm{Alb}\,(X),Z))$ au-dessus de $\mathrm{Alb}\,(X)$ tel qu'on ait le $\mathscr{C}^\infty$-isomorphisme de fibrés : $L^\nu \cong J^*(\gamma)$.

Montrons alors que le fibré γ ci-dessus est en fait holomorphe (ou du moins sous-jacent à un fibré holomorphe) sur $\mathrm{Alb}\,(X)$. On sait, classiquement, qu'il suffira pour cela, de montrer que $c_1(\gamma)$ est dans le noyau du morphisme naturel $H^2(\mathrm{Alb}\,(X),Z) \to H^2(\mathrm{Alb}(X),\mathcal{O}_{\mathrm{Alb}(X)})$. A cette fin considérons le revêtement fini connexe $J_*|_M : M \to \mathrm{Aut}_0(\mathrm{Alb}(X))$ utilisé pour la démonstration de la Proposition 2.2. Si $\tilde{x} \in \Omega$, $J_{|M.\tilde{x}}$ définit $M.\tilde{x} \subset X\backslash Y$ comme revêtement fini de degré $\mu > 0$ de $\mathrm{Alb}\,(X)$. Le fibré $L = \mathcal{O}\left(\sum_1^\rho n_k Y_k\right)$ ayant au-dessus de $X\backslash Y$ une restriction triviale, il en est de même de la restriction de L^ν à $M.\tilde{x}$ i.e. de la restriction de $J^*(\gamma)$ à $M.\tilde{x}$. On peut donc définir le $\mathscr{C}^\infty$-fibré γ au-dessus de $\mathrm{Alb}(X)$ par des fonctions de transition localement constantes à valeur dans le groupe fini des racines $\mu^{\text{ème}}$ de l'unité, ce qui montre bien que

γ est en fait un fibré holomorphe sur Alb (X), d'ailleurs de torsion, puisque γ^{μ} est trivial (*).

L'isomorphisme différentiable $L^{\vee} \cong J^*(\gamma)$ montre alors que $J^*(\gamma)^{-1} \otimes L^{\vee}$ est un fibré holomorphe topologiquement trivial i.e. en fait représentable par une classe de Dolbeault dans $H^1(X, \mathcal{O}_X)$. Or si $\omega_1, \ldots, \omega_h$ forment une base de $H^0(\mathrm{Alb}(X), \Omega^1)(h = h^{1,0}(X) = h^{0,1}(X))$ il est facile de vérifier que $J^*(\bar{\omega}_1), \ldots, J^*(\bar{\omega}_h)$ donnent une base de représentants pour la cohomologie de Dolbeault $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ et que donc, par suite, $J^* : H^1(\mathrm{Alb}(X), \mathcal{O}_{\mathrm{Alb}(X)}) \to H^1(X, \mathcal{O}_X)$ est un isomorphisme.

$J^*(\gamma^{-1}) \otimes L^{\vee}$ est donc l'image réciproque par J d'un fibré holomorphe topologiquement trivial γ' au-dessus de Alb (X) ; si bien que $L'^{\vee} = L^{\vee}{}_{|F} = J^*(\gamma \otimes \gamma')_{|F}$ est holomorphiquement trivial ; l'absence de torsion du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $H^1(F, \mathcal{O}_F)$ montrant alors que L' l'est lui-même.

C.Q.F.D

Déduisons de tout ceci :

THÉORÈME 2.4. — *Soit Ω un groupe de Lie complexe connexe commutatif dont X soit une Ω-compactification (cf. introduction) alors en posant $h^{1,0} = \dim_{\mathbb{C}} H^0(X, \Omega^1_X)$ et $h^{0,1} = \dim_{\mathbb{C}} H^1(X, \mathcal{O}_X)$ on a toujours $h^{1,0} \leqslant h^{0,1}$ et :*

i) *La condition $h^{1,0} = h^{0,1}$ est équivalente à dire que X a une modification qui est kählérienne. Sous ces hypothèses équivalentes, la variété d'Albanèse est de $\mathbb{C}$-dimensions $h^{1,0}$ et le morphisme d'Albanèse $J : X \to \mathrm{Alb}(X)$ a une fibre type Moïshezon à premier nombre de Betti nul.*

ii) *Pour que X soit Moïshezon il est nécessaire et suffisant que $h^{1,0} = h^{0,1}$ et que* Alb (X) *soit une variété abélienne.*

Démonstration de i) : Supposons que $h^{1,0}(X) = h^{0,1}(X)$. Alors, toujours en posant $H = \mathrm{Ker}(\Omega \xrightarrow{J_*} \mathrm{Aut}_0(\mathrm{Alb}(X)))$, on a vu que la fibre type F du morphisme d'Albanèse $J : X \to \mathrm{Alb}\,(X)$ était une H-compactification du groupe connexe H avec $b_1(F) = 0$ et, qu'avec la décomposition en composantes irréductibles $Y = Y_1 \cup \cdots \cup Y_\rho$, $\rho \geqslant 1$, $Y = X \backslash \Omega$ (cf. introduction), on avait, en posant $D_k = Y_k \cap F$, la décomposition irréductible $F \backslash H = D_1 \cup \cdots \cup D_\rho$ et qu'alors la H-compactification F

(*) En fait ici on a même γ topologiquement trivial...

possédait la propriété (H). La Proposition 1.2 permet alors de dire que F est Moïshezon et même plus précisément, en posant $n = \dim_{\mathbb{C}} F = \dim_{\mathbb{C}} H$, qu'il existe s, $0 \leqslant s \leqslant n$, tel qu'on puisse écrire $H = (\mathbb{C}^*)^s \times \mathbb{C}^{n-s}$ et qu'alors existent n caractères $f_1, \ldots, f_n$ holomorphes de H, méromorphiquement prolongeables à F, d'expressions :

$$f_j(z_1, \ldots, z_n) = z_j \exp(\alpha_{j,s+1} z_{s+1}), \ldots, \exp(\alpha_{j,n} z_n), \qquad 1 \leqslant j \leqslant s,$$
$$f_j(z_1, \ldots, z_n) = z_j, \qquad s+1 \leqslant j \leqslant n.$$

L'application $H \ni z \mapsto (1 : f_1(z) : f_2(z) : \ldots : f_n(z)) \in \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ définit donc une méromorphie $F \to \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ qui, nous l'avons vu, est en fait une biméromorphie. Via cette correspondance birrationnelle, l'automorphisme $F \to F$ provenant de la multiplication à gauche par un élément $h \in H$ se transforme en un automorphisme birationnel de $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ en fait partout défini à savoir l'homographie de $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ définie par la $(n+1) \times (n+1)$-matrice (nous n'écrivons que les termes non nuls) :

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ 0 & f_1(h) & & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & & \\ 0 & & & f_s(h) & & & \\ f_{s+1}(h) & 0 & \cdots & 0 & 1 & & \\ \vdots & & & & & \ddots & \\ f_n(h) & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Considérons alors le graphe $\hat{F}_0 \subset F \times \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ de cette application birationnelle : on a une action à gauche de H sur $\hat{F}_0$ rendant H-équivariant le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[d, dashed] \\ \hat{F}_0 \arrow[ur] \arrow[r] & \mathbb{P}_n(\mathbb{C}) \end{tikzcd}$$

Or, via le théorème de désingularisation équivariante de Hironaka (cf. [5]) il existe une H-modification $\hat{F}$ lisse de $\hat{F}_0$. $\hat{F}$ est donc une H-compactification de H projective lisse à $b_1(\hat{F}) = 0$ qui est H-modification $\hat{F} \to F$ de F.

Interprétant Ω comme espace total d'un H-fibré principal à droite au-dessus de $\Omega/H = \mathrm{Alb}(X)$ on peut écrire $X = \Omega \times {}^H F (= \Omega \times F/\sim (*))$

(*) Avec là encore $(\omega h, f) \sim (\omega, hf)$, $\omega \in \Omega$, $h \in H$, $f \in F$.

ce qui permet de définir la modification Ω-équivariante $\hat{X} \to X$ par la formule $\hat{X} = \Omega \times {}^H\hat{F}$. Or, toute classe de Kähler $\in H^2(\hat{F},\mathbb{C})$ de la variété de Hodge $\hat{F}$ étant invariante par le groupe structural H connexe de la fibration $\hat{X} \to \mathrm{Alb}\,(X)$, la kälheriannité de Alb (X) et l'annulation de $b_1(X)$ permettent, via le théorème principal II de [2], page 192 d'affirmer que $\hat{X}$ est une variété kählérienne.

Réciproquement si X admet une désingularisation kählérienne, les identités de Hodge sont vérifiées (cf. [14], page 99, corollary 9.3) auquel cas les nombres $h^{0,1}$, $h^{1,0}$ et $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Alb}\,(X)$ sont égaux), la fibre type étant alors, nous l'avons vu, Moïshezon et à premier nombre de Betti nul ; ce qui achève de montrer le i) du Théorème 2.4.

Démonstration du ii). — Il est clair que si X est Moïshezon alors $h^{1,0} = h^{0,1}$ (cf. [14], p. 99) et que Alb (X) est abélienne. Réciproquement, si $h^{0,1} = h^{1,0}$ et que Alb(X) est abélienne on peut considérer de nouveau la désingularisation kählérienne $\hat{X} = \Omega \times {}^H\hat{F}$ introduite dans la démonstration de (i) et observer que H connexe laisse invariante toute classe de Hodge dans $H^2(\hat{F},\mathbb{C})$ de $\hat{F}$ à $b_1(\hat{F}) = 0$. C'est alors, cette fois-ci, le théorème principal III de André Blanchard (cf. [2], p. 198) qui s'applique pour montrer que $\hat{X}$ est projective et donc que X est Moïshezon.

C.Q.F.D.

APPENDICE

On a vu que, pour une compactification équivariante X d'un groupe commutatif Ω, l'égalité $h^{1,0}(X) = h^{0,1}(X)$ impliquait que $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Alb}\,(X) = h^{1,0}(X)$. Plus généralement, dans ce contexte, on sait que $h^{1,0}(X) \leqslant h^{0,1}(X)$ et que toute $(1,0)$-forme holomorphe est fermée ; peut-on espérer qu'au moins alors $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Alb}\,(X) = h^{1,0}(X)$? La réponse est négative car à l'aide d'un exemple dû à Siegel (cf. [14], p. 105) d'un tore complexe compact de $\mathbb{C}$-dimension 2 qui ne soit pas abélien on peut construire une compactification X d'un groupe de Cousin Ω de $\mathbb{C}$-dimension 3 telle que $h^{1,0}(X) = 1$ et telle que Alb (X) soit nulle. Si on se pose la question de savoir si l'énoncé est au moins vrai lorsque Ω est un groupe de Stein on trouve encore une réponse négative car on peut trouver X comme ci-dessus de $\mathbb{C}$-dimension $+ 5$ telle que $h^{1,0}(X) = 1$, Alb $(X) = 0$, et qui soit Ω-compactification de $\Omega = (\mathbb{C}^*)^5$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] W. Barth, E. Oeljeklaus, Über die Albanèse Abbildung einer fast homogenen Kähler-Mannigfaltigkeit, Math. Ann., 211 (1974), 47-62.

[2] A. Blanchard, Sur les variétés analytiques complexes, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup., 73 (1956), 157-202.

[3] Ph. Griffiths, J. Harris, Principles of algebraic geometry, New York, J. Wiley, 1978.

[4] R. Gunning, H. Rossi, Analytic functions of several complex variables, Englewoods Cliffs N.J., Prentice Hall, 1965.

[5] H. Hironaka, Introduction to the theory of infinitely near singular points, Mémorias de Matematica del Instituto « Jorge Juan » 28, Madrid, 1974.

[6] A. T. Huckleberry, E. Oeljeklaus, Classification Theorems for almost homogeneous spaces, Annales de l'Institut E. Cartan, Nancy, n° 9 (Janvier 1984).

[7] F. Lescure, Compactifications $\mathbb{C}$-analytiques équivariantes par des courbes, Mémoire de la S.M.F., Nouvelle Série, tome 115, n° 26 (1987).

[8] A. Lichnerowicz A., Geometry of groups of transformations, Nordhoff International Publishing, Leyden, The Netherlands, 1977.

[9] A. Lichnerowicz A., Variétés kählériennes à première classe de Chern non négative et variété riemanniennes à courbure de Ricci généralisée non négative, J. Differential Geometry, 6 (1974), 47-94.

[10] S. Lojasiewicz, Triangulation of semi-analytic sets, Ann. Scuola. Norm. Sup. Pisa, (3) 18 (1964), 449-474.

[11] Oda Tadao, Lectures on Torus Embeddings and applications, Tata Institute of fundamental research, Bombay 1978.

[12] E. Oeljeklaus, Fast homogene Kähler-Mannigfaltigkeiten mit verschwindender erster Betti-Zahl., Manuskr. Math., 7 (1972), 175-183.

[13] Spanier, Algebraic Topology, Mac-Graw-Hill book company, New York 1967.

[14] K. Ueno, Classification theory of algebraic varieties and compact complex spaces, Lecture Notes in Mathematics, 439, Berlin, Heidelberg, New York, Springer, 1975.

Manuscrit reçu le 18 juin 1987
révisé le 2 novembre 1987.

François Lescure,
Alexander von Humboldt-Stiftung
Bad Godesberg
Jean-Paul-Str. 12
D - 5300 Bonn 2
&
Département de Mathématiques
pures et appliquées
Université de Caen
14032 Caen Cedex.