ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JEAN-MARC DELORT

# Problème mixte hyperbolique avec saut sur la condition aux limites

*Annales de l'institut Fourier*, tome 39, n° 2 (1989), p. 319-360

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1989__39_2_319_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
**39**, 2 (1989), 319-360.

# PROBLÈME MIXTE HYPERBOLIQUE AVEC SAUT SUR LA CONDITION AUX LIMITES

**par Jean-Marc DELORT**

## INTRODUCTION

Cet article est consacré à l'étude du problème mixte linéaire pour un système $N \times N$ non caractéristique, strictement hyperbolique de degré 1, dans le cas où la condition aux limites n'est pas $C^\infty$ mais présente un saut sur une hypersurface non caractéristique $\Delta$ du bord.

Pour obtenir un problème bien posé dans $H^\nu$ avec une trace sur le bord également $H^\nu$, on suppose réalisée hors de l'hypersurface de saut la condition de Lopatinski uniforme classique. On est en outre amené à rajouter, sur l'hypersurface de saut, une hypothèse supplémentaire, d'ailleurs nécessaire dans le cas des coefficients constants (cf. hypothèse (H4) du paragraphe 1.1). Dans ces conditions, on prouve un résultat d'existence et d'unicité dans $H^\nu$ $\left(\nu \in \left[0,\frac{1}{2}\right[\right)$.

La méthode employée est une adaptation naturelle de celle utilisée pour le problème mixte usuel et repose donc essentiellement sur la preuve d'une inégalité d'énergie. Les difficultés nouvelles introduites par le saut se traitent grâce à la régularité microlocale tangentielle supplémentaire de la solution découlant de l'ellipticité de l'opérateur près du conormal à l'hypersurface de saut.

On étudie ensuite la propagation de la régularité conormale $L^2$ pour la résolution d'un tel problème. L'idée sous-jacente, inspirée de Beals-Métivier [1] consiste à commuter au problème donné des champs de vecteurs parallèles au bord et tangents à $\Delta$ et à remarquer que les commutateurs entre ces champs et l'opérateur s'expriment comme

*Mots-clés :* Problème mixte hyperbolique - Conditions de Lopatinski - Régularité conormale.
*Classification AMS :* 35 L 50 - 35 R 05.

combinaison pseudo-différentielle de ces champs et d'un terme de degré 1 concentré dans un voisinage arbitraire du conormal à l'hypersurface de saut $\Delta$, i.e. dans la zone où la régularité elliptique permet de contrôler une certaine perte.

On obtient donc ainsi un système en les dérivés conormales sur $\Delta$ de la solution de départ, de même forme que le problème initial. Pour pouvoir lui appliquer le théorème $L^2$ déjà démontré, il est toutefois nécessaire de régulariser ces dérivées conormales afin d'obtenir une inégalité d'énergie uniformément vérifiée par ces régularisées, inégalité qui entraîne en retour la régularité $L^2$ des dérivées de départ.

Le point essentiel est que pour pouvoir étudier les commutateurs de la régularisation et de la condition aux limites singulières sur $\Delta$, il est nécessaire que cette régularisation soit uniquement conormale. Pour la définir, on est amené à adapter le calcul de Bony [2] pour construire une deuxième microlocalisation tangentielle, la régularisation cherchée étant alors obtenue à l'aide de l'inverse au sens 2-microlocal d'une famille d'opérateurs différentiels tangentiels convenables (cf. paragraphes 2.2 et 2.3). Le calcul symbolique permet ensuite d'exprimer aisément le problème aux limites dont sont solution les régularisées étudiées.

Signalons que l'étude du problème aux limites elliptique dans le cas où la condition aux limites présente un saut sur une hypersurface du bord a été récemment faite par Simanca dans [10].

Je remercie G. Métivier pour de nombreuses et fructueuses discussions sur ce travail.

*Note.* — Les résultats de ce travail ont été exposés aux Journées E.D.P. de Saint-Jean-de-Monts en juin 1987. Au même moment est paru un article de G. Eskin, intitulé : « Mixed initial boundary value problems for second order hyperbolic equations » et publié aux Communications in Partial Differential Equations, 12, p. 503-587 (1987) dans lequel l'auteur prouve, entre autres, un théorème d'existence et d'unicité pour les problèmes mixtes scalaires d'ordre 2 avec saut sur les conditions aux limites, sous des hypothèses plus générales que ci-dessous. L'analogue de ces hypothèses, dans le cas de systèmes de taille quelconque, ne semble pas pouvoir se formuler aisément mais sous la condition $(H_4)$ ci-dessous, la preuve d'Eskin s'étend aux systèmes généraux et fournit donc une approche alternative à l'étude de ces problèmes.

# 1. LE PROBLÈME DANS $L^2$

## 1.1. Position du problème et hypothèses.

*Notations.* – On notera $x = (x_0, \ldots, x_n)$ la variable de $\mathbb{R}^{n+1}$

$$x' = (x_0, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$$
$$x'' = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

On désignera par $\bar{\mathbb{R}}^{n+1}_+$ le demi-espace fermé $x_n \geqslant 0$ et par $\Delta$ l'hypersurface de $\mathbb{R}^n = \partial\bar{\mathbb{R}}^{n+1}_+$ d'équation $x_0 = 0$.

On se donne $L$ système $N \times N$ d'opérateurs différentiels à coefficients $C^\infty$ sur $\bar{\mathbb{R}}^{n+1}_+$ constants hors d'un compact, d'ordre 1, tel que $\{x_n = 0\}$ soit non caractéristique pour $L$. On peut donc écrire la partie principale de $L$ sous la forme $L_1 = D_n - A(x, D')$. On fait sur $L_1$ les deux hypothèses suivantes :

($H_1$) $L_1$ est strictement hyperbolique dans la direction $dx_1$.
($H_2$) La variété lagrangienne conormale à $\Delta$, $T^*_\Delta\mathbb{R}^{n+1}$ ne rencontre pas Car $(L_1)$.

On remarquera que la conjonction de ces deux hypothèses entraîne que $N$ est pair. On notera dans toute la suite $\mu = \dfrac{N}{2}\cdot$

Pour tous $(x;\xi') \in \bar{\mathbb{R}}^{n+1}_+ \times \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}^*_+$, on notera $E_+(x;\xi',\lambda)$ la somme directe des sous-espaces spectraux associés aux valeurs propres à partie imaginaire strictement positive de la matrice $a(x;\xi',\lambda) = A(x;\xi_0, \xi_1 - i\lambda, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1})$.

On sait [5] que $E_+(x;\xi',\lambda)$ est fonction $C^\infty$ de $(x;\xi',\lambda) \in \bar{\mathbb{R}}^{n+1}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^*_+$ à valeurs dans la Grassmanienne $G$ des $\mu$-plans complexes de $\mathbb{C}^N$ et se prolonge continûment à $\{(x;\xi',\lambda) \in \bar{\mathbb{R}}^{n+1}_+ \times \mathbb{R}^n \times \bar{\mathbb{R}}_+ ;\ x_n \geqslant 0, \lambda \geqslant 0,\ (\xi',\lambda) \neq (0,0)\}$.

On se donne une fonction

$$(1.1.1) \qquad \begin{aligned} b : \mathbb{R}^n &\to \mathscr{L}(\mathbb{C}^N, \mathbb{C}^\mu) \\ x' &\to b(x') \end{aligned}$$

$C^\infty$ par morceaux sur $\mathbb{R}^n$-$\Delta$ à valeurs dans l'espace des applications linéaires de $\mathbb{C}^N$ dans $\mathbb{C}^\mu$, telle que pour un compact $K$ de $\mathbb{R}^n$, $b$ soit localement constante sur $\mathbb{R}^n \backslash (\Delta \cup K)$. On notera $b^\pm(x'') = b(\pm 0, x'')$ les valeurs de $b$ de part et d'autre de $\Delta$.

On se propose d'étudier le problème mixte avec saut sur la condition aux limites suivant :

$$(1.1.2) \qquad \left| \begin{array}{l} Lu = f \\ b\gamma_0 u = g \end{array} \right.$$

où $f$ et $g$ sont données dans $e^{\lambda x_1} L^2(\bar{\mathbb{R}}^{n+1}_+, \mathbb{C}^N)$ et $e^{\lambda x_1} L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^\mu)$ respectivement, $\lambda$ désignant une constante positive, et où $\gamma_0(.)$ désigne la trace sur $x_n = 0$.

On veut montrer, sous des hypothèses convenables que, pour $\lambda$ assez grand, il existe une unique solution $u \in e^{\lambda x_1} L^2(\bar{\mathbb{R}}^{n+1}_+, \mathbb{C}^N)$ (cf. § 1.3 pour des énoncés précis, en particulier sur le sens à donner à la condition aux limites $b\gamma_0 u$).

On supposera que la condition de Lopatinski uniforme est vérifiée par $b$ de part et d'autre de $\Delta$ jusqu'à $\Delta$, i.e. :

($H_3$) Pour tous $x' \in \mathbb{R}^n$, $(\xi', \lambda) \in \bar{\mathbb{R}}^{n+1}_+ - \{(0,0)\}$ les sous-espaces Ker $b(x')$ et $E_+(x'; \xi', \lambda)$ sont transversaux

(lorsque $x_0 = 0$, la condition précédente doit se lire à la fois pour Ker $b^+(x'')$ et Ker $b^-(x'')$).

Quitte à conjuguer $L$ par $e^{\lambda x_1}$, le problème (1.1.2) revient à étudier

$$(1.1.3) \qquad \left| \begin{array}{l} L^\lambda v = f^\lambda \\ b\gamma_0 v = g^\lambda \end{array} \right.$$

dans $L^2(\bar{\mathbb{R}}^{n+1}_+)$ lorsque $\lambda$ est assez grand, $f^\lambda$ et $g^\lambda$ étant données dans $L^2(\bar{\mathbb{R}}^{n+1}_+, \mathbb{C}^N)$ et $L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^\mu)$ respectivement et $L^\lambda$ désignant l'opérateur $L(x; D_0, D_1 - i\lambda, D_2, \cdots D_n)$.

On peut également, sans difficulté supplémentaire, résoudre le problème (1.1.2) avec des données $e^{\lambda x_1} H^\nu(\bar{\mathbb{R}}^{n+1}_+, \mathbb{C}^N)$ et $e^{\lambda x_1} H^\nu(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^N)$ pour $\nu \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ (cf. § 1.2 pour la définition de ces espaces). Cela revient à résoudre dans $L^2$ un problème légèrement plus général que (1.1.3) obtenu en conjuguant (1.1.3) par $(\lambda^2 - \Delta_{x'})^{\nu/2}$ :

$$(1.1.3)_\nu \qquad \left| \begin{array}{l} L^\lambda v = f^\lambda \\ \mathscr{J}_\nu(b)\gamma_0 v = g^\lambda \end{array} \right.$$

où $L^\lambda$ a maintenant une partie pseudo-différentielle tangentielle d'ordre 0 et

(1.1.4) $$\mathscr{J}_\nu(b) = (\lambda^2 - \Delta_{x'})^{\frac{\nu}{2}} b (\lambda^2 - \Delta_{x'})^{-\frac{\nu}{2}}.$$

Le fait que $\mathscr{J}_\nu(b)$ soit un opérateur continu sur $L^2$ résulte du lemme suivant :

LEMME 1.1.1. — *Soit $H^\nu_\lambda(\mathbb{R}^n)$ l'espace $H^\nu(\mathbb{R}^n)$ muni de la norme $|w|_{\nu;\lambda} = |(\lambda^2 + \xi'^2)^{\frac{\nu}{2}} \hat{w}|_{L^2}$. Soit $x' \to b(x')$ une fonction $C^\infty$ par morceaux sur $\mathbb{R}^n - \Delta$, localement constante sur $\mathbb{R}^n - \Delta$ hors d'un compact de $\mathbb{R}^n$. Alors pour tout $\nu \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$ l'opérateur de multiplication par $b$ est continu sur $H^\nu_\lambda(\mathbb{R}^n)$, de norme indépendante de $\lambda \geq \lambda_0 > 0$.*

*Démonstration.* — Par dualité, on peut supposer $\nu > 0$. Comme $H^\nu_\lambda(\mathbb{R}^n) = H^\nu(\mathbb{R}_{x_0}, L^2(\mathbb{R}^{n-1}_{x''})) \cap L^2(\mathbb{R}_{x_0}, H^\nu_\lambda(\mathbb{R}^{n-1}_{x''}))$ et qu'il est clair que $b$ opère sur ce dernier espace, il suffit d'étudier $|bw|_{H^\nu(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^{n-1}))}$ pour $w \in H^\nu(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^{n-1}))$. On peut en outre supposer $b$ à support compact en $x_0$.

Utilisons alors les décompositions dyadiques de [6], [3] : soient $\varphi(\xi_0)$ fonction $C^\infty$ à support dans $\left\{\xi_0 ; \frac{1}{2} < |\xi_0| < \frac{3}{2}\right\}$, $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ telles que $\psi(\xi_0) + \sum_0^\infty \varphi(2^p \xi_0) = 1$ et posons pour tout $p \geq 0$, $w_p = \varphi(2^{-p} D_0) w$, $w_{-1} = \psi(D_0) w$. On sait

(1.1.5) $$w \in H^\nu(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^{n-1})) \Leftrightarrow \exists (c_p)_{p > -1} \in \ell^2 \quad \text{avec} \quad \|w_p\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq 2^{-p\nu} c_p, \ \forall p.$$

Écrivons

(1.1.6) $$bw = \sum_q \left( \sum_{p \leq q - N_0} b_p \right) w_q + \sum_p b_p \left( \sum_{q \leq p + N_0} w_q \right).$$

Le premier terme est le paraproduit $T_b w$ donc est dans $H^\nu(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^{n-1}))$ avec une norme contrôlée par celle de $w$ dans cet espace.

Soit $w'_p$ le terme général de la deuxième somme de (1.1.6). La régularité de $b$ entraîne

(1.1.7) $$\|b_p\|_{L^2(\mathbb{R}, L^\infty(\mathbb{R}^{n-1}))} \leq 2^{-\frac{p}{2}} c'_p \quad (c'_p) \in \ell^\infty$$

et on a d'autre part

$$\left\| \sum_{-1}^{p+N_0} w_q \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^{n-1}))} \leqslant C \sum_{-1}^{p+N_0} 2^{\frac{q}{2}} \|w_q\|_{L^2} \tag{1.1.8}$$

donc d'après (1.1.5) $\|w'_p\|_{L^2} \leqslant C\, 2^{-p\nu} c''_p$ où la suite

$$c''_p = \sum_{-1}^{p+N_0} 2^{(q-p)\left(\frac{1}{2}-\nu\right)} c_q \tag{1.1.9}$$

est dans $\ell^2$. Comme $\operatorname{Supp}(\hat{w}'_p)$ est contenu dans $|\xi_0| \leqslant C\, 2^p$ il en résulte que $bw \in H^\nu(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^{n-1}))$ avec estimation des normes.

On va maintenant décrire une condition nécessaire pour que le problème $(1.1.3)_\nu$ soit bien posé lorsque les coefficients de $L$ sont constants et que $b$ est localement constante sur $\mathbb{R}^n - \Delta$.

Pour cela soit

$$\begin{aligned} m : \mathbb{R}^n \times \bar{\mathbb{R}}_+ - \{(0,0)\} &\to \mathscr{L}(\mathbb{C}^\mu, \mathbb{C}^N) \\ (\xi', \lambda) &\to m(\xi', \lambda) \end{aligned} \tag{1.1.10}$$

une fonction continue homogène de degré 0, à valeurs dans l'espace des applications linéaires de $\mathbb{C}^\mu$ dans $\mathbb{C}^N$ telle qu'en chaque point $(\xi', \lambda)$ on ait $\operatorname{Im} m(\xi', \lambda) = E_+(\xi', \lambda)$.

Si $v(x_0, \xi'', \lambda, x_n)$ est une fonction de $(x_0, x_n)$ dépendant du paramètre $(\xi'', \lambda)$, on notera $\hat{v}(\xi_0, \xi'', \lambda, x_n)$ sa transformée de Fourier par rapport à la variable $x_0$. Si $b(x_0)$ est localement constante sur $\mathbb{R}^n - \Delta$, on pose $\mathscr{J}_\nu(b) = (\xi''^2 + \lambda^2 + D_0^2)^{\nu/2} b(x_0)\, (\xi''^2 + \lambda^2 + D_0^2)^{-\nu/2}$. On a alors :

LEMME 1.1.2. — i) *Supposons qu'il existe $\lambda_0 > 0$ tel que pour tout $(\xi'', \lambda) \in \mathbb{R}^n$ avec $\lambda \geqslant \lambda_0$ et tout $g \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^\mu)$, il existe une unique fonction $v(x_0, \xi'', \lambda, x_n)$, $L^\infty$ en $x_n \geqslant 0$ à valeurs $L^2$ en $x_0$, telle que $v(x_0, \xi'', \lambda, 0) \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^N)$ et que l'on ait :*

$$\left| \begin{aligned} &(D_n - a(\xi_0, \xi'', \lambda))\hat{v}(\xi_0, \xi'', \lambda, x_n) = 0 \\ &\mathscr{J}_\nu(b) v(x_0, \xi'', \lambda, 0) = g(x_0). \end{aligned} \right. \tag{1.1.11}$$

*Alors, pour tout $(\xi'', \lambda)$ avec $\xi''^2 + \lambda^2 = 1$ et $\lambda > 0$, l'opérateur*

$$\begin{aligned} L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^\mu) &\to L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^\mu) \\ w &\to \mathscr{J}_\nu(b) m(D_0, \xi'', \lambda) w \end{aligned} \tag{1.1.12}$$

*est inversible sur $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^\mu)$ (i.e. $w \to b(x_0) m(D_0, \xi'', \lambda) w$ est un isomorphisme de $H^\nu(\mathbb{R}, \mathbb{C}^\mu)$).*

ii) *Si de plus, il existe* $C > 0$ *telle que la solution* $v$ *de* (1.1.11) *vérifie* $\|v\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{R}))} \leqslant C\|g\|_{L^2(\mathbb{R})}$ *pour tout* $(\xi'',\lambda)$ avec $\lambda \geqslant \lambda_0$, *alors l'opérateur* (1.1.12) *est également inversible pour* $\lambda = 0$, $\xi''^2 = 1$.

*Démonstration.* — i) Remarquons que grâce à l'homogénéité de $m$, il suffit d'établir que (1.1.12) est un isomorphisme pour tout $(\xi'',\lambda)$ avec $\lambda \geqslant \lambda_0$. Soient alors $g \in L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^\mu)$ et $v$ l'unique solution de (1.1.11). Comme $v$ est bornée en $x_n$, on a nécessairement $\hat{v}(\xi_0,\xi'',\lambda,0) \in E_+(\xi_0,\xi'',\lambda) = \operatorname{Im} m(\xi_0,\xi'',\lambda)$ donc il existe $\hat{w} \in L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^\mu)$ avec $\hat{v}(\xi_0,\xi'',\lambda,0) = m(\xi_0,\xi'',\lambda)\hat{w}(\xi_0)$. L'application $g \to w$ est inverse de (1.1.12).

ii) Si de plus on a un contrôle uniforme des normes, il existe $C > 0$ tel que $\|\mathscr{J}_\nu(b)m(D_0,\xi'',\lambda)w\|_{L^2(\mathbb{R})} \geqslant c\|v\|_{L^2(\mathbb{R})}$ pour tout $w \in L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^N)$ et $(\xi'',\lambda)$ vérifiant $\xi''^2 + \lambda^2 = 1$, $\lambda \geqslant 0$. On voit donc que, pour $\lambda = 0$, $\xi''^2 = 1$ (1.1.12) est injectif d'image fermée donc un isomorphisme grâce à i) et à la constance de l'indice.

Pour résoudre le problème (1.1.2) dans le cas général des coefficients variables, on est donc amené à rajouter une hypothèse supplémentaire traduisant la condition nécessaire du lemme 1.1.2.

On notera désormais

$$(1.1.13)\qquad \begin{cases} S^n_+ = \{(\xi',\lambda) \in \mathbb{R}^{n+1}; \xi'^2+\lambda^2=1, \lambda\geqslant 0\} \\ S^{n-1}_+ = \{(\xi'',\lambda) \in \mathbb{R}^n; \xi''^2+\lambda^2=1, \lambda\geqslant 0\}. \end{cases}$$

Remarquons d'abord qu'il existe toujours des fonctions $m(x';\xi',\lambda)$ définies sur $\mathbb{R}^n \times S^n_+$ à valeurs dans $\mathscr{L}(\mathbb{C}^\mu,\mathbb{C}^N)$, ayant la même régularité que $E_+(x';\xi',\lambda)$ telles que $\operatorname{Im} m(x';\xi',\lambda) = E_+(x';\xi',\lambda)$ en tout point : en effet, cela revient à voir qu'il est possible de choisir un base de $E_+(x';\xi',\lambda)$ fonction régulière de $(x';\xi',\lambda)$. Sur le demi-espace $x_0 \geqslant 0$ il suffit pour cela de projeter sur $E_+(x';\xi',\lambda)$ parallèlement à $\operatorname{Ker} b(x')$ une base $C^\infty$ de $(\operatorname{Ker} b(x'))^\perp = \operatorname{Im} b(x')^*$. La base ainsi construite se prolonge à un domaine $x_0 \geqslant -\varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$ assez petit et la projection orthogonale de cette base sur $(\operatorname{Ker} b(x'))^\perp$ est une base (dépendant de $(x';\xi',\lambda)$) de cet espace pour $-\varepsilon < x_0 \leqslant 0$. Cela permet de prolonger la base de $E_+(x';\xi',\lambda)$ construite pour $x_0 \geqslant 0$ à $\mathbb{R}^n \times (\overline{\mathbb{R}}^{n+1}_+ - \{0\})$.

Soit $m(x';\xi',\lambda)$ une fonction continue sur $\mathbb{R}^n \times S^n_+$, $C^\infty$ pour $\lambda > 0$, à valeurs dans $\mathscr{L}(\mathbb{C}^\mu,\mathbb{C}^N)$, vérifiant en chaque point $\operatorname{Im} m(x';\xi',\lambda) = E_+(x';\xi',\lambda)$. On note également $m(x';\xi',\lambda)$ le prolongement homogène de degré 0 en $(\xi',\lambda)$ de $m$. On définit alors l'opérateur continu sur $L^2(\mathbb{R})$ (pour tout $(x'';\xi'',\lambda) \in \mathbb{R}^{n-1} \times S^{n-1}_+$ fixé) :

$$(1.1.14)\qquad M_0(x'';\xi'',\lambda) = m(0,x'';D_0,\xi'',\lambda).$$

Si $b_0(x')$ désigne la fonction qui vaut $b^{\pm}(x'')$ pour $\pm\, x_0 > 0$, l'hypothèse supplémentaire que l'on fera dans la suite s'énonce (pour $\nu \in \left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[$ fixé) :

$(H_4)_\nu$ Il existe un symbole $m(x';\xi',\lambda)$ vérifiant les conditions précédentes, tel que l'opérateur $b_0M_0(x'';\xi'',\lambda)$ associé soit inversible sur $H^\nu(\mathbb{R},\mathbb{C}^\mu)$ pour tout $x'' \in \mathbb{R}^{n-1}$ et tout $(\xi'',\lambda) \in S_+^{n-1}$ fixés.

*Remarques.* — Dès que l'hypothèse $(H_4)_\nu$ précédente est vérifiée pour un choix de $m$, elle l'est aussi pour tout $m'$ vérifiant les mêmes conditions puisque $m'$ s'écrit $m \circ q$ où $q(x';\xi',\lambda)$ est continue sur $\mathbb{R}^n \times S_+^n$ à valeurs dans $GL(\mu,\mathbb{C})$.

— Soit $m(x';\xi',\lambda)$ le symbole intervenant dans l'assertion $(H_4)_\nu$. Alors $(H_4)_\nu$ est également satisfaite par toute fonction $\tilde{m}(x';\xi',\lambda)$ continue sur $\mathbb{R}^n \times S_+^n$ à valeurs dans $\mathscr{L}(\mathbb{C}^\mu,\mathbb{C}^N)$ telle que $\|(m-\tilde{m})|_{\Delta\times S_+^n}\|_{L^\infty}$ soit assez petit.

— La condition $(H_4)_\nu$ est ouverte dans l'espace des $(L,b)$ i.e. si $(L,b)$ est un système vérifiant les conditions $(H_1)$, $(H_2)$, $(H_3)$ et $(H_4)_\nu$ il existe $\varepsilon > 0$ avec : tout système $(\tilde{L},\tilde{b})$ de la même forme que $(L,b)$ tel que les coefficients de $\tilde{L}$ soient dans un voisinage d'ordre $\varepsilon$ de deux de $L$ et que $\|b-\tilde{b}\|_{L^\infty} < \varepsilon$ vérifie $(H_1)$, $(H_2)$, $(H_3)$ et $(H_4)_\nu$. En particulier, on remarquera que tout système $(L,\tilde{b})$ avec $\tilde{b}$ assez proche d'une condition de Lopatinski régulière $b$ satisfait à $(H_4)_\nu$.

On va maintenant déduire de l'hypothèse $(H_4)_\nu$ des conditions nécessaires explicites portant sur la condition aux limites $b$.

Les sous-espaces $E_1 = E_+(0,x'';1,0,0)$ et $E_2 = E_+(0,x'';-1,0,0)$ obtenus respectivement lorsque $(\xi_0,\xi'',\lambda) = (1,0,0)$ et $(\xi_0,\xi'',\lambda) = (-1,0,0)$ sont en somme directe dans $\mathbb{C}^N$. On notera $b(x') = [b_1(x'),b_2(x')]$, $b^{\pm}(x'') = [b_1^{\pm}(x''),b_2^{\pm}(x'')]$ les décompositions correspondantes de $b(x')$ et $b^{\pm}(x'')$. On remarquera que $b_1(x')$ et $b_2(x')$ sont inversibles d'après $(H_3)$. On a alors :

PROPOSITION 1.1.3.

i) *Supposons l'hypothèse* $(H_4)_0$ *satisfaite. Alors pour tout* $x'' \in \mathbb{R}^{n-1}$

$$(1.1.15) \qquad b_1^+(x'')\cdot(b_2^+(x''))^{-1}\cdot b_2^-(x'')\cdot(b_1^-(x''))^{-1}$$

*n'a pas de valeurs propres réelles négatives.*

ii) *Réciproquement, si cette condition est satisfaite, l'opérateur* $b_0(x')M_0(x'';\xi'',\lambda)$ *est pour tout* $(x'';\xi'',\lambda) \in \mathbb{R}^{n-1} \times S_+^{n-1}$ *un opérateur de Fredholm sur* $L^2(\mathbb{R})$.

*Démonstration.* — Notons $\theta_+$ et $\theta_-$ les fonctions caractéristiques de $\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}_-$ respectivement, $j$ l'application antipodale de $\mathbb{R} : j(x) = -x$ et $\Phi$ l'isomorphisme

$$\begin{aligned} L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^{\mu}) &\to L^2(\mathbb{R}_+,\mathbb{C}^{2\mu}) \\ u &\to (\theta_+ u, j^*\theta_- u). \end{aligned} \tag{1.1.16}$$

Si $(x'';\xi'',\lambda) \in \mathbb{R}^{n-1} \times S_+^{n-1}$ est fixé, l'opérateur

$$\Phi \circ (b_0(x')M_0(x'';\xi'',\lambda)) \circ \Phi^{-1}$$

s'écrit

$$\begin{bmatrix} \theta_+ b^+(x'')M_0(x'';\xi'',\lambda) & j^*\theta_- b^-(x'')M_0(x'';\xi'',\lambda) \\ \theta_+ b^+(x'')M_0(x'';\xi'',\lambda) \circ j^* & j^*\theta_- b^-(x'')M_0(x'';\xi'',\lambda) \circ j^* \end{bmatrix}. \tag{1.1.17}$$

Remarquons que l'on peut supposer $m$ $C^\infty$ en $(\xi',\lambda)$ : en effet, on peut toujours remplacer $E_+$ par une fonction $C^\infty$ $\tilde{E}_+$ assez voisine de $E_+$ pour que $(H_4)_0$ soit satisfaite et telle en outre que $\tilde{E}_+(0,x'';\pm 1,0,0) = E_+(0,x'';\pm 1,0,0)$. Alors, d'après le lemme 1.7 et la preuve du lemme 1.15 de [9] on a

$$\begin{aligned} \theta_+ b^+(x'')M_0(x'';\xi'',\lambda) \circ j^* &= (b_1^+ - b_2^+)P_0 \\ &\quad \text{modulo un opérateur compact} \\ j^*\theta_- b^-(x'')M_0(x'';\xi'',\lambda) &= -(b_1^- - b_2^-)P_0 \\ &\quad \text{modulo un opérateur compact,} \end{aligned} \tag{1.1.18}$$

$P_0$ désignant l'opérateur sur $L^2(\mathbb{R}_+)$ défini par :

$$\widetilde{P_0 w}(s) = -\frac{e^{i\pi s}}{1 - e^{2i\pi s}}\tilde{w}(s), \qquad \operatorname{Re} s = \frac{1}{2} \tag{1.1.19}$$

et $\tilde{w}$ la transformée de Mellin de $w$ :

$$\tilde{w} = \int_0^{+\infty} t^{s-1}w(t)dt, \qquad s \in \left\{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} z = \frac{1}{2}\right\}. \tag{1.1.20}$$

D'après [9], le « symbole de Mellin » de (1.1.17) s'écrit

$$(1 - e^{2i\pi s})^{-1} \begin{bmatrix} b_2^+ - b_1^+ e^{2i\pi s} & (b_1^- - b_2^-)e^{i\pi s} \\ (b_2^+ - b_1^+)e^{i\pi s} & b_1^- - b_2^{-1} e^{2i\pi s} \end{bmatrix}. \tag{1.1.21}$$

D'après le théorème 1.23 de [9], $b_0(x')M_0(x'';\xi'';\lambda)$ est de Fredholm sur $L^2(\mathbb{R})$ pour tout $(\xi'',\lambda)$ avec $\xi''^2 + \lambda^2 = 1$ si et seulement si la matrice (1.1.21) est inversible pour tout $s \in \mathbb{C}$ vérifiant $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}\cdot$ Le résultat en découle.

## 1.2. Inégalité d'énergie.

*Notations et espaces utilisés.* — Pour tout couple $(\nu,s)$ de réels et tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, on pose

$$(1.2.1)\quad H_{(\nu,s);\lambda}(\mathbb{R}^{n+1}) = \{v \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^{n+1});\ \hat{v}(\xi',\xi_n)(\xi^2+\lambda^2)^{\frac{\nu}{2}}(\xi'^2+\lambda^2)^{\frac{s}{2}} \in L^2(\mathbb{R}^{n+1})\}$$

et on munit cet espace de la norme

$$(1.2.2)\qquad \|u\|_{(\nu,s);\lambda} = \|\hat{v}(\xi',\xi_n)(\xi^2+\lambda^2)^{\frac{\nu}{2}}(\xi'^2+\lambda^2)^{\frac{s}{2}}\|_{L^2(\mathbb{R}^{n+1})}.$$

On définit les espaces $H_{(\nu,s);\lambda}(\overline{\mathbb{R}}_+^{n+1})$ par restriction à $\overline{\mathbb{R}}_+^{n+1}$ des éléments de $H_{(\nu,s);\lambda}(\mathbb{R}^{n+1})$. Lorsque $s = 0$, on notera $H_\lambda^\nu = H_{(\nu,0);\lambda}$ et $\|\cdot\|_{\nu;\lambda} = \|\cdot\|_{(\nu,0);\lambda}$. On utilisera des notations analogues pour les espaces de Sobolev $H_\lambda^\nu(\mathbb{R}^n)$ sur le bord $\mathbb{R}^n$ de $\overline{\mathbb{R}}_+^{n+1}$, les normes sur ces espaces étant alors indiquées par une simple barre : $|\cdot|_{\nu;\lambda}$. Lorsque $\lambda$ est fixé égal à 1, on écrira simplement $H_{(\nu,s)}(\overline{\mathbb{R}}_+^{n+1})$...

Les opérateurs pseudo-différentiels tangentiels à paramètre $\lambda$ et à majorations uniformes sur $\overline{\mathbb{R}}_+^{n+1}$ de [5] d'ordre 0 opèrent de $H_{(\nu,s);\lambda}(\overline{\mathbb{R}}_+^{n+1})$ dans lui-même avec une norme indépendante de $\lambda$.

On notera enfin $e^{\lambda x_1}H_{(\nu,s);\lambda}(\mathbb{R}^{n+1})$ l'espace

$$(1.2.3)\qquad \{u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^{n+1})\,;\ e^{-\lambda x_1}u \in H_{(\nu,s);\lambda}(\mathbb{R}^{n+1})\}$$

muni de la norme

$$(1.2.4)\qquad \|u\|_{e^{\lambda x_1}H_{(\nu,s)}} = \|e^{-\lambda x_1}u\|_{(\nu,s);\lambda}$$

et on adoptera des notations analogues pour les espaces correspondants sur $\overline{\mathbb{R}}_+^{n+1}$.

Comme au paragraphe 1.1, on désignera par $L$ un système $N \times N$ sur $\overline{\mathbb{R}}_+^{n+1}$, dont la partie principale $L_1$ est un opérateur différentiel à coefficients $C^\infty$ vérifiant les hypothèses $(H_1)$ et $(H_2)$ et dont la partie d'ordre 0, $L_0 = L - L_1$ s'écrit $L_0 = e^{\lambda x_1} L_0^\lambda e^{-\lambda x_1}$ avec $L_0^\lambda$ opérateur pseudo-différentiel tangentiel à paramètre $\lambda$, d'ordre 0, à coefficients constants hors d'un compact de $\overline{\mathbb{R}}_+^{n+1}$.

On posera

$$(1.2.5) \qquad L^\lambda = e^{-\lambda x_1} L e^{\lambda x_1} = L_1^\lambda + L_0^\lambda .$$

On se donne enfin une condition aux limites $b$, de la forme (1.1.1) telle que le couple $(L_1, b)$ satisfasse aux hypothèses $(H_3)$ et $(H_4)_\nu$ pour $\nu$ réel fixé de $\left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[$. On appellera « points elliptiques de $L^\lambda$ » les points $(x;\xi',\lambda)$ où la matrice $a(x;\xi',\lambda)$ n'a pas de valeurs propres réelles. On peut alors montrer

THÉORÈME 1.2.1. — *Soient $\varphi(x;\xi',\lambda)$ et $\psi(x;\xi',\lambda)$ deux symboles d'opérateurs pseudo-différentiels tangentiels à paramètre, d'ordre* 0, *à majorations uniformes, à valeurs réelles positives, vérifiant $\varphi^2 + \psi^2 \equiv 1$.*

*Supposons en outre que* (Supp $\varphi$) $\cap$ $S_+^n$ *est relativement compact dans l'ensemble des points elliptiques de $L^\lambda$.*

*Il existe alors $C > 0$, $\lambda_0 > 0$ tels que pour toute fonction $v \in C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+^{n+1})$ on ait*

$$(1.2.6) \qquad \|\varphi(x;D',\lambda)v\|^2_{\left(0,\frac{1}{2}\right);\lambda} + \lambda\|v\|_0^2 + |\gamma_0 v|_0^2$$
$$\leqslant C\left(\|L^\lambda v\|^2_{\left(0,\frac{1}{2}\right);\lambda} + \frac{1}{\lambda}\|\psi(x;D',\lambda)L^\lambda v\|_0^2 + |J_\nu(b)\gamma_0 v|_0^2\right)$$

*dès que $\lambda \geqslant \lambda_0$.*

La preuve du théorème repose sur la construction d'un symétriseur au sens de [8], [5], construction rendue possible par l'hypothèse $(H_4)_\nu$.

On notera désormais $X = (x';\xi',\lambda)$ la variable de $\mathbb{R}^n \times S_+^n$. Rappelons que $G$ désigne la Grassmanienne des $\mu = \frac{N}{2}$ plans complexes de $\mathbb{C}^N$. On supposera donnée une distance $d$ sur $G$. Pour toute fonction $X \to \tilde{E}_+(X)$ à valeurs dans $G$, on notera $\tilde{\Pi}^+(X)$ le projecteur orthogonal de $\mathbb{C}^N$ sur $\tilde{E}_+(X)$ et $\tilde{\Pi}_-(X) = \mathrm{I} - \tilde{\Pi}_+(X)$.

Montrons alors :

LEMME 1.2.2. — *Il existe $\delta_0 > 0$, $\lambda_0 > 0$, $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ tels que pour toute fonction de classe $C^\infty$, $X \to \tilde{E}_+(X)$ définie sur $\mathbb{R}^n \times S_+^n$ à* *valeurs dans G telle que* $\operatorname{Sup}_X d(\tilde{E}_+(X), E_+(X)) < \delta_0$ *tout* $v \in L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^N)$ *et tout* $\lambda \geqslant \lambda_0$ :

$$(1.2.7) \quad |\mathcal{J}_\nu(b)v|_{L^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^\mu)} \geqslant C_1|\tilde{\Pi}_+(x;D',\lambda)v|^2_{L^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^N)} - C_2|\tilde{\Pi}_-(x;D',\lambda)v|^2_{L^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^N)}$$

($\tilde{\Pi}_+$ et $\tilde{\Pi}_-$ *étant définis à partir d'un prolongement de* $\tilde{E}^+$ *en fonction* $C^\infty$ *sur* $\mathbb{R}^n \times \{(\xi',\lambda); \lambda \geqslant 0\}$ *homogène de degré* 0 *en* $(\xi',\lambda)$ *pour* $\xi'^2 + \lambda^2 \geqslant C > 0$).

*Démonstration.* — Choisissons des fonctions

$$(1.2.8) \quad \begin{aligned} m &: \mathbb{R}^n \times S^n_+ \to \mathcal{L}(\mathbb{C}^\mu,\mathbb{C}^N) \text{ continue} \\ \tilde{m} &: \mathbb{R}^n \times S^n_+ \to \mathcal{L}(\mathbb{C}^\mu,\mathbb{C}^N)\ C^\infty \end{aligned}$$

telles que

$$\operatorname{Im} m(X) = E_+(X), \ \operatorname{Im} \tilde{m}(X) = \tilde{E}_+(X) \text{ et } |m(X) - \tilde{m}(X)|_{L^\infty} \leqslant \text{Cst}\ \delta_0 .$$

D'après la deuxième des remarques suivant l'énoncé de $(H_4)_\nu$, si $\delta_0$ est assez petit, l'opérateur $\mathcal{J}_\nu(b_0)\tilde{M}_0(x'';\xi'',\lambda)$ est injectif sur $L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^\mu)$ pour tout $x'' \in \mathbb{R}^{n-1}$ et $(\xi'',\lambda) \subset S^{n-1}_+$ fixés.

Soit également

$$(1.2.9) \quad \tilde{q} : \mathbb{R}^n \times S^n_+ \to \mathcal{L}(\mathbb{C}^{N-\mu},\mathbb{C}^N)$$

$C^\infty$, vérifiant $\operatorname{Im} \tilde{q}(X) = \tilde{E}_+(X)^\perp$ pour tout $X$. L'opérateur

$$(1.2.10) \quad \begin{aligned} L^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^\mu) \oplus L^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^{N-\mu}) &\to L^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^N) \\ (v_1,v_2) &\to \tilde{m}(x';D',\lambda)v_1 + \tilde{q}(x';D',\lambda)v_2 \end{aligned}$$

est, pour $\lambda$ assez grand un isomorphisme et (1.2.7) est alors équivalente à

$$(1.2.11) \quad \begin{aligned} &|\mathcal{J}_\nu(b)(\tilde{m}(x';D',\lambda)v_1 + \tilde{q}(x';D',\lambda)v_2)|_{L^2} \\ &\geqslant C_1|\tilde{\Pi}_+\tilde{m}(x';D',\lambda)v_1|_{L^2} - C_2|\tilde{\Pi}_-\tilde{q}(x';D',\lambda)v_2|_{L^2}. \end{aligned}$$

Il suffit donc de prouver qu'il existe $C_1 > 0$ tel que pour tout $\lambda \geqslant \lambda_0$ assez grand et tout $v_1 \in L^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^\mu)$ on ait

$$(1.2.12) \quad |\mathcal{J}_\nu(b)\tilde{m}(x';D',\lambda)v_1|_{L^2} \geqslant C_1|v_1|_{L^2}.$$

L'application

$$(1.2.13)\qquad \begin{aligned} \mathbb{R}^{n-1}\times(\bar{\mathbb{R}}^n_+-\{0\}) &\to \mathscr{L}(L^2(\mathbb{R}))\\ (x'';\xi'',\lambda) &\to (w\to\mathscr{J}_\nu(b)\tilde{M}(x'';\xi'',\lambda)w\\ &\qquad =\mathscr{J}_\nu(b)\tilde{m}(x';D_0,\xi'',\lambda)w) \end{aligned}$$

est un symbole d'opérateur pseudo-différentiel à paramètre d'ordre 0 à valeurs dans $\mathscr{L}(L^2(\mathbb{R}))$. Comme, d'après [7], [11] ces opérateurs jouissent d'un calcul symbolique, il suffit, pour prouver (1.2.12) de montrer qu'il existe $C_1>0$ telle que pour tout $(x'';\xi'',\lambda)$ avec $\lambda\geqslant\lambda_0$ assez grand et tout $w\in L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^\mu)$ on ait

$$(1.2.14)\qquad |\mathscr{J}_\nu(b)\tilde{M}(x'';\xi'',\lambda)w|^2_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^\mu)}\geqslant C_1|w|^2_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^\mu)}.$$

Soit $\chi$ une fonction $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $[0,1]$, à support dans $]-1,1[$, identiquement égale à 1 sur $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ et $\chi_\varepsilon(x)=\chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$. On a alors :

$$(1.2.15)\qquad \begin{aligned} |\mathscr{J}_\nu(b)\tilde{M}(x'';\xi'',\lambda)w|^2_{L^2} &\geqslant |\chi_\varepsilon\mathscr{J}_\nu(b)\tilde{M}(x'';\xi'',\lambda)w|^2_{L^2}\\ &\quad+|(1-\chi_\varepsilon)\mathscr{J}_\nu(b)\tilde{M}(x'';\xi'',\lambda)w|^2_{L^2}. \end{aligned}$$

Le premier terme du membre de droite se minore par ($\tilde{M}_0$ désignant l'opérateur $\tilde{m}(0,x'';D_0,\xi'',\lambda)$)

$$(1.2.16)\qquad \begin{aligned} &C_1|\mathscr{J}_\nu(b_0)\tilde{M}_0\chi_\varepsilon w|^2_0-C_1'\big[|\mathscr{J}_\nu(b_0)[\chi_\varepsilon,\tilde{M}_0]w|^2_0\\ &+|\mathscr{J}_\nu(b_0)\chi_\varepsilon(\tilde{M}-\tilde{M}_0)w|^2_0\\ &+|(\xi''^2+\lambda^2+D_0^2)^{\frac{\nu}{2}}b_0[\chi_\varepsilon,(\xi''^2+\lambda^2+D_0^2)^{-\frac{\nu}{2}}]\tilde{M}w|^2_0\\ &+|\mathscr{J}_\nu(\chi_\varepsilon(b-b_0))\tilde{M}w|^2_0\\ &+|[\chi_\varepsilon,(\xi''^2+\lambda^2+D_0^2)^{\frac{\nu}{2}}]b(\xi''^2+\lambda^2+D_0^2)^{-\frac{\nu}{2}}\tilde{M}w|^2_0\big]. \end{aligned}$$

On a vu que le premier terme se minore par $C_1|\chi_\varepsilon(x_0)w|^2_0$. La norme de $x_0\chi_\varepsilon(x_0)$ dans $H^\nu$ est en $O(\varepsilon^{1-|\nu|})$ comme on le voit par interpolation entre $\nu=0$ et $\nu=1$. Il résulte alors du lemme 1.1.1 qu'il existe $C(\varepsilon)>0$ et $C>0$ tels que (1.2.16) se minore par :

$$(1.2.17)\qquad C_1|\chi_\varepsilon(x_0)w|^2_0-\frac{C(\varepsilon)}{\lambda}|w|^2_0-c\varepsilon^{1-|\nu|}|w|^2_0.$$

Modulo un terme contrôlé par $\frac{C(\varepsilon)}{\lambda}|w|^2_0$, le deuxième terme du membre de droite de (1.2.15) vaut

$$(1.2.18)\qquad \langle\tilde{M}^*(x'';\xi'',\lambda)\mathscr{J}_{-\nu}(b^*(1-\chi_\varepsilon))\mathscr{J}_\nu((1-\chi_\varepsilon)b)\tilde{M}(x'';\xi'',\lambda)w,w\rangle.$$

L'opérateur qui intervient dans (1.2.18) a un symbole $C^\infty$ dont la partie principale est minorée par $\mathrm{Cst}(1-\chi_\varepsilon)^2\mathrm{Id}$ donc, grâce à l'inégalité de Gårding forte à paramètre (1.2.18) se minore par

$$C_1'|(1-\chi)w_\varepsilon|^2_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^\mu)} - \frac{C(\varepsilon)}{\lambda}|w|^2_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^\mu)}. \tag{1.2.19}$$

Choisissant alors $\varepsilon$ assez petit puis $\lambda$ assez grand, on obtient (1.2.14).

Le symétriseur permettant de prouver l'inégalité (1.2.6) est fourni par la proposition suivante, dans laquelle A désigne comme au paragraphe 1.1 la partie tangentielle de la partie principale $L_1^\lambda$ de l'opérateur $L^\lambda$ et a le symbole de A.

PROPOSITION 1.2.3. — *Il existe un symbole d'opérateur pseudo-différentiel tangentiel à paramètre à coefficients constants hors d'un compact, $r(x;\xi',\lambda)$ défini sur $\bar{\mathbb{R}}_+^{n+1}\times\bar{\mathbb{R}}_+^{n+1}$, à valeurs dans l'espace des matrices hermitiennes $N\times N$, homogène de degré 0 en $(\xi',\lambda)$ hors d'un voisinage de 0 et des constantes $\lambda_0>0$, $c>0$, $C>0$ telles que si $R(x,D',\lambda)$ désigne un opérateur de symbole $r$ :*

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{Im}\,(\mathrm{RA}) \geqslant c\lambda\,\mathrm{Id}\\ &-R + C\mathscr{I}_{-\nu}(b^*)\mathscr{I}_\nu(b)\geqslant c\,\mathrm{Id}\end{aligned}\right.\quad \text{si}\ \ \lambda\geqslant\lambda_0. \tag{1.2.20}$$

*Démonstration.* — Rappelons que, d'après [5], chap. 7, § 5, on a :

LEMME 1.2.4. — *Soit $\rho$ un réel strictement positif. Pour tout point $X_0=(x_0,\xi_0',\lambda_0)\in\bar{\mathbb{R}}_+^{n+1}\times S_+^n$, il existe un voisinage $V$ de $X_0$, une application $r_\rho$, définie sur $V$, à valeurs dans l'espace des matrices hermitiennes $N\times N$, $C^\infty$ et une constante $c(X_0)>0$ telles que pour tout $X\in V$ :*

$$\begin{aligned} &\mathrm{Im}\,(r_\rho(X)a(X)) \geqslant c(X_0)\lambda\,\mathrm{Id}\\ &-(r_\rho(X_0)v,v)\geqslant c(X_0)(\rho|\Pi_-(X_0)v|^2-|\Pi_+(X_0)v|^2),\quad \forall v\in\mathbb{C}^N\end{aligned} \tag{1.2.21}$$

*(cette dernière inégalité seulement lorsque $X_0=(x_0',0;\xi_0',\lambda_0)$, $\Pi_+(X_0)$* et *$\Pi_-(X_0)$ désignant alors les projecteurs orthogonaux sur $E_+(X_0)$* et *$E_+(X_0)^\perp$ respectivement).*

On fixe désormais $\rho>\dfrac{C_2}{C_1}$ ($C_1$ et $C_2$ désignant les constantes du lemme 1.2.2). Si le réel $\delta_0$ tel que $d(\tilde{E}_+(X),E_+(X))<\delta_0$ et $V$ sont assez petits on a (quitte à modifier légèrement $c(X_0)$ et $\rho$)

$$(1.2.22) \quad -(r_\rho(X)v,v) \geqslant c(X_0)(\rho|\tilde{\Pi}_-(X)v|^2 - |\tilde{\Pi}_+(X)v|^2), \quad \forall v \in \mathbb{C}^N, \quad \forall X \in V.$$

Par partition de l'unité subordonnée à un recouvrement de l'espace $\bar{\mathbb{R}}_+^{n+1} \times S_+^n$ par de tels ouverts on obtient un symbole $r(X)$ et un réel $c > 0$ tels que

$$(1.2.23) \quad \begin{aligned} &\operatorname{Im}(r(X)a(X)) \geqslant c\lambda \operatorname{Id} \\ &-(r(X)v,v) \geqslant c(\rho|\tilde{\Pi}_-(X)v|^2 - |\tilde{\Pi}_+(X)v|^2), \end{aligned}$$

(les coefficients étant constants hors d'un compact les $c(X_0)$ sont uniformément minorés). Par l'inégalité de Gårding forte à paramètre on obtient la première inégalité de (1.2.20) pour $\lambda \geqslant \lambda_0$ assez grand ainsi que

$$(1.2.24) \quad -\langle Rv,v\rangle_{L^2(\mathbb{R}^{n+1},\mathbb{C}^N)} \geqslant c(\rho|\tilde{\Pi}_-(x;D',\lambda)v|_{L^2}^2 - |\tilde{\Pi}_+(x;D',\lambda)v|_{L^2}^2) - \frac{\mathrm{Cst}}{\lambda}|v|_{L^2}^2$$

pour tout $v \in L^2(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{C}^N)$. La deuxième égalité de (1.2.20) en résulte en utilisant (1.2.7) et en choisissant $C$ dans $\left]\frac{c}{C_1}, \frac{c\rho}{C_2}\right[$ et $\lambda_0$ assez grand.

Remarquons que l'on peut supposer que si $F$ est un fermé conique tel que $F \cap S_+^n$ soit relativement compact dans l'ensemble des points elliptiques de $L^\lambda$, le symbole principal de $\operatorname{Im}(RA)$ est supérieur ou égal à $\mathrm{Cst}\,(\xi'^2 + \lambda^2)^{1/2}$ au voisinage de $F$.

*Preuve du théorème* 1.2.1. — Par intégration par parties, on a :

$$(1.2.25) \quad \langle R\gamma_0 v, \gamma_0 v\rangle_{L^2(\mathbb{R}^{n+1},\mathbb{C}^N)} = 2\int_0^{+\infty} \operatorname{Im}\langle RAv,v\rangle\, dx_n - 2\int_0^{+\infty} \operatorname{Im}\langle Rv, L^\lambda v\rangle\, dx_n - \int_0^{+\infty} \left\langle \frac{\partial R}{\partial x_n} v, v\right\rangle dx_n.$$

Soient $\Phi$ et $\Psi$ des opérateurs de symbole $\varphi$ et $\psi$ de telle manière que $\Phi^*\Phi + \Psi^*\Psi = I + S$ avec $S$ opérateur de degré $-1$. On a donc

$$(1.2.26) \quad \langle RAv,v\rangle = \langle RA\Phi v, \Phi v\rangle + \langle RA\Psi v, \Psi v\rangle + \langle [\Phi, RA]v, \Phi v\rangle + \langle [\Psi, RA]v, \Psi v\rangle + \langle SRAv, v\rangle.$$

Le symbole principal de Im $(RA)$ est minoré par $c(\xi'^2+\lambda^2)^{\frac{1}{2}}$ au voisinage de Supp $\varphi$ donc par calcul symbolique tangentiel

$$(1.2.27)\qquad \int_0^{+\infty} \langle \mathrm{Im}\,(RA)\Phi v, \Phi v\rangle\, dx_n \geqslant c\|\Phi v\|^2_{\left(0,\frac{1}{2}\right);\lambda}$$

pour $\lambda$ assez grand. Grâce à (1.2.20) on a en outre

$$(1.2.28)\qquad \int_0^{+\infty} \langle \mathrm{Im}\,(RA)\Psi v, \Psi v\rangle\, dx_n \geqslant c\lambda\|\Psi v\|_0^2$$

pour $\lambda$ assez grand. Enfin, les trois derniers termes de (1.2.26) s'estiment par $C\|v\|_0^2$. D'autre part,

$$(1.2.29)\qquad \langle Rv, L^\lambda v\rangle = \langle \Phi Rv, \Phi L^\lambda v\rangle + \langle \Psi Rv, \Psi L^\lambda v\rangle + \langle SRv, L^\lambda v\rangle$$

et

$$(1.2.30)\qquad \begin{aligned}\int_0^{\infty} |\langle \Phi Rv, \Phi L^\lambda v\rangle|\, dx_n &\leqslant C\|\Phi L^\lambda v\|_{\left(0,-\frac{1}{2}\right);\lambda}\left[\|\Phi v\|_{\left(0,\frac{1}{2}\right);\lambda} + \|v\|_{\left(0,-\frac{1}{2}\right);\lambda}\right]\\ &\leqslant C_\varepsilon\|L^\lambda v\|_{\left(0,-\frac{1}{2}\right);\lambda} + \varepsilon\|\Phi v\|^2_{\left(0,\frac{1}{2}\right);\lambda} + \frac{\varepsilon}{\lambda}\|v\|_0^2\end{aligned}$$

pour tout $\varepsilon > 0$,

$$(1.2.31)\qquad \begin{aligned}\int_0^{\infty} |\langle \Psi Rv, \Psi L^\lambda v\rangle|\, dx_n &\leqslant C\|v\|_0\|\Psi L^\lambda v\|_0\\ &\leqslant \frac{C_\varepsilon}{\lambda}\|\Psi L^\lambda v\|_0^2 + \varepsilon\lambda\|v\|_0^2\end{aligned}$$

pour tout $\varepsilon > 0$. Alors, le membre de droite de (1.2.25) se minore par

$$(1.2.32)\qquad C\left[\|\Phi v\|^2_{\left(0,\frac{1}{2}\right);\lambda} + \lambda\|v\|_0^2 - \|L^\lambda v\|^2_{\left(0,-\frac{1}{2}\right);\lambda} - \frac{C}{\lambda}\|\Psi L^\lambda v\|_0^2\right]$$

si $\varepsilon$ est choisi assez petit et $\lambda$ assez grand.

Comme, d'après (1.2.20)

$$(1.2.33)\qquad \langle R\gamma_0 u, \gamma_0 u\rangle \leqslant C|\mathscr{J}_\nu(b)\gamma_0 u|_0^2 - c|\gamma_0 u|_0^2$$

on obtient l'inégalité cherchée.

### 1.3. Résolution du problème mixte.

Il s'agit maintenant d'utiliser l'inégalité d'énergie du paragraphe 1.2 pour résoudre le problème 1.1.2. Pour cela, il faut d'abord montrer que cette inégalité s'applique également à tout problème adjoint de $(L,b)$ i.e. que si l'hypothèse $(H_4)_\nu$ est vérifiée par le problème direct, $(H_4)_{-\nu}$ est vérifiée par tout problème adjoint.

Rappelons d'abord que d'après [5], chap. 7, il existe des applications $C^\infty$ par morceaux sur $\mathbb{R}^n$-$\Delta$, localement constantes hors d'un compact de $\mathbb{R}^n$, $a(x')$, $\tilde{a}(x')$, $\tilde{b}(x')$ à valeurs respectivement dans $\mathscr{L}(\mathbb{C}^N,\mathbb{C}^{N-\mu})$, $\mathscr{L}(\mathbb{C}^N,\mathbb{C}^\mu)$, $\mathscr{L}(\mathbb{C}^N,\mathbb{C}^{N-\mu})$ telles que pour tous $\alpha,\beta\in\mathbb{C}^N$

$$(1.3.1)\qquad \langle\alpha,\beta\rangle_{\mathbb{C}^N} = \langle b\alpha,\tilde{a}\beta\rangle_{\mathbb{C}^\mu} + \langle a\alpha,\tilde{b}\beta\rangle_{\mathbb{C}^{N-\mu}}$$

les crochets $\langle\, ,\,\rangle$ désignant le produit hermitien des espaces indiqués.

Un problème adjoint de $(L,b)$ sur $H^\nu$ est par définition tout problème de la forme $(L^*,\tilde{b})$ sur $H^{-\nu}$. D'après [5], pour $\lambda$ réel positif ou nul, la somme directe des sous-espaces spectraux associés aux valeurs propres à partie imaginaire positive du symbole principal $L_1^*(x;\xi_0,\xi_1+i\lambda,\dots,\xi_n)$ est égale à $E_+(x;\xi',\lambda)^\perp$. On peut alors énoncer :

LEMME 1.3.1. — *Si $(L,b)$ vérifie $(H_1)$, $(H_2)$, $(H_3)$, $(H_4)_\nu$ pour $\lambda\geqslant 0$, $(L^*,\tilde{b})$ vérifie $(H_1)$, $(H_2)$, $(H_3)$, $(H_4)_{-\nu}$ pour $\lambda\leqslant 0$.*

*Démonstration.* — Compte tenu de [5], chap. 7, § 6 seule la validité de $(H_4)_{-\nu}$ pour $(L^*,\tilde{b})$ est à vérifier.

Soit $m(x';\xi',\lambda)$ un symbole vérifiant les conditions de $(H_4)_\nu$ pour $(L,b)$ et $\tilde{m}(x';\xi',\lambda)$ une fonction continue définie sur $\mathbb{R}^n\times S^n_+$, à valeurs dans $\mathscr{L}(\mathbb{C}^{N-\mu},\mathbb{C}^N)$ d'image en chaque point $E_+(x';\xi',\lambda)^\perp$. Si $M_0(x'';\xi'',\lambda)$ et $\tilde{M}_0(x'';\xi'',\lambda)$ désignent les opérateurs associés sur $L^2(\mathbb{R})$, on a $\tilde{M}_0^*M_0=0$ d'où grâce à (1.3.1), pour tous $w_1$, $w_2\in L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^N)$

$$(1.3.2)\quad \langle\mathscr{J}_\nu(b_0)M_0w_1,\mathscr{J}_{-\nu}(\tilde{a}_0)\tilde{M}_0w_2\rangle_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^\mu)} + \langle\mathscr{J}_\nu(a_0)M_0w_1,\mathscr{J}_{-\nu}(\tilde{b}_0)\tilde{M}_0w_2\rangle_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^{N-\mu})} = 0.$$

Si $w_2\in\operatorname{Ker}(\mathscr{J}_{-\nu}(\tilde{b}_0)\tilde{M}_0)$, la surjectivité de $\mathscr{J}_\nu(b_0)M_0$ entraîne $\mathscr{J}_{-\nu}(\tilde{a}_0)\tilde{M}_0w_2=0$. Comme en tout point $x''$,

$$\operatorname{Ker}\tilde{a}(\pm 0,x'')\cap\operatorname{Ker}\tilde{b}(\pm 0,x'') = \{0\}\ ([5])$$

on a $w_2=0$.

Pour voir la surjectivité, on remarque que

$$\operatorname{Im} \tilde{M}_0(x'';\xi'',\lambda) = (\operatorname{Im}(M_0(x'';\xi'',\lambda))^\perp$$

puisque la propriété analogue est vérifiée par les symboles. Il suffit donc de montrer que $\mathscr{I}_{-\nu}(\tilde{b}_0)|_{(\operatorname{Im} M_0)^\perp}$ est surjectif. Or, si $\tilde{g} \in L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^{N-\mu})$ est donné, il existe, puisque $\mathscr{I}_\nu(b_0)M_0$ est un isomorphisme un unique $g \in L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^\mu)$ tel que

$$(1.3.3) \quad \langle \mathscr{I}_\nu(b_0)M_0 w, g\rangle_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^\mu)} = -\langle \mathscr{I}_\nu(a_0)M_0 w, \tilde{g}\rangle_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^{N-\mu})}$$

pour tout $w \in L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^\mu)$.

Comme $\mathbb{C}^N = \operatorname{Ker} \tilde{a}(\pm 0,x'') \oplus \operatorname{Ker} \tilde{b}(\pm 0,x'')$, il existe $v \in L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^N)$ tel que $\mathscr{I}_{-\nu}(\tilde{a}_0)v = g$ et $\mathscr{I}_{-\nu}(\tilde{b}_0)v = \tilde{g}$. Puisque, d'après (1.3.1) on a toujours

$$\begin{aligned}(1.3.4) \quad \langle M_0 w, v\rangle_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^N)} &= \langle \mathscr{I}_\nu(b_0)M_0 w, \mathscr{I}_{-\nu}(\tilde{a}_0)v\rangle_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^\mu)} \\ &= \langle \mathscr{I}_\nu(a_0)M_0 w, \mathscr{I}_{-\nu}(\tilde{b}_0)v\rangle_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^{N-\mu})}\end{aligned}$$

pour tout $w \in L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}^N)$, on obtient grâce à (1.3.3), $v \in (\operatorname{Im} M_0)^\perp$.

Afin d'être certains de pouvoir construire, dans ce qui suit, des symboles à majorations uniformes ayant les propriétés de localisation souhaitées, on doit exiger des divers voisinages coniques qui vont intervenir des propriétés d'uniformité à l'infini (en $x$). Pour cela, on réservera donc le nom de « voisinage conique » d'une partie $P$ de $\bar{\mathbb{R}}_+^{n+1} \times (\bar{\mathbb{R}}_+^{n+1} - \{0\})$ à la trace sur $\bar{\mathbb{R}}_+^{n+1} \times (\bar{\mathbb{R}}_+^{n+1} - \{0\})$ d'un voisinage conique de l'adhérence de $P$ dans $\hat{\mathbb{R}}_+^{n+1} \times (\bar{\mathbb{R}}_+^{n+1} - \{0\})$, $\hat{\mathbb{R}}_+^{n+1}$ désignant le compactifié d'Alexandroff de $\bar{\mathbb{R}}_+^{n+1}$.

Pour énoncer le théorème d'existence et d'unicité, on conviendra de dire qu'une fonction $u \in e^{\lambda x_1} H_{(\nu,s')}(\bar{\mathbb{R}}_+^{n+1})$ est microlocalement dans $e^{\lambda x_1} H_{(\nu,s)}(\bar{\mathbb{R}}_+^{n+1})$ (avec $s > s'$) sur un fermé conique $\bar{V}$ de $\bar{\mathbb{R}}_+^{n+1} \times (\bar{\mathbb{R}}_+^{n+1} - \{0\})$ s'il existe un symbole tangentiel, à paramètre d'ordre $0, \varphi_1(x;\xi',\lambda)$, $\varphi_1 \equiv 1$ au voisinage de $\bar{V}$ (dans le sens qui vient d'être précisé) $\varphi_1$ à support dans un voisinage conique de $\bar{V}$ tel que $\varphi_1(x;D',\lambda)(e^{-\lambda x_1}u) \in H_{(\nu,s);\lambda}(\bar{\mathbb{R}}_+^{n+1})$. Énonçons alors :

THÉORÈME 1.3.2. — *Soit $(L,b)$ un problème mixte hyperbolique avec saut vérifiant les hypothèses $(H_1)$, $(H_2)$, $(H_3)$, $(H_4)_\nu$ du paragraphe* 1.1 *avec $\nu \in \left[0,\frac{1}{2}\right[$ fixé. Alors pour tout voisinage conique $V$ de*

$\{(x;\xi',\lambda);\, x_0=x_n=0,\, \xi''=0,\, \lambda=0\}$ *dans* $\bar{\mathbb{R}}^{n+1}_+ \times (\bar{\mathbb{R}}^{n+1}_+ - \{0\})$ *tel que* $V \cap S^n_+$ *est relativement compact dans l'ensemble des points elliptiques de* $L^\lambda$, *il existe* $\lambda_0 > 0$ *et pour toute* $f \in e^{\lambda x_1} H_{\left(\nu,-\frac{1}{2}\right)}(\bar{\mathbb{R}}^{n+1}_+)$ *microlocalement dans* $e^{\lambda x_1} H^\nu(\bar{\mathbb{R}}^{n+1}_+)$ *hors de* $V$ *et tout* $g \in e^{\lambda x_1} H^\nu(\mathbb{R}^n)$ *il existe une unique fonction* $u \in e^{\lambda x_1} H^\nu(\bar{\mathbb{R}}^{n+1}_+)$, *microlocalement dans* $e^{\lambda x_1} H_{\left(\nu,\frac{1}{2}\right)}$ sur $\bar{V}$, *solution de*

$$(1.3.5) \quad \left|\begin{array}{l} Lu = f \\ b\gamma_0 u = g. \end{array}\right.$$

*En outre,* $\gamma_0 u \in e^{\lambda x_1} H^\nu(\mathbb{R}^n)$ *et pour tout couple de symboles tangentiels à paramètre d'ordre* $0$, $(\varphi,\psi)$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}^+$, vérifiant $\varphi^2 + \psi^2 = 1$, $\varphi \equiv 1$ *au voisinage de* $\bar{V}$, $(\operatorname{Supp}\varphi) \cap S^n_+$ *relativement compact dans l'ensemble des points elliptiques de* $L^\lambda$, *on a l'inégalité d'énergie (pour* $\lambda$ *assez grand) :*

$$(1.3.6) \quad \|\varphi(x;D',\lambda)e^{-\lambda x_1}u\|^2_{\left(\nu,\frac{1}{2}\right);\lambda} + \lambda\|e^{-\lambda x_1}u\|^2_{\nu;\lambda} + |e^{-\lambda x_1}\gamma_0 u|^2_{\nu;\lambda}$$
$$\leqslant C\left[\|e^{-\lambda x_1}f\|^2_{\left(\nu,-\frac{1}{2}\right);\lambda} + \frac{1}{\lambda}\|\psi(x;D',\lambda)e^{-\lambda x_1}f\|^2_{\nu;\lambda} + |e^{-\lambda x_1}g|^2_{\nu;\lambda}\right].$$

*Remarque* 1.3.3. — Si $u \in H^\nu_{\mathrm{loc}}(\bar{\mathbb{R}}^{n+1}_+)$ et $Lu \in H^\nu_{\mathrm{loc}}(\bar{\mathbb{R}}^{n+1}_+)$, on sait que $\gamma_0(u)$ existe et est dans $H^{\nu-\frac{1}{2}}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. D'après le lemme 1.1.1, $b\gamma_0 u$ a donc un sens et est dans $H^{\nu-\frac{1}{2}}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ dès que $\nu > 0$. Dans le cas $\nu = 0$, pour donner un sens à la deuxième équation (1.3.5) choisissons $\varphi(x;\xi',\lambda)$ un symbole tangentiel à paramètre d'ordre $0$, $\varphi \equiv 1$ sur $\bar{V}$, à support dans un voisinage assez petit de $\bar{V}$ pour que $\varphi(x;D',\lambda)\, v \in H_{\left(0,\frac{1}{2}\right);\lambda}(\bar{\mathbb{R}}^{n+1}_+)$ (avec $v = e^{-\lambda x_1}u$). On peut alors écrire $v = \varphi(x;D',\lambda)v + (1-\varphi(x;D',\lambda))v$ et il suffit de définir le produit de $b$ avec la trace de chacun de ces deux termes, ce qui est l'objet du lemme suivant :

LEMME 1.3.4. — i) *L'application de trace* $v \to \gamma_0 v$ *se prolonge continûment de* $\{v \in H_{\left(0,\frac{1}{2}\right);\lambda}(\bar{\mathbb{R}}^{n+1}_+)\,;\, L^\lambda v \in H_{\left(0,\frac{1}{2}\right);\lambda}(\bar{\mathbb{R}}^{n+1}_+)\}$ *à valeurs dans* $L^2(\mathbb{R}^n)$.

ii) *Soient* $b \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ *vérifiant* $WF(b) \subset T^*_\Delta\mathbb{R}^n$ *et* $v_0 \in H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)$ *tel que* $WF(v_0)$ *ne rencontre pas* $T^*_\Delta\mathbb{R}^n$, *à supports compacts. Alors le produit* $bv_0$ *est bien défini et est dans* $H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)$.

*Démonstration.* — i) Soit $\tilde{v}$ le prolongement de $v \in C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+^{n+1})$ par 0 dans $\mathbb{R}_-^{n+1}$. Alors $L^\lambda \tilde{v} = \widetilde{L^\lambda v} + \gamma_0 v \otimes \delta(x_n = 0)$ d'où

$$|\gamma_0 v|_0 = \text{cst} \, \|\gamma_0 v \otimes \delta\|_{\left(-1,\frac{1}{2}\right)} \leqslant \text{cst} \left(\|v\|_{\left(0,\frac{1}{2}\right)} + \|L^\lambda v\|_{\left(0,\frac{1}{2}\right)}\right).$$

et le résultat.

ii) L'existence du produit est classique. Pour prouver la régularité, on utilise les décompositions dyadiques [6], [3]. On écrit (avec les notations usuelles)

$$(1.3.7) \qquad b v_0 = \sum_q \Big( \sum_{p \leqslant q - N_0} b_p \Big) v_q + \sum_p b_p \Big( \sum_{q \leqslant p - N_0} v_q \Big) + \sum_{|p-q| < N_0} b_p v_q .$$

Le premier terme est, si $N_0$ est choisi assez grand, le paraproduit $T_b v$ et est donc $H^{-\frac{1}{2}}$. Comme $\Big| \sum_{q \leqslant p - N_0} v_q \Big|_0 2^{-\frac{p}{2}} \in \ell^2$ et que $b_p \Big( \sum_{q \leqslant p - N_0} v_q \Big)$ est à spectre dans une couronne de taille $2^p$, le second terme de (1.3.7) est également $H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)$. Enfin, comme $WF(b) + WF(v_0)$ ne rencontre pas la section nulle, $b_p v_q$ est à spectre dans une couronne de taille $2^p \sim 2^q$ et $|b_p v_q|_0 \leqslant c_p 2^{\frac{p}{2}}$ avec $(c_p) \in \ell^2$ donc le dernier terme est également $H^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)$.

La condition aux limites ayant le sens que l'on vient de préciser, on peut maintenant donner la preuve du théorème.

*Démonstration du théorème* 1.3.2. — Quitte à poser

$$v = (\lambda^2 - \Delta')^{\frac{\nu}{2}}(e^{-\lambda x_1} u), \qquad f^\lambda = (\lambda^2 - \Delta')^{\frac{\nu}{2}}(e^{-\lambda x_1} f)$$

et

$$g^\lambda = (1 - \Delta')^{\frac{\nu}{2}}(e^{-\lambda x_1} g),$$

on se ramène au problème

$$(1.3.8) \qquad \left| \begin{array}{l} L^\lambda v = f^\lambda \\ \mathscr{J}_\nu(b) \gamma_0 v = g^\lambda . \end{array} \right.$$

*Existence d'une solution faible.* — Choisissons $\tilde{V}$ voisinage conique ouvert de $\bar{V} - \{0\}$ contenu dans l'ensemble des points elliptiques de $L^\lambda$, $\varphi_1(x;\xi',\lambda)$ un symbole tangentiel d'ordre 0, égal à 1 au voisinage de $\bar{V}$, à support dans $\tilde{V}$, à valeurs dans $[0,1]$ et $\psi_1(x;\xi',\lambda)$ symbole d'ordre 0, à valeurs réelles positives tel que $\varphi_1^2 + \psi_1^2 = 1$. Soit

$$(1.3.9) \qquad F = \{\theta \in C_0^\infty(\bar{\mathbb{R}}_+^{n+1}\,;\,\mathbb{C}^N)\,;\,\mathscr{J}_{-\nu}(\tilde{b})\gamma_0\theta = 0\}.$$

Si on note $\langle\langle\,,\rangle\rangle$ la dualité $\mathscr{D}(\bar{\mathbb{R}}_+^{n+1}\,;\,\mathbb{C}^N)\,\mathscr{D}'(\bar{\mathbb{R}}_+^{n+1}\,;\,\mathbb{C}^N)$ on a l'inégalité

$$(1.3.10) \quad |\langle\langle f^\lambda,\theta\rangle\rangle| \leqslant C\|\varphi_1(x;D',\lambda)f^\lambda\|_{\left(0,-\frac{1}{2}\right);\lambda}\|\varphi_1(x;D',\lambda)\theta\|_{\left(0,\frac{1}{2}\right);\lambda}$$
$$+\; C\|\psi_1(x;D',\lambda)f^\lambda\|_0\|\psi_1(x;D',\lambda)\theta\|_0 + C\|f^\lambda\|_{\left(0,-\frac{1}{2}\right);\lambda}\|\theta\|_0$$

d'où, grâce à l'inégalité d'énergie (1.2.6) appliquée au problème adjoint rétrograde

$$(1.3.11) \quad |\langle\langle f^\lambda,\theta\rangle\rangle|^2 \leqslant C[\|f^\lambda\|^2_{\left(0,-\frac{1}{2}\right);\lambda} + \frac{1}{\lambda}\|\psi_1(x;D',\lambda)f^\lambda\|_0^2]$$
$$\times\; [\|L^{\lambda *}\theta\|^2_{\left(0,-\frac{1}{2}\right);\lambda} + \frac{1}{\lambda}\|\psi_1(x;D',\lambda)L^{\lambda *}\theta\|_0^2]$$

pour $\lambda \geqslant \lambda_0$ assez grand, $\theta \in F$.

D'autre part, sur le bord $\mathbb{R}^n$, on a

$$(1.3.12) \quad |\langle g^\lambda, \mathscr{J}_{-\nu}(\tilde{a})\gamma_0\theta\rangle| \leqslant C|g^\lambda|_0|\gamma_0\theta|_0$$
$$\leqslant C|g^\lambda|_0[\|L^{\lambda *}\theta\|^2_{\left(0,-\frac{1}{2}\right);\lambda} + \frac{1}{\lambda}\|\psi_1(x;D',\lambda)L^{\lambda *}\theta\|_0^2]^{\frac{1}{2}}.$$

On définit alors une forme linéaire $\ell$ sur $L^{\lambda *}F$ en posant

$$(1.3.13) \qquad \ell(L^{\lambda *}\theta) = \langle\langle f^\lambda,\theta\rangle\rangle - i\langle g^\lambda, \mathscr{J}_{-\nu}(\tilde{a})\gamma_0\theta\rangle$$

qui est continue lorsque $L^{\lambda *}F$ est muni de la topologie définie par la norme $\|L^{\lambda *}\theta\|_{\left(0,-\frac{1}{2}\right);\lambda} + \|\psi_1(x;D',\lambda)L^{\lambda *}\theta\|_0$. Par Hahn-Banach, $\ell$ se prolonge en un élément du dual topologique $E'$ de l'espace

$$(1.3.14) \qquad E = \{\omega \in H_{\left(0,-\frac{1}{2}\right);\lambda}\,;\,\psi_1(x;D',\lambda)\omega \in L^2\}.$$

Comme $E' \subset L^2$, $\ell$ se représente par un élément $v \in L^2(\bar{\mathbb{R}}_+^{n+1})$. Si $\varphi_2(x;\xi',\lambda)$ est un symbole d'ordre 0, identiquement égal à 1 au voisinage de $\bar{V}$, à support dans l'ensemble des points où $\varphi_1$ vaut 1, à valeurs réelles positives, $\varphi_2(x;D',\lambda)$ opère de $H_{\left(0,-\frac{1}{2}\right);\lambda}$ dans $E$ donc $\varphi_2(x;D',\lambda)^*$ envoie $E'$ dans $H_{\left(0,-\frac{1}{2}\right);\lambda}$ ce qui entraîne $\varphi_2(x;D',\lambda)v \in H_{\left(0,-\frac{1}{2}\right);\lambda}$.

*Vérification de la condition aux limites.* — Dans le cas $\nu > 0$, si $\omega$ est dans $C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+^{n+1};\mathbb{C}^N)$ et $\theta \in \mathscr{S}(\overline{\mathbb{R}}_+^{n+1})$ vérifie $\mathscr{J}_{-\nu}(\tilde{b})\gamma_0\theta = 0$ on a

$$\langle\langle L^\lambda\omega,\theta\rangle\rangle = \langle\langle\omega,L^{\lambda *}\theta\rangle\rangle + i\,\langle\mathscr{J}_\nu(b)\gamma_0\omega,\mathscr{J}_{-\nu}(\tilde{a})\gamma_0\theta\rangle \tag{1.3.15}$$

$$= \langle\langle\omega,L^{\lambda *}\theta\rangle\rangle + i\,\langle b(\lambda^2-\Delta')^{-\frac{\nu}{2}}\gamma_0\omega,\tilde{a}(\lambda^2-\Delta')^{\frac{\nu}{2}}\gamma_0\theta\rangle$$

(où le deuxième crochet désigne la dualité $H^{\nu-\frac{1}{2}}, H^{\frac{1}{2}-\nu}$) par intégration par parties et d'après (1.3.1). Si $T'_\varepsilon$ est l'opérateur pseudo-différentiel tangentiel de symbole $(1+\varepsilon(\xi'^2+\lambda^2))^{-1}$, $T'_\varepsilon v \in H^1_\lambda(\overline{\mathbb{R}}_+^{n+1})$ donc (1.3.15) est vérifié par $\omega = T'_\varepsilon v$. Comme $T'_\varepsilon v$ converge vers $v$ dans $L^2$ et que $T'_\varepsilon\gamma_0 v$ converge vers $\gamma_0 v$ dans $H_\lambda^{-1/2}(\mathbb{R}^n)$, (1.3.15) est vérifiée par $\omega = v$. En utilisant (1.3.13), on a alors

$$\langle b(\lambda^2-\Delta')^{-\frac{\nu}{2}}\gamma_0 v-(\lambda^2-\Delta')^{-\frac{\nu}{2}}g_\lambda,\,\tilde{a}\tilde{\theta}\rangle = 0, \tag{1.3.16}$$
$$\forall\tilde{\theta}\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \qquad \text{avec} \qquad \tilde{b}\tilde{\theta} = 0.$$

Si on prend $\tilde{\theta}$ à support hors d'un voisinage de $\Delta$, le fait que $\operatorname{Ker}\tilde{a}(x')\oplus\operatorname{Ker}\tilde{b}(x') = \mathbb{C}^N$ en tout point entraîne que $b(\lambda^2-\Delta')^{-\frac{\nu}{2}}\gamma_0 v - (\lambda^2-\Delta')^{-\frac{\nu}{2}}g_\lambda$ est supportée par $\Delta$ donc nulle puisque dans $H_{\text{loc}}^{-\frac{1}{2}+\nu}$ grâce au lemme 1.1.1.

Dans le cas $\nu = 0$, (1.3.15) est vérifiée pour $\theta \in C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+^{n+1}-\Delta)$ solution de $\tilde{b}\gamma_0 = 0$ et on voit comme précédemment, en utilisant le lemme 1.3.4 que $b\gamma_0 v - g^\lambda$ est supportée par $\Delta$ et dans $H_{\text{loc}}^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)$ donc identiquement nulle.

*Régularité de la trace et inégalité d'énergie.* — Choisissons trois symboles tangentiels à paramètre d'ordre 0, à valeurs dans $[0,1]$ :

— $\varphi^0(x;\xi,\lambda)$ supporté dans un petit voisinage conique de $x_0 = x_n = 0$, $\xi'' = 0$, $\lambda = 0$,

— $\varphi''(x;\xi',\lambda)$ supporté près de $\Delta$ et hors d'un voisinage conique de $\xi'' = 0$, $\lambda = 0$,

— $\varphi'(x;\xi',\lambda)$ supporté loin de $\Delta$, tels que $\varphi^0 + \varphi'' + \varphi' = 1$. Notons $\Phi^0$, $\Phi''$, $\Phi'$ des opérateurs d symboles $\varphi^0$, $\varphi''$, $\varphi'$. Si $v$ est la solution précédemment construite, posons

$$v_\varepsilon = S_\varepsilon(v) = T^0_\varepsilon \Phi^0 v + T''_\varepsilon \Phi'' v + T'_\varepsilon \Phi' v \tag{1.3.17}$$

où $T^0_\varepsilon$, $T''_\varepsilon$, $T'_\varepsilon$ sont les opérateurs de symboles respectifs $(1+\varepsilon\xi_0^2)^{-1}$, $(1+\varepsilon\xi''^2+\varepsilon\lambda^2)^{-1}$, $(1+\varepsilon\xi'^2+\varepsilon\lambda^2)^{-1}$.

Alors $v_\varepsilon \in H^1_\lambda(\overline{\mathbb{R}}^{n+1}_+)$ et l'inégalité d'énergie (1.2.6) (où $\varphi$ et $\psi$ sont les symboles définis dans l'énoncé du théorème) est vérifiée par $v_\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} &\|\varphi(x;D',\lambda)\, v_\varepsilon\|^2_{\left(0,\frac{1}{2}\right);\lambda} + \lambda\|v_\varepsilon\|_0^2 + |\gamma_0 v_\varepsilon|_0^2 \\ &\leqslant C\left[\|L^\lambda v_\varepsilon\|^2_{\left(0,-\frac{1}{2}\right);\lambda} + \frac{1}{\lambda}\|\psi(x;D',\lambda)L^\lambda v_\varepsilon\|_0^2 + |\mathscr{I}_\nu(b)\gamma_0 v_\varepsilon|_0^2\right]. \end{aligned} \tag{1.3.18}$$

Le commutateur $[S_\varepsilon, L^\lambda]$ opère de $H_{(0,s);\lambda}(\overline{\mathbb{R}}^{n+1}_+)$ dans lui-même avec une norme indépendante de $\varepsilon$ et de $\lambda$. De même, $[S_\varepsilon, \varphi(x;D',\lambda)]$ et $[S_\varepsilon, \psi(x;D',\lambda)]$ opèrent de $H_{(0,s);\lambda}(\overline{\mathbb{R}}^{n+1}_+)$ dans $H_{(0,s+1);\lambda}(\overline{\mathbb{R}}^{n+1}_+)$.

On en déduit les inégalités :

$$\begin{aligned} &\|L^\lambda v_\varepsilon\|_{\left(0,-\frac{1}{2}\right);\lambda} \leqslant C\|f^\lambda\|_{\left(0,-\frac{1}{2}\right);\lambda} + C\|v\|_{\left(0,-\frac{1}{2}\right);\lambda} \\ &\|\psi(x;D',\lambda)\, L^\lambda v_\varepsilon\|_0 \leqslant C\|\psi(x;D',\lambda) f^\lambda\|_0 + C\|v\|_0 \\ &\qquad\qquad + C\|f^\lambda\|_{(0,-1);\lambda} \\ &\|\varphi(x;D',\lambda)\, v_\varepsilon\|_{\left(0,\frac{1}{2}\right);\lambda} \geqslant \|S_\varepsilon(\varphi(x;D',\lambda)v)\|_{\left(0,\frac{1}{2}\right);\lambda} - C\|v\|_{\left(0,-\frac{1}{2}\right);\lambda}. \end{aligned} \tag{1.3.19}$$

D'autre part, $R$ désignant un opérateur tangentiel d'ordre $-1$, on peut écrire

$$\begin{aligned} \gamma_0 v &= \gamma_0\Phi^0 v + \gamma_0\Phi'' v + \gamma_0\Phi' v + \gamma_0 R v \\ g^\lambda &= \mathscr{I}_\nu(b)\gamma_0\Phi^0 v + \mathscr{I}_\nu(b)\gamma_0\Phi'' v + \mathscr{I}_\nu(b)\gamma_0\Phi' v + \mathscr{I}_\nu(b)\gamma_0 R v. \end{aligned} \tag{1.3.20}$$

Comme $g^\lambda$ est $L^2$ ainsi que $\gamma_0\Phi^0 v$, $\gamma_0\Phi' v$ et $\gamma_0 R v$, la dernière égalité entraîne que $\mathscr{I}_\nu(b)\gamma_0\Phi'' v \in L^2$. Alors, dans l'expression

$$\begin{aligned} \mathscr{I}_\nu(b)\gamma_0 v_\varepsilon - g^\lambda &= \mathscr{I}_\nu(b)(\gamma_0 T^0_\varepsilon\Phi^0 v - \gamma_0\Phi^0 v) \\ &\quad + (T''_\varepsilon(\mathscr{I}_\nu(b)\gamma_0\Phi'' v) - \mathscr{I}_\nu(b)\gamma_0\Phi'' v) \\ &\quad + \mathscr{I}_\nu(b)(\gamma_0 T'_\varepsilon\Phi' v - \gamma_0\Phi' v) + [\mathscr{I}_\nu(b), T''_\varepsilon]\gamma_0\Phi'' v - \mathscr{I}_\nu(b)\gamma_0 R v \end{aligned} \tag{1.3.21}$$

les trois parenthèses tendent vers 0 dans $L^2$ et l'avant dernier terme vérifie

$$(1.3.22) \qquad |[\mathscr{J}_\nu(b), T''_\varepsilon]\gamma_0\Phi''v|_0 \leqslant C\varepsilon^{\frac{1}{2}}|\gamma_0 v|_{-\frac{1}{2};\lambda}$$

donc $\mathscr{J}_\nu(b)\gamma_0 v_\varepsilon$ converge vers $g^\lambda - \mathscr{J}_\nu(b)\gamma_0 Rv$ si $\varepsilon \to 0$.

En outre, $T^0_\varepsilon\gamma_0\Phi^0 v$ et $T'_\varepsilon\gamma_0\Phi' v$ convergent dans $L^2$ vers $\gamma_0\Phi^0 v$ et $\gamma_0\Phi' v$ respectivement. On déduit alors de (1.3.18), (1.3.19) que $|T''_\varepsilon\gamma_0\Phi'' v|_0$ est uniformément bornée pour $\varepsilon > 0$ donc $\gamma_0\Phi'' v \in L^2$. Alors, $\gamma_0 v_\varepsilon$ converge dans $L^2$ vers $\gamma_0 v - \gamma_0 Rv$. En particulier $\gamma_0 v \in L^2$.

En passant à la limite dans (1.3.18) et en utilisant (1.3.19) et le fait que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|S_\varepsilon(\varphi(x;D',\lambda)v)\|_{\left(0,\frac{1}{2}\right);\lambda} \geqslant \frac{1}{2}\|\varphi(x;D',\lambda)v\|_{\left(0,\frac{1}{2}\right);\lambda}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|v_\varepsilon\|_0 \geqslant \frac{1}{2}\|v\|_0$$

si $\lambda$ est assez grand on obtient :

$$(1.3.23) \qquad \|\varphi(x;D',\lambda)v\|^2_{\left(0,\frac{1}{2}\right);\lambda} + \lambda\|v\|_0^2 + |\gamma_0 v|_0^2$$
$$\leqslant C\left[\|f^\lambda\|^2_{\left(0,-\frac{1}{2}\right);\lambda} + \frac{1}{\lambda}\|\psi(x;D',\lambda)f^\lambda\|_0^2 + |g^\lambda|_0^2\right]$$
$$+ \frac{C}{\lambda}\|v\|_0^2 + \frac{C}{\lambda}\|f^\lambda\|^2_{\left(0,-\frac{1}{2}\right);\lambda} + \frac{C}{\lambda}|\gamma_0 v|_0^2.$$

On en déduit (1.3.6) par définition de $v$ et en utilisant l'équation pour obtenir la régularité $H^\nu$ par rapport à la variable normale.

L'énoncé du théorème 1.3.2 n'est pas invariant par difféomorphisme puisqu'il fait intervenir des opérateurs tangentiels. Il résulte toutefois de la preuve en résultat intrinsèque mais plus faible :

COROLLAIRE 1.3.5. — *Pour tout voisinage conique de* $\{(x';\xi',\lambda);\ x_0=0, \xi''=0, \lambda=0\}$ *dans* $\mathbb{R}^n \times (\overline{\mathbb{R}}^{n+1}_+ - \{0\})$ *tel que* $V \cap S^n_+$ *soit relativement compact dans l'ensemble des points elliptiques de* $L^\lambda$, *il existe* $\lambda_0 > 0$ *et pour toutes* $f \in e^{\lambda x_1}H^\nu(\overline{\mathbb{R}}^{n+1}_+)$, $g \in e^{\lambda x_1}H^\nu(\mathbb{R}^n)$, *une unique solution u du problème :*

$$(1.3.24) \qquad \left|\begin{array}{l} u \in e^{\lambda x_1}H^\nu(\overline{\mathbb{R}}^{n+1}_+), \qquad Lu = f \\ \gamma_0 u \in e^{\lambda x_1}H^\nu \text{ microlocalement au voisinage de } \overline{V} \\ b\gamma_0 u = g. \end{array}\right.$$

*En outre* $\gamma_0 u \in e^{\lambda x_1} H^\nu(\mathbb{R}^n)$ *et on a l'inégalité d'énergie :*

$$(1.3.25)\quad \lambda \| e^{-\lambda x_1} u \|^2_{\nu;\lambda} + | e^{-\lambda x_1} \gamma_0 u |^2_{\nu;\lambda} \leqslant C \left[ \frac{1}{\lambda} \| e^{-\lambda x_1} f \|^2_{\nu;\lambda} + | e^{-\lambda x_1} g |^2_{\nu;\lambda} \right].$$

*Démonstration.* — L'existence résulte du théorème 1.3.2. Remarquons que dans la preuve de la régularité de la trace et de l'unicité, quitte à remplacer (1.3.18) par :

$$(1.3.18)'\quad \lambda \| v_\varepsilon \|^2_0 + | \gamma_0 v_\varepsilon |^2_0 \leqslant C \left[ \frac{1}{\lambda} \| L^\lambda v_\varepsilon \|^2_0 + | J_\nu(b) \gamma_0 v_\varepsilon |^2_0 \right]$$

la régularité microlocale tangentielle de la solution $v = e^{-\lambda x_1} u$ n'est jamais utilisée. Seule intervient le fait qu'au voisinage de $\bar{V}$, $\gamma_0 v$ est microlocalement $L^2$. Sous les seules hypothèses du corollaire, il résulte donc de la preuve du théorème que $\gamma_0 u \in e^{-\lambda x_1} H^\nu(\mathbb{R}^n)$, que (1.3.25) est vérifiée et donc que $u$ est unique.

## 2. ÉTUDE DE LA RÉGULARITÉ CONORMALE

On étudie désormais le problème mixte avec saut sur la condition aux limites dans le seul cadre $L^2$ (i.e. $\nu = 0$ dans ce qui précède). On notera simplement $(H_4)$ l'hypothèse $(H_4)_0$ du paragraphe 2.

Il est commode d'introduire une nouvelle notation pour les espaces $H_{(0,s)}$ du paragraphe 1 : On notera désormais pour $\Omega$ ouvert de $\bar{\mathbb{R}}^{n+1}_+$

$$\dot{H}^s(\Omega) = H_{(0,s)}(\Omega) = \{\text{restrictions à } \Omega \text{ d'éléments de } H_{(0,s)}(\bar{\mathbb{R}}^{n+1}_+)\}$$

et si $\lambda$ est un paramètre de $\mathbb{R}^*_+$, $\dot{H}^s_\lambda(\Omega)$ désignera l'espace précédent muni de la norme

$$\| v \|_{\dot{H}^s_\lambda(\Omega)} = \inf \| \tilde{v} \|_{(0,s);\lambda}$$

la borne inférieure étant prise sur tous les prolongements $\tilde{v}$ de $v$ en éléments de $H_{(0,s);\lambda}(\bar{\mathbb{R}}^{n+1}_+)$. On notera $\dot{H}^s_{\text{loc}}(\Omega)$ l'espace des distributions sur $\Omega$ qui sont localement dans $\dot{H}^s(\bar{\mathbb{R}}^{n+1}_+)$ muni de sa structure naturelle d'espace de Fréchet. Si $\Omega = \bar{\mathbb{R}}^{n+1}_+$, on posera simplement (en particulier dans la section 2.2) $\dot{H}^s = \dot{H}^s_{\text{loc}}(\bar{\mathbb{R}}^{n+1}_+)$.

### 2.1. Vitesse finie de propagation et inégalité $L^2$.

On peut montrer, comme dans l'étude du problème mixte usuel que le problème $(L,b)$ de la partie 1 avec les hypothèses $(H_1)$ à $(H_4)$ possède la propriété de vitesse finie de propagation. Pour cela, on exprime tout d'abord de manière intrinsèque ces quatre conditions. Pour les trois premières, c'est identique au cas classique ([5], § VII-8). Quant à $(H_4)$, il suffit de voir qu'elle est satisfaite dans toute base de la fibre de $T^*\mathbb{R}^{n+1}/\mathbb{R}\nu$ ($\nu$ désignant la normale au bord) de la forme $(e_0, \ldots, e_{n-1})$ où $e_0 \in T^*_\Delta\mathbb{R}^{n+1}$ et $e_1$ est la direction d'hyperbolicité dès qu'elle l'est dans l'une d'elles ce qui est immédiat. On montre ensuite ([5], VII-6) que si dans le théorème 1.3.2, les données $f$, $g$ sont nulles pour $x_1 < x_1^0$, la solution $u$ est nulle pour $x_1 < x_1^0$. Par un argument de prolongement des opérateurs et de convexification, on en déduit un théorème d'unicité locale ([5], VII, proposition 8.3). La vitesse finie de propagation en découle comme dans le cas des conditions aux limites régulières, le seul point nouveau à vérifier étant la conservation de l'hypothèse $(H_4)$ lorsque l'hyperplan des données de Cauchy est déformé de telle manière que son conormal reste proche de $dx_1$. Cela résulte du fait que lors d'une telle déformation les sous-espaces $E_+$ dépendent continûment de celle-ci (cf. [5], VII, proposition 8.4) et que l'hypothèse $(H_4)$ est ouverte. On a donc :

PROPOSITION 2.1.1. — *Soit $(L,b)$ un problème mixte avec saut vérifiant les hypothèses $(H_1)$ à $(H_4)$. Il existe $\delta > 0$ tel que si*

$$
\begin{aligned}
\Omega &= \{x \in \overline{\mathbb{R}}^{n+1}_+ ; \delta(x_0^2 + \cdots + x_n^2)^{\frac{1}{2}} < T - x_1\} \\
\partial\Omega &= \Omega \cap \{x_n = 0\}
\end{aligned}
\tag{2.1.1}
$$

*et $u \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ est tangentiellement microlocalement $\dot{H}^{\frac{1}{2}}$ près de $T^*_\Delta\partial\Omega \times \{0\}$ et vérifie : $Lu = 0$ sur $\Omega$, $b\gamma_0 u = 0$ sur $\partial\Omega$, $u|_{x_1<0} = 0$, alors $u \equiv 0$ sur $\Omega$.*

On en déduit :

THÉORÈME 2.1.2. — *Soit $(L,b)$ un problème mixte avec saut vérifiant les hypothèses $(H_1)$ à $(H_4)$. Soient $f \in \dot{H}^{-\frac{1}{2}}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $g \in L^2_{\mathrm{loc}}(\partial\Omega)$ nulles pour $x_1 < 0$, telles que $f$ est microlocalement dans l'espace $L^2$ hors d'un voisinage de $T^*_\Delta\,\partial\Omega \times \{0\}$ dans $T^*\partial\Omega \times \overline{\mathbb{R}}_+$ contenu dans l'ensemble des points elliptiques de $L$.*

*Alors il existe un unique* $u \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, *microlocalement* $\dot{H}^{\frac{1}{2}}$ *près de* $T^*_\Delta\, \partial\Omega \times \{0\}$ *vérifiant :*

$$(2.1.2) \qquad \left|\begin{array}{ll} Lu & = f \ \text{sur } \Omega \\ b\gamma_0 u & = g \ \text{sur } \partial\Omega \\ u|_{x_1<0} & = 0. \end{array}\right.$$

*En outre,* $\gamma_0 u \in L^2_{\mathrm{loc}}(\partial\Omega)$.

*Démonstration.* — L'unicité découle du résultat d'unicité locale déjà signalé. Pour l'existence, on désigne si $\rho \in ]0,T[$ par $\Omega_\rho$ l'ouvert obtenu en remplaçant $T$ par $T-\rho$ dans (2.1.1). Soit $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\chi \equiv 1$ au voisinage de $\bar{\Omega}_\rho \cap \{x_1 \geqslant 0\}$. Si $u_\chi$ est la solution du problème (1.3.5) avec les données $\chi f$, $\chi g$ fournie par le théorème 1.3.2, la proposition 2.1.1 entraîne que $u_{\chi|\Omega_\rho}$ ne dépend pas de $\chi$ et est solution de (2.1.2) sur $\Omega_\rho$ d'où le théorème.

Il s'agit maintenant d'écrire une inégalité d'énergie localisée dans des ouverts de la forme précédente. On pose $f^\lambda = e^{-\lambda x_1} f$, $g^\lambda = e^{-\lambda x_1} g$, $v = e^{-\lambda x_1} u$. Soient $\Gamma'' \subset\subset \Gamma' \subset\subset \Gamma$ trois voisinages ouverts coniques de $T^*_\Delta\, \partial\Omega \times \{0\}$ dans $T^*\partial\Omega \times \bar{\mathbb{R}}_+$ contenus dans l'ensemble des points elliptiques de $L$. Soient $\varphi_1(x;D')$, $\psi_1(x;D')$ deux opérateurs pseudo-différentiels tangentiels proprement supportés dans $\Omega$ dont les symboles vérifient (modulo des symboles d'ordre $-\infty$) : $\varphi_1(x;\xi')$ est à support dans $\Gamma$, identiquement égal à 1 au voisinage de $\bar{\Gamma}'$ et $\psi_1(x;\xi')$ est à support dans $\complement\Gamma''$, identiquement égal à 1 au voisinage de $\complement\Gamma'$. Supposons $f^\lambda \in L^2_{\mathrm{loc}}$ microlocalement tangentiellement au voisinage de $\operatorname{Supp}\psi_1$.

PROPOSITION 2.1.3. — *Soit* $\rho_0 \in ]0,T[$ *fixé. Il existe* $m \in \mathbb{N}$, $\rho_1 > 0$, $\lambda_0 > 0$, $C > 0$, $C(\lambda)$ *fonction continue de* $\lambda$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}^*_+$ *tels que pour tous* $\rho' > \rho > \rho_0$, $\lambda \geqslant \lambda_0$ *la solution* $u = e^{\lambda x_1} v$ de (2.1.2) *vérifie l'inégalité d'énergie :*

$$(2.1.3) \quad \lambda \|v\|^2_{L^2(\Omega_{\rho'})} + |\gamma_0 v|^2_{L^2(\partial\Omega_{\rho'})} \leqslant C\left[\frac{1}{(\rho'-\rho)} \|\varphi_1(x;D')f^\lambda\|^2_{\dot{H}_\lambda^{-\frac{1}{2}}(\Omega_\rho)} + \frac{1}{\lambda}\|\psi_1(x;D')f^\lambda\|^2_{L^2(\Omega_\rho)} + |g|^2_{L^2(\partial\Omega_\rho)}\right] + \frac{C(\lambda)}{(\rho'-\rho)^m}\|f^\lambda\|^2_{\dot{H}^{-1}(\Omega_{\rho_1})}.$$

*En outre, si* $\chi_{\rho,\rho'} \in C_0^\infty(\Omega_\rho)$ *vaut* 1 *au voisinage* $\bar{\Omega}_{\rho'} \cap \{x_1 \geqslant 0\}$ *est telle que* $|\partial^\alpha \chi_{\rho\rho'}| \leqslant C_\alpha(\rho'-\rho)^{-|\alpha|}$ et si $u_{\rho\rho'} = e^{\lambda x_1} v_{\rho\rho'}$ *est la solution de* (2.1.2) *lorsque* $f$, $g$ *sont remplacées par* $\chi_{\rho,\rho'}f$ *et* $\chi_{\rho\rho'}g$ $(u_{\rho\rho'}|_{\Omega_{\rho'}} = u|_{\Omega_{\rho'}})$, $\|\varphi_1(x;D')v_{\rho\rho'}\|_{\dot H^{\frac12}(\Omega_{\rho'})}$ *s'estime par le membre de droite de* (2.1.3) *multiplié par* $C(\lambda)$.

La preuve de la proposition utilisera le lemme suivant :

LEMME 2.1.4. — *Soit* $S(x;D')$ *un opérateur pseudo-différentiel tangentiel d'ordre* $0$. *Alors il existe pour tout* $s \in \mathbb{R}$ *un entier* $m_s$ *tel que pour tout compact* $K$ *de* $\bar{\mathbb{R}}^{n+1}_+$, $[S(x,D'),\chi_{\rho\rho'}]$ *soit continu de* $\dot H^s_K(\bar{\mathbb{R}}^{n+1}_+)$ *dans* $\dot H^{s+1}_{\text{loc}}(\bar{\mathbb{R}}^{n+1}_+)$ *avec des semi-normes majorées par* $\dfrac{C}{(\rho'-\rho)^{m_s}}$ ($C$ *étant indépendante de* $\rho$, $\rho'$).

*Démonstration.* — Il suffit de traiter le cas $s$ entier $\geqslant 0$ : le cas $s$ entier négatif s'en déduit par dualité et le cas général par interpolation.

Si $\sigma$ est le symbole complet de $S$, on a pour toute $v \in C_0^\infty(\bar{\mathbb{R}}^{n+1}_+)$

$$\begin{aligned}[S,\chi_{\rho\rho'}]v = \sum_{0<|\alpha'|\leqslant m} \chi^{(\alpha')}_{\rho\rho'}(x',x_n)\frac{(-1)^{|\alpha'|}}{\alpha'!} &\times \\ \times \int e^{ix'.\xi'}(D^{\alpha'}_{\xi'}\sigma)(x;\xi')\hat v(\xi',x_n)\frac{d\xi'}{(2\pi)^n}& \\ + \sum_{|\alpha'|=m+1}\frac{(-1)^{m+1}}{\alpha'!}\int \ell_{\alpha'}(x,x'-y')v(y',x_n)\,dy'&\end{aligned}$$

avec

$$\ell_{\alpha'}(x,x'-y') = \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{i(x'-y').\xi'}D^{\alpha'}_{\xi'}\sigma(x;\xi')\,d\xi'\int_0^1 \chi^{(\alpha')}_{\rho\rho'}(x'+t(y'-x'),x_n)\,dt.$$

Pour tout $k\in\mathbb{N}$, il existe $m_k$ tel que les noyaux $\ell_{\alpha'}$ définissent des opérateurs bornés de $L^2_K$ dans $\dot H^k_{\text{loc}}$ de semi-normes inférieures ou égales à $\dfrac{C}{(\rho'-\rho)^{m_k}}\cdot$ Comme les termes de la première somme sont bornés de $\dot H^{k-1}_K(\bar{\mathbb{R}}^{n+1}_+) \to \dot H^k_{\text{loc}}(\bar{\mathbb{R}}^{n+1}_+)$ avec une semi-norme qui s'estime de même, le lemme est prouvé.

*Démonstration de la proposition.* — Pour simplifier les notations, posons $\tilde v = v_{\rho\rho'}$, $\tilde\chi = \chi_{\rho\rho'}$. L'inégalité d'énergie (1.3.6) appliquée aux données $\tilde\chi f$, $\tilde\chi g$ s'écrit

$$(2.1.4)\quad \begin{aligned}\lambda\|\tilde v\|_0^2 + \|\varphi(x;D',\lambda)\tilde v\|^2_{\left(0,\frac12\right);\lambda} + |\gamma_0\tilde v|_0^2 &\\ \leqslant C[\|\tilde\chi f^\lambda\|^2_{\left(0,-\frac12\right);\lambda} + \frac{1}{\lambda}\|\psi(x;D',\lambda)\tilde\chi f^\lambda\|_0^2 + |\tilde\chi g|_0^2]&\end{aligned}$$

où l'on peut supposer que $(\varphi,\psi)$ sont choisis tels que $\varphi \equiv 1$ sur $\{\xi''^2+\lambda^2 \leqslant \varepsilon^2\xi_0^2,\ x_0^2+x_n^2 \leqslant \xi^2\}$ avec $\varepsilon$ tel que

$$\Gamma \subset\subset \{(x;\xi');\, x_0^2+x_n^2<\varepsilon^2,\ |\xi''|<\varepsilon|\xi_0|\}.$$

On voit, par dualité et interpolation à partir du cas $s \in \mathbb{N}$ que

$$\|\tilde{\chi} w\|_{(0,s);\lambda} \leqslant \frac{C}{(\rho'-\rho)^{|s|}} \|w\|_{(0,s);\lambda}. \tag{2.1.5}$$

On a en utilisant le lemme 2.1.4 pour estimer $[1-\varphi_1, \tilde{\chi}]$

$$\begin{aligned}\|\tilde{\chi} f^\lambda\|_{\left(0,-\frac{1}{2}\right);\lambda} &\leqslant \|\tilde{\chi}\varphi_1(x;D')f^\lambda\|_{\dot{H}_\lambda^{-\frac{1}{2}}(\Omega_\rho)} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\|\tilde{\chi}(1-\varphi_1(x;D'))f^\lambda\|_{L^2(\Omega_\rho)} \\ &\leqslant \frac{C}{(\rho'-\rho)^{\frac{1}{2}}}\|\varphi_1(x;D')f^\lambda\|_{\dot{H}_\lambda^{-\frac{1}{2}}(\Omega_\rho)} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\|\psi_1(x;D')f^\lambda\|_{L^2(\Omega_\rho)} \\ &\qquad + \frac{C(\lambda)}{(\rho'-\rho)^m}\|f^\lambda\|_{\dot{H}^{-1}(\Omega_{\rho_1})}\end{aligned}$$

pour un certain réel $\rho_1 > 0$ ($\varphi_1$ et $\psi_1$ sont proprement supportés dans $\Omega$).

D'autre part

$$\begin{aligned}\|\psi(x;D',\lambda)\tilde{\chi} f^\lambda\|_{L^2} &\leqslant \|\psi_1(x;D')\tilde{\chi} f^\lambda\|_{L^2} + \|\psi(x;D',\lambda)(1-\psi_1(x;D'))\tilde{\chi} f^\lambda\|_{L^2} \\ &\leqslant \|\psi_1(x;D')f^\lambda\|_{L^2(\Omega_\rho)} + \|[\psi_1,\tilde{\chi}]f^\lambda\|_{L^2} + C(\lambda)\|\tilde{\chi} f^\lambda\|_{\dot{H}^{-1}(\Omega_\rho)} \\ &\leqslant \|\psi_1(x;D')f^\lambda\|_{L^2(\Omega_\rho)} + \frac{C(\lambda)}{(\rho'-\rho)^m}\|f^\lambda\|_{\dot{H}^{-1}(\Omega_{\rho_1})}\end{aligned}$$

d'après le lemme 2.1.4 et le fait que $\psi_1$ soit proprement supporté dans $\Omega$.

L'inégalité (2.1.3) de la proposition en découle.

En outre, on a

$$\begin{aligned}\|\varphi_1(x;D')\tilde{v}\|_{\dot{H}_\lambda^{\frac{1}{2}}(\Omega_{\rho'})} &\leqslant \|\varphi_1(x;D')\varphi(x;D',\lambda)\tilde{v}\|_{\dot{H}_\lambda^{\frac{1}{2}}(\Omega_{\rho'})} + \|\varphi_1(1-\varphi)\tilde{v}\|_{\dot{H}_\lambda^{\frac{1}{2}}(\Omega_{\rho'})} \\ &\leqslant C(\lambda)\|\varphi\tilde{v}\|_{\left(0,\frac{1}{2}\right);\lambda} + C(\lambda)\|\tilde{v}\|_0.\end{aligned}$$

L'inégalité (2.1.4) et la première partie de la preuve entraînent la fin de la proposition.

**2.2. Deuxième microlocalisation tangentielle.**

Le théorème de propagation de la régularité conormale sera démontré par régularisation de la solution $u$ à l'aide d'un opérateur de la forme : $(1+\varepsilon^2(x_0^2+x_n^2)D_0^2+\varepsilon^2 D''^2)^{-1}$. Un tel opérateur n'a pas de sens comme opérateur pseudo-différentiel tangentiel. On doit, pour le définir, construire un calcul 2-microdifférentiel tangentiel jouant vis-à-vis du calcul pseudo-différentiel tangentiel le même rôle que le calcul 2-microdifférentiel de Bony [4] relativement au calcul pseudo-différentiel classique.

Dans cette section, on indique comment adapter le calcul de Bony à ce cadre. Les démonstrations, identiques à celles de [4] sont laissées au lecteur.

*Notations.* — Comme on l'a déjà précisé, $\dot{H}^s$ désigne l'espace $H^{\mathrm{loc}}_{(0,s)}(\bar{\mathbb{R}}^{n+1}_+)$. Soit $\Lambda$ lagrangienne conique $C^\infty$ de $T^*\mathbb{R}^n - \{0\}$. Si $m_0(x;\xi'), \ldots, m_n(x;\xi')$ désigne un système d'équation de $\Lambda \times \{0\}$ dans $T^*\mathbb{R}^n \times \bar{\mathbb{R}}_+$, homogènes de degré 1 et $M_0, \ldots, M_n$ sont des opérateurs pseudo-différentiels tangentiels de degré 1, proprement supportés, de symbole $m_0, \ldots, m_n$, on pose, pour $k \in \mathbb{N}$ et $s \in \mathbb{R}$ :

$$\text{(2.2.1)} \qquad \dot{H}^{s,k}_\Lambda = \{v \in \dot{H}^s\,;\ \forall I \text{ avec } |I| \leqslant k,\ M^I v \in \dot{H}^s\}$$

$M^I$ désignant le composé $M^I = M_{i_1} \circ \ldots \circ M_{i_k}$ si $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$.

Si $s' \in \mathbb{R}$, $\dot{H}^{s,s'}_\Lambda$ est défini par dualité et interpolation.

Soient

$$\text{(2.2.2)} \qquad d_0(x;\xi') = (1+\xi'^2)^{\frac{1}{2}}, \quad d_1(x;\xi') = \left(1+\sum_0^n m_j(x;\xi')^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$\dot{\mathscr{H}}_0$ le module des champs de vecteurs homogènes de degré 0 sur $T^*\mathbb{R}^n \times \bar{\mathbb{R}}_+$, $\dot{\mathscr{H}}_1$ le sous-module de $\dot{\mathscr{H}}_0$ des champs tangents à $\Lambda \times \{0\}$. Suivant Bony, on définit l'espace des symboles de bidegré $(m,m') \in \mathbb{R}^2$ dépendant du paramètre $\varepsilon \in ]0,1]$ par :

$$\text{(2.2.3)} \quad \begin{aligned} \dot{\Sigma}^{m,m'}_\Lambda = \{a_\varepsilon(x;\xi') \in C^\infty(T^*\mathbb{R}^n \times \bar{\mathbb{R}}_+)\,;\ \forall k, k' \text{ entiers}, \exists C>0 \\ \text{et} \\ |\dot{\mathscr{H}}_0^k\, \dot{\mathscr{H}}_1^{k'} a_\varepsilon(x;\xi')| \leqslant C\, d_0^{m+k} d_1^{m'-k}\,; \\ \forall (x;\xi',\varepsilon) \in T^*\mathbb{R}^n \times \bar{\mathbb{R}}_+ \times ]0,1]\}. \end{aligned}$$

On définit les (familles d')opérateurs 2-microdifférentiels tangentiels de bidegré $(m,m')$ sur $\Lambda$ par :

DÉFINITION 2.2.1. — *Soit* $A_\varepsilon : C^\infty(\bar{\mathbb{R}}_+^{n+1}) \to \mathcal{D}'(\bar{\mathbb{R}}_+^{n+1})$ *une famille d'opérateurs proprement supportés uniformément en* $\varepsilon \in ]0,1]$.

*On dit que* $A_\varepsilon \in \mathrm{Op}(\dot{\Sigma}_\Lambda^{m,m'})$ *si et seulement si*

$$\mathrm{Ad}\, P_1 \circ \ldots \circ \mathrm{Ad}\, P_k \circ \mathrm{Ad}\, M_{i_1} \circ \ldots \circ \mathrm{Ad}\, M_{i_\ell} A_\varepsilon$$

*est un opérateur uniformément borné en* $\varepsilon \in ]0,1]$ *de* $\dot{H}_\Lambda^{s,s'}$ *dans* $\dot{H}_\Lambda^{s-m-\Sigma p_j, s'-m'+k}$ *pour tout couple* $(s,s')$, *où* $P_j$ *est soit un opérateur pseudo-différentiel tangentiel d'ordre* $p_j$ *soit égal à la dérivée normale* $D_n$ (*et alors* $p_j = 1$).

Le passage des symboles aux opérateurs se fait par l'intermédiaire du théorème suivant :

THÉORÈME 2.2.2. — *Il existe une unique famille d'applications linéaires continues* $\sigma_{m,m'}$ *de* $\mathrm{Op}(\dot{\Sigma}_\Lambda^{m,m'})$ *sur* $\dot{\Sigma}_\Lambda^{m,m'}/\dot{\Sigma}_\Lambda^{m,m'-1}$ *vérifiant :*

a) *Si* $A_\varepsilon \in \mathrm{Op}(\dot{\Sigma}_\Lambda^{m_1,m_1'})$ *et* $B_\varepsilon \in \mathrm{Op}(\dot{\Sigma}_\Lambda^{m_2,m_2'})$ *on a avec* $m = m_1 + m_2$, $m' = m_1' + m_2'$

$$\sigma_{m,m'}(A_\varepsilon \circ B_\varepsilon) = \sigma_{m_1,m_1'}(A_\varepsilon).\sigma_{m_2,m_2'}(B_\varepsilon) \tag{2.2.4}$$

$$\sigma_{m,m'-1}([A_\varepsilon, B_\varepsilon]) = \frac{1}{i}\{\sigma_{m_1,m_1'}(A_\varepsilon), \sigma_{m_2,m_2'}(B_\varepsilon)\}.$$

b) *Le noyau de* $\sigma_{m,m'}$ *est* $\mathrm{Op}(\dot{\Sigma}_\Lambda^{m,m'-1})$.

c) $\sigma_{m,m'}(A^*) = \overline{\sigma_{m,m'}(A)}$.

d) *Si* $P_\varepsilon$ *est une famille d'opérateurs pseudo-différentiels tangentiels d'ordre* $m$, alors $\sigma_{m,0}(P_\varepsilon)$ *est le symbole usuel de* $P$ *modulo* $\dot{\Sigma}_\Lambda^{m,-1}$.

La preuve de ce théorème se fait en ramenant au cas $\Lambda = T^*_{\{0\}}\mathbb{R}^n$ à l'aide d'une famille d'opérateurs Fourier intégraux tangentiels. Ce cas particulier s'étudie comme dans [4]. Nous rappelons les principales étapes de cette étude.

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+^{n+1})$ une fonction à support dans la demi-couronne $\{x \in \bar{\mathbb{R}}_+^{n+1} \ ; \ k^{-1} \leqslant |x| \leqslant 2k\}$, $k > 1$ telle que $\sum_{-\infty}^{+\infty} \varphi(2^{-j}x) = 1$. On notera

$\varphi(x')$ la restriction de $\varphi$ à $x_n = 0$. On pose pour $j \geqslant 0$, $u_j = \varphi(2^{-j}D')u$. On caractérise alors l'espace $\dot{H}^{s,s'}_{\{0\}} = \dot{H}^{s,s'}_{T^*_{\{0\}}\mathbb{R}^n}$ par :

$u \in \mathscr{D}'(\overline{\mathbb{R}}^{n+1}_+)$ à support dans $B(0,1)$ est dans $\dot{H}^{s,s'}_{\{0\}}$ si et seulement si :

$$\exists (c_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \ell^2 \text{ telle que,} \qquad \forall j \in \mathbb{N} : |2^{js}(1+2^j|x|)^{s'}u_j|_0 \leqslant c_j .$$

Pour définir la quantification des symboles, on introduit comme dans [4] les espaces de Sobolev à poids $\dot{S}P(s,s')$ définis par :

$v \in \mathscr{D}'(\overline{\mathbb{R}}^{n+1}_+ - \{0\})$ et à support dans $B(0,1)$ est dans $\dot{S}P(s,s')$ si et seulement si

$$\exists (c_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \ell^2 \text{ telle que,} \qquad \forall j \in \mathbb{N} : |\varphi(x)v(2^{-j}x)|_{\dot{H}^{s+s'}} \leqslant c_j 2^{-j\left(s-\frac{n+1}{2}\right)}$$

la norme $|.|_{\dot{H}^{s+s'}}$ désignant la norme tangentielle d'ordre $s + s'$ :

$$(2.2.5) \qquad |w|^2_{\dot{H}^{s+s'}} = \int (1+|\xi'|^2)^{s+s'}\hat{w}(\xi',x_n)^2 d\xi'\, dx_n .$$

Le passage entre espaces $\dot{H}^{s,s'}_{\{0\}}$ et $\dot{S}P(s,s')$ se fait par l'intermédiaire des opérateurs d'aplatissement et de partie finie définis respectivement par

$$\Pi u = \sum_{p\leqslant q}\sum \varphi(2^p x)\varphi(2^{-q}D')u,$$
$$u \in \mathscr{D}'(\overline{\mathbb{R}}^{n+1}_+) \text{ à support dans } B(0,1)$$

$$(2.2.6) \qquad \operatorname{Pf} v = \sum_{p\leqslant q}\sum \varphi(2^{-q}D')\varphi(2^p x)v,$$
$$v \in \bigcup_{(s,s')} \dot{S}P(s,s') \text{ à support dans } B(0,1).$$

La démonstration des théorèmes 2.7 et 2.8 de [4] s'adapte immédiatement à ce nouveau cadre.

Dans le cas $\Lambda = T^*_{\{0\}}\mathbb{R}^n$, la condition $a_\varepsilon(x;\xi') \in \dot{\Sigma}^{m,m'}_{\{0\}}$ s'écrit : $\forall \alpha' \in \mathbb{N}^{n-1}$, $\beta \in \mathbb{N}^n$, $\exists C_{\alpha'\beta} > 0$ et pour tout $(x;\xi',\varepsilon) \in T^*\mathbb{R}^n \times \overline{\mathbb{R}}_+ \times ]0,1]$ on a

$$(2.2.7) \qquad |D^{\alpha'}_{\xi'}D^{\beta}_x a_\varepsilon(x;\xi')| \leqslant C_{\alpha'\beta}(1+|\xi'|)^{m-|\alpha'|+|\beta|}(1+|x|\,|\xi'|)^{m'-|\beta|}.$$

On définit alors une classe de symboles singuliers par :

DÉFINITION 2.2.3. — *On note* $\dot{S}\Sigma_0^{m,m'}$ *l'espace des familles de fonctions* $C^\infty$ *sur* $(\bar{\mathbb{R}}_+^{n+1}-\{0\}) \times \mathbb{R}^n$ $a_\varepsilon(x;\xi')$ *vérifiant :*

a) $\forall \alpha',\beta$, $\exists C_{\alpha'\beta} > 0$ *et pour tout* $(x;\xi',\varepsilon) \in (\bar{\mathbb{R}}_+^{n+1}-\{0\}) \times \mathbb{R}^n \times ]0,1]$

$$(2.2.8) \qquad |D_{\xi'}^{\alpha'} D_x^\beta a_\varepsilon(x;\xi')| \leqslant C_{\alpha'\beta}|x|^{-m+|\alpha'|-|\beta|}(1+|x|\,|\xi'|)^{m+m'-|\alpha'|}$$

b) $\exists k > 1$ *tel que*, $\forall \varepsilon \in ]0,1]$

$$(2.2.9) \qquad \operatorname{Supp} \hat{a}_\varepsilon^2(x;x'-y') \subset \{(x,y')\,;\, k^{-1}|x| \leqslant (y'^2+x_n^2)^{\frac{1}{2}} \leqslant k|x|\}$$

$\hat{a}_\varepsilon^2$ *désignant la transformée de Fourier par rapport à la deuxième variable.*

Le passage de $\dot{\Sigma}$ à $S\dot{\Sigma}$ se fait par le théorème suivant qui se démontre comme dans [4] :

THÉORÈME 2.2.4. — *Soit* $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ *une fonction* $C^\infty$ *à support dans* $|t| < \frac{1}{2}$, $\sigma(t) \equiv 1$ *si* $|t| \leqslant \frac{1}{4}$. *L'application :*

$$a_\varepsilon(x;\xi') \to (1-\sigma(|x|\,|\xi'|))a_\varepsilon(x;\xi')$$

*induit des isomorphismes indépendants de* $\sigma$ *de* $S\dot{\Sigma}_0^{m,m'}/S\dot{\Sigma}_0^{m,-\infty}$ *sur* $\dot{\Sigma}_0^{m,m'}/\dot{\Sigma}_0^{m,-\infty}$.

Disons qu'un opérateur pseudo-différentiel tangentiel sur $\bar{\mathbb{R}}_+^{n+1}$ est à support dans une demi-couronne $C = \{x \in \bar{\mathbb{R}}_+^{n+1}\,;\, k_0^{-1} \leqslant |x| \leqslant k_0\}$ si son noyau est à support dans $\{(x,y')\,;\, x \in C$ et $(y',x_n) \in C\}$. On voit alors comme dans [4] :

THÉORÈME 2.2.5. — *Une famille* $A_\varepsilon$ *d'opérateurs sur* $C_0^\infty(\bar{\mathbb{R}}_+^{n+1}-\{0\})$ *nuls hors de la boule unité peut s'écrire* $A_\varepsilon = a_\varepsilon(x;D')$ *avec* $a_\varepsilon(x;\xi') \in \dot{S}\Sigma_0^{m,m'}$ *si et seulement si*

$$(2.2.10) \qquad A_\varepsilon = \sum_{p=0}^{+\infty} 2^{pm}\theta_p A_p^\varepsilon \theta_{-p}$$

*où* $\theta_p$ *est l'opérateur de dilatation* $\theta_p u(x) = u(2^p x)$ *et* $A_p^\varepsilon$ *une famille bornée d'opérateurs pseudo-différentiels tangentiels d'ordre* $m + m'$ *à support dans une même demi-couronne* $C = \{x \in \bar{\mathbb{R}}_+^{n+1}\,;\, k_0^{-1} \leqslant |x| \leqslant k_0\}$.

On dit qu'une famille $R_\varepsilon$ d'opérateurs sur $\bar{\mathbb{R}}_+^{n+1} - \{0\}$ est négligeable d'ordre $m$ si pour tous $(s,s')$ et tout $\ell \in \mathbb{N}$, $(\operatorname{Ad} D_n)^\ell R_\varepsilon$ opère de $\dot{S}P(s,s')$

dans $\dot{S}P(s-m-\ell,+\infty)$ uniformément en $\varepsilon\in]0,1]$. On pose alors

$$\text{(2.2.11)}\quad \mathrm{Op}\,(\dot{S}\Sigma_0^{m,m'})=\{a_\varepsilon(x;D')+\text{opérateurs négligeables d'ordre } m\,;\; a_\varepsilon(x;\xi')\in\dot{S}\Sigma_0^{m,m'}\}$$

et on démontre comme dans [4] :

THÉORÈME 2.2.6. — *Une famille* $A_\varepsilon\in\mathrm{Op}\,(\dot{S}\Sigma_0^{m,m'})$ *si et seulement si, pour tout* $(\alpha,\beta)\in\mathbb{N}^{n+1}\times\mathbb{N}^{n+1}$ $(\mathrm{Ad}\ D)^\beta(\mathrm{Ad}\ M_x)^\alpha A_\varepsilon$ *opère de* $\dot{S}P(s,s')$ *dans* $\dot{S}P(s-m-|\beta|+|\alpha|,s'-m'+|\beta|)$ *uniformément en* $\varepsilon\in]0,1]$ ($M_x$ *désigne la multiplication par l'une des coordonnées* $x_0,\dots,x_n$).

On en déduit alors que l'application $a_\varepsilon(x;\xi')\to a_\varepsilon(x;D')$ induit un isomorphisme d'algèbres bigraduées de $\dot{S}\Sigma_0^{m,m'}/\dot{S}\Sigma_0^{m,-\infty}$ sur $\mathrm{Op}\,(\dot{S}\Sigma_0^{m,m'})/\mathrm{Op}\,(\dot{S}\Sigma^{m,-\infty})$ grâce au calcul symbolique des opérateurs pseudo-différentiels tangentiels supportés dans des demi-couronnes.

Utilisant les opérateurs $\Pi$ et Pf, on en déduit un isomorphisme canonique d'algèbres bigraduées

$$\mathrm{Op}\,(\dot{\Sigma}_0^{m,m'})/\mathrm{Op}\,(\dot{\Sigma}_0^{m,-\infty})\;\to\;\dot{\Sigma}_0^{m,m'}/\dot{\Sigma}_0^{m,-\infty}$$

(cf. [4] théorème 3.10).

Pour prouver le théorème 2.2.2, il ne reste plus qu'à montrer qu'il existe une seule notion de symbole principal, en recopiant la preuve du théorème 4.1 de [4], ce qui permet de se ramener, à l'aide d'opérateurs Fourier intégraux tangentiels au cas $\Lambda = T^*_{\{0\}}\mathbb{R}^n$ précédemment étudié.

*Remarque.* — Si $a_\varepsilon\in\dot{\Sigma}_\Lambda^{m,m'}$, $a_\varepsilon^0 = a_{\varepsilon|x_n=0}$ est un symbole 2-microdifférentiel (au sens usuel) sur le bord. Si $A_\varepsilon$ et $A_\varepsilon^0$ sont des opérateurs respectivement sur le demi-espace et sur le bord de symboles $a_\varepsilon$ et $a_\varepsilon^0$, on n'aura pas en général $\gamma_0A_\varepsilon = A_\varepsilon^0\gamma_0$. Toutefois, supposons choisie une quantification de $a_\varepsilon$ (par le choix explicite d'un symbole $\tilde{a}_\varepsilon\in S\dot{\Sigma}_\Lambda^{m,m'}$ dont l'image par l'isomorphisme du théorème 2.2.4 est $a_\varepsilon$ et de transformations canoniques tangentielles convenables : cf. début du § 2.3). Alors on peut quantifier $a_\varepsilon^0$ en utilisant un symbole singulier égal à $\tilde{a}_{\varepsilon|x_n=0}$ et des transformations canoniques sur le bord égales à la trace sur le bord des transformations canoniques tangentielles choisies. Avec ces choix on a $\gamma_0A_\varepsilon = A_\varepsilon^0\gamma_0$. On fera ainsi au paragraphe suivant et on notera alors sans risque d'ambiguïté par la même lettre $A_\varepsilon$ l'opérateur sur le demi-espace et l'opérateur sur le bord.

## 2.3. Régularité conormale.

Si $\Omega$ est un ouvert de $\overline{\mathbb{R}}_+^{n+1}$ et $\tilde{\Lambda} = T_{\tilde{\Delta}}^*\Omega$, on notera $H_{\tilde{\Lambda}}^{0,k}(\Omega)$ l'espace des distributions conormales le long de $\tilde{\Lambda}$ :

$$(2.3.1) \qquad H_{\tilde{\Lambda}}^{0,k}(\Omega) = \{u \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)\,;\, \forall \ell \leqslant k,\, \mathscr{X}^\ell u \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)\}$$

$\mathscr{X}$ désignant le module des champs de vecteurs sur $\Omega$ tangents à $\Delta$.

On prendra garde à ne pas confondre cet espace avec les espaces $\dot{H}_\Lambda^{s,s'}$ introduit dans la section précédente. Si $\Lambda = T_{\Delta}^*\partial\Omega$ l'espace $\dot{H}_\Lambda^{0,k}$ est en effet l'ensemble des distributions $v \in L^2_{\mathrm{loc}}$ telles que $X_1 \ldots X_\ell v \in L^2_{\mathrm{loc}}$ pour toute famille de $\ell \leqslant k$ champs de vecteurs choisis parmi

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \quad 1 \leqslant j \leqslant n-1, \qquad x_0 \cdot \frac{\partial}{\partial x_0}, \qquad x_n \cdot \frac{\partial}{\partial x_0}.$$

L'espace $H_{\tilde{\Lambda}}^{0,k}$ est l'espace des distributions $u \in L^2_{\mathrm{loc}}$ telles que $X_1 \ldots X_\ell u \in L^2_{\mathrm{loc}}$ pour toute famille de $\ell \leqslant k$ champs de vecteurs choisis parmi

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \quad 1 \leqslant j \leqslant n-1, \qquad x_0 \cdot \frac{\partial}{\partial x_0}, \qquad x_0 \cdot \frac{\partial}{\partial x_n},$$

$$x_n \cdot \frac{\partial}{\partial x_0}, \qquad x_n \cdot \frac{\partial}{\partial x_n}.$$

On notera $H_\Lambda^{0,k}(\partial\Omega)$ l'espace des distributions conormales sur le bord. Il s'agit de prouver :

THÉORÈME 2.3.1. — *Soit $(L,b)$ un problème mixte avec saut sur la condition aux limites vérifiant les hypothèses $(H_1)$ à $(H_4)$ de la partie* 1. *Soient $\Omega$ un ouvert de $\overline{\mathbb{R}}_+^{n+1}$ de la forme* (2.1.1) *et $f \in H_{\tilde{\Lambda}}^{0,k}(\Omega)$, $g \in H_\Lambda^{0,k}(\partial\Omega)$ nulles pour $x_1 < 0$.*

*Soit $u$ l'unique solution du problème* (1.3.24) *dans $L^2_{\mathrm{loc}}$ telle que $\gamma_0 u$ soit microlocalement $L^2$ près de $\Lambda$.*

*Alors $u \in H_{\tilde{\Lambda}}^{0,k}(\Omega)$ et $\gamma_0 u \in H_\Lambda^{0,k}(\partial\Omega)$.*

Remarquons que puisque $L$ est non caractéristique, il nous suffit d'établir la régularité $\dot{H}_\Lambda^{0,k}$ de $u$. On notera

$$(2.3.2) \qquad Z_0 = x_0 D_0, \quad Z_j = D_j, \quad j = 1, \ldots, n-1, \quad Z_n = x_n D_0.$$

On pose $v = e^{-\lambda x_1}u$, $V^0(x) = v(x)$, et pour $\ell \leqslant k$, on définit par récurrence $V^\ell(x) \in \mathbb{C}^{N(n+2)^\ell}$ par $V^\ell = (V^{\ell-1}, Z_0V^{\ell-1}, \ldots, Z_nV^{\ell-1})$.

On définit de même à partir de $f^\lambda = e^{-\lambda x_1}f$, $g^\lambda = e^{-\lambda x_1}g$ des $F^{\lambda,\ell}$, $G^{\lambda,\ell}$. Les opérateurs diagonaux par blocs, d'éléments diagonaux $L^\lambda$ ou $b$ seront désignés par ces mêmes lettres sans risque de confusion.

On note toujours $\Omega_\rho$, $\partial\Omega_\rho$ les familles d'ouverts définies dans la preuve du théorème 2.1.2. On fixe $\rho_0 \in ]0,T[$, $\rho_1 > 0$ et $\eta > 0$ tels que $x \in \Omega_{\rho_0}$ et $|x'-y'| < 3\eta$ entraîne $(y',x_n) \in \Omega_{\rho_1}$ et que $\{x; \exists y'$ avec $|y'-x'| < 3\eta$ et $(y',x_n) \in \Omega_{\rho_1}\} \subset \Omega_{\rho_1'}$ pour un certain $\rho_1' > 0$. La preuve du théorème repose sur une régularisation tangentielle à l'aide d'une famille convenable d'opérateurs 2-microdifférentiels. Soit

$$a_\varepsilon(x;\xi') = (1+\varepsilon^2(x_0^2+x_n^2)\xi_0^2+\varepsilon^2\xi''^2)^{-1} \in \dot\Sigma_\Lambda^{0,0}. \tag{2.3.3}$$

On peut associer à la famille $a_\varepsilon$ une famille $A_\varepsilon \in \mathrm{Op}(\Sigma_\Lambda^{0,0})$ telle que $\sigma_{0,0}(A_\varepsilon) = a_\varepsilon$ et que $\varepsilon^2A_\varepsilon \in \mathrm{Op}(\dot\Sigma_\Lambda^{0,-2})$ avec $\sigma_{0,-2}(\varepsilon^2A_\varepsilon) = \varepsilon^2a_\varepsilon$.

Cela ne résulte pas directement du théorème 2.2.2 mais on peut construire $A_\varepsilon$ de la manière suivante : écrivons $a_\varepsilon = \sum_\alpha a_\varepsilon^\alpha(x;\xi')$ comme somme localement finie de symboles à supports dans des cônes $\Gamma_\alpha$ de $T^*\mathbb{R}^n \times \bar{\mathbb{R}}_+$ au voisinage desquels il existe des transformations canoniques $\chi_\alpha^{-1}(x';\xi')$ ramenant $\Lambda$ à $T^*_{\{0\}}\mathbb{R}^n$. Soient $F_\alpha$ et $G_\alpha$ des opérateurs Fourier intégraux tangentiels associés à $\chi_\alpha$ et $\chi_\alpha^{-1}$ respectivement tels que $F_\alpha \circ G_\alpha \equiv G_\alpha \circ F_\alpha \equiv \mathrm{Id}$ modulo des opérateurs régularisant (tangentiellement). Soit $\tilde a_\varepsilon^\alpha \in S\dot\Sigma_0^{0,0}$ associé à $a_\varepsilon^\alpha \circ \chi_\alpha$ par le théorème 2.2.4. Il résulte alors des constructions du paragraphe 2.2 que

$$A_\varepsilon = \sum_\alpha F_\alpha \,\mathrm{Pf}\, \tilde a_\varepsilon^\alpha(x;D')\Pi G_\alpha \in \mathrm{Op}(\dot\Sigma_\Lambda^{0,0})$$

a pour symbole principal $a_\varepsilon$. Comme en outre $\varepsilon^2\tilde a_\varepsilon^\alpha = \varepsilon^2a_\varepsilon^\alpha$ (cf. [4] preuve du théorème 3.3), $\varepsilon^2A_\varepsilon \in \mathrm{Op}(\dot\Sigma_\Lambda^{0,-2})$ et a pour symbole principal $\varepsilon^2a_\varepsilon$.

On peut toujours supposer ([4] Remarque 1.7) que $A_\varepsilon$ est proprement supporté dans le voisinage $|x'-y'| < \eta$ de la diagonale. Alors, si $u$ est définie sur $\Omega$, $A_\varepsilon u$ est bien défini sur $\Omega_\rho$.

Si $B_\varepsilon$ désigne la famille d'opérateurs différentiels tangentiels

$$B_\varepsilon = 1 + \varepsilon^2(x_0^2+x_n^2)D_0^2 + \varepsilon^2D''^2 \tag{2.3.4}$$

on a $A_\varepsilon B_\varepsilon \equiv B_\varepsilon A_\varepsilon \equiv \mathrm{Id}$ modulo $\mathrm{Op}(\dot\Sigma_\Lambda^{0,-1})$.

On utilisera le résultat suivant :

LEMME 2.3.2. — *Il existe* $R_\varepsilon \in \mathrm{Op}(\dot{\Sigma}_\Lambda^{0,-1})$ *tel que* $\forall u \in \dot{H}_\Lambda^{s,-\infty}$ $(A_\varepsilon + R_\varepsilon)u \to u$ *dans* $\dot{H}_\Lambda^{s,-\infty}$ *lorsque* $\varepsilon \to 0$.

*Démonstration.* — Modulo $\mathrm{Op}(\dot{\Sigma}_\Lambda^{0,-1})$, $A_\varepsilon - I \equiv \sum_\alpha F_\alpha \mathrm{Pf}\,\widetilde{(a_\varepsilon - 1)^\alpha}\Pi G_\alpha$. Comme les semi-normes de $a_\varepsilon - 1$ dans $\dot{\Sigma}_\Lambda^{0,h}$ ($h > 0$ quelconque) calculées à $\varepsilon$ fixé, tendent vers 0 lorsque $\varepsilon \to 0$, les semi-normes de $\widetilde{(a_\varepsilon - 1)^\alpha}$ dans $\dot{S}\Sigma_0^{0,h}$ tendent vers 0 (on le vérifie immédiatement sur la construction de l'isomorphisme du théorème 2.2.4 faite dans la preuve du théorème 3.3 de [4]). Alors, dans l'expression (2.2.10) de l'opérateur $\widetilde{(a_\varepsilon - 1)^\alpha}(x;D')$, les symboles des opérateurs pseudo-différentiels $A_p^\varepsilon$ qui apparaissent tendent vers 0 uniformément en $p$ pour la topologie des symboles d'ordre $h > 0$. Le lemme en découle.

Posons

$$(2.3.5) \qquad V_\varepsilon^\ell = A_\varepsilon V^\ell, \qquad F_\varepsilon^{\lambda,\ell} = A_\varepsilon F^{\lambda,\ell}, \qquad G_\varepsilon^{\lambda,\ell} = A_\varepsilon G^{\lambda,\ell}.$$

La preuve du théorème se faisant par récurrence, on peut supposer $V^\ell \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $V^\ell \in \dot{H}^{\frac{1}{2}}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ près de $\Lambda \times \{0\}$, $\gamma_0 V^\ell \in L^2_{\mathrm{loc}}(\partial\Omega)$. On a :

LEMME 2.3.3. — *Il existe pour tout* $\ell \leqslant k$ *et tout* $j = 0, \ldots, n$ :

— *Une famille* $C_\varepsilon^{\ell,j}$ *d'opérateurs 2-microdifférentiels tangentiels d'ordre* $(1,0)$, *supportés dans* $|x'-y'| < 2\eta$, *à coefficients indépendants de* $\lambda$,

— *Une famille* $\tilde{C}_\varepsilon^{\ell,j}$ *d'opérateurs 2-microdifférentiels tangentiels d'ordre* $(1,-1)$, *supportés dans* $|x'-y'| < 2\eta$,

— *Une famille* $D_\varepsilon^{\ell,j}$ *d'opérateurs uniformément bornés pour* $\varepsilon \in ]0,1]$ *et indépendants de* $\lambda$ *de* $L^2(\Omega_{\rho_1})$ *dans* $L^2(\partial\Omega_{\rho_0})$,

*tels que*

$$(2.3.6) \qquad \left| \begin{array}{lll} L(Z_j V_\varepsilon^\ell) = C_\varepsilon^{\ell,j} V_\varepsilon^\ell + \tilde{C}_\varepsilon^{\ell,j} V^\ell + A_\varepsilon(Z_j F^{\lambda,\ell}) & \textit{sur} & \Omega_{\rho_0} \\ b\gamma_0(Z_j V_\varepsilon^\ell) = D_\varepsilon^{\ell,j}\gamma_0 V^\ell + Z_j A_\varepsilon G^{\lambda,\ell} & \textit{sur} & \partial\Omega_{\rho_0}. \end{array} \right.$$

*Démonstration.* — Les indices $j$ et $\ell$ étant sous-entendus, on voit par récurrence qu'il existe $C$, $\tilde{C}$ opérateurs différentiels tangentiels d'ordre 1 et 0 respectivement, les coefficients de $C$ étant indépendants de $\lambda$ tels que $L^\lambda(ZV) = CV + \tilde{C}V + ZF^\lambda$. La première égalité de (2.3.6) en découle par calcul symbolique.

Pour la seconde, on voit par récurrence qu'il existe $D$ fonction $C^\infty$ par morceaux sur $\partial\Omega\backslash\Delta$ telle que $b\gamma_0 V^\ell = G^{\lambda,\ell} + D\gamma_0 V^{\ell-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned}(2.3.7)\quad b\gamma_0 Z V_\varepsilon^\ell = ZA_\varepsilon G^{\lambda,\ell} + A_\varepsilon DZ\gamma_0 V^{\ell-1} + A_\varepsilon[Z,D]\gamma_0 V^{\ell-1}\\ + [Z,A_\varepsilon]D\gamma_0 V^{\ell-1} + Z[b,A_\varepsilon]\gamma_0 V^\ell + [b,Z]\gamma_0 V_\varepsilon^\ell.\end{aligned}$$

Pour conclure, il suffit de remarquer qu'un opérateur du type $Z[b,A_\varepsilon]$ est borné sur $L^2$ car on peut l'écrire

$$(2.3.8)\qquad Z[b,A_\varepsilon] = ZA_\varepsilon[B_\varepsilon,b]A_\varepsilon + ZR_\varepsilon bA_\varepsilon - ZA_\varepsilon bR_\varepsilon$$

avec $R_\varepsilon$ opérateur 2-microdifférentiel sur le bord de bidegré $(0,-1)$.

On va déduire de (2.3.6) :

PROPOSITION 2.3.4. — *Il existe* $\rho'_1 > 0$, $m \in \mathbb{N}$, $\lambda_0 > 0$, $C > 0$, $C(\lambda)$ *fonction continue à valeurs dans* $\mathbb{R}_+^*$ *telles que pour tous* $\rho' > \rho > \rho_0$, $\lambda \geqslant \lambda_0$, $\varepsilon \in ]0,1]$ *on ait :*

$$\begin{aligned}(2.3.9)\quad &\lambda\|V_\varepsilon^{\ell+1}\|^2_{L^2(\Omega_{\rho'})} + |\gamma_0 V_\varepsilon^{\ell+1}|^2_{L^2(\partial\Omega_{\rho'})}\\ &\leqslant \frac{C}{\lambda}\|V_\varepsilon^{\ell+1}\|^2_{L^2(\Omega_\rho)} + \frac{C(\lambda)}{(\rho'-\rho)^m}[\|F^{\lambda,\ell+1}\|^2_{L^2(\Omega_{\rho'_1})} + |G^{\lambda,\ell+1}|^2_{L^2(\partial\Omega_{\rho'_1})}\\ &+ \|\varphi_1(xD')V^\ell\|^2_{\dot H^{\frac12}(\Omega_{\rho'_1})} + \|V^\ell\|_{L^2(\Omega_{\rho'_1})} + |\gamma_0 V^\ell|_{L^2(\Omega_{\rho'_1})}].\end{aligned}$$

*Démonstration.* — D'après [4] Remarque 1.7, on peut supposer que l'opérateur $A_\varepsilon$ est « aussi microlocolocal qu'on le veut ». Puisque $V^\ell$ est supposé, par hypothèse de récurrence vérifier $V^\ell \in \dot H^{\frac12}$ microlocalement tangentiellement près de $\Lambda \times 0$ et que, pour tout $\varepsilon > 0$ fixé $A_\varepsilon$ est de bidegré $(0,-2)$, la solution $Z_j V_\varepsilon^\ell$ de (2.3.6) satisfait aux hypothèses de la proposition 2.1.3. Les $Z_j V_\varepsilon^\ell$ vérifient dont l'inégalité (2.1.3) (dans laquelle on peut remplacer $\rho$ par $\rho'' = \frac{1}{2}(\rho+\rho'))$. La somme des membres de gauche de ces inégalités pour $j = 0, \ldots, n$ donne le membre de gauche de (2.3.9) modulo des normes de commutateurs $[Z_j, A_\varepsilon]V^\ell$ qui s'absorbent dans le membre de droite de (2.3.9). Pour conclure, il faut donc estimer les membres de droite de (2.1.3) appliqué aux $Z_j V_\varepsilon^\ell$. Prouvons d'abord le lemme suivant, dont la première partie est une adaptation de [1], lemme 4.3 :

LEMME 2.3.5. — i) *Soit $K$ un opérateur pseudo-différentiel tangentiel d'ordre 0 proprement supporté dans $\Omega$. Alors il existe $\rho'_1 > 0$ et pour* *tout* $s \in \mathbb{R}$, $C_s > 0$, $C_s(\lambda)$ *fonction continue à valeurs dans* $\mathbb{R}_+^*$ *tels que pour tous* $v \in \dot{H}_\lambda^s(\Omega_{\rho_1'})$ *à support dans* $x_1 \geqslant -1$ et $\rho' > \rho > \rho_0$ *on ait :*

$$(2.3.10) \qquad \|Kv\|_{\dot{H}_\lambda^s(\Omega_{\rho_1'})} \leqslant C_s \|v\|_{\dot{H}_\lambda^s(\Omega_\rho)} + \frac{C_s(\lambda)}{\rho' - \rho} \|v\|_{\dot{H}^{s-1}(\Omega_{\rho_1'})}.$$

ii) *Soit* $\tilde{C}_\varepsilon \in \mathrm{Op}(\dot{\Sigma}_\Lambda^{1,-1})$ *supporté dans* $|x'-y'| < 4\eta$. *Il existe* $C > 0$, $\rho_1' > 0$, *tels que pour tout* $v \in L^2(\Omega_{\rho_1'})$ *à support dans* $x_1 \geqslant -1$ *microlocalement* $\dot{H}^{\frac{1}{2}}$ *au voisinage de* Supp $\varphi_1$ *on ait :*

$$(2.3.11) \qquad \begin{aligned} &\|\tilde{C}_\varepsilon(x;D')v\|_{\dot{H}^{-\frac{1}{2}}(\Omega_{\rho_0})} \leqslant C[\|\varphi_1(x;D')v\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\Omega_{\rho_1'})} + \|v\|_{L^2(\Omega_{\rho_1'})}] \\ &\|\psi_1(x;D')\tilde{C}_\varepsilon(x;D')v\|_{L^2(\Omega_{\rho_0})} \leqslant C\|v\|_{L^2(\Omega_{\rho_1'})}. \end{aligned}$$

*Démonstration.* — i) Le noyau $K(x,y')$ de $K$ s'écrit $K_0(x,y') + K_1(x,y')$ avec $K_0(x,y') = K(x,y')\phi\left(\dfrac{x'-y'}{\alpha(\rho'-\rho)}\right)$ où $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ est identiquement égale à 1 près de 0 et $\alpha > 0$ est assez petit pour que $\phi\left(\dfrac{x'-y'}{\alpha(\rho'-\rho)}\right) = 0$ si $(x',x_n) \in \Omega_{\rho'}$ et $(y',x_n) \notin \Omega_\rho$. D'après [1] le symbole de $K_0$ vérifie des estimations uniformes en $\rho$, $\rho'$ et on a :

$$(2.3.12) \qquad \|K_0 v\|_{\dot{H}_\lambda^s(\Omega_{\rho'})} \leqslant C\|v\|_{\dot{H}_\lambda^s(\Omega_\rho)} + C(\lambda)\|v\|_{\dot{H}_\lambda^{s-1}(\Omega_{\rho_1'})}.$$

Il suffit alors de voir que si $\omega \in C_0^\infty(\Omega)$ a un support assez grand, $\omega K_1 \omega$ est continu de $\dot{H}^{s-1}(\overline{\mathbb{R}}_+^{n+1})$ dans $\dot{H}^s(\overline{\mathbb{R}}_+^{n+1})$ de norme majorée par $\dfrac{C_s(\lambda)}{\rho' - \rho}$. Si $s \in \mathbb{N}$ cela résulte de [1] et on en déduit le cas général par dualité et interpolation.

ii) L'opérateur $\tilde{C}_\varepsilon$ opère continûment de $\dot{H}_\Lambda^{\frac{1}{2},-1}$ dans $\dot{H}^{-\frac{1}{2}}$ et de $L^2$ dans $\dot{H}_\Lambda^{-1,1}$. Il suffit de voir que $1 - \varphi_1(x;D')$ et $\psi_1(x;D')$ opèrent de $\dot{H}^{-\frac{1}{2}}$ dans $\dot{H}_\Lambda^{\frac{1}{2},-1}$ et de $\dot{H}_\Lambda^{-1,1}$ dans $L^2$ ce qui est clair.

*Fin de la preuve de la proposition.* — Les indices $j$ et $\ell$ étant sous-entendus, la partie ii) du lemme entraîne (en supposant $\varphi_1$ proprement supporté dans $|x'-y'| < \eta$)

$$(2.3.13) \qquad \begin{aligned} &\|\varphi_1(x;D')(C_\varepsilon V_\varepsilon + \tilde{C}_\varepsilon V + A_\varepsilon(ZF^\lambda))\|_{\dot{H}_\lambda^{-\frac{1}{2}}(\Omega_{\rho''})} \\ &\leqslant C(\lambda)\|\varphi_1(x;D')V\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\Omega_{\rho_1'})} + C(\lambda)\|V\|_{L^2(\Omega_{\rho_1'})} + C\|ZF^\lambda\|_{L^2(\Omega_{\rho_1'})}. \end{aligned}$$

Comme $\psi_1(x;\xi') \equiv 0$ près de $\Lambda \times \{0\}$ et que, hors de $\Lambda \times \{0\}$ les $Z_j$, $j = 0, \ldots, n$ engendrent le module des opérateurs pseudo-différentiels tangentiels d'ordre 1, il existe $C'_\varepsilon \in \mathrm{Op}(\dot{\Sigma}_\Lambda^{1,-1})$, $C''_\varepsilon \in \mathrm{Op}(\dot{\Sigma}_\Lambda^{0,0})$, $\alpha_j^\varepsilon$ opérateurs pseudo-différentiels tangentiels d'ordre 0, supportés dans $|x'-y'| < 3\eta$ avec :

$$(2.3.14) \quad \psi_1(x;D')\, C_\varepsilon(x;D') = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j^\varepsilon(x;D')\, Z_j + \psi_1(x;D')\, C'_\varepsilon + C''_\varepsilon$$

tous ces opérateurs étant à coefficients indépendants de $\lambda$ ([2]).

En utilisant le lemme 2.3.5 i) et ii), on obtient

$$(2.3.15) \quad \|\psi_1(x;D')\,(C_\varepsilon V_\varepsilon + \tilde{C}_\varepsilon V + A_\varepsilon(ZF^\lambda))\|_{L^2(\Omega_{\rho''})} \leqslant C \sum_{j=0}^{n} \|Z_j V_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\rho)} + \frac{C}{\rho'-\rho}\|V\|_{L^2(\Omega_{\rho'_1})} + C(\lambda)\|V\|_{L^2(\Omega_{\rho'_1})} + C\|ZF^\lambda\|_{L^2(\Omega_{\rho'_1})}.$$

Enfin :

$$(2.3.16) \quad |D_\varepsilon \gamma_0 V + ZA_\varepsilon G^\lambda|_{L^2(\partial\Omega_{\rho''})} \leqslant C\,[|\gamma_0 V|_{L^2(\partial\Omega_{\rho_1})} + |G^\lambda|_{L^2(\Omega_{\rho'_1})} + |ZG^\lambda|_{L^2(\Omega_{\rho'_1})}]$$

$$\|C_\varepsilon V_\varepsilon + \tilde{C}_\varepsilon V + A_\varepsilon(ZF^\lambda)\|_{\dot{H}^{-1}(\Omega_{\rho_1})} \leqslant C(\lambda)\,[\|V\|_{L^2(\Omega_{\rho'_1})} + \|F^\lambda\|_{L^2(\Omega_{\rho'_1})}].$$

L'inégalité (2.3.9) en résulte.

*Fin de la preuve du théorème.* — Notons

$$(2.3.17) \quad \tilde{\|}\cdot\tilde{\|} = \sup_{\rho \in ]\rho_0, T[} (\rho-\rho_0)^m \|\cdot\|_{L^2(\Omega_\rho)}, \qquad \tilde{|}\cdot\tilde{|} = \sup_{\rho \in ]\rho_0, T[} (\rho-\rho_0)^m |\cdot|_{L^2(\partial\Omega_\rho)}.$$

Si $\lambda$ est assez grand, l'inégalité (2.3.9) entraîne

$$(2.3.18) \quad \lambda \tilde{\|} V_\varepsilon^{\ell+1} \tilde{\|}^2 + \tilde{|}\gamma_0 V_\varepsilon^{\ell+1}\tilde{|}^2 \leqslant C(\lambda)\,[\|F^{\lambda,\ell+1}\|^2_{L^2(\partial\Omega_{\rho'_1})} + |G^{\lambda,\ell+1}|^2_{L^2(\partial\Omega_{\rho'_1})} + \|\varphi_1(x;D')V^\ell\|^2_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\Omega_{\rho'_1})} + \|V^\ell\|^2_{L^2(\partial\Omega_{\rho'_1})}].$$

Le membre de gauche est donc uniformément borné en $\varepsilon \in ]0,1]$. Utilisant le lemme 2.3.2, on en déduit $V^{\ell+1} \in L^2(\Omega_{\rho_0})$, $\gamma_0 V^{\ell+1} \in L^2(\partial\Omega_{\rho_0})$.

Il reste à voir, pour pouvoir boucler la récurrence que $V^{\ell+1}$ est microlocalement $\dot{H}^{-\frac{1}{2}}$ près de $\Lambda \times \{0\}$. Notons $(ZV_\varepsilon^\ell)_{\rho\rho'}$ la solution du système obtenu à partir de (2.3.6) en multipliant le second membre par la fonction $\chi_{\rho,\rho'}$, de la proposition 2.1.3. D'après celle-ci et les majorations (2.3.13) à (2.3.16),

$$\|\varphi_1(x;D')\,(ZV_\varepsilon^\ell)_{\rho\rho'}\|_{\dot{H}_\lambda^{-\frac{1}{2}}(\Omega_{\rho''})} \leqslant C(\lambda,\rho,\rho') \; .$$

uniformément en $\varepsilon$. Par vitesse finie de propagation, $(ZV_\varepsilon^\ell)_{\rho\rho'|\Omega_{\tilde{\rho}'}} = (ZV_\varepsilon^\ell)_{|\Omega_{\tilde{\rho}'}}$ si $\tilde{\rho}' > \rho'$ est assez voisin de $\rho'$. Grâce au lemme 2.3.5, il en résulte

$$\text{(2.3.19)} \quad \|\varphi_1(x;D')\,((ZV_\varepsilon^\ell)_{\rho\rho'} - (ZV_\varepsilon^\ell))\|_{\dot{H}_\lambda^{\frac{1}{2}}(\Omega_{\rho'})} \leqslant C(\rho,\rho',\tilde{\rho}',\lambda)\|(ZV_\varepsilon^\ell)_{\rho\rho'} - (ZV_\varepsilon^\ell)\|_{L^2(\Omega_{\rho_1'})} .$$

Or $ZV_\varepsilon^\ell\|_{L^2(\Omega_{\rho_1'})}$ est uniformément borné grâce à la première partie de la preuve et $\|(ZV_\varepsilon^\ell)_{\rho\rho'}\|_{L^2(\Omega_{\rho_1'})}$ également puisque cette quantité s'estime à l'aide de (2.1.3). Donc, $\|\varphi_1(x;D')ZV_\varepsilon^\ell\|_{\dot{H}_\lambda^{\frac{1}{2}}(\Omega_{\rho'})}$ est uniformément borné en $\varepsilon > 0$. Le résultat en découle par le lemme 2.3.2.

## BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Beals, G. Metivier, Progressing waves solutions to certain non-linear mixed problems, Duke Math. J., 53 (1986), 125-137.

[2] M. Beals, G. Metivier, Reflection of transversal progressing waves in non-linear strictly hyperbolic mixed problems, Amer. J. Math., 109 (1987), 335-359.

[3] J. M. Bony, Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires, Ann. Sc. École Normale Supérieure, 14 (1981), 209-246.

[4] J. M. Bony, Second microlocalization and propagation of singularities for semi-linear hyperbolic equations, Taniguchi symposium, HERT, Katata (1984), 11-49.

[5] J. Chazarain, A. Piriou, Introduction à la théorie des équations aux dérivées partielles linéaires, Gauthier-Villars, Paris, 1981.

[6] R. Coifman, Y. Meyer, Au-delà des opérateurs pseudo-différentiels, Astérisque, 57 (1978).

[7] V. V. Grusin, Hypoelliptic differential equations and pseudo-differentials operators with operator valued symbols, Math. USSR Sbornik, vol. 17 (1972), 497-514.

[8] K. O. Kreiss, Initial boundary value problems for hyperbolic systems, Comm. Pure Appl. Math., 13 (1970), 277-298.

[9] S. Rempel, B. W. Schulze, Parametrices and boundary symbolic calculus for elliptic boundary problems without the transmission property, Math. Nachr., 105 (1982), 45-149.

[10] S. R. Simanca, Mixed elliptic boundary value problems, Comm. in Partial Differential Equations, 12 (1987), 123-200.

[11] J. Sjöstrand, Parametrices for pseudo-differential operators with multiple characteristics, Ark. Math., 12 (1974), 85-130.

Manuscrit reçu le 9 mai 1988,
révisé le 25 novembre 1988.

Jean-Marc Delort,
Institut de Recherche Mathématique
L. A. 305
Campus de Beaulieu
35042 Rennes Cedex (France).