ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

DENIS FEYEL

A. DE LA PRADELLE

Espaces de Sobolev gaussiens

Annales de l'institut Fourier, tome 39, nº 4 (1989), p. 875-908

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1989__39_4_875_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
39, 4 (1989), 875-908.

ESPACES DE SOBOLEV GAUSSIENS

par D. FEYEL et A. de LA PRADELLE

Introduction.

De nombreux auteurs ont déjà étudié les espaces de Sobolev construits sur l'espace de Wiener ou plus généralement sur un espace localement convexe E muni d'une mesure gaussienne centrée μ ([BH1],[BH2], [G2], [K], [Kr1],[Kr2], [Ks], [Ma], [Me], [W], ...).

Il est bien connu que μ définit un produit scalaire sur le dual E' de E, ce qui permet de définir ensuite l'espace de Sobolev $W(E,\mu)$ comme le complété des fonctions élémentaires pour la norme $\|f\|_W^2 = \int f^2\,d\mu + \int f'(x,u)^2\,d\mu(x)\,d\mu(u)$, où $f'(x,.)$ est pour μ-presque tout x un élément du complété de E'. La fonction f' est la différentielle de f, appartient à $L^2(\mu\otimes\mu)$, et la formule gaussienne d'intégration par parties résulte simplement de la formule élémentaire de Stokes.

Le résultat clef de cet article est le théorème 32 : toute fonction sous-linéaire $\geqslant 0$, s.c.i. sur E et finie μ-presque partout, appartient à l'espace de Sobolev $W(E,\mu)$. C'est très simple et cela entraîne toutes les propriétés de capacité que l'on étudie au § 5.

Mais il faut d'abord faire quelques rappels sur les mesures cylindriques « régulières » sur un espace vectoriel topologique, c'est l'objet du premier paragraphe.

On introduit les notions de capacités « régulières » et « de Prokhorov » sur un espace complètement régulier au § 2. Ces considérations permettent de construire des espaces de Banach adaptés $L^1(c)$ ayant les propriétés

Mots-clés : Stochastique - Gaussien - Capacités - Mesures - Sobolev - Différentielle.
Classification A.M.S. : 28 - 31 - 60.

convenables pour une bonne théorie de la quasi-continuité comme dans nos travaux antérieurs (cf. bib.).

C'est seulement au § 3 qu'apparaît l'espace de Sobolev gaussien $W(E,\mu)$ comme on a dit plus haut, espace de Dirichlet au sens de Beurling et Deny, à noyau positif, et de type local. Le problème se pose de savoir si la procapacité naturelle associée à l'espace de Sobolev gaussien est une capacité régulière ou de Prokhorov. C'est l'objet du § 5. Si E est un espace de Fréchet, et si μ est régulière, on obtient une capacité de Prokhorov (th. 34), et les fonctions continues sont quasi-continues. Ce résultat subsiste si E est le dual de la limite inductive stricte d'une suite d'espaces de Fréchet nucléaires et séparables, E ayant la topologie de la convergence compacte (th. 35), (application au « bruit blanc »). Cela étend des résultats antérieurs de Kusuoka qui utilisait des méthodes inspirées de Gross.

Au § 6, on étudie les applications « quasi-linéaires », d'où l'on déduit que tout espace lusinien E muni d'une mesure gaussienne centrée μ de dimension infinie et dont la procapacité associée est une capacité est linéairement quasi-isomorphe à $\mathbf{R}^{\mathrm{N}}$ muni de sa mesure gaussienne canonique.

On montre aussi que tout représentant quasi-continu d'un élément de l'espace de Sobolev gaussien a les propriétés de continuité absolue classiques dans les directions de Cameron-Martin (th. 50).

Dans le §7, on prépare les applications du § 8 : on montre que tout élément de l'espace de Sobolev à valeurs dans un espace de Fréchet séparable possède aussi un représentant quasi-continu.

Le §8 est consacré à certaines applications relatives à l'intégrale stochastique. On calcule ainsi, sous les hypothèses convenables, le champ de gradients d'une intégrale d'Itô, c'est simplement une intégrale stochastique dans $L^2(E\times E,\mu\otimes\mu)$ (th. 56-57). On montre enfin que toute intégrale stochastique d'un processus prévisible appartenant à $L^2(dt,W(E,\mu))$ possède une version dont quasi-toute trajectoire est continue. Cela peut s'appliquer aux solutions d'une équation différentielle stochastique (cf. aussi [BH1],[BH2],[BH3].

Une partie des résultats de cet article a été résumée dans une note aux Comptes rendus de l'Académie (cf. [FLP7]).

1. Mesures cylindriques.

Soit E un espace localement convexe. Rappelons que la *tribu cylindrique* sur E est la tribu engendrée par les formes linéaires continues sur E. On voit qu'un ensemble appartient à la tribu cylindrique s'il est l'image réciproque d'un borélien de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ par une application linéaire continue.

On appellera *fonction élémentaire* toute fonction de la forme $\varphi \circ \pi$ où φ est une fonction lipschitzienne bornée sur un espace de dimension finie et π une application linéaire continue de rang fini.

On appelle *mesure cylindrique régulière* toute mesure positive bornée μ sur la tribu cylindrique ayant la propriété suivante :

– pour tout ensemble filtrant décroissant formé de fonctions élémentaires f_α tendant ponctuellement vers 0, $\int f_\alpha \, d\mu$ tend vers 0.

On vérifie facilement qu'une telle mesure μ se prolonge canoniquement et de manière unique en une mesure $\tilde{\mu}$ régulière sur la tribu borélienne faible de E (mais non nécessairement de Radon).

La mesure $\tilde{\mu}$ est alors portée par un plus petit sous-espace fermé F, dit le *support linéaire* de μ, et il est clair que $E \backslash F$, qui est $\tilde{\mu}$-négligeable, est aussi intérieurement μ-négligeable.

1. Proposition. – *Si E est un espace de Lindelöf* ([B1]), *toute mesure cylindrique μ sur E est régulière.*

Démonstration. – Si (f_α) est un ensemble filtrant décroissant de fonctions élémentaires qui tend vers 0 sur E, soit $\varepsilon > 0$, et posons $g_\alpha = (f_\alpha - \varepsilon)^+$. Les supports des g_α ont une intersection vide : ils ont une sous-intersection dénombrable qui est déjà vide, de sorte que $\mu(g_\alpha)$ tend vers 0. En faisant tendre ε vers 0, on trouve que $\mu(f_\alpha)$ tend vers 0.

Soit $L^0(\mu)$ l'espace des classes de fonctions μ-mesurables et finies μ-presque partout, muni de la topologie de la convergence en mesure. On a $L^0(\mu) = L^0(\tilde{\mu})$. On notera j l'application canonique $E' \to L^0(\mu)$.

2. Théorème. – *Supposons μ cylindrique régulière sur E localement convexe. Soit p une semi-norme sur E continue en topologie de Mackey* ([B2]), *et soit $B'(p)$ l'ensemble convexe compact des formes*

linéaires majorées par p. *Alors l'image* $j(B'(p))$ *est compacte en mesure, et l'application* $j : B'(p) \to L^0(\mu)$ *est continue.*

Démonstration. — Quitte à remplacer μ par la restriction de $\tilde{\mu}$ à son support linéaire F, on peut supposer que j est injective. Soit ν une mesure borélienne équivalente à $\tilde{\mu}$ et telle que $\int p^2 \, d\nu$ soit fini. Il est clair (domination) que B' est faiblement relativement compact dans $L^2(\nu)$. Soit A un convexe compact faible de B', et soit f adhérente à A dans $L^2(\nu)$. Il existe une suite $f_n \in A$ qui converge ν-presque partout vers f. Si g est un point limite des f_n dans B', on a $g = f$ ν-presque partout, d'où l'on déduit que A est fermé dans $L^2(\nu)$. Il s'ensuit plus généralement que tous les compacts de B' sont compacts dans $L^2(\nu)$ faible, donc les deux topologies coïncident sur B'. Soit maintenant f_n une suite extraite de B', on en extrait une suite g_n qui converge pour $\sigma(L^2(\nu), L^2(\nu))$, donc la suite g_n converge aussi pour $\sigma(E', E)$, mais alors le théorème de Lebesgue montre qu'elle converge dans $L^2(\nu)$. Ainsi sur B' coïncident les topologies induites par $\sigma(E', E)$, $\sigma(L^2(\nu), L^2(\nu))$, $L^2(\nu)$ et $L^0(\mu)$.

3. Corollaire. — *Tous les quotients métrisables de F (support linéaire de μ) sont séparables.*

4. *Exemples.* — *a*) Soit μ une mesure cylindrique régulière sur un espace de Fréchet E, le support linéaire F de μ est donc séparable, donc un espace polonais. Mais alors la tribu cylindrique de F coïncide avec sa tribu borélienne, de sorte que $\tilde{\mu}$ est en fait une mesure de Radon forte sur F, et que μ est prolongeable en mesure de Radon forte sur E. On voit facilement que ce prolongement est unique. Cela est à rapprocher d'un résultat de Phillips (cf. [B1], p. 94, rem. 1) ;

b) le dual faible d'un Fréchet séparable est un espace lusinien, donc Lindelöf ;

c) le dual faible d'une limite inductive stricte d'une suite d'espaces de Fréchet séparables est lusinien, donc de Lindelöf.

5. Proposition. — *On suppose que* $\int p^2 \, d\tilde{\mu} < +\infty$ *pour toute semi-norme continue* p. *Alors la transposée* $i : L^2(\mu) \to E'^*$ *de l'application* $j : E' \to L^2(\mu)$ *est à valeurs dans le complété* $\hat{E}$ *de* E, i *est compacte, et* $\hat{F}$ *coïncide avec l'adhérence de* $i(L^2)$ *dans* $\hat{E}$.

Démonstration. — Posons $\xi(f) = \int uf\, d\mu$ pour $u \in L^2(\mu)$. On a évidemment $\xi \in E'^*$. La restriction de ξ à chaque $B'(p)$ est continue d'après le théorème ci-dessus, de sorte qu'il existe $\tilde{u} \in \hat{E}$ telle que $\xi(f) = f(\tilde{u})$ pour toute $f \in E'$ d'après le théorème de Banach. Soit A la boule unité faible de $L^2(\mu)$, l'application $(u,f) \to \int uf\, d\mu$ est continue sur chaque $A \times B'(p)$, ce qui entraîne que $i : u \to \tilde{u}$ est compacte. Enfin, pour toute $f \in E'$, on a $f = 0$ sur F si et seulement si $f(\tilde{u}) = 0$ pour toute $u \in L^2(\mu)$, i.e. si et seulement $f = 0$ sur $i(L^2)$.

6. *Remarque.* — Supposons que μ soit une mesure gaussienne centrée. Le théorème de Fernique ([Fr]) nous dit que $\int p^2\, d\tilde{\mu} < +\infty$ pour toute semi-norme continue p, de sorte que la proposition s'applique.

7. *Exemple.* — Soit E la limite inductive stricte d'une suite E_n de Fréchet séparables, et soit μ une mesure cylindrique sur E, et supposons que $\int p^2\, d\mu < \infty$ pour toute semi-norme continue p sur E. Comme E est lusinien, $\tilde{\mu} = \mu$. Soit A la boule unité faible de $L^2(\mu)$, $i(A)$ est compacte donc incluse dans l'un des E_n, et par suite $i(L^2) \subset E_n$. Or l'adhérence de $i(L^2)$ porte μ, donc E_n porte μ. En particulier, toute mesure μ gaussienne centrée sur E est portée par l'un des E_n.

2. Capacités régulières.

Soit E un espace complètement régulier. On se donne un sous-espace réticulé $\mathscr{L}$ de fonctions continues bornées contenant les constantes, et engendrant la topologie de E.

8. Définition. — *On appelle* capacité *sur* $\mathscr{L}$ *toute semi-norme* c *sur* $\mathscr{L}$ *ayant les propriétés suivantes :*

a) *c est croissante, i.e.* $|f| \leqslant |g|$ *implique* $c(f) \leqslant c(g)$,

b) *pour toute suite* $f_n \in \mathscr{L}$ *tendant vers* 0 *en décroissant, on a* $\operatorname{Inf} c(f_n) = 0$.

On dit que c *est* régulière *si l'on a :*

b') *pour tout ensemble filtrant décroissant* $f_\alpha \in \mathscr{L}$ *tendant vers* 0, *on a* $\operatorname{Inf} c(f_\alpha) = 0$.

On dit que c est de Prokhorov *si l'on a :*

b″) *pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact K tel que $c(f) \leqslant \varepsilon$ pour tout $f \in \mathscr{L}$ telle que $|f|$ soit majorée par l'indicatrice de $E \setminus K$.*

On voit facilement que b″) entraîne b′), et que b′) entraîne b).

9. Proposition. — *Si E est un espace de Lindelöf, toute capacité est régulière.*

Démonstration. — On applique la même démonstration qu'en proposition 1.

Nous ne nous intéresserons qu'aux capacités régulières, pour lesquelles on peut faire le prolongement de Lebesgue :

Si f est s.c.i. $\geqslant 0$, on pose :

$$c(f) = \operatorname{Sup}\{c(\varphi)/0 \leqslant \varphi \leqslant f, \varphi \in \mathscr{L}\}.$$

Si g est quelconque à valeurs dans $\bar{\mathbf{R}}$:

$$c(g) = \operatorname{Inf}\{c(f)/f \text{s.c.i.} \geqslant |g|\}.$$

Il est facile de voir que c vérifie l'inégalité de convexité dénombrable : si l'on a des fonctions $\geqslant 0$ vérifiant $g \leqslant \sum g_n$, alors $c(g) \leqslant \sum c(g_n)$.

Comme dans [F1], on note $F^1(c)$ l'ensemble de $f \in \mathbf{R}^E$ tels que $c(f) < +\infty$, et $\mathscr{L}^1(c)$ l'adhérence de $\mathscr{L}$ dans $F^1(c)$ relativement à la distance définie par c. Le quotient $L^1(c)$ par le sous-espace des fonctions c-négligeables ou c-polaires (ou encore extérieurement c-polaires) est un espace de Banach réticulé.

10. Proposition. — *On a $C_b(E) \subset \mathscr{L}^1(c)$.*

Démonstration. — Soit f continue comprise entre 0 et 1, il existe un ensemble filtrant croissant $f_\alpha \in \mathscr{L}$ (resp. décroissant $g_\alpha \in \mathscr{L}$) convergeant simplement vers f. Comme c est régulière, $c(g_\alpha - f_\alpha)$ tend vers 0, donc aussi $c(f - f_\alpha) \leqslant c(g_\alpha - f_\alpha)$. Par suite $f \in \mathscr{L}^1(c)$.

Dans le cas où E est un espace compact, c est régulière et on sait (cf. [F1], [FLP2]) que le dual de $\mathscr{L}^1(c)$ s'identifie par restrictions à un espace de mesures sur E.

11. Proposition. — *Soit Z une compactification quelconque de E, soit c une capacité régulière (resp. de Prokhorov) sur* E, *et soit* c′ *la*

capacité sur Z définie par $c'(g) = c(g/E)$. *Alors* $Z\backslash E$ *est intérieurement (resp. extérieurement)* c'*-polaire. En particulier,* $L^1(c)$ *et* $L^1(c')$ *sont identifiables et leur dual est constitué de mesures portées par* E.

Enfin, si E est localement compact ou polonais, ou plus généralement un G_δ *absolu (cf. [E]), toute capacité régulière est de Prokhorov. Si de plus* $A \to c^2(1_A)$ *est fortement sous-additive, ce dernier résultat vaut encore pour E lusinien.*

Démonstration. — Comme Z est compact, c' est une capacité. Soit K un compact inclus dans $Z\backslash E$, la régularité de c et la relation fondamentale du balayage ([Mo2]) entraînent la relation $c'(K) = 0$. On en déduit que $Z\backslash E$ est intérieurement c'-polaire. Si G est ouvert dans Z, on a évidemment $c'(G) \leqslant c(G \cap E)$, d'où résulte que si c est une capacité de Prokhorov, $Z\backslash E$ est c'-polaire. La propriété du dual résulte de [FLP2], p. 123.

Si E est localement compact ou polonais, $Z\backslash E$ est un K_σ dans Z, donc il est extérieurement c'-polaire dès qu'il l'est intérieurement. Si E est lusinien, on peut supposer Z métrisable, alors $Z\backslash E$ est analytique, c'^2 est fortement sous-additive, et le théorème de capacitabilité de Choquet s'applique, d'où la conclusion.

12. THÉORÈME. — *Soit c une semi-norme croissante sur* $\mathscr{L}$, *on note* $M(c)$ *l'ensemble des mesures boréliennes positives majorées par* c. *Alors l'application* $c \to M(c)$ *est une bijection de l'ensemble des capacités régulières sur E sur l'ensemble des convexes héréditaires et étroitement compacts de mesures régulières* $\geqslant 0$ *sur* E. (Ceci améliore les théorèmes 1, p. 63 et 2, p. 64 de [B1]).

Démonstration. — Il est clair que $M(c)$ est un convexe héréditaire et étroitement compact de mesures $\geqslant 0$. Inversement, soit H un tel convexe héréditaire et étroitement compact. Si f est continue bornée, posons :

$$c(f) = \operatorname{Sup}\left\{\int |f|\, d\mu/\mu \in H\right\}$$

$c(f)$ est fini car H est étroitement compact. Le lemme de Dini appliqué sur H montre que c est une capacité régulière. L'inclusion $H \subset M(c)$ est triviale, il reste à montrer l'inclusion inverse. On utilise le théorème de Hahn-Banach : soit F une forme linéaire sur le dual de $C_b(E)$, continue en topologie étroite ; on doit montrer que la relation $F(\lambda) \leqslant 1$

pour toute $\lambda \in H$ entraîne $F(\mu) \leqslant 1$ pour toute $\mu \in M(c)$. Or, il existe une fonction $f \in C_b(E)$ telle que $F(\mu) = \int f\, d\mu$ pour toute $\mu \in M(c)$. Considérons la fonction $G(\lambda) = \int f^+\, d\lambda$, qui atteint son maximum sur H en un point ρ. Admettons pour l'instant que l'on puisse trouver ρ concentrée sur l'ensemble $\{f > 0\}$: pour $\mu \in M(c)$, on a :

$$\int f\, d\mu \leqslant \int f^+\, d\mu \leqslant c(f^+) = \operatorname{Sup}\{G(\lambda)/\lambda \in H\} \leqslant \int f^+\, d\rho = \int f\, d\rho \leqslant 1 .$$

Il reste donc à prouver que l'on pouvait prendre ρ concentrée sur $\{f > 0\}$: soit σ la partie de ρ portée par $\{f > 0\}$, on a $\sigma \in H$ car H est héréditaire, et :

$$\int f\, d\rho = \int f\, d\sigma + \int f d\rho\text{-}\sigma \leqslant \int f\, d\sigma \leqslant \operatorname{Sup}\left\{\int f\, d\lambda/\lambda \in H\right\} \leqslant \int f\, d\rho$$

ce qui achève la démonstration. □

13. *Remarque.* — Si E est localement compact ou un G_δ absolu, $Z \setminus E$ est un K_σ de sorte que le théorème 12 vaut aussi pour une capacité de Prokhorov d'après la proposition 11, ce qui est équivalent au théorème 2, p. 64 de [B1].

14. THÉORÈME. — *Soit* $E = \prod_{i \in I} E_i$, *I dénombrable. On considère un système projectif de capacités de Prokhorov* c_J *sur les sous-produits finis* (*J fini*). *Alors il existe une capacité de Prokhorov c qui est limite projective des* c_J.

Démonstration. — Soit $\mathscr{L}$ l'espace des fonctions continues bornées ne dépendant que d'un nombre fini de coordonnées. On définit $c(f)$ sans ambiguïté pour $f \in \mathscr{L}$ grâce à la condition de cohérence sur les c_J. Soit F une forme linéaire positive sur $\mathscr{L}$ majorée par c. Les images F_J de F sont majorées par les c_J. Si J est fini, on en déduit l'existence d'une mesure de Radon μ_J sur $E_J = \prod_{j \in J} E_j$ telle que $F_J(f) = \int f\, d\mu_J$ pour toute f continue bornée sur E_J. Les mesures μ_J forment un système projectif de mesures de Radon (car c_J est de Prokhorov), d'où il résulte ([N1], p. 78) l'existence d'une mesure μ de

Radon sur E admettant les μ_J comme projections. Si $f \in \mathscr{L}$, on a $F(f) = \int f\, d\mu$. Si f est continue bornée, on a $F(f) \geqslant \int f\, d\mu$, puis $F(f) = \int f\, d\mu$. Il s'ensuit que le convexe héréditaire des mesures μ majorées par c sur E est étroitement compact, le théorème 12 montre que c est une capacité régulière. On s'inspire alors du théorème 2, p. 53 de [B1]. On choisit une suite croissante J_n qui recouvre I. On fixe $\varepsilon > 0$, et pour tout n, on prend un « gros cylindre » à base compacte de la forme $K_n \times E_n$ (notation évidente) et tel que $c_{Jn}(E_{Jn} \backslash K_n) \leqslant \varepsilon/2^n$. L'ensemble $K = \cap_n K_n \times E_n$ est compact, et son complémentaire est de capacité $\leqslant \varepsilon$. □

15. *Remarque.* — Si I n'est pas dénombrable, on obtient seulement une capacité c sur $(E, \mathscr{L})$.

16. Proposition. — *Soit c une capacité régulière (resp. de Prokhorov) sur E, et soit E_0 un sous-espace fermé de E. On suppose que toutes les mesures majorées par c sont portées par E_0. Alors c induit de manière unique une capacité c_0 régulière (resp. de Prokhorov) sur E_0.*

Démonstration. — Si f est continue bornée sur E_0, on pose évidemment :

$$c_0(f) = \mathrm{Sup}\, \{ \int |f|\, d\mu/\mu \leqslant c \},$$

on doit montrer d'après le théorème 12, que l'ensemble des mesures μ est étroitement compact sur E_0. Soit F une forme linéaire positive sur $C_b(E_0)$ et majorée par c_0, il existe une mesure $\mu \in \mathrm{M}(c)$ telle que $F(f) = \int f\, d\mu$ pour toute f qui est trace d'une fonction continue bornée sur E. On raisonne alors comme au théorème 14, et l'on voit que $F(f) = \int f\, d\mu$ pour toute f continue bornée sur E_0, donc c_0 est une capacité régulière.

Si c est de Prokhorov, on fixe $\varepsilon > 0$ et un compact K tel que $c(E \backslash K) < \varepsilon$, on a alors $c_0(E_0 \backslash K) < \varepsilon$. □

3. Espaces de Sobolev gaussiens.

Soit E un espace localement convexe muni d'une mesure cylindrique régulière gaussienne centrée μ. On confrondra dorénavant μ et son prolongement $\tilde{\mu}$ canonique à la tribu borélienne faible de E.

Si f est une fonction élémentaire de classe C^1 (i.e. $f = g \circ \pi$ où π est linéaire continue à valeurs dans un $\mathbf{R}^n$, et g de classe C^1 sur $\mathbf{R}^n$), on définit la variance de f comme étant le nombre :

$$\operatorname{var}(f) = \int \langle f'(x), u \rangle^2 d\mu(x) d\mu(u) \leqslant +\infty .$$

Si f est une forme linéaire continue, on retrouve la variance habituelle de f.

On définit de même la covariance de f et g par la formule :

$$\operatorname{covar}(f,g) = \int \langle f'(x), u \rangle \langle g'(x), u \rangle d\mu(x) d\mu(u) .$$

On définit l'énergie gaussienne de f comme étant

$$e(f) = \|f\|_W^2 = \int f^2 d\mu + \operatorname{var}(f) .$$

On note $W(E,\mu)$ le complété abstrait du sous-espace des fonctions élémentaires f de classe C^1 et d'énergie finie. L'application identique sur ces éléments admet un prolongement continu canonique j de $W(E,\mu)$ à valeurs dans $L^2(E,\mu)$.

Remarquons que si φ est une application linéaire continue de E dans F, et si ρ est l'image de μ par φ, alors ρ est une mesure cyclindrique régulière gaussienne centrée, et la transposition $f \to f \circ \varphi$ se prolonge en isométrie de $W(F,\rho)$ dans $W(E,\mu)$.

17. Proposition. — *L'application canonique j de $W(E,\mu)$ dans $L^2(E,\mu)$ est injective.*

Démonstration. — Si f est une fonction élémentaire suffisamment régulière, nous définissons d'abord le laplacien de f relatif à μ de la manière suivante : on définit d'abord la « dérivée seconde »

$$f''(x,u) = \lim_{t \to 0} (f(x+tu) - 2f(x) + f(x-tu))/t^2$$

c'est pour tout $x \in E$ une forme quadratique continue de rang fini sur E, elle est donc μ-intégrable, on pose donc

$$\Delta f(x) = \int f''(x,u)\,d\mu(u).$$

On définit maintenant l'opérateur d'Ornstein-Uhlenbeck :

$$Lf(x) = \Delta f(x) - \langle f'(x),x\rangle.$$

Si maintenant f et g sont deux fonctions élémentaires suffisamment régulières, on a la formule

$$\text{covar}\,(f,g) = -\int f Lg\, d\mu. \tag{1}$$

On peut en effet supposer que f et g se factorisent par le même quotient de dimension finie, et alors (1) se réduit à la formule de Stokes ordinaire.

Nous allons recopier la démonstration de Deny [D] concernant les espaces de Sobolev classiques. Soit f_n une suite de Cauchy formée de fonctions élémentaires convergeant vers f dans $W(E,\mu)$, g étant fixée. On obtient à la limite

$$(f,g)_W = \int j(f) g\, d\mu - \int j(f) Lg\, d\mu. \tag{2}$$

Supposons que $j(f) = 0$, alors $(f,g)_W = 0$ pour toute g suffisamment régulière, et par suite $f = 0$.

18. Proposition. — *$W(E,\mu)$ est un espace de Dirichlet au sens de [D] (i.e. les contractions normales opèrent).*

Démonstration. — Remarquons d'abord que l'hypothèse classique de Deny [D] selon laquelle l'espace de base est localement compact ne joue aucun rôle à cette étape de la théorie. Soit γ une contraction normale de $\mathbf{R}$ ($\gamma(0)=0$, et $|\gamma(x)-\gamma(y)| \leqslant |x-y|$), que l'on peut supposer de classe C^1. Si $u \in W(E,\mu)$, et si u_n est une suite de fonctions élémentaires régulières qui converge vers u et presque partout, on a toujours $\text{var}(\gamma(u_n)) \leqslant \text{var}(u_n)$, donc $\gamma(u_n)$ a une valeur d'adhérence faible $v \in W(E,\mu)$ qui coïncide évidemment avec $\gamma(u)$. On en déduit $\text{var}(\gamma(u)) \leqslant \text{var}(u)$.

19. *Remarque.* — Si E est de dimension finie, et si μ charge tout l'espace, il est facile de voir que $W(E,\mu)$ est inclus dans l'espace de Sobolev classique $W^2_{loc}(E)$. De plus on constate aisément que respectivement :

– les polynômes de formes linéaires,
– les polynômes d'exponentielles de formes linéaires,
– les polynômes trigonométriques de formes linéaires

appartiennent et sont partout denses dans $W(E,\mu)$ (ou son complexifié).

En dimension infinie, on en déduit que les fonctions construites de cette manière forment des sous-espaces denses dans $W(E,\mu)$.

4. Étude du champ.

Nous noterons H' l'adhérence de E' dans $L^2(\mu)$, c'est aussi l'adhérence de E' dans $W(E,\mu)$. Un simple raisonnement d'indépendance montre que H' est un espace vectoriel maximal de variables aléatoires gaussiennes sur E.

Soit maintenant H le dual de H' : H est aussi un espace de Hilbert. Les éléments de H sont usuellement appelés « vecteurs de Cameron-Martin ». On vérifie sans peine, que x appartient à H si et seulement si x est « une translation permise », i.e. que la mesure μ_x translatée de μ par x a une densité par rapport à μ.

La proposition suivante est bien connue dans le cas des espaces de Banach.

20. PROPOSITION. — *Si E est complet, l'espace H est compactement inclus dans E.*

Démonstration. — C'est simplement la proposition 5.

21. *Remarque.* — On a vu que si E est un Fréchet, $L^2(\mu)$ est séparable, donc aussi H et H'.

22. THÉORÈME. — *Soit f une fonction linéaire μ-mesurable sur E, alors f appartient à H'. De plus $f(u) = \langle f, u \rangle_H$ pour tout $u \in$ H.*

Démonstration. — On peut évidemment supposer E complet. Montrons que f est de carré intégrable : on voit d'abord que les fonctions

$f(x+y)/\sqrt{2})$ et $f(x-y)/\sqrt{2})$ sont $\mu\otimes\mu$-mesurables, indépendantes et de même loi que f, ce qui permet d'appliquer le raisonnement de Fernique ([FR]) à la semi-norme $|f|$. Pour tout $u\in \mathrm{H}$, soit k_u la densité de la tranlatée de μ par u. On a

$$f(u)=\int f(x+u)d\mu(x)=\int k_u f d\mu \leqslant \mathrm{N}_2(k_u)\,\mathrm{N}_2(f)\leqslant \exp(\|u\|_{\mathrm{H}}^2/2)\mathrm{N}_2(f).$$

On en déduit que la restriction g de f à H est continue sur H. Soit $\tilde{g}\in \mathrm{H}'$ la v.a. gaussienne associée à g, on a la formule $\langle\tilde{g},u\rangle=\int k_u\tilde{g}d\mu$ comme on le voit par densité à partir du cas où $\tilde{g}$ appartient à E'. Considérons alors la différence $h=f-\tilde{g}$, on a $\int k_u h d\mu=0$ pour tout $u\in \mathrm{H}$, mais les k_u forment un système total dans $\mathrm{L}^2(\mu)$, par suite $f=\tilde{g}$ μ-presque partout.

23. *Remarque.* — Inversement, on peut montrer que si $f\in \mathrm{H}'$, f est égale presque partout à une fonction linéaire. On a en fait un résultat plus précis comme on le verra plus loin (théorème 38).

24. PROPOSITION. — *L'application $f\to f'$ se prolonge en application linéaire continue sur $W(E,\mu)$ à valeurs dans $L^2(E,\mu,H')$.*

Démonstration. — Si f est une fonction élémentaire, on a

$$\mathrm{N}_2(f')^2=\int \operatorname{var}(f'(x))d\mu(x)=\operatorname{var}(f)\leqslant e(f)$$

d'où l'existence du prolongement qui sera encore noté $f\to f'$. On voit que pour presque tout x, $f'(x)$ est un élément de H'.

25. PROPOSITION. — *Soit $h\in H$, on définit*

$$q_f(u)=\int\langle f'(x),u\rangle^2 d\mu(x).$$

Alors pour $f\in W(E,\mu)$, q_f est une forme quadratique nucléaire sur H, et sa trace vaut var (f).

Démonstration. — On a $q_f(u)\leqslant \|u\|_{\mathrm{H}^2}\operatorname{var}(f)$, donc q_f est une forme quadratique continue sur H. Soit (e_i) une base hilbertienne arbitraire de H. On a

$$\operatorname{Trace}(q_f)=\sum\int\langle f'(x),e_i\rangle^2 d\mu(x)=\int\operatorname{var}(f'(x))d\mu(x)$$
$$=\operatorname{var}(f)<+\infty.\quad\square$$

Remarquons maintenant qu'un élément $\alpha \in H'$ peut être considéré soit comme fonction (forme linéaire continue) sur H, soit comme une (classe de) fonction sur E, à savoir une variable aléatoire gaussienne. Pour presque tout $x \in E$, l'expression $f'(x)(y)$ a un sens pour presque tout y, plus précisément, on a :

26. PROPOSITION. — *L'application* $f \to ((x,y) \to f'(x)(y) = \langle f'(x), y \rangle)$ *est prolongeable par continuité en application* F *de* $W(E,\mu)$ *à valeurs dans* $L^2(E \times E, \mu \otimes \mu)$. *De plus, pour presque tout* x, $y \to F(x,y)$ *coïncide avec la variable gaussienne* $f'(x)$. *Cette propriété sera précisée plus loin* (théorème 38).

Démonstration. — Il suffit d'écrire les inégalités entre normes et d'appliquer le théorème de Fubini.

27. PROPOSITION. — *Soit* $\Gamma(f,f)$ *le carré du champ. On a* $\Gamma(f,f)(x) = 1/2 \operatorname{var}(f'(x))$ *pour presque tout* x.

Démonstration. — Rappelons ([BH1], [Me]) que pour toute base orthonormale (e_i) de H, le carré du champ $\Gamma(f,f)(x)$ vaut $1/2 \sum_1 |\nabla_i f(x)|_H{}^2$ où $\nabla_i f(x) = \langle f'(x), e_i \rangle$. L'égalité est évidente lorsque f est élémentaire et se prolonge à toute $f \in W(E,\mu)$ par continuité.

28. *Remarque.* — On constate que $\Gamma(f,f)(x)$ possède maintenant une définition indépendante de toute base de H.

29. PROPOSITION. — *Si* $f \in W(E,\mu)$, *on a les propriétés suivantes :*

a) *si g est contraction de f, alors* $\operatorname{var}(g) \leqslant \operatorname{var}(f)$, $\Gamma(g,g) \leqslant \Gamma(f,f)$, $q_g \leqslant q_f$;

b) *on a* $f'(x) = 0$ *presque sûrement sur tout ensemble* $f =$ cste ;

c) covar $(f^+, f^-) = 0$ (*caractère local de* $W(E,\mu)$) ;

d) $f \to f'$ *est une dérivation, i.e.* $(f^2)'(x) = 2f(x)f'(x)$ *p.s. pour toute* f *bornée appartenant à* $W(E,\mu)$ *et toute* f *appartenant à l'algèbre engendrée par* E'.

Démonstration. — *a*) La première inégalité a été vue en proposition 18. Les inégalités pour Γ et q s'en déduisent aisément.

b) Comme les constantes sont dans $W(E,\mu)$, on se ramène au cas de 0. Soit φ_n une suite de contractions valant 0 au voisinage de 0, et convergeant vers l'application identique. On suppose que la suite φ'_n

est uniformément bornée et converge ponctuellement vers 1 hors de l'origine. Posons $f_n = \varphi_n \circ f$. Si f est cylindrique de classe C^1, on a $f'_n = (\varphi'_n \circ f)f'$, relation qui subsiste par densité pour toute $f \in W(E,\mu)$, par le théorème des contractions. On en déduit :

$$\operatorname{var}(f'_n) = \int (\varphi'_n \circ f)^2(x) \operatorname{var}(f'(x)) d\mu(x) = \int_{(f \neq 0)} (\varphi'_n \circ f)^2(x) \operatorname{var}(f'(x)) d\mu(x).$$

En faisant tendre n vers $+\infty$ et en appliquant le théorème de Lebesgue, on trouve $\displaystyle\int_{(f=0)} \operatorname{var}(f'(x)) d\mu = 0$, et le résultat.

c) Posons $g = f - |f|$. Le *b*) montre que $g' = 0$ presque partout sur $(f \geqslant 0)$. On en déduit $|f|' = f'$ sur $(f \geqslant 0)$ et de la même façon $|f|' = -f'$ sur $(f \leqslant 0)$. On trouve alors $\operatorname{var}(|f|) = \operatorname{var}(f)$, i.e. $\operatorname{covar}(f^+, f^-) = 0$.

d) Est évident si f est cylindrique de classe C^1. On passe au cas général par densité à l'aide de la contraction unité (cf. [D]).

5. Capacité gaussienne.

On définit une application c sur les fonctions élémentaires :

(3) $\quad c(g) = \operatorname{Inf}\{\sqrt{e}(f) / f \in W(E,\mu),\ f \geqslant |g|\ \mu\text{-presque partout sur } E\}.$

Pour la cohérence avec le § 2, on pourra restreindre c aux éléments continus bornés. On remarque que l'on vient en fait de définir un système projectif de capacités de Prokhorov sur les quotients de E de dimension finie, c'est-à-dire une « procapacité ». Notre problème va être de voir si c est une capacité régulière ou de Prokhorov.

30. Proposition. — *Soient π une application linéaire continue de E dans F, ρ l'image de μ par π. L'isométrie de transposition conserve la structure d'espace de Dirichlet, de plus la procapacité c' associée à $W(F,\rho)$ est l'image de c par π.*

Démonstration. — On doit seulement montrer que c' est l'image de c. Soient $R'f$ (resp. $R(f \circ \pi)$) la fonction d'équilibre de $|f|$ (resp. $|f \circ \pi|$). Il est clair que l'on a $e(R(f \circ \pi)) \leqslant e'(R'f) = e((R'f) \circ \pi)$. Soit g l'espérance conditionnelle de $R(f \circ \pi)$ suivant l'application π.

La fonction g majore $|f|$, donc $e'(R'f) \leqslant e'(g) \leqslant e(R(f \circ \pi))$. On en déduit (unicité de la fonction d'équilibre) que $g = R'f$. Par suite, $c'(f) = c(f \circ \pi)$.

31. PROPOSITION. — *On suppose que c est une capacité régulière. Alors il existe une injection continue unique de* $W(E,\mu)$ *dans* $L^1(c)$ *valant l'identité sur les fonctions élémentaires de* $W(E,\mu)$. *De plus, tout ensemble quasi-ouvert et* μ*-négligeable est c-polaire, et* $L^1(c)$ *et* $W(E,\mu)$ *ont les mêmes formes linéaires positives.*

Démonstration. — Comme on a $c(f)^2 \leqslant e(f)$, l'application valant l'identité sur les fonctions élémentaires se prolonge continûment en une application j de $W(E,\mu)$ dans $L^1(c)$. La mesure μ est majorée par c, on en déduit $\int j(f)\, d\rho = \int f d\rho$ pour toute $f \in W(E,\mu)$, et toute mesure $\rho \leqslant \mu$, de sorte que si $j(f) = 0$ μ-presque partout, on a $\int f\, d\rho = 0$, donc $f = 0$ μ-presque partout. Soit G un quasi-ouvert μ-négligeable, et soit $\varepsilon > 0$. Il existe un ouvert faible ω de capacité $c(\omega) < \varepsilon$ et tel que $G \cup \omega$ soit aussi un ouvert faible. Les deux ouverts ω et $G \cup \omega$ ont même mesure, donc aussi même capacité d'après la formule (3), i.e. $c(G \cup \omega) < \varepsilon$. En faisant tendre ε vers 0, on trouve $c(G) = 0$. L'identité des formes linéaires positives provient de ce que toute $f \in L^1(c)$ est majorée par $Rf \in W(E,\mu)$.

32. THÉORÈME. — *Soit q une fonction sous-linéaire s.c.i. finie* μ*-presque partout. Alors la fonction q et toutes ses translatées appartiennent à* $W(E,\mu)$. *De plus, si c est une capacité régulière, q et ses translatées sont quasi-continues.*

Démonstration. — On se ramène au cas $\geqslant 0$ grâce au théorème de Hahn-Banach. Ensuite q est majorée par la semi-norme $r(x) = \sup(q(x), q(-x))$, donc de carré intégrable par le théorème de Fernique. Soit $p(x) = q(x+u)$ une translatée arbitraire. On a $p(x)^2 \leqslant 2[q(x)^2 + a^2]$ avec $a = q(u)$, donc p^2 est intégrable.

Supposons maintenant que q soit l'enveloppe supérieure d'une famille finie de formes linéaires continues sur E, alors q et p appartiennent à $W(E,\mu)$, et la proposition 29, c) permet de calculer la variance de p : soit (A_i) une partition finie de E telle que $q = f_i$ sur A_i, on a $q'(x) = f_i$ μ-presque partout sur A_i, et $p'(x) = f_i$ μ-presque partout sur les translatés B_i des A_i donc :

$$\operatorname{var}(p) = \int \operatorname{var}(p'(x))\, d\mu(x) = \sum \operatorname{var}(f_i)\mu(B_i) \leqslant N_2(r)^2 \leqslant 2N_2(p)^2$$

d'où
$$e(p) \leqslant 3N_2(q)^2 .$$

Dans le cas général, on prend un ensemble filtrant croissant q_λ du type précédant convergeant simplement vers q, d'où un ensemble analogue p_λ convergeant simplement vers p. La famille p_λ converge vers p dans $L^2(\mu)$. On a aussi $e(p_\lambda) \leqslant 3N_2(q)^2$, donc la famille p_λ converge faiblement vers p dans $W(E,\mu)$. Il reste à prouver que p est quasi-continue. Soit $p_{\lambda n}$ une suite croissante extraite qui converge vers p dans $L^2(\mu)$, on construit une suite de barycentres r_n qui converge fortement dans $W(E,\mu)$ et quasi-partout vers un $\tilde{p}$ quasi-continu. On a bien sûr $\tilde{p} \leqslant p$ quasi-partout, l'ensemble $\{p > \tilde{p}\}$ est un quasi-ouvert μ-négligeable, donc c-polaire d'après la proposition 31. □

33. THÉORÈME. — *Supposons que E soit un espace lusinien, et que c soit une capacité régulière. Les fonctions fortement continues et bornées sont dans* $\mathscr{L}^1(c)$.

Démonstration. — Comme E est lusinien, la proposition 11 montre que c est de Prokhorov en topologie faible. On considère un sous-espace R de $C_b(E)$ réticulé et contenant les constantes, engendré par les fonctions de la forme Arctg p où p parcourt une suite de translatées de semi-normes engendrant la topologie forte de E. Les éléments de R appartiennent à $\mathscr{L}^1(c)$ d'après le théorème 32. La restriction de c à R induit une capacité sur E fort. Mais $M(c)$ est constituée de mesures de Radon car E fort est lusinien, de sorte que c est régulière sur R, donc de Prokhorov pour la topologie forte (prop. 11), d'où il suit que les fonctions fortement continues bornées appartiennent à $\mathscr{L}^1(c)$.

34. THÉORÈME. — *Soit E un espace de Fréchet muni d'une mesure gaussienne régulière centrée* μ. *Alors la procapacité gaussienne c associée à* μ *est une capacité de Prokhorov sur E faible ou fort, et les fonctions continues sont quasi-continues.*

Démonstration. — Supposons d'abord que E soit un espace de Banach. On se ramène facilement au cas où μ charge tout E et E séparable. Soit (h_n) une suite orthonormale dans E' formant une base de H', et soit (e_n) la base duale dans H. Posons $P_n(x) = \sum_{k \leqslant n} h_k(x) e_k$ pour tout $x \in E$. On obtient ainsi une suite de projecteurs de E dans H.

Remarquons que la fonction vectorielle P_n est espérance conditionnelle de l'application identique de E sur la sous-tribu engendrée par les h_k pour $k \leqslant n$. Comme l'application identique appartient à $L^2(\mu)$ (et même à tout $L^p(\mu)$), il résulte d'un théorème de [N] p. 104, que la suite $P_n(x)$ converge presque partout vers x, et que $\operatorname{Lim} \int |x - P_n(x)|^2 \, d\mu(x) = 0$ ($|.|$ est la norme dans E). D'autre part, chaque fonction $|x - P_n(x)|$ appartient à $W(E,\mu)$ d'après le théorème 32, et son énergie tend vers 0 quand $n \to +\infty$.

On peut donc extraire une suite $S_n = P_{kn}$ vérifiant $e(\mathrm{id} - S_n) < 5^{-n}$. Posons :

$$q(x) = \sum 2^n |x - S_n(x)|.$$

La fonction $q(x)$ est sous-linéaire s.c.i., finie quasi-partout, et quasi-continue (série normalement convergente dans $W(E,\mu)$).

Considérons maintenant les ensembles $A_n = \{x / |x - S_n(x)| \leqslant 2^{-n}\}$, avec la convention $S_0 = 0$, et $A = \bigcap_n A_n$. Montrons que A est compact : d'abord A est borné. Soit $\varepsilon > 0$, soit n tel que $2^{-n} < \varepsilon$, et soit U la réunion des boules de rayon ε centrées aux points de A. On a évidemment $S_n(A) \subset U$, de plus $S_n(A)$ est relativement compact puisque de dimension finie. On peut donc extraire une sous-famille finie de boules telle que la famille des boules de rayon 2ε et de mêmes centres recouvre A. Ainsi A est précompact, donc compact puisque fermé dans E.

L'ensemble $\{q \leqslant 1\}$ est fermé inclus dans A, donc compact. Par homothétie chaque ensemble $\{q \leqslant t\}$ est compact. On a $c(\{q > t\}) < \sqrt{e(q)}/t$, *qui prouve que* c est une capacité.

Dans le cas d'un Fréchet, on applique le théorème 14 et la proposition 16. Le théorème 33 permet de conclure à la quasi-continuité des fonctions continues.

35. THÉORÈME. — *On suppose que E est le dual faible d'un espace de Fréchet F nucléaire séparable, ou bien le dual faible de la limite inductive stricte d'une suite de tels espaces. Alors la procapacité gaussienne c associée à une mesure gaussienne centrée μ sur E est une capacité de Prokhorov sur E pour la topologie de la convergence compacte sur F.*

Démonstration. — On suppose d'abord que E est le dual d'un Fréchet nucléaire et séparable F. Comme E est lusinien, μ est de Radon faible, de sorte que sa transformée de Fourier $\hat{\mu}$ est une fonction continue sur F (cf. [B1], p. 92). Soit λ une forme linéaire $\geqslant 0$ sur $W(E,\mu)$. Nous allons montrer que la promesure définie par λ est une mesure. Selon le théorème de Minlos ([B1]), il suffit de montrer que sa transformée de Fourier $\hat{\lambda}$ est continue sur F au point 0. Soit $u \in F$, la fonction e_u définie par $e_u(x) = \exp(i\langle u,x\rangle)$ appartient évidemment à $W(E,\mu)$. On doit calculer $\lambda(e_u)$. Comme λ est continue sur $W(E,\mu)$, on a une majoration de la forme

$$|\hat{\lambda}(u)-\hat{\lambda}(0)| = |\lambda(e_u-1)| \leqslant K\|e_u-1\|_W = K\|s_u\|_W$$

avec $s_u(x) = |e_u(x)-1| = 2\,|\sin(\langle u,x\rangle/2)|$. On a

$$\|s_u\|_W^2 \leqslant \int \langle u,x\rangle^2\, d\mu(x) + \int \langle u,y\rangle^2\, d\mu(y) \leqslant 2N_2(u)^2$$

qui tend vers 0 quand u tend vers 0 dans F (théorème du graphe fermé). Ainsi λ est une mesure de Radon faible sur E. D'après le théorème 12, c est d'abord une capacité régulière sur E faible, mais c^2 est fortement sous-additive, et E est lusinien, donc c est une capacité de Prokhorov par la proposition 11. Il n'y a plus qu'à remarquer que les compacts de E sont les mêmes pour les deux topologies.

Le cas du dual d'une limite inductive stricte s'obtient à l'aide des proposition 14 et théorème 16, et le passage à la convergence compacte s'obtient comme précédemment. □

36. *Remarques.* — *a*) On peut montrer en raisonnant comme au théorème 33 que les fonctions continues en convergence compacte sont quasi-continues.

b) Ces résultats s'appliquent évidemment à la mesure de Wiener sur $C([0,1])$ ou sur $C([0,+\infty[)$, ils s'appliquent aussi à $\mathbf{R}^N$ muni de sa mesure gaussienne canonique. On obtient ainsi des capacités de Prokhorov.

c) Il résulte de là que toute forme linéaire positive sur $W(E,\mu)$ est représentable par une mesure dite « d'énergie finie », et ayant un quasi-support, i.e. portée par une plus petite classe (aux polaires près) de quasi-fermés.

d) De la même manière, toute forme linéaire continue sur $W(E,\mu)$ est représentable par une « distribution d'énergie finie » ayant elle aussi un quasi-support, cela résulte du caractère local (proposition 29*c*) et de [FLP1], [FLP2], [FLP3]. Ce genre de propriétés est bien connu en théorie du potentiel (espaces de Dirichlet réguliers).

e) En utilisant un raisonnement analogue à ([FLP6], th. 2), on peut montrer que tout potentiel non nul est > 0 quasi-partout (ellipticité). On peut en déduire, si E est un espace de Banach, que la sphère unité ∂B n'est pas polaire.

f) On a retrouvé en passant le résultat classique suivant lequel une mesure gaussienne centrée sur un espace de Banach (resp. Fréchet) séparable provient au sens de Gross de la promesure canonique d'un espace de Hilbert (cf. [G], [DFL], [Kb], [Sa]).

g) Soit μ la mesure du « bruit blanc », i.e. la mesure gaussienne centrée sur $S'(\mathbf{R}^+)$ de covariance $\|\varphi\|^2$, pour $\varphi \in S(\mathbf{R}^+)$, la norme étant prise dans $L^2(dx)$. La capacité gaussienne associée à μ est de Prokhorov en topologie de la convergence compacte.

h) Les exemples *b*) et *g*) permettraient de construire le processus d'Ornstein-Uhlenbeck à valeurs dans E (cf. [Ks] pour le cas de l'espace de Wiener).

6. Applications quasi-linéaires, représentants privilégiés.

Dans tout ce paragraphe, E est un espace localement convexe, muni d'une mesure gaussienne centrée régulière μ, et c est une capacité régulière.

37. DÉFINITION. — *On dit qu'une application π définie sur (E,μ) à valeurs dans un espace localement convexe F est quasi-linéaire si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

a) *π est quasi-continue*

b) *il existe une application w linéaire telle que $\pi = w$ quasi-partout.*

On dit que π est scalairement quasi-linéaire si $f \circ \pi$ est quasi-linéaire pour toute $f \in E'$.

38. THÉORÈME. — *H' est exactement l'ensemble des fonctions quasi-linéaires. En particulier, pour toute $f \in W(E,\mu)$, la fonction $f'(x,y)$ a un représentant qui est quasi-linéaire en y pour presque tout x (linéarité de la différentielle !).*

Démonstration. — Soit $f \in H'$, et soit f_n une suite $\in E'$ telle que f_n converge vers f dans H', et quasi-partout. On peut supposer la série $\sum N_2(f_{n+1} - f_n)$ convergente, de sorte qu'en posant $q = \sum |f_{n+1} - f_n|$, on obtient une semi-norme s.c.i. $\leqslant +\infty$, appartenant à $W(E,\mu)$ donc finie quasi-partout. Notons E_0 l'ensemble $\{q < +\infty\}$: c'est un sous-espace vectoriel à complémentaire polaire sur lequel la suite f_n converge simplement vers une fonction linéaire g. On prolonge g à E tout entier à l'aide de Hahn-Banach (ou une base de Hamel), et l'on a $g = f$ quasi-partout.

Pour la réciproque, il suffit d'appliquer le théorème 22. On démontre pareillement la dernière assertion à l'aide du théorème de Fubini.

39. PROPOSITION. — *Soit π scalairement quasi-linéaire sur (E,μ) à valeurs dans F. L'image ν de μ par π est gaussienne centrée sur F. Si f appartient à $W(F,\nu)$, $f \circ \pi$ appartient à $W(E,\mu)$, on a $(f \circ \pi)'(x,u) = f'(\pi x, \pi u)$, $\mu \otimes \mu$-presque partout. Enfin,* $\tilde{\pi}$ est une *isométrie de* $W(F,\nu)$ *dans* $W(E,\mu)$.

Démonstration. — Il suit du théorème 38 que ν est une mesure gaussienne centrée sur F. Il est clair que $\tilde{\pi}$ est une isométrie de $L^2(\nu)$ dans $L^2(\mu)$. Si f appartient à F', $f \circ \pi$ appartient à H'_E (espace H' associé à E). Soit A l'algèbre des polynômes sur F : par récurrence sur le degré, et grâce à la proposition 28*d*), on constate que $f \circ \pi$ appartient à $W(E,\mu)$, et $(f \circ \pi)'(x,u) = f'(\pi(x), \pi(u))$. On voit alors que la restriction de $\tilde{\pi}$ à A est une isométrie dans $W(E,\mu)$, qui s'étend de manière unique par densité, ainsi que la formule de dérivation.

40. THÉORÈME. — *Soit (E,μ) gaussien, on suppose que la capacité c associée est régulière. Soient $(h_i)_{i \in I}$ une base orthonormale de H', et (e_i) la base duale dans H. On identifie chaque h_i avec un représentant linéaire et quasi-continu, et l'on pose pour tout $x \in E$, $x_i = h_i(x)$. Soit π l'application linéaire de E dans $\mathbf{R}^I$ ainsi définie.*

Alors on a les propriétés suivantes :

a) *l'image de μ par π est la mesure gaussienne canonique ρ sur R^I,*

b) *π est scalairement quasi-linéaire, $\tilde{\pi}$ est une isométrie de $W(R^I,\rho)$ sur $W(E,\mu)$,*

c) *l'image de c par π est la capacité gaussienne canonique γ sur R^I, et $\tilde{\pi}$ est un isomorphisme isométrique de $L^1(\gamma)$ sur $L^1(c)$,*

d) $R^I \backslash \pi(E)$ *est* γ*-intérieurement polaire, i.e. pour tout ensemble cylindrique* C *ne rencontrant pas* $\pi(E)$, *on a* $\gamma(C) = 0$.

On dira que card (I) est la dimension de la mesure μ.

Démonstration. — Le *a*) est évident vu le choix des h_i. π est scalairement quasi-linéaire par hypothèse, $\tilde{\pi}$ est une isométrie de $W(R^I, \rho)$ dans $W(E,\mu)$ par la proposition 39. Par construction, tout élément de H'_E appartient à l'image de $\tilde{\pi}$, par suite $\tilde{\pi}$ est une isométrie sur $W(E,\mu)$.

c) Si f est élémentaire sur R^I, on a évidemment $\gamma(f) = c(f \circ \pi)$, de sorte que $\tilde{\pi}$ est une isométrie de $L^1(\gamma)$ dans $L^1(c)$. Soit C un ensemble cylindrique disjoint de $\pi(E)$, soient φ une application linéaire continue de $\mathbf{R}^I$ dans $\mathbf{R}^N$ et B un borélien de $\mathbf{R}^N$ tels que $C = \varphi^{-1}(B)$. L'image $\varphi(\gamma)$ est une capacité gaussienne sur $\mathbf{R}^N$, donc de Prokhorov, et $\varphi(\gamma)^2$ est fortement sous-additive sur les ensembles. D'après le théorème de Choquet, il suffit donc de montrer que les compacts inclus dans B sont de $\varphi(\gamma)$-capacité nulle. Soit F l'image réciproque d'un tel compact K: F est cylindrique fermé dans $\mathbf{R}^I$ et est disjoint de $\pi(E)$, on trouve maintenant une suite f_n de fonctions élémentaires sur $\mathbf{R}^I$ décroissante vers l'indicatrice de F. Alors $f_n \circ \pi$ tend vers 0 sur E, de sorte que $\gamma(F) = 0$, et que $\varphi(\gamma)(K) = 0$.

Le théorème de Hahn-Banach montre que $\tilde{\pi}$ est une isométrie de $L^1(\gamma)$ sur $L^1(c)$.

41. THÉORÈME. — *Soit* (E,μ) *gaussien. On suppose que* E *est lusinien, que la procapacité gaussienne est régulière (donc de Prokhorov). Alors* dim $(\mu) \leqslant \aleph_0$.

De plus, soit π *quasi-linéaire de* E *dans* F, *et soit* ν *l'image de* μ *par* π. *On suppose que la transposée* $\tilde{\pi}$ *est une surjection de* H'_F *sur* H'_E.

Alors il existe une application quasi-linéaire θ *de* F *dans* E *et telle que :*

$$\theta \circ \pi = \mathrm{Id}_E \text{ quasi-partout sur } E, \text{ et } \pi \circ \theta = \mathrm{Id}_F \text{ quasi-partout sur } F.$$

Une telle application π *s'appelle un quasi-isomorphisme de* (E,π) *sur* $(F,\pi(\mu))$.

Démonstration. — Comme E est lusinien, $L^2(\mu)$ est séparable. Limitons-nous au cas de la dimension infinie. Soit $(h_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite d'éléments de E' engendrant la tribu de E et formant une base orthonormale de H'_E (procédé de Schmidt). On considère l'application j à valeurs dans $\mathbf{R}^N$ définie par $j(x) = (h_n(x))_{n \in N}$. C'est une injection linéaire continue de E dans $\mathbf{R}^N$. On constate que les images ρ et γ de μ et c par j sont les mesures et capacités gaussiennes canoniques sur $\mathbf{R}^N$. De plus, $j(E)$ est borélien dans $\mathbf{R}^N$, donc son complémentaire est extérieurement γ-polaire d'après le théorème précédent. On définit une application linéaire l sur $\mathbf{R}^N$ à valeurs dans E en prenant j^{-1} sur $j(E)$, et prolongeant linéairement à l'aide d'une base de Hamel. Il est clair que l est quasi-linéaire. On définit maintenant une application $\tilde{j}$ sur F à valeurs dans $\mathbf{R}^N$ en posant $\tilde{j}(y) = (\tilde{h}_n(y))_{n \in N}$, où chaque $\tilde{h}_n$ est une fonction quasi-linéaire sur F telle que $h_n = \tilde{h}_n \circ \pi$, ce qui existe d'après l'hypothèse sur π. Posons alors $\theta = l \circ \tilde{j}$, θ a toute les propriétés requises.

42. *Remarques.* — *a*) On pourrait croire qu'il suffise que π soit μ-mesurable : mais cela n'entraînerait pas l'identité des quasi-continuités.

b) On a montré en passant que tout espace lusinien (E,μ) avec μ gaussienne de dimension infinie, pour lequel c est une capacité est isomorphe (de manière non canonique) et plus précisément quasi-isomorphe à $\mathbf{R}^N$ muni de sa mesure gaussienne canonique.

43. THÉORÈME. — *Soit E un espace de Fréchet séparable muni d'une mesure gaussienne centrée μ. Soit $(h_n)_{n \in N}$ une base orthonormale de H', soit (e_n) sa base duale, et posons $P_n(x) = \sum_{k \in n} h_n(x)e_n$ pour tout $x \in E$. Alors la martingale vectorielle P_n converge quasi-partout vers* Id_E.

Démonstration. — Soit q une semi-norme continue sur E. D'après le théorème de Fernique et le théorème de Neveu ([N2], p. 104), $q(x-P_n(x))$ converge μ-presque partout et dans $L^2(\mu,E)$ vers 0. On modifie maintenant légèrement la démonstration de Neveu : posons $X_k(x) = \sup_{n \geqslant k} q(P_n(x)-P_k(x))$; l'inégalité maximale de Doob s'écrit $\int X_k^2(x)\, d\mu(x) \leqslant 4 \int q(x-P_k(x))^2\, d\mu(x)$. D'après le théorème 32, la fonction X_k appartient à $W(E,\mu)$, est quasi-continue et son énergie $e(X_k)$ majorée par $3 \int X_k^2\, d\mu$ tend vers 0. La suite X_k est évidemment décroissante, donc converge quasi-partout vers 0 (cf. [F1]). Ainsi $P_n(x)$ converge quasi-partout vers x. □

44. *Remarques.* — *a*) La même démonstration s'appliquerait au cas d'une martingale scalaire constituée de variables aléatoires gaussiennes appartenant à H'_E (i.e. de fonctions quasi-linéaires) bornée dans H'_E.

b) Application au bruit blanc (cf. remarque 36, *g*). Pour $f \in L^2(dx)$, notons $\tilde{f}$ la forme quasi-linéaire définie sur S' par $\tilde{f}(\omega) = \langle f, \omega \rangle$ pour presque tout $\omega \in S'$. Si l'on pose alors $B_t(\omega) = \tilde{f}_t(\omega)$, où $\tilde{f}_t$ est l'indicatrice de $[0,t]$ $(t>0)$, il est clair que l'on obtient un brownien. De plus, l'application $\omega \to (B_t(\omega))_{t>0}$ est un quasi-isomorphisme *quasi-linéaire* de $(S'(\mathbf{R}^+),\mu)$ sur l'espace de Wiener.

45. Définition. — *Soit $\mathcal{S}$ une sous-tribu, nous dirons que $\mathcal{S}$ est gaussienne si elle est engendrée par les variables gaussiennes de H' qui sont $\mathcal{S}$-mesurables. On sous-entend bien sûr que $\mathcal{S}$ contient les ensembles polaires.*

46. Définition. — *On appelle quasi-projecteur de E toute application quasi-linéaire p de E dans E vérifiant $p = p^2$ quasi-partout. On dit que p est orthogonal si p et* Id-p *sont indépendants.*

47. Théorème. — *Supposons E lusinien, et soit $\mathcal{S}$ une sous-tribu gaussienne. Il existe un projecteur orthogonal unique p tel que pour toute $f \in H'$, f soit $\mathcal{S}$-mesurable si et seulement si $f = f \circ p$ (q.p.). Réciproquement, tout quasi-projecteur orthogonal s'obtient de cette manière.*

De plus, soit μ^1 (resp. μ^2) l'image de μ par p (resp. Id-p), *alors on a une injection canonique de $W(E,\mu)$ dans $L^2(\mu^1, W(E,\mu^2))$.*

Démonstration. — Soit $H'_{\mathcal{S}}$ le sous-espace des éléments de H' qui sont $\mathcal{S}$-mesurables.

Soit $(h_n)_{n \in A}$ base orthogonale de $H'_{\mathcal{S}}$, que l'on complète en une base orthonormale de H' par $(h_n)_{n \in A \cup B}$. La suite $\pi(x) = (h_n(x))_{n \in A \cup B}$ fournit d'après la démonstration du théorème 41 un quasi-isomorphisme π de (E,π) sur $(\mathbf{R}^C, \nu)$ où $C = A \cup B$, et ν la mesure gaussienne canonique de $\mathbf{R}^C$. L'espace $\mathbf{R}^C = \mathbf{R}^A \times \mathbf{R}^B$ possède deux projecteurs canoniques $\tilde{p}$ et $\tilde{q}$, posons donc $p = \theta \circ \tilde{p} \circ \pi$ et $q = \theta \circ \tilde{q} \circ \pi$, où θ est le quasi-isomorphisme inverse de π (th. 41). Il est clair que p et q sont des quasi-projecteurs orthogonaux, et $q =$ Id-p. Au travers de l'application, π, $\mathcal{S}$ devient la tribu engendrée par $\tilde{p}$. Si p^1 a la même propriété que p, on constate que $q^1 =$ Id-p^1 est indépendante de $\mathcal{S}$, de sorte que l'égalité $p - p^1 = q^1 - q$ quasi-partout implique que

$p - p^1$ est une application quasi-linéaire indépendante d'elle-même, donc nulle quasi-partout puisque c'est une variable aléatoire scalairement gaussienne. Il est clair que tout projecteur orthogonal s'obtient de cette manière (prendre la tribu engendrée par p).

Pour la dernière propriété, il suffit évidemment de se placer sur l'espace $\mathbf{R}^A \times \mathbf{R}^B$: l'application canonique de $W(E,\mu)$ dans $L^2(\mu^1, W(\mathbf{R}^B, \mu^2))$ est évidente, ainsi que l'application canonique de ce dernier dans $L^2(\mu^1 \otimes \mu^2)$. L'application composée est injective, donc aussi la première application.

48. Corollaire. — *Soient $\mathscr{S}$ et $\mathscr{T}$ deux sous-tribus gaussiennes indépendantes, et P_t le semi-groupe d'Ornstein-Uhlenbeck. Alors, pour $f \in L^2(\mathscr{S}, \mu)$ et $g \in L^2(\mathscr{T}, \mu)$ on a $P_t(fg) = P_t f P_t g$ quasi-partout. D'autre part, si f et g sont des éléments de $W(E,\mu)$, leur produit l'est aussi.*

Démonstration. — On utilise le quasi-isomorphisme π du théorème précédent, qui rend la propriété évidente presque partout. On remarque ensuite que le semi-groupe P_t est régularisant, i.e. envoie $L^2(\mu)$ dans $W(E,\mu)$. Enfin, si f et g sont dans $W(E,\mu)$, on voit que f' est $\mathscr{S} \otimes \mathscr{S}$-mesurable, donc indépendante de g et g', et le résultat.

49. *Remarque.* — On applique cela à l'intégrale stochastique : μ étant la mesure de Wiener et (W_t) les coordonnées, on obtient le résultat bien connu suivant : ([Me]).

$$P_h \int_0^t \alpha_s(\omega)\, dW_s(\omega) = e^{-h} \int_0^t P_h \alpha_s(\omega)\, dW_s(\omega)$$

et

$$P_h \int_0^t \beta_s(\omega)\, ds_s = \int_0^t (P_h \beta_s)(\omega)\, ds$$

le corollaire 48 entraîne immédiatement les deux formules pour des intégrales stochastiques élémentaires, et le cas général s'en déduit par passage à la limite.

50. Théorème. — *On suppose toujours que E est lusinien. Soit f quasi-continue, $f \in W(E,\mu)$. Alors pour tout $u \in H$, la fonction $t \to f(x+tu)$ est absolument continue pour μ-presque tout $x \in E$.*

Démonstration. — On peut supposer que u est normé, soit h l'élément correspondant dans H'. Posons $p(x) = x - h(x)u$. Il est clair que p est le quasi-projecteur orthogonal du théorème 48 associé au quasi-isomorphisme π de (E,μ) sur $(\mathbf{R}^A \times \mathbf{R}, \nu)$. Considérons l'injection canonique de $W(\mathbf{R}^A \times \mathbf{R}, \nu)$ dans $L^2(\nu^1, W(\mathbf{R}^A \times \mathbf{R}, \nu^2))$. La mesure ν^2 est de dimension 1, d'où une injection de $W(\mathbf{R}^A \times \mathbf{R}, \nu)$ dans $L^2(\nu^1, W(\mathbf{R}, \rho))$ où ρ est la mesure gaussienne normale centrée sur $\mathbf{R}$. On en déduit l'existence d'un représentant quasi-continu $\tilde{f}$ de $f \circ \theta$ tel que pour ν^1-presque tout x, $t \to \tilde{f}(x+t, 1)$ appartienne à $W(\mathbf{R}, \rho)$ et soit ρ-quasi-continu, donc absolument continu sur $\mathbf{R}$. Soit γ la capacité fonctionnelle associée à l'espace $L^2(\nu^1, W(\mathbf{R}, \rho))$. On a évidemment $\gamma(B) \leqslant c(B)$ pour tout B analytique, donc la projection d'un polaire sur $\mathbf{R}^A$ est ν^1-négligeable. On en déduit que toute fonction valant $\tilde{f}$ ν-quasi-partout coïncide avec $\tilde{f}$ sur ν^1-presque toute droite. Le théorème de Fubini montre alors que pour toute fonction g égale ν-quasi-partout à $\tilde{f}$, la propriété d'absolue continuité a lieu pour ν-presque tout x. Il est clair que l'application π ne modifie pas ces propriétés, de sorte que f elle-même a la propriété indiquée. □

7. Espace $W(E,\mu,B)$ où B est un espace de Fréchet séparable.

Les hypothèses sont les mêmes qu'au § 6, et B est un espace de Fréchet séparable.

51. Définition. — *On note $W(E,\mu,B)$ l'ensemble des $f \in L^2(E,\mu,B)$ telles qu'il existe $g \in L^2(E \times E, \mu \otimes \mu, B)$ vérifiant :*

$$\textit{pour toute } \varphi \in B', \quad \varphi \circ f \in W(E,\mu), \qquad \textit{et} \qquad (\varphi \circ f)' = \varphi \circ g.$$

Il est clair que g est unique, on le notera $g = f'$. Si B est un espace de Banach de norme $|.|$, on définit alors l'énergie de f par :

$$e(f) = \int |f|^2 \, d\mu + \int |f'(x,u)|^2 \, d\mu(x) \, d\mu(u).$$

On voit aisément que $W(E,\mu,B)$ est un espace de Banach en norme $\sqrt{e(f)}$.

Si B est un espace de Fréchet, on obtient de même une suite de semi-normes sur $W(E,\mu,B)$ qui en font un espace de Fréchet.

52. Proposition. — *Si B est un espace de Banach séparable, et si $f \in W(E,\mu,B)$, alors $|f| \in W(E,\mu)$, et $e(|f|) \leqslant e(f)$.*

Démonstration. — On raisonne comme au n° 32. Soit $p(x) = \operatorname{Sup}_{i \in A} |\varphi_i(x)|$ où les φ_i appartiennent à la boule unité de B', et où A est fini. La fonction $p \circ f$ appartient à $W(E,\mu)$, et l'on a :

$$(p \circ f)'(x,u) = \sum_{i \in A} 1_{C_i}(x)\varphi_i(f'(x,u))$$

d'après la proposition 28, où les C_i forment une partition finie de E obtenue en prenant l'image réciproque d'une partition finie B_i de B telle que $p = \varphi_i$ sur B_i.

On en déduit $\operatorname{var}(p \circ f) \leqslant \int |f'(x,u)|^2 \, d\mu \otimes d\mu$.

Soit maintenant une suite p_n croissante de telles fonctions convergeant vers la norme $|.|$ de B. La suite $p_n \circ f$ reste bornée dans $W(E,\mu)$, et y a donc une valeur d'adhérence faible nécessairement égale à $|f|$, ce qui entraîne $e(|f|) \leqslant e(f)$.

53. *Remarque.* — Soit p une fonction sous-linéaire s.c.i. sur B, telle que $p \circ f$ et $p \circ f'$ soient de carré intégrable. On montrerait de même que $p \circ f$ appartient à $W(E,\mu)$.

54. THÉORÈME. — *Soit $f \in W(E,\mu,B)$. Alors f possède un représentant quasi-continu.*

Démonstration. — On peut se limiter au cas où B est un espace de Banach. Notons Z l'ensemble des $f \in W(E,\mu,B)$ ayant la propriété, et montrons que Z est fermé : on prend une série $f = \sum f_n$, où $f_n \in Z$, et $e(f_n) \leqslant 16^{-n}$, et f_n quasi-continue. Soit ω_n le quasi-ouvert $\omega_n = \{|f_n| > 2^{-n}\}$, et soit $G_p = \bigcup_{n \geqslant p} \omega_n$. On obtient $c(G_n) \leqslant 2.2^{-n}$, grâce à la proposition 53. Sur le complémentaire de G_n, la série converge uniformément et μ-presque partout vers f, donc $f \in Z$.

Il reste à prouver que Z est partout dense. Supposons d'abord que f soit une fonction élémentaire à base compacte, ce qui nous ramène au cas où E est de dimension finie, et f à support compact. Si f est de classe C^∞, le résultat est acquis, sinon on obtient le résultat par régularisation, puisque Z est fermé. Toujours en dimension finie, si f n'est pas à support compact, on approche f par une suite $\varphi_n f$ où φ_n est suite bornée et uniformément lipschitzienne de fonctions de classe C^1 et tendant vers 1. Il reste à faire le passage à la dimension infinie : on se ramène par quasi-isomorphisme au cas $E = \mathbf{R}^N$, et μ la mesure gaussienne canonique. Pour chaque $n \in N$, soit $\mu = \mu_n \otimes \nu_n$ la décomposition canonique sur $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^N$. Posons $f_n(x,y) = \int f(x,z)\, d\nu_n(z)$. Il est clair que f_n appartient à $W(E,\mu,B)$, et que

$$f'_n(x,y,u,v) = \int f'(x,z,u,w)\, d\nu_n(z)\, d\nu_n(w) = \int f'(x,z,u,0)\, d\nu_n(z).$$

La suite f_n (resp. f'_n) forme une martingale qui converge vers f (resp. f'). Par suite, la suite f_n converge vers f dans $W(E,\mu,B)$, et comme chaque f_n appartient à Z (dimension finie), on a $f \in Z$, et finalement $Z = W(E,\mu,B)$. □

8. Applications au calcul différentiel stochastique.

Dans cette partie, on considère le mouvement brownien canonique (W_t) à valeur dans $\mathbf{R}$, donc $E = C([0,+\infty[)$ et μ est la mesure de Wiener. On notera $(\mathscr{F}_t)$ la filtration naturelle, et l'on rappelle que c est une capacité de Prokhorov.

55. LEMME. — *Soit f un élément de $W(E,\mu)$ qui soit $\mathscr{F}_t$-mesurable. Alors f' est $\mathscr{F}_t$-mesurable en tant qu'application de E dans H', et f' est $\mathscr{F}_t \otimes \mathscr{F}_t$-mesurable.*

Démonstration. — Remarquons que $\mathscr{F}_t$ est une sous tribu gaussienne engendrée par les $f = \exp(i\langle\alpha,\omega\rangle)$ où α est une mesure sur $[0,t]$. On a en ce cas : $f'(\omega,u) = i\alpha(u)\exp(i\langle\alpha,\omega\rangle)$ et le résultat est clair.

56. THÉORÈME. — *Soit $X_t = \int_0^t \alpha_s\, dW_s$ où α est un processus prévisible tel que $t \to \alpha_t$ appartienne à $L^2(dt, W(E,\mu))$.*

Alors X_t appartient à $W(E,\mu)$ et sa différentielle est donnée par :

$$X'_t(\omega,u) = \int_0^t \alpha'_s(\omega,u)\, dW_s(\omega) + \int_0^t \alpha_s(\omega)\, dW_s(u) \tag{4}$$

le carré du champ vaut (cf. Bouleau-Hirsch, [BH1] *et* [BH2] *:*

$$\operatorname{var}(X'_t(\omega)) = 2\int_0^t \operatorname{covar}(X_s,\alpha_s)\, dW_s(\omega) + \int_0^t \operatorname{var}(\alpha_s(\omega))\, ds + \int_0^t \alpha_s(\omega)^2\, ds. \tag{5}$$

De plus, on a

$$\text{(6)} \qquad \operatorname{var}(X_t) = \int_0^t e(\alpha_s)\, ds\,.$$

Rappelons que le champ de différentielles d'un $f \in W(E,\mu)$ peut être considéré comme une fonction appartenant à $L^2(E \times E, \mu\otimes\mu)$, (cf. prop. 26). Ainsi, dans cette formule, $X'_t(\omega,u)$ et $\alpha'_s(\omega,u)$ désignent le champ considéré comme élément de $L^2(E\times E, \mu\otimes\mu)$, la première intégrale peut être considérée comme intégrale stochastique pour presque tout $u \in E$, et la deuxième comme intégrale pour presque tout ω. On peut aussi considérer le tout comme intégrale stochastique sur le produit $E \times E$ avec la mesure correspondante $\mu \otimes \mu$, et le brownien $W_t(\omega) + W_t(u)$ de variance $2t$.

On peut aussi considérer la première intégrale comme intégrale stochastique ordinaire vectorielle à valeurs dans H'.

Démonstration. — Supposons d'abord que $t \to \alpha_t$ soit continue à valeurs dans $W(E,\mu)$. Soit σ une partition finie de $[0,t]$ par des nombres dyadiques t_i. On introduit l'intégrale approchée

$$X_t^\sigma = \sum \alpha_{ti}(\omega)(W_{ti+1}(\omega) - W_{ti}(\omega))$$

qui appartient à $W(E,\mu)$ d'après le corollaire 48.

On a

$$X_t^{\sigma\prime}(\omega,u) = \sum \alpha'_{ti}(\omega,u)(W_{ti+1}(\omega) - W_{ti}(\omega)) + \sum \alpha_{ti}(\omega)(W_{ti+1}(u) - W_{ti}(u))\,.$$

On a $\iint \alpha'_s(\omega,u)^2\, ds\, d\mu(\omega)\, d\mu(u) < +\infty$ donc la première $\sum$ converge vers l'intégrale d'Itô

$$\int_0^t \alpha'_s(\omega,u)\, dW_s(\omega)$$

dans $L^2(\mu\otimes\mu)$. On constate que la deuxième $\sum$ converge dans $L^2(\mu\otimes\mu) = L^2(\mu, L^2(\mu))$ vers l'intégrale de Wiener-Itô

$$\int_0^t \alpha_s(\omega)\, dW_s(u)\,.$$

Les autres interprétations signalées dans l'énoncé s'obtiennent de la même manière.

On obtient ainsi une martingale par rapport à la famille $\mathscr{F}_t \otimes \mathscr{F}_t$. On peut lui appliquer la formule d'Itô :

$$X'_t(\omega,u)^2 = 2\int_0^t X'_s(\omega,u)\, dX'_s(\omega,u) + \int_0^t \alpha'_s(\omega,u)^2\, ds + \int_0^t \alpha_s(\omega)^2\, ds .$$

En prenant l'espérance en u :

$$(5)\quad \operatorname{var}(X'_t(\omega)) = 2\int_0^t \operatorname{covar}(X_s, \alpha_s)\, dW_s(\omega) + \int_0^t \operatorname{var}(\alpha_s(\omega))\, ds + \int_0^t \alpha_s(\omega)^2\, ds$$

formule qui coïncide avec celle de [BH1] et [BH2] donnée pour le carré du champ.

En prenant maintenant l'espérance en ω :

$$\operatorname{var}(X_t) = \int_0^t \operatorname{var}(\alpha_s)\, ds + \int_0^t E(\alpha_s^2)\, ds$$

soit

$$(6)\qquad \operatorname{var}(X_t) = \int_0^t e(\alpha_s)\, ds$$

on termine dans le cas général par densité à partir du cas continu.

57. THÉORÈME. — *Soit* $X_t = \int_0^t \beta_s(\omega)\, ds$ *où* β_t *est prévisible tel que* $t \to \beta_t$ *appartienne à* $L^2(dt, W(E,\mu))$. *Alors* X_t *appartient à* $W(E,\mu)$, *et sa différentielle vaut*

$$(7)\qquad X'_t(\omega,u) = \int_0^t \beta'_s(\omega,u)\, ds .$$

De plus, on a

$$(8)\qquad \operatorname{var}(X'_t(\omega)) = 2\int_0^t \operatorname{covar}(X'_s(\omega), \beta'_s(\omega))\, ds$$

$$(9)\qquad \operatorname{var}(X_t) = 2\int_0^t \operatorname{covar}(X_s, \beta_s)\, ds.$$

Démonstration. — Elle est analogue et plus facile que celle du théorème 52.

58. COROLLAIRE. — *Soit* $X_t = \int_0^t \alpha_s \, dW_s + \int_0^t \beta_s \, ds$ *comme dans les théorèmes* 56 *et* 57. *La variance vaut*

$$\mathrm{var}\,(X_t) = \int_0^t e(\alpha_s)\,ds + 2\int_0^t \mathrm{covar}\,(X_s, \beta_s)\,ds.$$

Démonstration. — On applique la formule d'Itô à la somme (4) + (7).

59. THÉORÈME. — *Soit* $X_t = \int_0^t \alpha_s \, dW_s + \int_0^t \beta_s \, ds$, *où* $t \to \alpha_t$ *et* $t \to \beta_t$ *appartiennent à* $L^2(dt, W(E,\mu))$. *Alors le processus* X_t *possède une version* Y_t *dont quasi-toute trajectoire est continue. Plus précisément, pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe un compact* $K \subset E$, *tel que* $c(E \setminus K) < \varepsilon$, *et tel que* $(t,\omega) \to Y_t(\omega)$ *soit continue sur* $[0, +\infty[\times K$.

Démonstration. — D'après le théorème 54, il suffit de montrer que $\omega \to (t \to X_t(\omega))$ appartient à $W(E,\mu,B)$ où $B = C([0, +\infty[)$. D'après le lemme de Doob, cette fonction f appartient à $L^2(E,\mu,B)$. Par ailleurs, le corollaire 58 nous dit que la fonction g définie semblablement par X'_t appartient aussi à $L^2(E \times E, \mu \otimes \mu, B)$. Il reste donc à prouver que $\varphi \circ g = (\varphi \circ f)'$ pour toute $\varphi \in B'$. Or, c'est vrai si φ est une mesure discrète. Supposons que φ soit une mesure à support compact dans $[0, +\infty[$, il existe une suite φ_n de mesures discrètes de même support convergeant vaguement vers φ, de sorte que le théorème de Lebesgue entraîne le résultat.

60. *Remarque.* — Si $X_t = X_0 + \int_0^t \sigma(X_s)\,dW_s + \int_0^t b(X_s)\,ds$ est une solution d'E.D.S. lipschitzienne classique, on montre facilement à l'aide des résultats précédents que la suite de Picard converge dans $W(E,\mu,B)$, donc localement uniformément sur quasi-toute trajectoire. □

BIBLIOGRAPHIE

[BH1] N. Bouleau et F. Hirsch, Formes de Dirichlet généralisées et densités des variables aléatoires réelles sur l'espace de Wiener, J. of Functionnal Analysis, 69, 2 (1986).

[BH2] N. Bouleau et F. Hirsch, Propriétés d'absolue continuité dans les espaces de Dirichlet et applications aux équations différentielles stochastiques, Lecture Notes in Maths, Springer, n° 1204 (1986).

[BH3] N. Bouleau et F. Hirsch, Sur des propriétés du flot d'une équation différentielle stochastique, C.R. Acad. Sci. Paris, série I, t. 306 (1988), 421-424.

[B1] N. Bourbaki, Intégration ch. IX. Asi 1343, Paris, Hermann, 1969.

[B2] N. Bourbaki, Espaces vectoriels topologiques ch. 1-5, Paris, Masson, 1981.

[D] J. Deny, Méthodes hilbertiennes en théorie du potentiel, CIME. Potential theory. Cremonese, Stresa, 1970.

[DL] J. Deny et J. L. Lions, Espaces du type de Beppo-Levi, Ann. Institut Fourier, III (1953), 305-370.

[DuFL] R. M. Dudley, J. Feldman, L. Le Cam, On semi-norms and probabilities and abstract Wiener spaces, Ann. Maths., 93 (1971), 390.

[E] A. Engelking, Outline of general topology, North-Holland, 1968.

[F1] D. Feyel, Espaces de Banach fonctionnels adaptés, quasi-topologie et balayage, Lecture Notes, Springer, n° 681 (1978), 81-102.

[F2] D. Feyel, Remarque sur le rôle du théorème de Hahn-Banach dans la démonstration de certains théorèmes de convergence presque sûre, C.R.A.S. Paris, t. 283 (1976), 175.

[F3] D. Feyel, Théorèmes de convergence presque sûre, existence de semi-groupes. Advances in Maths., 34, 2 (1979), 145.

[F4] D. Feyel, Sur la méthode de Picard (E.D.O. et E.D.S.), Séminaire Probabilités XXI, Lecture Notes in Maths. Springer, n° 1247 (1987).

[FLP1] D. Feyel et A. de La Pradelle, Espaces de Sobolev sur les ouverts fins, C.R.A.S., Paris, t. 280, série A (1975).

[FLP2] D. Feyel et A. de La Pradelle, Topologies fines et compactifications associées à certains espaces de Dirichlet, Annales de l'Institut Fourier, XXVII, fasc. 4 (1977), 121-146.

[FLP3] D. Feyel et A. de La Pradelle, Le rôle des espaces de Sobolev en topologie fine, Lecture Notes in Math. Springer, n° 563 (1976).

[FLP4] D. Feyel et A. de La Pradelle, Représentation d'espaces de Riesz-Banach sur des espaces quasi-topologiques, Bulletin de l'Académie Royale de Belgique, 5e série, t. LXIV (1978).

[FLP5] D. Feyel et A. de La Pradelle. Sur le rôle des espaces adaptés en théorie de l'énergie, C.R.A.S. Paris, t. 282 (1976), 153.

[FLP6] D. Feyel et A. de La Pradelle, Nouvelle démonstration de l'inégalité de Harnack pour un opérateur elliptique à coefficients discontinus, C.R.A.S. Paris, série A, t. 281 (1975), 159.

[FLP7] D. Feyel et A. de La Pradelle, Sur les espaces de Sobolev en dimension infinie, C.R.A.S. Paris, série I, t. 307, 871.

[Fr] X. Fernique, Intégrabilité des vecteurs gaussiens, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 270, série A (1970), 1698.

[Fu] F. Fukushima, Dirichlet forms and Markov processes, North Holland, 1980.

[G1] L. Gross, Measurable functions on Hilbert space, Trans. Amer. Maths. Soc., t. 105 (1962), 372.

[G2] L. Gross, Logarithmic Sobolev inequality, Amer. J. of Maths., t. 97 (1975), 1061.

[K] M. Krée, Propriétés de trace en dimension infinie d'espaces du type Sobolev, Bull. Soc. Maths. France, 105 (1977), 141.

[Kr1] P. Krée, Applications des méthodes variationnelles aux équations aux dérivées partielles sur un espace de Hilbert, C.R. Acad. Sci. Paris, série A, t. 278 (1974), 753.

[Kr2] P. Krée, Solutions faibles d'équations aux dérivées fonctionnelles, Séminaire Lelong, analyse, 1972-73, pp. 142-181, et 1973-74, pp. 16-47, Lecture Notes in Maths. Springer, n° 410 et 474.

[Kb] J. Kuelbs, Gaussian measures on a Banach space, J. of Func. Anal., 5 (1970).

[Ku] H. Kuo, Gaussian measures in Banach spaces, Lecture Notes in Maths, Springer, n° 463 (1975).

[Ks] S. Kusuoka, Dirichlet forms and diffusion processes on Banach spaces, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, section IA, 29 (1982).

[Ma1] P. Malliavin, Stochastic calculus of variation and hypoelliptic operators, Proc. of Intern. Symp. on Stoch. diff. eq., Kyoto 1976, Tokyo 1976.

[Ma2] P. Malliavin, Implicit functions in finite corank on the Wiener space, Proc. of Taniguchi intern. Symp. on Stoch. anal. Katata, Kyoto, 1982.

[Me] P. A. Meyer, Note sur le processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Sém. Proba. XVI. p. 95, Lecture Notes in Maths. Springer, n° 920 (1982).

[Mo1] G. Mokobodzki, Théorie du balayage, Cours de 3e cycle, Université Paris VI (1969).

[Mo2] G. Mokobodzki, Cônes de potentiels, noyaux subordonnés, CIME, Potential theory, Cremonese, Stresa, 1970.

[N1] J. Neveu, Bases mathématiques du calcul des probabilités, Paris, Masson, 1970.

[N2] J. Neveu, Martingales à temps discret, Paris, Masson, 1972.

[Sa] SATO, Measure on a Banach space, and abstract Wiener space, Nagoya Maths. J., 36 (1969), 65.

[Sc] L. SCHWARTZ, Processus de Markov et désintégrations régulières, Ann. Institut Fourier, XXVII, fasc. 3 (1977), 274.

[Sk] A. V. SKOROKHOD, Notes on gaussian measures in a Banach space, Teor. Veroj. I. Prim., 15 (1970), 519.

[Su] H. SUGITA, Positive generalized Wiener functions and potential theory over abstract Wiener spaces (à paraître in Osaka Journal of Math.).

[W] S. WATANABE, Lectures on stochastic differential equations and Malliavin calculus, Tata Instit. Bombay, 1984.

Manuscrit reçu le 7 décembre 1988,
révisé le 24 mars 1989.

D. FEYEL et A. de LA PRADELLE,
Laboratoire d'Analyse
Tour 46-0, 4[e] étage
Université Pierre et Marie Curie
4, place Jussieu
75230 Paris Cedex 05.