

EMMANUEL PAUL

## **Classification topologique des germes de formes logarithmiques génériques**

*Annales de l'institut Fourier*, tome 39, n° 4 (1989), p. 909-927

[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1989\\_\\_39\\_4\\_909\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1989__39_4_909_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1989, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## CLASSIFICATION TOPOLOGIQUE DES GERMES DE FORMES LOGARITHMIQUES GÉNÉRIQUES

par Emmanuel PAUL

---

### 0. INTRODUCTION

Nous étudions ici la classification topologique des germes à l'origine de  $\mathbb{C}^n$  de feuilletages définis par des 1-formes holomorphes singulières intégrables du type « logarithmique » :

$$f_1 f_2 \cdots f_p \sum_{j=1}^p \lambda_j \frac{df_j}{f_j}$$

où les  $f_j$  sont des germes de fonctions analytiques irréductibles étrangers et les  $\lambda_j$  des complexes non nuls. Rappelons que, d'après un résultat de D. Cerveau et J. F. Mattei, de tels feuilletages décrivent en dimension supérieure ou égale à trois une situation générique pour les germes de feuilletages de codimension un, non dicritiques [2]. La classification obtenue ici est cependant valable dès la dimension deux. Cette étude a déjà été abordée dans [1] lorsque les germes  $f_j$  sont des coordonnées de  $\mathbb{C}^n$ .

Nous nous proposons donc de classier ces objets modulo la relation d'équivalence suivante : deux germes de formes sont topologiquement conjugués lorsqu'il existe un germe d'homéomorphisme de  $(\mathbb{C}^n, 0)$  envoyant le lieu singulier de la première sur celui de la deuxième et

*Mots-clés* : Singularités - Formes logarithmiques.

*Classification A.M.S.* : 32B30 - 57R30.

envoyant feuilles sur feuilles. Les résultats de ce travail se regroupent en l'énoncé suivant :

**THÉORÈME.** — Soit  $\{\omega^s = f_1^s \dots f_p^s \Sigma \lambda_j^s df_j^s / f_j^s, s \in (\mathbb{C}, 0)\}$  une famille de germes de formes logarithmiques « génériques ». Cette famille est topologiquement triviale si et seulement s'il existe une famille  $\{g^s, s \in (\mathbb{C}, 0)\}$  de  $GL^+(2, \mathbb{R})$  tel que pour tout  $j = 1 \dots p$ ,

$$g^s(2i\pi\lambda_j^0) = 2i\pi\lambda_j^s.$$

Nous fixons d'abord les séparatrices  $X : f_1 f_2 \dots f_p = 0$ . Pour prouver que la condition énoncée suffit à la construction d'une famille de conjugaisons topologiques, on utilise une désingularisation de  $X$  [4]. Nous obtenons alors une famille de formes logarithmiques, à pôles sur un diviseur à croisements normaux : la classification topologique de tels objets a été considérée dans [6]. Nous appliquons le principal résultat de cette étude. Les conditions de genericité portent ici sur le type de désingularisation de  $X$  ainsi que sur les résidus  $\lambda_j$  (sans relations entières à coefficients positifs).

Cette condition reliant les périodes  $2i\pi\lambda_j^s$  de cette famille est aussi une condition nécessaire à la trivialité topologique : la classe  $\Lambda$  des résidus  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  modulo  $GL(2, \mathbb{R})$  est un invariant topologique du feuilletage. Pour vérifier cette assertion, on identifie  $\Lambda$  à l'ensemble des suites de  $p$ -uples  $(p_j^k, j=1 \dots p)$  telles que  $\Sigma(p_j^k \lambda_j)$  tende vers zéro quand  $k$  tend vers l'infini, et on donne une interprétation topologique de ces suites, qui s'apparente aux cycles asymptotiques introduits par Schwartzman [9], puis Plante [8].

Enfin, nous complétons la preuve du théorème annoncé en montrant qu'en déformant les séparatrices d'un germe de forme logarithmique générique à résidus fixés, on obtient une famille topologiquement triviale.

Cette étude m'a été proposée par J. F. Mattei lors de mon travail de thèse à l'Université Paul Sabatier de Toulouse [7]. Son soutien et ses nombreuses suggestions m'ont été fort utiles et il en trouve ici mes plus vifs remerciements.

## 1. GERME DE 1-FORME LOGARITHMIQUE GÉNÉRIQUE DE $(\mathbb{C}^n, 0)$

### 1.1. Définitions et rappels.

On appelle *germe de 1-forme logarithmique* à l'origine de  $\mathbb{C}^n$ , tout germe de 1-forme holomorphe du type :

$$f_1 \dots f_p \sum_{j=1}^p \lambda_j \frac{df_j}{f_j}$$

où les  $f_j$  désignent des germes de fonctions analytiques irréductibles étrangers, et les  $\lambda_j$  des nombres complexes non nuls. Rappelons un résultat de généralité dû à D. Cerveau et J. F. Mattei [2] qui motive l'étude des germes de feuilletages définis par de telles formes.

Considérons un germe à l'origine de  $\mathbb{C}^n$ ,  $n$  supérieur ou égal à 2, de 1-forme holomorphe intégrable. Son lieu singulier est un germe d'ensemble analytique en 0, que l'on pourra toujours supposer de codimension au moins deux. Soit  $\omega_v$ , le premier jet non nul de  $\omega$ . De par l'homogénéité de la forme  $\omega_v$ , le champ radial  $R$  de  $\mathbb{C}^n$  laisse invariant le feuilletage défini par  $\omega_v$ . On suppose que  $\omega_v$  est non dicritique, i.e. le champ  $R$  laisse *transversalement* invariant ce feuilletage. Le polynôme homogène :  $P = \omega_v(R)$  est alors non identiquement nul.

On appelle *cône tangent* de  $\omega_v$  l'ensemble  $C(\omega_v)$  des singularités sur le projectif  $\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C})$  du feuilletage obtenu à partir de  $\omega_v$  par éclatement de l'origine de  $\mathbb{C}^n$ . Il s'identifie dans le cas non dicritique avec le lieu des zéros du polynôme homogène  $P = \omega_v(R)$  dans le projectif. Son complémentaire dans le projectif est une feuille du feuilletage éclaté. De plus, le polynôme  $P$  est *facteur intégrant* de  $\omega_v$ , c'est-à-dire :

$$d\left(\frac{\omega_v}{P}\right) = 0.$$

Notons :  $\{\lambda_j, j=1 \dots p\}$  les résidus de la forme méromorphe fermée  $\omega_v/P$  le long de chaque composante irréductible du cône tangent de  $\omega_v$ .

**1.2. DÉFINITION.** — Soit  $\omega_\nu$  un germe de forme homogène de degré  $\nu$  non dicritique. Nous dirons que  $\omega_\nu$  est générique lorsque :

- i) — le polynôme  $P = \omega_\nu(R)$  est réduit (sans facteurs multiples),  
 — les composantes  $(P_j=0)$  du cône tangent  $C(\omega_\nu)$  sont lisses,  
 — le cône tangent  $C(\omega_\nu)$  est à croisements normaux.
- ii) — les résidus  $\{\lambda_j, j=1 \dots p\}$ ,  $p \geq 3$ , sont sans relations entières,  
 — il existe deux indices  $j$  et  $k$  de  $\{1 \dots p\}$ ,  $j \neq k$ , tels que  $\lambda_j/\lambda_k$  soit non réel.

**1.3. PROPOSITION.** — L'ensemble des formes génériques de degré  $\nu$  est dense dans l'ensemble des formes intégrables homogènes de degré  $\nu$  non dicritiques.

Cette proposition se déduit de [2, 4<sup>e</sup> partie, théorème 1.1].

**1.4. THÉORÈME** [2, 4<sup>e</sup> partie, II.2.1]. — En dimension supérieure ou égale à trois, toute forme intégrable  $\omega$  dont le premier jet non nul  $\omega_\nu$  est non dicritique, générique, admet une intégrale première multiforme du type :  $f_1^{\lambda_1} \dots f_p^{\lambda_p}$ , où les  $f_j$  sont des germes de fonctions analytiques irréductibles et les complexes  $\lambda_j$  les résidus de la forme méromorphe fermée  $\omega_\nu/\omega_\nu(R)$ .

Ainsi, tout germe de forme de  $(\mathbb{C}^n, 0)$ ,  $n$  supérieur ou égal à 3, dont le premier jet non nul est non dicritique générique, est un germe de forme logarithmique. Nous les appellerons : *germes de formes logarithmiques génériques*.

## 2. DESCRIPTION DU FEUILLETAGE DÉFINI PAR

$$\omega = f_1 \dots f_p \sum_{j=1}^p \lambda_j \frac{df_j}{f_j}$$

Soit  $X_j$  le germe d'hypersurface d'équation  $(f_j=)$  et  $X$  la réunion des  $X_j$ ,  $j = 1 \dots p$ .

### 2.1. Lieu singulier $S(\omega)$ de $\omega$ .

On a immédiatement :

$$S(\omega) = \bigcup_{i \neq j} (X_i \cap X_j) \bigcup_j S(df_j).$$

En particulier le germe d'ensemble analytique  $S(\omega)$  est inclus dans  $X$  et est de codimension au moins deux.

### 2.2. Séparatrices de $\omega$ .

On vérifie aisément qu'il existe une deux-forme holomorphe  $\eta$  telle que :

$$\omega \wedge df_j = f_j \cdot \eta.$$

Les hypersurfaces  $X_j$  sont donc des séparatrices du feuilletage  $\mathcal{F}(\omega)$  défini par  $\omega$ .

### 2.3. Espace des feuilles de $\mathcal{F}(\omega)$ .

Fixons un représentant du germe  $\omega$  sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{C}^n$  et notons  $\mathcal{F}_u(\omega)$  le feuilletage qu'il définit sur  $U$ . En dehors de la réunion des séparatrices, ce feuilletage coïncide avec celui défini par la forme méromorphe fermée :

$$\Omega = \sum_{j=1}^p \lambda_j \frac{df_j}{f_j}.$$

Le groupe  $H$  des périodes de  $\Omega$  est le sous-groupe de  $(\mathbb{C}, +)$  engendré par  $\{2i\pi\lambda_j, j=1 \dots p\}$ . En effet, on obtient une base de  $H_1(U \setminus X, \mathbb{Z})$  en prenant les bords orientés de petits disques complexes transverses à chaque  $X_j$ . Choisissons une primitive multiforme  $F$  de  $\Omega$  sur  $U \setminus X$ , c'est-à-dire fixons une composante connexe de l'espace total du faisceau des germes de primitives de  $\Omega$  [6] : c'est un revêtement de  $U \setminus X$  de groupe structural  $H$ . On peut lui associer une application (que nous noterons encore  $F$ ) de  $U \setminus X$  dans  $\mathbb{C}/H$ . Les feuilles de  $\mathcal{F}_u(\omega)$  sont les composantes connexes des hypersurfaces de niveau de cette application.

**2.4. PROPOSITION.** — Soit  $\omega$  un germe de forme logarithmique à l'origine de  $\mathbb{C}^2$ . On suppose qu'il existe deux indices distincts  $j$  et  $k$  tels que  $\lambda_j/\lambda_k$  ne soit pas réel. Soit  $F$  une primitive multiforme de la forme fermée associée à  $\omega$ . Il existe un système fondamental de voisinages  $U$  de l'origine tel que les hypersurfaces de niveau de  $F$  sur  $U$  soient connexes.

**2.5. COROLLAIRE.** — Sous les hypothèses de (2.4), l'espace des feuilles de  $\mathcal{F}_u(\omega)$  est exactement  $\mathbb{C}/H$ .

*Preuve de la proposition 2.4.* — Effectuons une récurrence sur le nombre  $N$  d'éclatements nécessaires à la désingularisation de  $\omega$  ([10], [11] ou [5 : appendice I]). Pour  $N = 0$ , la forme  $\omega$  est alors linéaire :

$$\omega = \lambda_1 z_2 dz_1 + \lambda_2 z_1 dz_2.$$

En utilisant le revêtement universel de  $\mathbb{C}^{*2}$ , on constate que la proposition est vérifiée dans ce cas. Supposons la proposition vraie pour tout germe de forme logarithmique se désingularisant après au plus  $N - 1$  éclatements. Fixons une forme logarithmique  $\omega$  sur  $U \subset \mathbb{C}^2$  se désingularisant après  $N$  éclatements. Soit  $F$  une primitive multiforme de la forme fermée associée  $\Omega$ . Notons :

$$E: \tilde{\mathbb{C}}^2 \rightarrow U \subset \mathbb{C}^2$$

l'éclatement de l'origine de  $\mathbb{C}^2$ , et choisissons une carte  $(x, t)$  de  $\tilde{\mathbb{C}}^2$  dans laquelle le projectif  $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$  a pour équation  $(x=0)$ . On a :

$$f_j \circ E = x^{v_j} \tilde{f}_j$$

$$E^* \Omega = \left( \sum_{j=1}^p v_j \lambda_j \right) \frac{dx}{x} + \sum_{j=1}^p \lambda_j \frac{d\tilde{f}_j}{\tilde{f}_j}.$$

Soit  $\{t_j, j=1 \dots k\}$  les points du cône tangent de  $X: (f_1 \dots f_p=0)$  dans  $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ . Choisissons un facteur transverse  $T$  au projectif en un point  $t_0$  distinct des  $t_j$ . On peut supposer — sans restreindre la généralité — que le résidu  $\lambda_0 = \sum v_j \lambda_j$  de  $E^* \Omega$  le long du projectif est égal à 1. La primitive multiforme  $F \circ E$  de  $E^* \Omega$  est alors uniforme le long de  $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ . Prenons  $U$  tel que  $E^{-1}(U) \cap T$  soit un ouvert de trivialisations du revêtement  $F \circ E$ , et fixons une détermination de  $F \circ E$  sur cet ouvert. Notons  $z$  la coordonnée obtenue sur le facteur transverse  $T$  en prenant l'exponentielle de cette détermination. Nous voulons prouver qu'on peut

trouver un voisinage ouvert  $U'$  de  $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$  inclus dans  $E^{-1}(U)$  tel que, si deux points  $P$  et  $Q$  de  $U'$  vérifient :

$$(1) \quad F \circ E(P) = F \circ E(Q) \quad \text{dans } \mathbb{C}/H,$$

alors ils appartiennent à une même feuille de  $\mathcal{F}_{U'}(E^*\Omega)$ . Choisissons pour  $U'$  l'ouvert obtenu en prenant la réunion de  $E^{-1}(X)$  et des hypersurfaces de niveau de  $F$  rencontrant  $E^{-1}(U) \cap T$ . D'après ce choix, on peut se limiter à considérer deux points  $P$  et  $Q$  sur le facteur transverse  $T$ . L'égalité (1) équivaut alors dans la coordonnée  $z$  à :

$$(2) \quad \exists h \in H, \quad z(Q) = z(P) \cdot e^h,$$

et il nous suffit de prouver l'implication :

$$(2) \Rightarrow (P \sim Q)$$

où  $\sim$  désigne la relation d'équivalence : « appartenir à une même feuille de  $\mathcal{F}_{U'}(E^*\Omega)$  ». Pour chaque point  $t_j$  du cône tangent de  $X$ , considérons un représentant  $\Omega_j$  du germe de  $E^*\Omega$  en  $t_j$ . Soit  $H_j$  le groupe des périodes de  $\Omega_j$  :  $H_j$  est le sous-groupe de  $H$  engendré par les résidus associés aux séparatrices de  $\omega$  dont le cône tangent est  $t_j$ . Soit  $F_j$  une primitive multiforme de  $\Omega_j$ . Il est clair que  $\Omega_j$  se désingularise en au plus  $N-1$  éclatements. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe un voisinage ouvert  $V_j$  de  $t_j$  dans  $\tilde{\mathbb{C}}^2$  tel que :

- $V_j \setminus E^{-1}(X) \subset U'$
- $\forall P, Q \in V_j, (F_j(P) = F_j(Q) \text{ dans } \mathbb{C}/H_j) \Rightarrow (P \sim Q)$ .

Par transport holonome, on construit, à partir des ouverts  $V_j$ , des disques  $D_j$  de centre  $t_0$  dans  $T$  tels que, pour tout couple de points  $(P, Q)$  appartenant à  $D_j$  :

$$(3) \quad (\exists h_j \in H_j, \quad z(Q) = z(P) \cdot e^{h_j}) \Rightarrow (P \sim Q).$$

En effet, la coordonnée  $z$  est aussi, à une constante multiplicative près, une détermination de  $F_j$ . Remarquons maintenant que la réunion des groupes  $H_j$  engendre  $H$ . L'élément  $h$  de  $H$  de (2) se décompose en :

$$(4) \quad h = h_1 + \dots + h_k, \quad h_j \in H_j.$$

Considérons alors les difféomorphismes linéaires de  $T$  :

$$\varphi_j : z \rightarrow e^{h_j} \cdot z$$

et choisissons un disque  $D_h$  de  $T$  tel que :

$$\begin{aligned} - D_h &\subset \bigcap_{j=1 \dots k} D_j \\ - \varphi_1(D_h) &\subset \bigcap_{j=1 \dots k} D_j \\ &\vdots \\ - \varphi_k \circ \dots \circ \varphi_1(D_h) &\subset \bigcap_{j=1 \dots k} D_j. \end{aligned}$$

Un des rapports  $\lambda_j/\lambda_k$  étant non réel, il existe un élément  $\psi$  du groupe d'holonomie en  $t_0$  de la feuille  $\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \setminus C_x$  qui soit contractant. Pour un entier  $m$  suffisamment grand, les images  $P'$  et  $Q'$  de  $P$  et  $Q$  par  $\psi^m$  sont dans  $D_h$ . De (2), on déduit :

$$\exists h \in H, \quad z(Q') = z(P') \cdot e^h.$$

En effet, l'expression de  $\psi$  dans  $z$  étant linéaire,  $\psi^m$  commute avec l'application :  $z \rightarrow e^h \cdot z$ . D'après (4), on a :

$$Q' = (\varphi_k \circ \dots \circ \varphi_1)(P').$$

En itérant alors  $k$  fois l'implication (3), on obtient :  $P' \sim Q'$  et, par application de  $\psi^{-m}$ ,  $P \sim Q$ .  $\square$

### 3. UN THÉORÈME DE TRIVIALITÉ TOPOLOGIQUE

Soit  $\{\omega^s, s \in (\mathbb{C}, 0)\}$  une famille de germes de formes logarithmiques de  $(\mathbb{C}^n, 0)$ ,  $n$  supérieur ou égal à 2, dont l'ensemble des séparatrices  $X$  est fixé :

$$\omega^s = f_1 \dots f_p \sum_{j=1}^p \lambda_j^s \frac{df_j}{f_j}, \quad s \in (\mathbb{C}, 0).$$

Nous allons, par une désingularisation de  $X$ , nous ramener à une situation considérée dans [6] et obtenir ainsi un résultat de trivialité

topologique pour cette famille. Rappelons le théorème d'existence d'une désingularisation (analytique) dû à H. Hironaka [4] :

**3.1. THÉORÈME.** — *Soit  $X$  un représentant d'un germe d'hypersurface analytique sur un voisinage ouvert  $U$  de l'origine de  $\mathbb{C}^n$ . Il existe une variété analytique complexe  $M$  et une application analytique propre  $E$  de  $M$  sur  $U$  telle que :*

- i)  $E$  est un difféomorphisme analytique de  $M \setminus E^{-1}(\text{Sing } X)$  sur  $U \setminus \text{Sing } X$ ,
- ii)  $E^{-1}(X)$  est une réunion d'hypersurfaces lisses à croisements normaux.

Considérons alors la famille des formes méromorphes fermées à pôles sur  $D = E^{-1}(\text{Sing } X)$  :

$$\Omega^s = E^* \left( \sum_{j=1}^p \lambda_j^s \frac{df_j}{f_j} \right).$$

**3.2. DÉFINITION.** — *Soit  $D$  un diviseur à croisements normaux d'une variété analytique, et  $M$  un voisinage de  $D$ . Une forme méromorphe fermée  $\Omega$  à pôles sur  $D$  est dite *logarithmique* si, en tout point de  $D$ ,  $\Omega$  multipliée par une équation locale réduite de  $D$  se prolonge en une forme holomorphe sur  $M$ .*

**3.3. PROPOSITION.** — *Les formes  $\Omega^s$  sont logarithmiques à pôles sur  $D$ . De plus, les résidus  $\mu_j^s$  de  $\Omega^s$  le long de chaque branche  $D^j$  de  $D$  sont de la forme :*

$$\mu_j^s = \sum_{k=1}^p v_j^k \lambda_k^s$$

où les  $v_j^k$  sont des entiers positifs ou nuls ne dépendant que des  $f_k$ .

*Preuve.* — Précisons l'expression locale de  $\Omega_s$ . Soit  $V$  un ouvert simplement connexe de  $M$  et ( $y^j=0$ ),  $j \in J$ , les équations locales des hypersurfaces  $D^j$  de  $D$  rencontrant  $V$ . Puisque  $f_k \circ E$  s'annule sur  $E^{-1}(X_k) = E^{-1}(0) \cup \tilde{X}_k$ , on a :

$$f_k \circ E = \prod_J y_j^{v_j^k} \cdot u_k$$

où les  $v_j^k$  sont des entiers positifs ou nuls, et  $u_k$  des unités sur  $V$  qu'on

écrivra sous la forme  $e^{v_k}$ . On a

$$\begin{aligned}\Omega^s &= \sum_{k=1}^p \lambda_k^s \frac{d(f_k \circ E)}{f_k \circ E} \\ &= \sum_{j \in J} \left( \sum_{k=1}^p v_j^k \lambda_k^s \right) \frac{dy_j}{y_j} + \sum_{k=1}^p \lambda_k^s dv_k.\end{aligned}$$

En posant :

$$\begin{aligned}\mu_j^s &= \sum_{k=1}^p v_j^k \lambda_k^s \\ z_j &= y_j \exp \left( \frac{1}{|J| \mu_j^s} \sum_{k=1}^p \lambda_k^s v_k \right),\end{aligned}$$

on obtient :

$$\Omega^s = \sum_j \mu_j^s \frac{dz_j}{z_j}.$$

Nous reconnaissons ici l'écriture locale d'une forme logarithmique fermée à pôles sur  $D$  [6]. De plus, les résidus  $\mu_j^s$  de  $\Omega^s$  le long de chaque composante lisse  $D^j$  de  $D$  sont de la forme annoncée.  $\square$

Pour une telle famille de formes logarithmiques, nous avons un théorème de trivialité topologique :

**3.4. THÉORÈME [6].** — Soit  $\{\Omega^s, s \in (\mathbb{C}, 0)\}$  une famille de 1-formes logarithmiques fermées à pôles sur  $D$ . S'il existe une famille  $\{g^s, s \in (\mathbb{C}, 0)\}$  de  $GL^+(2, \mathbb{R})$  telle que chaque application  $\mathbb{R}$ -linéaire  $g^s$  envoie les périodes  $2i\pi\mu_j^0$  de  $\Omega^0$  sur les périodes  $2i\pi\mu_j^s$  de  $\Omega^s$ , alors cette famille est topologiquement triviale (i.e. il existe une famille d'homéomorphismes  $\Phi^s$  laissant stable  $D$  et envoyant les feuilles du feuilletage  $\mathcal{F}(\Omega^0)$  défini par  $\Omega^0$  sur celles du feuilletage  $\mathcal{F}(\Omega^s)$  défini par  $\Omega^s$ ).

La preuve de ce théorème utilise essentiellement les conjugaisons topologiques des modèles locaux de [1], recollées à l'aide d'une construction développée dans [6] : « structures de Clémens adaptées à  $(D, \Omega^s)$  ». Nous allons en déduire ici le :

**3.5. THÉORÈME.** — Soit  $\omega^s$  une famille de germes de formes logarithmiques :

$$f_1 \dots f_p \sum_{j=1}^p \lambda_j^s \frac{df_j}{f_j}, \quad s \in (\mathbb{C}, 0),$$

dont les résidus sont sans relations à coefficients entiers positifs. On suppose qu'il existe une désingularisation  $E$  de  $X : (f_1 \dots f_p = 0)$ , telle que

*E* soit un difféomorphisme analytique de  $M \setminus E^{-1}(0)$  sur  $U \setminus \{0\}$ . S'il existe une famille  $\{g^s, s \in (\mathbb{C}, 0)\}$  de  $GL^+(2, \mathbb{R})$  telle que chaque application  $g^s$  envoie les périodes  $2i\pi\lambda_j^0$  de  $\omega^0$  sur les périodes  $2i\pi\lambda_j^s$  de  $\omega^s$ , alors la famille  $\{\omega^s, s \in (\mathbb{C}, 0)\}$  est topologiquement triviale.

**3.6. Remarque.** — En dimension deux, l'hypothèse portant sur la désingularisation de  $X$  est toujours vérifiée. En dimension quelconque, les formes logarithmiques génériques (1.4) vérifient aussi cette hypothèse,  $X$  se désingularisant alors par un éclatement de l'origine de  $\mathbb{C}^n$ .

*Preuve du théorème 3.5.* — D'après 3.3, l'hypothèse :

$$g^s(2i\pi\lambda_j^0) = 2i\pi\lambda_j^s$$

s'étend par linéarité aux périodes  $2i\pi\mu_j^s$  de  $\Omega^s$ . Le théorème 3.4 prouve l'existence d'une famille d'homéomorphismes  $\Phi^s$  de  $M$  tels que :

i)  $\Phi^s$  laisse stable  $D = E^{-1}(0)$ .

ii)  $\Phi^s$  est une conjugaison topologique des feuilletages définis par  $E^*(\omega^0)$  et  $E^*(\omega^s)$ .

L'application  $E$  étant un difféomorphisme en dehors de  $E^{-1}(0)$  sur  $U \setminus \{0\}$ , la trivialisatation cherchée est alors obtenue par image directe par  $E$ . □

**3.7. Remarque.** — On peut conjecturer que le théorème (3.5) est encore vérifié sans l'hypothèse restrictive sur la désingularisation de  $X$  :  $E$  est un difféomorphisme de  $M \setminus E^{-1}(0)$  sur  $U \setminus \{0\}$ . Pour pouvoir « redescendre » la conjugaison par  $E$ , il est alors nécessaire de construire une famille d'homéomorphismes  $\Phi^s$  de  $M$  qui laissent stables les fibres de la désingularisation au-dessus du lieu singulier de  $X$ . Ceci nécessiterait un raffinement de la construction effectuée dans [6].

#### 4. UN INVARIANT TOPOLOGIQUE DU FEUILLETAGE DÉFINI PAR UN GERME DE FORME LOGARITHMIQUE $\omega$

Notons :  $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$  l'ensemble des résidus de  $\omega$ .

On considère la relation d'équivalence :

$$\Lambda \sim \Lambda' \Leftrightarrow \exists g \in GL(2, \mathbb{R}), g(\lambda_j) = \lambda'_j.$$

**4.1. THÉORÈME.** — Soit  $\omega$  un germe de forme logarithmique à l'origine de  $\mathbb{C}^n$ , dont les résidus  $\Lambda = \{\lambda_1 \dots \lambda_p\}$ ,  $p \geq 3$ , ne vérifient pas de relations entières. On suppose de plus qu'il existe deux indices distincts  $j$  et  $k$  tels que  $\lambda_j/\lambda_k$  ne soit pas réel. La classe de  $\Lambda$  modulo  $GL(2, \mathbb{R})$  est un invariant topologique du feuilletage défini par  $\omega$ .

**4.2. LEMME.** — Soit  $\Delta(\Lambda)$  l'ensemble des suites  $(p_k^j)_{j=1 \dots p}$  de  $\mathbb{Z}^p$  telles que :

$$\lim_k \sum_{j=1}^p p_k^j \lambda_j = 0.$$

L'ensemble  $\Delta(\Lambda)$  caractérise la classe de  $\Lambda$  modulo  $GL(2, \mathbb{R})$ .

**4.3. Remarques.** — i) Les hypothèses effectuées sur les résidus nous permettent d'affirmer que 0 est dans l'adhérence du sous-groupe de  $(\mathbb{C}, +)$  engendré par  $\Lambda$ . Ainsi,  $\Delta(\Lambda)$  n'est pas réduit à la suite nulle.

ii) On trouve des caractérisations analogues de la classe de  $\Lambda$  modulo de  $GL(2, \mathbb{R})$  en vue de leur interprétation topologique dans [12].

*Preuve du lemme 4.2.* — On vérifie immédiatement que si  $\Lambda \sim \Lambda'$  alors  $\Delta(\Lambda) = \Delta(\Lambda')$ . Réciproquement, supposons cette égalité vérifiée. Choisissons deux éléments de  $\Lambda$  (resp.  $\Lambda'$ ) — disons  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  (resp.  $\lambda'_1$  et  $\lambda'_2$ ) — qui forment une base du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathbb{C}$ . Il existe une unique application  $g$  de  $GL(2, \mathbb{R})$  telle que :

$$g(\lambda_1) = \lambda'_1 \quad \text{et} \quad g(\lambda_2) = \lambda'_2.$$

Nous savons que, pour tout autre résidu  $\lambda_j$ ,  $j \neq 1, 2$ , l'origine de  $\mathbb{C}$  est point d'accumulation du sous groupe de  $(\mathbb{C}, +)$  engendré par  $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_j\}$ . Il existe une suite de triplets  $(p_k^1, p_k^2, p_k^j)$  de  $\mathbb{Z}^3$  tels que :

$$(1) \quad \lim_k p_k^1 \lambda_1 + p_k^2 \lambda_2 + p_k^j \lambda_j = 0.$$

Ainsi la suite :  $(p_k^1, p_k^2, 0 \dots, p_k^j, \dots, 0)$  de  $\mathbb{Z}^p$  appartient à  $\Delta(\Lambda)$  et donc, par hypothèse, à  $\Delta(\Lambda')$ . D'où,

$$\lim_k p_k^1 \lambda'_1 + p_k^2 \lambda'_2 + p_k^j \lambda'_j = 0.$$

Or d'après (1) on a :

$$\lim_k p_k^1 g(\lambda_1) + p_k^2 g(\lambda_2) + p_k^j g(\lambda_j) = g(0) = 0.$$

Par différence,

$$\lim_k p_k^j [\lambda_j' - g(\lambda_j)] = 0$$

d'où, pour tout  $j$  :  $g(\lambda_j) = \lambda_j'$ . □

*Preuve du théorème 4.1.* — Soit  $\Omega$  la forme fermée :

$$\sum_{j=1}^p \lambda_j \frac{df_j}{f_j}$$

définie sur un voisinage ouvert  $U$  de  $\mathbb{C}^n$ . Fixons un point  $P_0$  de  $U \setminus X$ .

**4.4. DÉFINITION.** — Nous appelons cycle asymptotique en  $P_0$  du feuilletage  $\mathcal{F}_u(\Omega)$  la donnée d'une suite de chemins  $\gamma_k$  d'origine  $P_0$  fixée et d'extrémités  $P_k$  telle que :

- les chemins  $\gamma_k$  sont contenus dans la feuille  $L_0$  passant par  $P_0$ ,
- $\lim_k P_k = P_0$ .

Notons :  $\mathcal{P}_\Omega(P_0)$  l'ensemble des cycles asymptotiques en  $P_0$  du feuilletage  $\mathcal{F}_u(\Omega)$ .

**4.5. LEMME.** — Il existe une application  $\Psi$  surjective de  $\mathcal{P}_\Omega(P_0)$  sur  $\Delta(\Lambda)$ .

*Preuve.* — Choisissons un ouvert contractile  $V$  inclus dans  $U \setminus X$  contenant  $P_0$ . Pour  $k$  suffisamment grand, l'extrémité  $P_k$  de  $\gamma_k$  appartient à  $V$ . Refermons alors  $\gamma_k$  par un chemin  $\delta_k$  reliant  $P_k$  à  $P_0$  dans  $V$ . Associons au cycle asymptotique  $(\gamma_k)$  la suite de  $\mathbb{Z}^p$  :

$$n^j(\gamma_k), \quad j = 1 \dots p$$

des composantes du lacet  $\Gamma_k = \gamma_k^* \delta_k$  dans une base fixée de  $H_1(U \setminus X, \mathbb{Z})$ . L'ouvert  $V$  étant contractile, ces entiers ne dépendent pas du choix de  $\delta_k$ . On a :

$$\int_{\Gamma_k} \Omega = \int_{\gamma_k} \Omega + \int_{\delta_k} \Omega = \int_{\delta_k} \Omega \quad \text{car} \quad \gamma_k \subset L_0,$$

d'où

$$2\pi i \sum_{j=1}^p n_j(\gamma_k) \lambda_j = \int_{\delta_k} \Omega.$$

Le chemin  $\delta_k$  reliant  $P_0$  (fixé) à  $P_k$  dans un ouvert contractile, nous avons :

$$\lim_k \int_{\delta_k} \Omega = 0 \Leftrightarrow \lim_k P_k = P_0$$

d'où :

$$\lim_k \sum_{j=1}^p n_j(\gamma_k) \lambda_j = 0.$$

La suite  $(n^j(\gamma_k))$ ,  $j = 1 \dots p$  appartient donc à  $\Delta(\Lambda)$ . Réciproquement, montrons que tout élément  $(n_k^j, j=1 \dots p)$  de  $\Delta(\Lambda)$  peut être « réalisé » par un cycle asymptotique en  $P_0$ . Il suffit pour cela de traiter la question en dimension deux. Nous savons en effet, d'après un résultat de Hamm-Lê Dung Trang [3], que pour tout plongement générique par rapport à  $X$  :

$$i : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$$

la flèche :

$$i_* : \pi_1[i^{-1}(U) \setminus i^{-1}(X)] \rightarrow \pi_1(U/X)$$

est surjective. On peut extraire d'une base  $(c_1 \dots c_q)$  de  $H_1(i^{-1}(U) \setminus i^{-1}(X), \mathbb{Z})$  une partie dont l'image par  $i$  engendre  $H_1(U \setminus X, \mathbb{Z})$ . Il suffit alors de réaliser un cycle asymptotique  $(\gamma_k)$  dans  $i^{-1}(U) \setminus i^{-1}(X)$  ayant pour composantes  $(n_k^j)$  sur cette partie et zéro sur les autres éléments de base. Soit  $F$  la primitive multiforme de  $\Omega$  dont une détermination s'annule en  $P_0$ . Il s'agit, d'après [6] d'un revêtement de  $U \setminus X$  de groupe structural  $H$  le groupe des périodes de  $\Omega$ . Soit  $V$  un ouvert de trivialisatation (contractile) de ce revêtement, contenant  $P_0$ , et  $F_0$  la section de  $F$  sur  $V$  qui s'annule en  $P_0$  :

$$F_0 : V \rightarrow \mathbb{C}.$$

A l'élément  $(n_k^j)$  de  $\Delta(\Lambda)$ , on associe une suite :

$$h_k = \sum_{j=1}^p n_k^j \lambda_j$$

d'éléments de  $H$ , qui tend vers zéro. L'application  $F_0$  étant continue, il existe, pour  $k$  suffisamment grand, une suite de points  $P_k$  de  $V$  telle que :

$$F_0(P_k) = h_k.$$

Par construction on a :

$$\lim_k P_k = P_0.$$

De plus,  $h_k$  étant un élément du groupe des périodes de  $\Omega$ , les points  $P_0$  et  $P_k$  appartiennent à une même hypersurface de niveau de la fonction multiforme  $F$ . La réduction à la dimension deux nous permet d'appliquer la proposition 2.4 : on peut choisir l'ouvert  $U$  de telle manière que les hypersurfaces de niveau de  $F$  soient connexes. Ainsi nous pouvons relier  $P_0$  et  $P_k$  par un chemin  $\gamma_k$  dans la feuille  $L_0$ . On obtient alors un cycle asymptotique en  $P_0$ . La suite  $n^j(\gamma_k)$  de  $\mathbb{Z}^p$  qui lui est associée est bien  $n_k^j$ . En effet :

$$\int_{\Gamma_k} \Omega = F_0(P_k) - F_0(P_0) = h_k$$

et

$$\int_{\Gamma_k} \Omega = 2i\pi \sum_{j=1}^p n_j(\gamma_k)\lambda_j.$$

En l'absence de relations entre les  $\lambda_j$ , l'écriture de  $h_k$  sous la forme  $2i\pi \sum n_k^j \lambda_j$  est unique, d'où :  $n^j(\gamma_k) = n_k^j$ . □

*Fin de la preuve du théorème 4.1.* — Supposons que les feuilletages  $\mathcal{F}_u(\omega)$  et  $\mathcal{F}_u(\omega')$  soient conjugués par un homéomorphisme  $\Phi$ . Il induit une application bijective

$$\Phi_* : H_1(U \setminus X, \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(U' \setminus X', \mathbb{Z}).$$

En identifiant  $H_1(U \setminus X, \mathbb{Z})$  et  $H_1(U' \setminus X', \mathbb{Z})$  à  $\mathbb{Z}^p$  par un choix de bases,  $\Phi_*$  est caractérisé par une matrice à coefficients entiers. En particulier  $\Phi_*$  laisse globalement invariant  $\Delta(\Lambda)$ . De plus, il est clair que l'homéomorphisme  $\Phi$  envoie tout cycle asymptotique de  $\mathcal{P}_\Omega(P_0)$  sur un cycle asymptotique de  $\mathcal{P}_{\Omega'}(\Phi(P_0))$ , de sorte que le diagramme ci-dessous commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}_\Omega(P_0) & \xrightarrow{\psi} & \Delta(\Lambda) \\ \Phi_* \downarrow & & \downarrow \Phi_* \\ \mathcal{P}_{\Omega'}(\Phi(P_0)) & \xrightarrow{\psi'} & \Delta(\Lambda') \end{array}$$

D'après la surjectivité des applications  $\psi$  et  $\psi'$  (lemme 4.4) :

$$\Phi_*[\psi(\mathcal{P}_\Omega(P_0))] = \Phi_*(\Delta(\Lambda)) = \Delta(\Lambda)$$

et

$$\psi'[\Phi_*(\mathcal{P}_\Omega(P_0))] = \psi'[\mathcal{P}_{\Omega'}(\Phi(P_0))] = \Delta(\Lambda')$$

d'où

$$\Delta(\Lambda) = \Delta(\Lambda'). \quad \square$$

## 5. DÉFORMATION DES SÉPARATRICES D'UN GERME DE FORME LOGARITHMIQUE

Considérons une famille de germes logarithmiques à résidus fixés :  $\omega_z = \omega|_{\mathbb{C} \times \{z\}}$  avec

$$\omega = f_1(x, z) \dots f_p(x, z) \sum_{j=1}^p \lambda_j \frac{df_j(x, z)}{f_j(x, z)}$$

où les  $f_j$  sont des germes à l'origine de  $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$  de fonctions analytiques.

Notons :

- $f_j^z$  la restriction de  $f_j$  à  $\mathbb{C}^n \times \{z\}$
- $v(f_j^z)$  son ordre :  $\inf \{k, j^k(f_j^z) \neq 0\}$
- $P_j^z$  sa partie homogène de plus bas degré.

**5.1. THÉORÈME.** — *Supposons que les séparatrices de  $\omega$  vérifient les conditions suivantes :*

- i) pour tout  $j$ , l'ordre  $v(f_j^z)$  est constant :  $v(f_j^z) = v(f_j^0)$
- ii) chaque  $P_j^0$  est réduit et le lieu des zéros de  $P_j^0$  dans  $\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C})$  est lisse

iii) l'hypersurface  $P_1^0 \dots P_p^0 = 0$  du projectif est à croisements normaux. Alors la famille des feuilletages définis par  $\{\omega_z, z \in (\mathbb{C}, 0)\}$  est topologiquement triviale.

*Preuve.* — Effectuons un éclatement  $E$  de l'axe des  $z$  et plaçons-nous dans une carte  $(x_1, t, z)$  de la variété éclatée  $\tilde{\mathbb{C}}^n \times \mathbb{C}$ , où  $(x_1=0)$  est l'équation locale du diviseur exceptionnel et  $t = (t^2, \dots, t^n)$ . L'hypothèse i — nous permet de considérer les éclatés divisés :

$$\tilde{f}_j = \frac{f_j \circ E}{x_1^{v_j}}, \quad \tilde{P}_j = \frac{P_j \circ E}{x_1^{v_j}}$$

Fixons un point  $m$  de  $\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C}) \times \{0\}$  sur une strate  $S_J$  d'équation :  $\prod_J P_i^0 = 0$ .

Les hypothèses ii) et iii) nous permettent d'affirmer que  $(x_1, \tilde{P}_j^0)$ ,  $j \in J$ , fournit le début d'un système de coordonnées locales sur  $\tilde{\mathbb{C}}^n \times \{0\}$  en  $m$ . Il en est alors de même pour  $(x_1, \tilde{f}_j^0)$ ,  $j \in J$ . Ainsi on peut compléter :  $(x_1, \tilde{f}_j, z)$ ,  $j \in J$ , en un système de coordonnées locales sur un voisinage ouvert  $V$  de  $m$  dans  $\tilde{\mathbb{C}}^n \times \mathbb{C}$ . En multipliant la coordonnée  $x_1$  par une unité convenable, on obtient des coordonnées :  $(X_1, \tilde{f}_j, z)$ ,  $j \in J$ , dans lesquelles la fonction multiforme  $F \circ E = x_1^{y_0} \tilde{f}_1^{x_1} \dots \tilde{f}_p^{x_p}$  s'écrit :

$$X_1^{y_0} \prod_J \tilde{f}_j^{x_j}$$

Le feuilletage éclaté est donc trivial le long de l'axe des  $z$  au voisinage du point  $m$ . En particulier, le champ local  $Z$  sur  $V$  qui s'écrit dans ce système de coordonnées :  $\partial/\partial z$ , est une trivialisaton de ce feuilletage sur  $V$ . Considérons maintenant un recouvrement localement fini du diviseur exceptionnel par des ouverts  $V_\alpha$  de  $\tilde{\mathbb{C}}^n \times \mathbb{C}$ , et munissons la trace de ces ouverts sur le diviseur d'une partition de l'unité. Étendons-là par la fibration de Hopf en des fonctions  $C^\infty$   $\rho_\alpha$  de  $V_\alpha$  dans  $[0,1]$  telles que :

$$\sum_\alpha \rho_\alpha = 1.$$

Soit  $\pi$  la projection de  $\tilde{\mathbb{C}}^n \times \mathbb{C}$  sur l'axe des  $z$ . Sur chaque ouvert  $V_\alpha$  choisissons un champ  $Z_\alpha$  qui trivialise le feuilletage éclaté tel que :

$$\pi_* Z_\alpha = \partial/\partial z.$$

Considérons alors les champs réels :

$$Z'_\alpha = Z_\alpha^R \text{ (« réelifié » de } Z_\alpha)$$

$$Z''_\alpha = iZ_\alpha^R.$$

(1) Ces champs ont des trajectoires de dimension réelle 1 incluses dans les feuilles du feuilletage éclaté. Recollons-les en des champs  $C^\infty$  globaux :

$$Z' = \sum_\alpha \rho_\alpha Z'_\alpha$$

$$Z'' = \sum_\alpha \rho_\alpha Z''_\alpha.$$

Ces champs vérifient :

$$(2) \quad \begin{aligned} \pi_* Z' &= \left( \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \right) (\partial/\partial z)^R = (\partial/\partial z)^R \\ \pi_* Z'' &= \left( \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \right) i(\partial/\partial z)^R = i(\partial/\partial z)^R. \end{aligned}$$

Soit  $\psi'_t, \psi''_t, t$  réel, les flots de ces deux champs. Le difféomorphisme  $C^{\infty}$  :

$$\begin{aligned} \Phi_{z'+iz''} : \tilde{\mathbb{C}}^n \times \{0\} &\rightarrow \tilde{\mathbb{C}}^n \times \mathbb{C} \\ m &\rightarrow \psi''_{z''} \circ \psi'_{z'}(m) \end{aligned}$$

- prend ses valeurs dans  $\tilde{\mathbb{C}}^n \times \{z\}$  d'après (2),
- conjugue les feuilletages définis par  $E^*\omega_0$  et  $E^*\omega_z$  d'après (1),
- laisse stable le diviseur exceptionnel  $\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C}) \times (\mathbb{C}, 0)$ .

Cette dernière condition nous permet, par image directe par  $E$ , d'obtenir la trivialisatation cherchée.  $\square$

Les résultats 3.5, 4.1, et 5.1 se résument alors par le théorème annoncé dans l'introduction de ce travail. De plus, de 5.1 nous déduisons :

**5.2. COROLLAIRE.** — Soit  $\{\omega^s, s \in [0, 1]\}$  une famille de germes de formes logarithmiques génériques à résidus fixés. Cette famille est topologiquement triviale.

*Preuve.* — Il suffit de recouvrir le segment  $[0, 1]$  par des disques de  $\mathbb{C}$  suffisamment petits pour appliquer le théorème 5.1. On conclut alors par compacité de  $[0, 1]$ .  $\square$

**5.3. COROLLAIRE.** — Soit  $\omega = f_1 \dots f_p \sum_{j=1}^p \lambda_j \frac{df_j}{f_j}$  un germe de forme logarithmique générique. Soit  $P_j$  la partie homogène de plus bas degré de  $f_j$ . Alors le feuilletage défini par  $\omega$  est topologiquement conjugué à celui défini par :

$$P_1 \dots P_p \sum_{j=1}^p \lambda_j \frac{dP_j}{P_j}.$$

*Preuve.* — On appliquera le corollaire précédent à  $f_j = P_j + s(f_j - P_j)$ ,  $s \in [0, 1]$ .  $\square$

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] C. CAMACHO, A. LINS NETO, The topology of integrable differentiable forms near a singularity, *Publications Mathématiques de l'IHES*, 55 (1982), 5-35.
- [2] D. CERVEAU, J. F. MATTEI, Formes intégrables holomorphes singulières, *S.M.F., Astérisque*, n° 97 (1982).
- [3] HAMM, LÊ DUNG TRANG, Un théorème de Zariski du type de Lefschetz, *Ann. Sc. Ec. Norm. Sup.*, vol. 6 (1973), 317-366.
- [4] H. HIRONAKA, Introduction to the theory of infinitely near singular points, *Memorias de Mathematica del Instituto Jorge Juan Madrid*, 28 (1974).
- [5] J. F. MATTEI, R. MOUSSU, Holonomie et intégrales premières, *Ann. Sc. Ec. Norm. Sup.*, 13 (1980), 469-523.
- [6] E. PAUL, Étude topologique des formes logarithmiques fermées, *Invent. Math.*, 95 (1989), 395-420.
- [7] E. PAUL, thèse, Toulouse (1987).
- [8] J. PLANTE, Foliations with measure preserving holonomy, *Ann. of Math.*, 102 (1975), 327-361.
- [9] S. SCHWARTZMAN, Asymptotic cycles, *Ann. of Math.*, 66 (1957), 270-284.
- [10] A. SEIDENBERG, Reduction of singularities of the differentiable equation  $A dy = B dx$ , *Amer. J. of Math.*, (1968), 248-269.
- [11] A. VAN DEN ESSEN, Reduction of singularities of the differentiable equation  $A dy + B dx = 0$ , *Lectures notes in math.*, n° 712, 44-59, Springer-Verlag.
- [12] C. CAMACHO, N. H. KUIPER, J. PALIS, The topology of Holomorphic Flows with Singularity, *Publications Mathématiques de l'IHES*, 48 (1978), 5-38.

Manuscrit reçu le 24 octobre 1988,  
révisé le 19 juillet 1989.

Emmanuel PAUL,  
Université Paul Sabatier  
Laboratoire d'Analyse sur les Variétés  
118, route de Narbonne  
31062 Toulouse Cedex.