ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

PASCAL J. THOMAS

Enveloppes polynomiales d'unions de plans réels dans $\mathbb{C}^n$

Annales de l'institut Fourier, tome 40, nº 2 (1990), p. 371-390

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1990__40_2_371_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
40, 2 (1990), 371-390

ENVELOPPES POLYNOMIALES D'UNIONS DE PLANS RÉELS DANS $\mathbb{C}^n$

par Pascal J. THOMAS

0. Introduction et remerciements.

Un sous-espace totalement réel de $\mathbb{C}^n$ est toujours polynomialement convexe. Un exemple de Dan Burns [6] et le travail de Barnet Weinstock [8] ont montré que ce n'est plus vrai pour l'union de deux sous-espaces totalement réels. Ces résultats sont motivés par des propriétés d'approximation (cf. [4]). On montre ici, en réponse à une question de Nessim Sibony, que l'union d'un nombre fini d'exemplaires de $\mathbb{R}^n$ peut avoir $\mathbb{C}^n$ pour enveloppe, et on donne d'autres résultats partiels sur les unions de trois plans dans $\mathbb{C}^2$. Un exemple d'union de trois plans dont l'enveloppe polynomiale est $\mathbb{C}^2$ tout entier est donné dans [7].

Il me serait difficile de remercier suffisamment Nessim Sibony, qui m'a appris ce problème et m'a montré plusieurs résultats et méthodes de base (cf. § 1 en particulier). Je voudrais aussi remercier Herbert Alexander, Bo Berndtsson, John Garnett, Wilhelm Klingenberg Jr., Norman Levenberg, E. Lee Stout et Jan Wiegerinck pour les conversations utiles que nous avons eues, et the University of California at Los Angeles, Chalmers Tekniska Högskola, Universitat Autònoma de Barcelona, pour leur hospitalité envers mon travail ou mes exposés sur le sujet.

Je remercie aussi le referee pour ses remarques judicieuses.

Mots-Clés : Enveloppes polynominales - Sous-espaces totalement réels - Fonctions entières - Formes quadratiques.

Classification A.M.S. : 32 E 20.

1. Notations et résultats antérieurs.

On se placera dans $\mathbb{C}^2$, muni des coordonnées $z = (z_1, z_2) = x + iy$, où $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$. On écrira

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \qquad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

et $\mathbb{R}^2 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 / \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2 = 0\}$.

La transposée d'une matrice M (resp. d'un vecteur x) sera notée ${}^tM$ (resp. ${}^tx$). On considérera que $\mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$ et, sauf mention contraire, on fera usage de sa structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Un $\mathbb{R}$-sous-espace vectoriel V sera dit *totalement réel* si et seulement si $iV \cap V = \{0\}$, où iV est pris au sens de la structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel, c'est-à-dire

$$iV = \{(iz_1, iz_2) : (z_1, z_2) \in V\}.$$

Un sous-espace P tel que $\dim_{\mathbb{R}} P = 2$ (« plan ») est soit totalement réel, soit égal à une droite complexe (i.e. $iP = P$). De façon générale, un n-plan dans $\mathbb{C}^n (\dim_{\mathbb{R}} P = n)$ peut se représenter paramétriquement par

$$P = (M_1 + iM_2)\mathbb{R}^n = \{M_1 x + iM_2 x : x \in \mathbb{R}^n\},$$

où $M_1, M_2 \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ (matrices $n \times n$ à coefficients réels). Cette représentation n'est pas unique : par exemple si $\det M_1 \cdot \det M_2 \neq 0$, alors

$$(M_1 + iM_2)\mathbb{R}^n = (I + iM_2 M_1^{-1})\mathbb{R}^n = (M_1 M_2^{-1} + iI)\mathbb{R}^n.$$

LEMME 0 (B. Weinstock).

a) *$P \cap \mathbb{R}^n = \{0\}$ si et seulement si il existe une unique matrice A telle que*

$$P = (A + iI)\mathbb{R}^n = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^n / x = Ay\}.$$

b) *P est totalement réel si et seulement si* $\det(A^2 + I) \neq 0$, *i.e.* $-1 \notin \operatorname{Sp} A^2$.

c) *Si il existe $S \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $A' = SAS^{-1}$, alors*

$$\mathbb{R}^n \cup (A' + iI)\mathbb{R}^n = S[\mathbb{R}^n \cup (A + iI)\mathbb{R}^n],$$

où nous désignons aussi par S le biholomorphisme linéaire donné par $z' = Sz$.

Ce lemme est démontré dans [8].

DÉFINITION.

a) *Soit* K *un compact de* $\mathbb{C}^n$; *on appelle* enveloppe polynomialement convexe (*ou enveloppe polynomiale*) *de* K *le compact*

$$K^\wedge = \{z \in \mathbb{C}^n : \forall P \text{ polynôme holomorphe, } |P(z)| \leqslant \max_{\zeta \in K} |P(\zeta)|\}$$

b) *Soit* V *un fermé quelconque de* $\mathbb{C}^n$. *On posera*

$$V^\wedge = \bigcup_{R>0} (V \cap \bar{B}(0,R))^\wedge,$$

où $\bar{B}(0,R)$ *est la boule fermée de rayon* R, *centrée en* 0.

On dira que V *est* polynomialement convexe *si et seulement si* $V^\wedge = V$.

THÉORÈME (B. Weinstock, [8]). — *Soit* $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ *telle que* $-1 \notin \operatorname{Sp} A^2$.

a) $\mathbb{R}^2 \cup (A+iI)\, \mathbb{R}^2$ *est polynomialement convexe ssi*

$$\operatorname{Sp} A \cap \{ix, x \in \mathbb{R} \text{ et } |x|>1\} = \varnothing.$$

b) *Dans le cas contraire où* $\operatorname{Sp} A \subset \{ix, x \in \mathbb{R} \text{ et } |x|>1\}$, *ou de façon équivalente* $\operatorname{Tr} A = 0$ *et* $\det A > 1$,

$$(\mathbb{R}^2 \cup (A+iI)\mathbb{R}^2)^\wedge = \mathbb{R}^2 \cup \bigcup_{t\geqslant 1} (tA+iI)\mathbb{R}^2.$$

On notera $V(A) = (I+iA)\mathbb{R}^2 = (A^{-1}+iI)\mathbb{R}^2$ lorsque $\det A \neq 0$; avec cette notation, $V(0) = \mathbb{R}^2$.

COROLLAIRE 1. — *Si* $\operatorname{Tr} A = 0$ *et* $\det A \in]0,1[$, $(\mathbb{R}^2 \cup V(A))^\wedge = \bigcup_{0\leqslant t\leqslant 1} V(tA)$.

Démonstration. — On applique le théorème de Weinstock à A^{-1} en remarquant que $\operatorname{Sp} A \subset i\mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Sp} A^{-1} \subset i\mathbb{R}$.

Remarque. — Weinstock démontre en fait un résultat valable dans $\mathbb{C}^n$ pour tout n. Une étape importante de sa démonstration est de réduire la matrice A en forme de Jordan réelle, puis de travailler sur chacun des blocs obtenus. Les valeurs propres non-réelles correspondent à des blocs de dimension 2, ce qui montre qu'il faut distinguer les cas des dimensions paires et impaires. $\mathbb{C}^2$ est le cas le plus élémentaire à étudier, et permet de passer à la dimension quelconque (cf. § 3). Weinstock ne donne pas exactement la même forme que dans b) pour l'enveloppe ; nous allons donner une démonstration de b) due (indépendamment) à N. Sibony :

Démonstration (Théorème, b). — En faisant un changement de base, on peut (grâce au Lemme 0, c)) se ramener au cas où $A = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$, avec $a > 1$. On considère l'application

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{C}^2 &\to \mathbb{C}^2 \\ (z_1, z_2) &\mapsto (\lambda z_1 + i z_2, z_1^2 + z_2^2), \end{aligned}$$

où $\lambda = -a + (a^2-1)^{1/2}$.

LEMME 2 (N. Sibony). — *Soit Φ une application propre, polynomiale de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^m$. Soit K un compact de $\mathbb{C}^n$ tel que $K = \Phi^{-1}(\Phi(K))$. Alors $K^\wedge = \Phi^{-1}(\Phi(K)^\wedge)$.*

Les démonstrations de tous les lemmes de cet article se trouvent regroupées dans le § 4.

LEMME 3.

a) Φ *est propre,*

b) $\Phi(\mathbb{R}^2) = \Phi[(A+iI)\mathbb{R}^2] = \mathscr{M} := \{(w_1, w_2) \in \mathbb{C}^2 / w_2 = \lambda^{-2}(\operatorname{Re} w_1)^2 + (\operatorname{Im} w_1)^2\} \subset \mathbb{C} \times \mathbb{R}$.

c) $\Phi^{-1}(\mathscr{M}) = \mathbb{R}^2 \cup (A+iI)\mathbb{R}^2$.

Or $\mathscr{M}^\wedge$ est facile à calculer (voir par exemple [3]) : $\mathscr{M} \subset \mathbb{C} \times \mathbb{R}$, donc $\mathscr{M}^\wedge \subset \mathbb{C} \times \mathbb{R}$, et si on considère $\mathscr{M} \cap [\mathbb{C} \times \{c\}]$, avec $c > 0$, on obtient une ellipse, dont l'intérieur doit être inclus dans $\mathscr{M}^\wedge$ d'après le principe du maximum, et dont l'extérieur est hors de l'enveloppe convexe de $\mathscr{M}$, et donc de son enveloppe polynomiale. Donc

$$\mathscr{M}^\wedge = \{(w_1, w_2) \in \mathbb{C}^2 / w_2 \geqslant \lambda^{-2}(\operatorname{Re} w_1)^2 + (\operatorname{Im} w_1)^2\},$$

et la démonstration se conclut par le

LEMME 3 (*suite*).

d) $\Phi^{-1}(\mathscr{M}^\wedge) = \mathbb{R}^2 \cup \bigcup_{t \geqslant 1} (tA + iI)\mathbb{R}^2$.

Le cas général suit aisément de $S[(tA+iI)\mathbb{R}^2] = (tSAS^{-1} + iI)\mathbb{R}^2$.

Remarque. — L'enveloppe polynomiale que l'on trouve est feuilletée par les ensembles $\{z_1^2+z_2^2=c\}$, $c > 0$ (dans le cas où A est sous forme réduite). Ce sont des surfaces de Riemann dont les traces sur l'enveloppe sont isomorphes à des anneaux dont une ellipse frontière se trouve dans $\mathbb{R}^2$ et l'autre dans $(A+iI)\mathbb{R}^2$. Weinstock [8] donne une paramétrisation de ces anneaux.

2. Cas d'enveloppes non-triviales dans $\mathbb{C}^2$.

On souhaite maintenant traiter le cas de N plans totalement réels, $P_1, P_2, \ldots, P_N$ tels que $P_k \cap P_j = \{0\}$, $\forall k \neq j$. La question la plus générale serait de déterminer $\left(\bigcup_{k=1}^{N} P_k\right)^{\wedge}$ explicitement selon les positions des N plans. De façon plus modeste, peut-on en particulier

a) déterminer en général l'enveloppe de trois plans ?

b) trouver une famille finie $P_1, P_2, \ldots, P_N$, telle que $\left(\bigcup_{k=1}^{N} P_k\right)^{\wedge} = \mathbb{C}^2$?

Dans cette section on donnera des réponses très partielles à la question a), et on verra qu'en conséquence la réponse à b) est oui, ce qui contraste vivement avec le résultat obtenu par Sibony et Wong [5] dans le cas des unions de droites complexes : pour que l'enveloppe de l'union d'une famille de droites complexes soit $\mathbb{C}^2$, il faut et il suffit que la capacité dans le projectif de l'ensemble des droites soit positive, ce qui implique en particulier que la famille doit être infinie non-dénombrable.

Des méthodes différentes sont utilisées dans [7] pour montrer que N peut être pris égal à 3, ce qui est bien entendu le plus petit nombre possible.

On considère $P_1 = \mathbb{R}^2$, $P_2 = V(A)$, $P_3 = V(B)$, où A et $B \in GL_2(\mathbb{R})$ (pour que $V(A) \cap \mathbb{R}^2 = V(B) \cap \mathbb{R}^2 = \{0\}$), et sont telles que $-1 \notin \operatorname{Sp} A^2$ et $-1 \notin \operatorname{Sp} B^2$ (pour que les plans soient totalement réels).

LEMME 4. — a) *Si* $V(A) \cap V(B) = \{0\}$, *alors* $(V(A) \cup V(B))^{\wedge} \supsetneq V(A) \cup V(B)$ *si et seulement si* $\det(I+AB) \neq 0$ *et* $\operatorname{Tr} M = 0$ *et* $\det M \in]0,1[$, *où* $M = (A-B)(I+AB)^{-1}$.

b) *Dans ce cas,* $(V(A) \cup V(B))^{\wedge} = \bigcup_{0 \leqslant t \leqslant 1} (M_1(t)+iM_2(t))\mathbb{R}^2$, *où* M_1 *et*

M_2 sont des matrices dépendant continûment de t, avec $M_2(0)M_1^{-1}(0) = A$, $M_2(1)M_1^{-1}(1) = B$.

c) Si $V(A) \cap V(B) \neq \{0\}$, alors $V(A) \cup V(B)$ est polynomialement convexe.

Désormais, nous nous intéresserons aux cas où $(\mathbb{R}^2 \cup V(A))^\wedge$ n'est pas triviale. On veut obtenir des points dans $(\mathbb{R}^2 \cup V(A) \cup V(B))^\wedge$ par itération du résultat pour deux plans.

LEMME 5. — *Si $(\mathbb{R}^2 \cup V(A))^\wedge \supsetneqq \mathbb{R}^2 \cup V(A)$, et qu'il existe $t \in \mathbb{R}$, $t^2 \det A \neq 1$, tel que $(V(tA) \cap V(B))^\wedge \supsetneqq V(tA) \cup V(B)$, alors* $\operatorname{Tr} B = 0$ *(i.e.* $\operatorname{Sp} B^2 \subset \mathbb{R}_-$).

Dans les cas qui nous intéresseront, t et $\det A$ sont dans $]0,1[$, d'où $t^2 \det A < 1$.

Désormais on considère A et B tels que $\operatorname{Tr} A = \operatorname{Tr} B = 0$. Nous allons donner une base plus commode du sous-espace vectoriel de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ engendré par A et B.

LEMME 6. — *Si A et $B \in GL_2(\mathbb{R})$, sont linéairement indépendantes, et vérifient* $\operatorname{Tr} A = \operatorname{Tr} B = 0$ *et* $\max(\det A, \det B) > 0$, *alors on peut écrire A et B comme combinaison linéaire de deux matrices nilpotentes S_1 et S_2. Par biholomorphisme linéaire de $\mathbb{C}^2$, on peut se ramener au cas*

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Désormais nous écrirons $A = a_1S_1 + a_2S_2$, $B = b_1S_1 + b_2S_2$, $\det A = -a_1a_2$, $\det B = -b_1b_2$. On supposera toujours que A et B sont linéairement indépendantes.

LEMME 7. — *Si $-a_1a_2$ et $-b_1b_2 \in]0,1[$, alors $(V(A) \cup V(B))^\wedge \supsetneqq V(A) \cup V(B)$ si et seulement si $(b_1 - a_1)(b_2 - a_2) < 0$.*

Dans ce cas, $(V(A) \cup V(B))^\wedge = \bigcup_{0 \leqslant \tau \leqslant 1} V(M_\tau)$, où

$$M_\tau = m_1(\tau)S_1 + m_2(\tau)S_2,$$

avec

$$m_1(\tau) = \frac{(1 + a_2b_1)a_1 + (b_1 - a_1)\tau}{1 + a_2b_1 - (b_1 - a_1)a_2\tau} = \frac{(1-\tau)(a_1 - b_1) + b_1(1 + a_1a_2)}{(1-\tau)a_2(b_1 - a_1) + (1 + a_1a_2)},$$

$$m_2(\tau) = \frac{(1 + a_1b_2)a_2 + (b_2 - a_2)\tau}{1 + a_1b_2 - (b_2 - a_2)a_1\tau} = \frac{(1-\tau)(a_2 - b_2) + b_2(1 + a_1a_2)}{(1-\tau)a_1(b_2 - a_2) + (1 + a_1a_2)},$$

Remarques. — Dans le plan engendré par S_1 et S_2, M_τ décrit un arc d'hyperbole borné par A et B. Si on part de $(a_1, a_2) \in \{\xi_1 > 0, \xi_2 < 0, |\xi_1\xi_2| < 1\}$ et $(b_1, b_2) \in \{\xi_1 < 0, \xi_2 > 0, |\xi_1\xi_2| < 1\}$, certains des points de cet arc appartiendront à $\{\xi_1\xi_2 \geqslant 0\}$, et comme le cas $m_1(\tau) = m_2(\tau) = 0$ est exclu (cela impliquerait que A et B ne sont pas indépendantes), il y aura des valeurs τ telles que $m_1(\tau)m_2(\tau) > 0$, autrement dit $\det M_\tau < 0$ et $\mathbb{R}^2 \cup V(M_\tau)$ est polynomialement convexe.

Toutefois, on peut obtenir par itération un grand nombre de plans réels contenus dans l'enveloppe :

LEMME 8. — *Si A et B satisfont* $\operatorname{Tr} A = \operatorname{Tr} B = 0$, $\det A$, $\det B$ *et* $\det(A-B)\det(I+AB)^{-1} \in]0,1[$, *alors* $(\mathbb{R}^2 \cup V(A) \cup V(B))^\wedge \supseteq \widetilde{\mathscr{C}} := \bigcup_{M \in \mathscr{C}} V(M)$, *avec* $\mathscr{C} := \{\xi_1 S_1 + \xi_2 S_2$ t.q. (ξ_1, ξ_2) *soit contenu dans la portion bornée du plan délimitée par les segments* $[(0,0);(a_1,a_2)]$ *et* $[(0,0);(b_1,b_2)]$, *et l'arc d'hyperbole* $(m_1(\tau), m_2(\tau))_{0 \leqslant \tau \leqslant 1}\}$.

THÉORÈME A. — *Si A et B sont linéairement indépendantes et que*

$$(\mathbb{R}^2 \cup V(A))^\wedge \supsetneqq \mathbb{R}^2 \cup V(A),$$

$$(\mathbb{R}^2 \cup V(B))^\wedge \supsetneqq \mathbb{R}^2 \cup V(B), \qquad et \qquad (V(A) \cup V(B))^\wedge \supsetneqq V(A) \cup V(B),$$

alors $(\mathbb{R}^2 \cup V(A) \cup V(B))^\wedge$ *contient un cône ouvert non vide de* $\mathbb{C}^2$.

Remarque. — Les hypothèses du Théorème sont équivalentes à : $\mathbb{R}^2 \cap V(A) = \mathbb{R}^2 \cap V(B) = V(A) \cap V(B) = \{0\}$, $\operatorname{Tr} A = \operatorname{Tr} B = 0$, $\det A$, $\det B \in]0,1[$, $\det(I+AB) \neq 0$ et $\det(A-B)\det(I+AB)^{-1} \in]0,1[$.

COROLLAIRE 9. — *Il existe une famille finie de plans réels $P_1, P_2, \ldots P_N$ telle que*

$$\left(\bigcup_{k=1}^{N} P_k\right)^\wedge = \mathbb{C}^2.$$

Démonstration du Corollaire. — $\mathscr{C} \cap S^3$ (où S^3 est la sphère-unité de $\mathbb{C}^2$) est un ouvert de S^3, donc un nombre fini d'images de cet ensemble par des rotations $I = \rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_k$, suffira à couvrir le compact S^3. En prenant $(\rho_j(\mathbb{R}^2), \rho_j(V(A)), \rho_j(V(B)))_{0 \leqslant j \leqslant k}$, on obtient les $N = 3k$ plans demandés.

Démonstration du Théorème. — Le Théorème de Weinstock et les Lemmes 4 et 7 montrent que les hypothèses du Lemme 8 sont vérifiées.

Il suffit de voir que $\tilde{\mathscr{C}}$ contient un ouvert non vide ; or $\mathscr{C}^0 \neq \varnothing$ (où l'intérieur est pris dans $\mathbb{R}^2$). L'application Ψ obtenue en paramétrisant chaque plan réel $V(M)$ est ouverte sur $\{x_1x_2 \neq 0\} \times \mathbb{R}^2$:

$$\Psi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}^2$$
$$(x_1, x_2), (\xi_1, \xi_2) \mapsto (I + i(\xi_1 S_1 + \xi_2 S_2)) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

En effet,

$$J_\Psi = \det \begin{pmatrix} I & \begin{pmatrix} 0 & \xi_1 \\ \xi_2 & 0 \end{pmatrix} \\ 0 & \begin{pmatrix} 0 & x_2 \\ x_1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = -x_1x_2.$$

Donc $\Psi(\{x_1x_2 \neq 0\} \times \mathscr{C}^0)$ est ouvert, contenu dans $\tilde{\mathscr{C}}$ car $\Psi(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2) \in V(\xi_1 S_1 + \xi_2 S_2)$ pour tout (x_1, x_2), et c'est un cône par homogénéité en x.

La situation du Corollaire 9 est tout à fait exceptionnelle, comme le souligne la proposition suivante :

PROPOSITION 10. — *Pour tout N, il existe une famille finie de plans réels $P_1, P_2, \ldots P_N$ de $\mathbb{C}^2$ telle que*

(i) $P_k \cap P_j = \{0\}, \forall k \neq j,$

et

(ii) $\bigcup_{k=1}^{N} P_k$ *est polynomialement convexe.*

Démonstration. — On va se servir d'un lemme essentiel par ailleurs dans les démonstrations du Théorème de Weinstock :

LEMME (E. Kallin [2]). — *Soient K_1 et K_2 deux compacts de $\mathbb{C}^n$, $K = K_1 \cup K_2$. On suppose qu'il existe un polynôme holomorphe F tel que $F(K_1)$ et $F(K_2)$ soient contenus dans des secteurs angulaires disjoints (sauf en 0), et que $F^{-1}(0) \cap (K_1^\wedge \cup K_2^\wedge)$ soit polynomialement convexe. Alors $K^\wedge = K_1^\wedge \cup K_2^\wedge$.*

Les droites réelles $d_k = \{z = \rho e^{i(k+1/3)2\pi/N}, \rho \in \mathbb{R}\}$ sont dans des secteurs disjoints sauf en 0. Le sous-espace $\{(z_1, z_2) : z_1 \in d_k\}$ est de dimension réelle 3 ; on y sélectionne un plan totalement réel P_k tel que $P_k \cap \{z_1 = 0\} = \{0\}$. Alors $P_k \cap P_j \subset \{(z_1, z_2) : z_1 \in d_k \cap d_j\} = \{z_1 = 0\}$, donc $P_k \cap P_j = \{0\}$ pour $k \neq j$. On montre que $\bigcup_{k=1}^{N} P_k$ est polynomialement convexe par récurrence sur k en appliquant le Lemme de Kallin avec $F(z) = z_1$ dans chaque cas.

Malgré son caractère explicite, le Lemme 8 ne suffit pas à déterminer l'enveloppe des plans concernés de manière explicite. En particulier, on pourrait se demander si ce cas suffit à obtenir $\mathbb{C}^2$ tout entier comme enveloppe. Cette éventualité est exclue par le :

THÉORÈME B. — *Sous les hypothèses du Théorème A*, $(\mathbb{R}^2 \cup V(A) \cup V(B))^\wedge \subsetneqq \mathbb{C}^2$.

Démonstration. — Si $F(z)$ est un polynôme holomorphe non constant, $\{\mathrm{Re}\, F \geqslant 0\}$ est toujours différent de $\mathbb{C}^2$, et polynomialement convexe. Il suffit de montrer que les trois plans dont on part sont inclus dans un ensemble de ce type. La démonstration repose sur le :

LEMME 11. — *Sous les hypothèses du Lemme* 8, *il existe un polynôme holomorphe homogène de degré* 2, F, *tel que* $\mathrm{Re}\, F|_{\mathbb{R}^2}$, $\mathrm{Re}\, F|_{V(A)}$, $\mathrm{Re}\, F|_{V(B)}$ *soient des formes quadratiques semi-définies positives.*

Remarques. — Une interprétation intuitive du Théorème B est que, comme $\mathbb{R}^2 \cup V(A)$ engendre une enveloppe quand $V(A)$ est assez proche de $\mathbb{R}^2$ (i.e. A assez « petite » : Corollaire 1), les hypothèses prises imposent aux trois plans d'être assez « groupés » pour être logés dans un même cône polynomialement convexe.

D'autre part, chaque fois que l'on peut trouver un polynôme holomorphe dont les restrictions à chacun des trois plans sont des formes quadratiques définies (positive ou négative selon le cas), soit on peut affirmer que l'enveloppe ne couvre pas tout $\mathbb{C}^2$ si les trois signes sont les mêmes, soit en appliquant une version du Lemme de Kallin on peut séparer celui des plans, disons P_1, qui donne un signe différent des deux autres et en déduire $(P_1 \cup P_2 \cup P_3)^\wedge = P_1 \cup (P_2 \cup P_2)^\wedge$ (puisqu'un plan isolé est polynomialement convexe) et calculer entièrement l'enveloppe (différente de $\mathbb{C}^2$) à l'aide du Théorème de Weinstock. Les résultats de [7] montrent qu'un tel polynôme F n'existe pas toujours.

Questions ouvertes.

Trouver une méthode générale pour déterminer si $(P_1 \cup P_2 \cup P_3)^\wedge = \mathbb{C}^2$, les P_j étant des plans réels se coupant seulement en 0.

Peut-on écrire l'enveloppe sous la forme d'une intersection d'ensembles de la forme $\{\mathrm{Re}\, F \geqslant 0\}$, où F parcourt l'ensemble de tous les polynômes holomorphes homogènes (éventuellement d'un certain degré) tels que $\mathrm{Re}\, F|_{P_j} \geqslant 0$, $1 \leqslant j \leqslant 3$?

Peut-on, faute de résultats explicites, obtenir un théorème de semi-continuité : dans un voisinage (à définir) d'une situation polynomialement convexe, l'union de trois plans demeurera-t-elle polynomialement convexe ? (Forstneric a prouvé un résultat dans le même esprit dans [1]).

3. Le cas de la dimension quelconque.

THÉORÈME C. — *Pour tout $n \geqslant 2$, il existe une famille finie de variétés linéaires totalement réelles maximales $P_1, P_2, \ldots, P_N$, telles que* $\left(\bigcup_{k=1}^{N} P_k\right)^\wedge = \mathbb{C}^n$.

Démonstration. — Nous connaissons déjà le résultat pour $n = 2$, d'après le corollaire du Théorème A. Procédons par récurrence et supposons le résultat vrai pour $n - 1$.

PROPOSITION 12. — *Pour tout triplet d'hyperplans réels H_1, H_2, H_3, ($\dim_{\mathbb{R}} H_j = 2n-1$) tels que $\dim_{\mathbb{R}} H_i \cap H_j = 2n - 2$ pour $i \neq j$, et $\dim_{\mathbb{R}} H_1 \cap H_2 \cap H_3 = 2n - 3$, alors $\left(\bigcup_{j=1}^{3} H_j\right)^\wedge$ contient un cône ouvert de $\mathbb{C}^n$.*

Démonstration. — Considérons des coordonnées telles que $\mathbb{C}(0, \ldots, 0, 1)$ ne soit contenue dans aucun H_i, ce qui est toujours possible car chaque H_i ne contient qu'un hyperplan complexe. Alors pour tout i, pour tout $z' \in \mathbb{C}^{n-1} \times \{0\}$, posons $D_i(z') = (\{z'\} \times \mathbb{C}) \cap H_i$; $\dim_{\mathbb{R}} D_i = 1$, pour $1 \leqslant i \leqslant 3$. Les trois droites réelles D_i, $1 \leqslant i \leqslant 3$, ne sont pas concourantes, sauf si $z' \in A = \pi(H_1 \cap H_2 \cap H_3)$, où π est la projection orthogonale sur $\mathbb{C}^{n-1} \times \{0\}$. D'après l'hypothèse, A est un ensemble de dimension inférieure ou égale à $2n - 3$. Pour z' en dehors de A, l'intérieur $T_{z'}$ d'un triangle non-vide se trouve dans l'enveloppe polynomiale de $\bigcup_{j=1}^{3} D_j$, en appliquant le principe du maximum dans la droite complexe $\{z'\} \times \mathbb{C}$. Alors $\bigcup_{z' \notin A} T_{z'}$ est un ensemble ouvert de $\mathbb{C}^n$, conique par homogénéité, contenu dans $\left(\bigcup_{j=1}^{3} H_j\right)^\wedge$. c.q.f.d.

De la Proposition 12 on déduit immédiatement qu'il existe un nombre fini d'hyperplans réels H_j, $1 \leqslant j \leqslant p$, tels que $\left(\bigcup_{j=1}^{p} H_j\right)^\wedge = \mathbb{C}^n$. Reste à obtenir ces hyperplans comme enveloppes polynomiales de variétés linéaires totalement réelles maximales.

Or chaque H_j contient nécessairement un sous-espace vectoriel complexe de dimension $n-1$, donc à un biholomorphisme linéaire près on peut écrire $H_j = \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{R}$. En utilisant l'hypothèse de récurrence, on peut trouver des variétés linéaires totalement réelles de dimension $n-1$, $P_{j,k}^{(n-1)}$, $1 \leqslant k \leqslant N_{n-1}$, telles que $\left(\bigcup_{k=1}^{N_{n-1}} P_{j,k}^{(n-1)}\right)^\wedge = \mathbb{C}^{n-1}$. Posons $P_{j,k}^{(n)} = P_{j,k}^{(n-1)} \times \mathbb{R}$.

Soit $z = (z', x_n) \in \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{R}$; $(\mathbb{C}^{n-1} \times \{x_n\}) \cap P_{j,k}^{(n)} = P_{j,k}^{(n-1)} \times \{x_n\}$, donc $\mathbb{C}^{n-1} \times \{x_n\} = \left[\bigcup_{k=1}^{N_{n-1}} (P_{j,k}^{(n-1)} \times \{x_n\})\right]^\wedge \subset \left(\bigcup_{k=1}^{N_{n-1}} P_{j,k}^{(n)}\right)^\wedge$. En faisant prendre à x_n toutes les valeurs réelles, on voit que $H_j = \left(\bigcup_{k=1}^{N_{n-1}} P_{j,k}^{(n)}\right)^\wedge$, et par conséquent $\mathbb{C}^n = \left(\bigcup_{jk} P_{j,k}^{(n)}\right)^\wedge$. c.q.f.d.

Une estimation sur le nombre de n-plans nécessaires pour obtenir l'espace entier comme enveloppe polynomiale est donnée dans [7].

Démonstration des Lemmes.

Démonstration du Lemme 2. — Il est clair sans hypothèses sur K que $K^\wedge \subset \Phi^{-1}(\Phi(K)^\wedge)$.

Réciproquement, supposons que $\Phi(z) \in \Phi(K)^\wedge$, et soit ψ une fonction plurisousharmonique sur $\mathbb{C}^n$. Posons $\tilde{\psi}(w) = \max\{\psi(\zeta) : \zeta \in \Phi^{-1}(w)\}$. Comme Φ est propre et polynomiale, le maximum n'est pris que sur un nombre fini de points, obtenus par des applications localement analytiques, et donc $\tilde{\psi}$ est aussi plurisousharmonique sur $\mathbb{C}^m$. D'où

$\psi(z) \leqslant \tilde{\psi}(\Phi(z)) \leqslant \max_{\Phi(K)}\tilde{\psi}(w) = \max_{\Phi^{-1}(\Phi(K))}\psi(\zeta) = \max_K \psi(\zeta)$. c.q.f.d.

Herbert Alexander m'a communiqué une preuve élémentaire de ce lemme ne faisant pas usage de fonctions plurisousharmoniques.

Démonstration du Lemme 3. — *a*) Si $\Phi(z) \in K$, alors $|\lambda z_1 + iz_2| \leqslant C_1$ et $|z_1^2 + z_2^2| \leqslant C_2$, d'où

$$|z_1^2| \leqslant C_2 + |z_2^2| \leqslant C_2 + (C_1 + \lambda|z_1|)^2 ;$$

or $\lambda^2 = 2a^2 - 1 - 2a(a^2-1)^{1/2} < 1$ pour tout a, et donc $|z_1|$ est borné, et $|z_2|$ de même, ce qui implique que $\Phi^{-1}(K)$ est fermé et borné, donc Φ est propre.

b) Clairement,

$$\Phi(\mathbb{R}^2) = \{(w_1, w_2) \in \mathbb{C}^2/w_2 = \lambda^{-2}(\mathrm{Re}\, w_1)^2 + (\mathrm{Im}\, w_1)^2\} =: \mathcal{M} \subset \mathbb{C} \times \mathbb{R}.$$

Sur $(A+iI)\mathbb{R}^2$, $z = Ay + iy$,

$$w_1 = \lambda z_1 + iz_2 = \lambda(-ay_2 + iy_1) + i(ay_1 + iy_2) = (a^2-1)^{1/2}(\lambda y_2 + iy_1),$$
$$w_2 = z_1^2 + z_2^2 = (a^2-1)(y_1^2 - y_2^2) = \lambda^{-2}(\mathrm{Re}\, w_1)^2 + (\mathrm{Im}\, w_1)^2$$

à nouveau, et tous les points de $\mathcal{M}$ sont atteints en faisant varier y_1 et y_2, donc $\mathcal{M} = \Phi((A+iI)\mathbb{R}^2)$.

c) et *d*) Commençons par *d*). Remarquons que si $z \in \Phi^{-1}(\mathcal{M}^\wedge)$, $z_1^2 + z_2^2 \in \mathbb{R}$, donc

$$\text{(I)} \quad x_1 y_1 + x_2 y_2 = 0.$$

L'inéquation sur les parties réelles donne

$$\text{(R)} \quad x_1^2 - y_1^2 + x_2^2 - y_2^2 \geqslant (x_1 - \lambda^{-1}y_2)^2 + (\lambda y_1 + x_2)^2,$$

ce qui simplifie en

$$0 \geqslant (y_1^2 + \lambda^{-2}y_2^2)(\lambda^2+1) - 2\lambda^{-1}x_1y_2 + 2\lambda x_2 y_1.$$

Si $y_2 = 0$, alors d'après (I), soit $y_1 = 0$ et on retrouve $\mathbb{R}^2$, soit $y_1 \neq 0$ et $x_1 = 0$, et (R) donne

$$0 \geqslant (\lambda^2+1)y_1^2 + 2\lambda x_2 y_1, \qquad \text{soit (comme } \lambda < 0)$$
$$(x_2 y_1)/(y_1^2) \geqslant (\lambda^2+1)/(-2\lambda) = a.$$

Posons $t = x_2(ay_1)^{-1} \in [1, +\infty[$. On a trivialement $x_1 = -aty_2(=0)$, d'où $x = tAy$, avec $t \geqslant 1$, donc $z = x + iy \in (tA+iI)\mathbb{R}^2$.

Si $y_2 \neq 0$, (I) donne $x_2 = -x_1y_1y_2^{-1}$ et (R) devient

$$0 \geqslant (\lambda^2 - 2\lambda x_1 y_2^{-1} + 1)(y_1^2 + \lambda^{-2}y_2^2),$$

d'où $x_1y_2^{-1} \leqslant (\lambda^2+1)/(-2\lambda) = -a$. Posons $t = x_1(-ay_2)^{-1} \in [1, +\infty[$. Alors $x_2 = aty_1$ et on retrouve $x = tAy$.

Pour démontrer *c*), on remplace les inégalités par des égalités dans (R) et on retrouve soit $\mathbb{R}^2$ soit le cas $t = 1$, donc $\mathbb{R}^2 \cup (A+iI)\mathbb{R}^2$.

c.q.f.d.

Démonstration du Lemme 4. — *a*) On considère le biholomorphisme linéaire de $\mathbb{C}^2$ donné par $Q = I - iA(Q \in GL_2(\mathbb{C})$ car $-1 \notin \operatorname{Sp} A^2)$. Alors $Q(V(A)) = (I+A^2)\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2$, car $I + A^2 \in GL_2(\mathbb{R})$, et $Q(V(B)) = ((I+AB) + i(B-A))\mathbb{R}^2 = (I+i(B-A)(I+AB)^{-1})\mathbb{R}^2$ si $(I+AB) \in GL_2(\mathbb{R})$, ce qui démontre *a*) dans ce cas.

Si $(I+AB)$ est singulière et $(B-A) \in GL_2(\mathbb{R})$, alors $\det(I+AB)(B-A)^{-1} = 0$ et le théorème de Weinstock montre que l'union est polynomialement convexe. Or $\det(B-A) = 0$ est impossible car alors on aurait $Q(V(B)) \cap \mathbb{R}^2 \neq \{0\}$, et comme Q est bijective $V(B) \cap V(A) \neq \{0\}$, en violation des hypothèses.

b) D'après le Corollaire 1,

$$[\mathbb{R}^2 \cup Q(V(B))]^\wedge = \bigcup_{0 \leqslant t \leqslant 1} (I+it(B-A)(I+AB)^{-1})\mathbb{R}^2,$$

et

$$\begin{aligned}(V(A) \cup V(B))^\wedge &= Q^{-1}[\mathbb{R}^2 \cup Q(V(B))]^\wedge \\ &= (I+A^2)^{-1}(I+iA)(I+it(B-A)(I+AB)^{-1})\mathbb{R}^2\,;\end{aligned}$$

on obtient $M_1(t)$ et $M_2(t)$ (qui ne sont pas uniques) en regroupant parties réelles et imaginaires.

c) L'hypothèse implique que $\dim \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}(V(A) \cup V(B)) \leqslant 3$. Au prix d'un changement de coordonnées, on peut supposer que

$$V(A) \cup V(B) \subset \mathbb{C} \times \mathbb{R},$$

donc

$$(V(A) \cup V(B))^\wedge \subset \mathbb{C} \times \mathbb{R}.$$

Soit $R > 0$, on pose $K = (V(A) \cup V(B)) \cap \bar{B}(0,R)$. Il suffira de montrer que $(z_0, t_0) \notin K^\wedge$, pour tout $(z_0, t_0) \in (\mathbb{C} \times \mathbb{R}) \cap \bar{B}(0,R)$, $(z_0, t_0) \notin K$. Il suit de la dernière condition qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$, $(z_0, t) \notin K$.

Soit $C_t = \{z \in \mathbb{C} : (z,t) \in K\}$ (c'est l'union de deux segments) et $C = \cup \{C_t : t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]\}$. C est l'union de deux compacts convexes $C^A = \{z \in \mathbb{C} : \exists t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] tq (z,t) \in V(A) \cap \bar{B}(0,R)\}$ (projection sur $\mathbb{C} \times \{0\}$ du convexe $V(A) \cap (\mathbb{C} \times [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]) \cap \bar{B}(0,R))$ et C^B défini de façon analogue. Donc les (une ou deux) composantes connexes de C sont simplement connexes, et le complémentaire dans $\mathbb{C}$ de C est connexe. D'après le théorème de Runge, il existe un polynôme f tel que $f(z_0) = 1$ et $\max_{\zeta \in C} |f(\zeta)| \leqslant 1/2$.

D'autre part il existe $\alpha > 0$ tel que $e^{-\alpha\varepsilon^2} < 1/(2 \max_{\zeta \in \bar{B}(0,R)} |f(\zeta)|)$. Alors $F(z,w) = e^{-\alpha(w-t_0)^2} f(z)$ fournit une fonction telle que $F(z_0, t_0) = 1$ et $\max_K |F(z,w)| \leqslant 1/2$. c.q.f.d.

Démonstration du Lemme 5. — La condition de non-convexité implique d'après le Lemme 4 que $\mathrm{Tr}\,(tA - B)(I + tAB)^{-1} = 0$ ou, de façon équivalente pour des matrices 2×2, $\mathrm{Tr}\,(I + tAB)(tA - B)^{-1} = 0$. Posons $B = B_0 + bI$, avec $b = \mathrm{Tr}\,B/2$, $\mathrm{Tr}\,B_0 = 0$. Supposons $b \neq 0$; alors $(tA - B)^{-1} = -b^{-1}(I + b^{-1}(B_0 - tA))^{-1}$. Or si $C \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $\mathrm{Tr}\,C = 0$ et $C^2 \neq I$, alors $(I + C)^{-1} = \lambda(I - C)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Donc la condition nécessaire devient

$$\mathrm{Tr}\,(I + tbA + tAB_0)(I - b^{-1}(B_0 - tA)) = 0,$$

autrement dit

$$\mathrm{Tr}\,(I + t(b + b^{-1})A - b^{-1}B_0 + t^2A^2 - tb^{-1}AB_0^2 + t^2b^{-1}AB_0A) = 0.$$

Mais $\mathrm{Tr}\,(AB_0^2) = -(\det B_0)\,\mathrm{Tr}\,(A) = 0$, et $\mathrm{Tr}\,(AB_0A) = \mathrm{Tr}\,(B_0A^2) = -(\det A)\,\mathrm{Tr}\,(B_0) = 0$, donc il reste $2(1 - t^2 \det A) = 0$, ce qui est exclu : on doit donc avoir $b = 0$.

Remarque. — Si $b = 0$, alors $\mathrm{Tr}\,(tA - B) = 0$, et donc $(tA - B)^{-1} = \lambda(tA - B)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Or $(I + tAB)(tA - B) = tA - B + tABA - tAB^2$, et comme précédemment (ici $B = B_0$) on voit que chacun des termes est de trace nulle.

Démonstration du Lemme 6. — Si $\mathrm{Tr}\,M = 0$, alors $M^2 = 0$ ssi $\det M = 0$. Le déterminant induit une forme quadratique sur $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$;

la signature de sa restriction à $\{M \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \operatorname{Tr} M = 0\}$ est $(1,2,0)$. Donc la signature de sa restriction à $\operatorname{Vect}(A,B)$ doit être $(1,1)$ (puisqu'au moins une matrice a un déterminant positif), donc il existe deux matrices isotropes, donc nilpotentes, (S'_1, S'_2) qui forment une base de $\operatorname{Vect}(A,B)$.

On a $\operatorname{Im} S'_i = \operatorname{Ker} S'_i$, $i \in \{1,2\}$. Si on avait $\operatorname{Im} S'_1 = \operatorname{Im} S'_2$, on aurait $S'_1 = \lambda S'_2$, ce qui est exclu. Soit $\{v_i\}$ une base de $\operatorname{Im} S'_i$, $i \in \{1,2\}$. Alors $S'_1(v_2) = \lambda_1 v_1$, $S'_2(v_1) = \lambda_2 v_2$, ou chaque λ_i est différent de 0, sinon la matrice S'_i serait nulle. On peut donc remplacer S'_i par $S_i := \lambda_i^{-1} S'_i$ et dans la base $\{v_1, v_2\}$ de $\mathbb{R}^2$, S_1 (resp. S_2) prend la forme $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \left(\text{resp. } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$.

Démonstration du Lemme 7. — D'après le Lemme 4, il faut calculer

$$M = ((a_1 - b_1)S_1 + (a_2 - b_2)S_2)(I + a_1 b_2 S_1 S_2 + a_2 b_1 S_2 S_1)^{-1}.$$

Notons que

$$S_1 S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad S_2 S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad I = S_1 S_2 + S_2 S_1,$$

et donc

$$\begin{aligned} M &= ((a_1 - b_1)S_1 + (a_2 - b_2)S_2)((1 + a_1 b_2)^{-1} S_1 S_2 + (1 + a_2 b_1)^{-1} S_2 S_1) \\ &= (a_1 - b_1)(1 + a_2 b_1)^{-1} S_1 + (a_2 - b_2)(1 + a_1 b_2)^{-1} S_2, \end{aligned}$$

car $S_1 S_2 S_1 = S_1$, $S_2 S_1 S_2 = S_2$.

On en déduit immédiatement que $\operatorname{Tr} M = 0$, et

$$\det M = \frac{-(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)}{(1 + a_1 b_2)(1 + a_2 b_1)}.$$

$$\begin{aligned} \det M \in]0,1[&\Leftrightarrow \frac{(1 + a_1 b_2)(1 + a_2 b_1)}{-(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)} - 1 > 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{(1 + a_1 a_2)(1 + b_1 b_2)}{-(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)} > 0. \end{aligned}$$

Le numérateur étant positif par hypothèse, on trouve la condition annoncée.

Dans le cas d'une enveloppe non-triviale, d'après la démonstration du Lemme 4, il faut calculer

$$\begin{aligned}(I+A^2)^{-1}(I+iA)(I+i\tau M)\mathbb{R}^2 &= (I+A^2)^{-1}(I-\tau AM+i(A+\tau M))\mathbb{R}^2\\ &= [I+i(I+A^2)^{-1}(A+\tau M)(I-\tau AM)^{-1}(I+A^2)]\mathbb{R}^2.\end{aligned}$$

Or $A^2 = a_1a_2I$, $(I+A^2)$ et $(I+A^2)^{-1}$ sont des homothéties et se simplifient donc,

$$\begin{aligned}AM &= a_2(a_1-b_1)(1+a_2b_1)^{-1}S_2S_1 + a_1(a_2-b_2)(1+a_1b_2)^{-1}S_1S_2,\\ (I-\tau AM)^{-1} &= [1-\tau a_1(a_2-b_2)(1+a_1b_2)^{-1}]^{-1}S_1S_2\\ &\quad + [1-\tau a_2(a_1-b_1)(1+a_2b_1)^{-1}]^{-1}S_2S_1,\\ A + \tau M &= [a_2+\tau(a_1-b_1)(1+a_2b_1)^{-1}]S_1 + [a_1+\tau(a_2-b_2)(1+a_1b_2)^{-1}]S_2,\end{aligned}$$

et en posant $M_\tau = (A+\tau M)(I-\tau AM)^{-1}$, on obtient le résultat annoncé.

Démonstration du Lemme 8. — D'après le Corollaire 1, $V(\theta A) \subset (\mathbb{R}^2 \cup V(A))^\wedge$ pour $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, et de même pour B. Dans le plan des ξ, l'union des deux segments et de l'arc d'hyperbole forme un circuit de Jordan γ_1 : en effet l'intersection d'une droite quelconque passant par l'origine, $\lambda\xi_1 + \mu\xi_2 = 0$, avec l'arc d'hyperbole, conduit à une équation du second degré en τ dont le produit des racines est égal à $(-\lambda a_1 - \mu a_2)/(\lambda a_1 + \mu a_2) = -1$; donc il ne peut y avoir qu'une racine au plus dans l'intervalle $[0,1]$, et le segment $[(0,0);(a_1,a_2)]$ (resp. $[(0,0);(b_1,b_2)]$) n'intersecte l'arc d'hyperbole qu'en (a_1,a_2) (resp. (b_1,b_2)).

Si on remplace A et B par θA et θB, avec $\theta \in]0,1]$, le résultat du Lemme 7 s'applique à nouveau, et on obtient des circuits γ_θ qui varient continûment et fournissent une homotopie entre γ_1 et γ_0 (réduit à un point) dans $\mathbb{R}^2 \backslash \{a\}$ pour tout $a \notin \{\gamma_\theta(\tau), 0 \leqslant \theta \leqslant 1, 0 \leqslant \tau \leqslant 1\}$. Donc le domaine entouré par γ_1, $\mathscr{C}$, est entièrement contenu dans $\{\gamma_\theta(\tau), 0 \leqslant \theta \leqslant 1, 0 \leqslant \tau \leqslant 1\}$. c.q.f.d.

Démonstration du Lemme 11. — Comme précédemment, on écrit $A = a_1S_1 + a_2S_2$, $B = b_1S_1 + b_2S_2$, avec $-a_1a_2$ et $-b_1b_2 \in]0,1[$, $(b_1-a_1)(b_2-a_2) < 0$. Un polynôme holomorphe homogène du second degré s'écrira en général $F(z) = {}^tzMz$, où $M \in M_{2\times 2}(\mathbb{C})$, $M = M_1 + iM_2$, $M_j \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $j \in \{1,2\}$.

Si $z \in V(A)$, il existe x tel que $z = x + iAx$ et

$$\mathrm{Re}\,({}^tzMz) = {}^tx(M_1 - {}^tAM_1A - (M_2A + {}^tAM_2))x =: {}^txM_Ax.$$

M_B s'écrit de façon similaire, et bien entendu $M_0 = M_1$ correspond au cas de $\mathbb{R}^2 = V(0)$. On doit donc trouver M_1 et M_2 telles que M_1, M_A, M_B soient simultanément semi-définies positives. On choisit

$$M_1 = \beta S_1 S_2 + \gamma S_2 S_1 = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix},$$
$$M_2 = \alpha(S_1 + S_2) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}, \qquad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

${}^tA = a_2 S_1 + a_1 S_2$, d'où

$$\begin{aligned} M_A &= \beta S_1 S_2 + \gamma S_2 S_1 - (a_2 S_1 + a_1 S_2)(\beta S_1 S_2 + \gamma S_2 S_1)(a_1 S_1 + a_2 S_2) \\ &\qquad - \alpha[(S_1 + S_2)(a_1 S_1 + a_2 S_2) + (a_2 S_1 + a_1 S_2)(S_1 + S_2)] \\ &= (\beta - 2\alpha a_2 - \gamma a_2^2) S_1 S_2 + (\gamma - 2\alpha a_1 - \beta a_1^2) S_2 S_1 . \end{aligned}$$

De même,

$$M_B = (\beta - 2\alpha b_2 - \gamma b_2^2) S_1 S_2 + (\gamma - 2\alpha b_1 - \beta b_1^2) S_2 S_1 .$$

Les trois matrices à étudier sont diagonales, et nous avons donc à résoudre simultanément en (α, β, γ) les six inéquations suivantes :

(1.1) $\beta \geqslant 0$
(1.2) $\gamma \geqslant 0$
(A.1) $\beta - 2\alpha a_2 - \gamma a_2^2 \geqslant 0$
(A.2) $\gamma - 2\alpha a_1 - \beta a_1^2 \geqslant 0$
(B.1) $\beta - 2\alpha b_2 - \gamma b_2^2 \geqslant 0$
(B.2) $\gamma - 2\alpha b_1 - \beta b_1^2 \geqslant 0$.

Dans ce qui suit, on suppose (1.1) et (1.2) satisfaites. On peut supposer $a_1 > 0$ (si on change (A, B) en $(-A, -B)$, il suffit de changer α en $-\alpha$ pour se ramener au même problème), et par conséquent $a_2 < 0$. On obtient

(A.1) $\Leftrightarrow \alpha \geqslant (\beta a_2^{-1} - \gamma a_2)/2$
(A.2) $\Leftrightarrow \alpha \leqslant (-\beta a_1 + \gamma a_1^{-1})/2$.

Cas 1. $b_1 > 0$ (et donc $b_2 < 0$).

Alors

(B.1) $\Rightarrow$ (B.1.1) : $\alpha \geqslant (\beta b_2^{-1} - \gamma b_2)/2$
(B.2) $\Rightarrow$ (B.2.1) : $\alpha \leqslant (-\beta b_1 + \gamma b_1^{-1})/2$.

Si β et γ sont donnés, pour qu'une solution existe, il faut et il suffit que la condition de compatibilité suivante soit vérifiée :

(C) $\max(\beta a_2^{-1}-\gamma a_2, \beta b_2^{-1}-\gamma b_2) \leqslant \min(-\beta a_1+\gamma a_1^{-1}, -\beta b_1+\gamma b_1^{-1})$.
(C) équivaut aux quatre inégalités :
(2.1) $\beta a_2^{-1} - \gamma a_2 \leqslant - \beta a_1 + \gamma a_1^{-1}$
(3.1) $\beta a_2^{-1} - \gamma a_2 \leqslant - \beta b_1 + \gamma b_1^{-1}$
(4.1) $\beta b_2^{-1} - \gamma b_2 \leqslant - \beta a_1 + \gamma a_1^{-1}$
(5.1) $\beta b_2^{-1} - \gamma b_2 \leqslant - \beta b_1 + \gamma b_1^{-1}$.

Or (2.1) $\Leftrightarrow \beta a_2^{-1}(1+a_1a_2) \leqslant \gamma a_1^{-1}(1+a_1a_2) \Leftrightarrow \beta a_2^{-1} \leqslant \gamma a_1^{-1}$ car $(1+a_1a_2) > 0$ par hypothèse, et cette inégalité est toujours vérifiée car $\beta \geqslant 0$, $\gamma \geqslant 0$, $a_1 > 0$, $a_2 < 0$.

De même (5.1) $\Leftrightarrow \beta b_2^{-1}(1+b_1b_2) \leqslant \gamma b_1^{-1}(1+b_1b_2)$ est toujours vérifiée.

(3.1) $\Leftrightarrow \beta a_2^{-1}(1+b_1a_2) \leqslant \gamma b_1^{-1}(1+b_1a_2)$
(4.1) $\Leftrightarrow \beta b_2^{-1}(1+a_1b_2) \leqslant \gamma b_1^{-1}(1+a_1b_2)$.

Or $1 + b_1a_2 = 1 + a_1a_2 + a_2(b_1-a_1) = 1 + b_1b_2 + b_1(a_2-b_2)$. Si $b_1 \leqslant a_1$, la première expression est clairement positive. Si $b_1 > a_1$, alors $(b_1-a_1)(b_2-a_2) < 0$ implique $b_2 < a_2$, et la deuxième expression sera clairement positive (on voit en fait que $1 + b_1a_2 \geqslant \max(1+a_1a_2, 1+b_1b_2) > 0$). Les deux inéquations sont donc à nouveau vérifiées, et il suffit de prendre (par exemple)

$$F(z) = z_1^2 + z_2^2 + 2\alpha i z_1 z_2$$

avec $2\alpha \in]\max(a_2^{-1}-a_2, b_2^{-1}-b_2) ; \min(a_1^{-1}-a_1, b_1^{-1}-b_1)[$ pour faire de $\operatorname{Re} F|_{\mathbb{R}^2}$, $\operatorname{Re} F|_{V(A)}$, $\operatorname{Re} F|_{V(B)}$ des formes quadratiques *définies* positives.

Cas 2. $b_1 < 0$ (et donc $b_2 > 0$).

Alors

(B.1) $\Rightarrow$ (B.1.2) : $\alpha \leqslant (\beta b_2^{-1}-\gamma b_2)/2$
(B.2) $\Rightarrow$ (B.2.2) : $\alpha \geqslant (-\beta b_1+\gamma b_1^{-1})/2$.

On obtient pour conditions de compatibilité :

(2.2) $\beta a_2^{-1} - \gamma a_2 \leqslant - \beta a_1 + \gamma a_1^{-1}$
(3.2) $\beta a_2^{-1} - \gamma a_2 \leqslant \beta b_2^{-1} - \gamma b_2$
(4.2) $- \beta b_1 + \gamma b_1^{-1} \leqslant - \beta a_1 + \gamma a_1^{-1}$
(5.2) $- \beta b_1 + \gamma b_1^{-1} \leqslant \beta b_2^{-1} - \gamma b_2$.

Avec les mêmes calculs que précédemment $(2.2) \Leftrightarrow (2.1) \Leftrightarrow \beta a_2^{-1} \leqslant \gamma a_1^{-1}$ est automatiquement vérifiée, et $(5.2) \Leftrightarrow \beta b_2^{-1} \geqslant \gamma b_1^{-1}$ aussi, grâce aux nouvelles hypothèses sur b_1, b_2.

$$\begin{aligned}
(3.2) &\Leftrightarrow \beta a_2^{-1} b_2^{-1}(b_2 - a_2) \leqslant \gamma(a_2 - b_2)\\
&\Leftrightarrow \beta a_2^{-1} b_2^{-1} \leqslant -\gamma \text{ car } (b_2 - a_2) > -a_2 > 0,\\
&\Leftrightarrow \beta\gamma^{-1} \geqslant -a_2 b_2 = |a_2 b_2|, \text{ et}\\
(4.2) &\Leftrightarrow \beta(a_1 - b_1) \leqslant \gamma a_1^{-1} b_1^{-1}(b_1 - a_1) \Leftrightarrow \beta \leqslant -\gamma a_1^{-1} b_1^{-1}\\
&\Leftrightarrow \beta\gamma^{-1} \leqslant -a_1^{-1} b_1^{-1} = |a_1 b_1|^{-1}.
\end{aligned}$$

Ces deux dernières inéquations sont compatibles ssi $|a_1 b_1|^{-1} \geqslant |a_2 b_2|$, c'est-à-dire $1 \geqslant |a_1 b_1| \cdot |a_2 b_2| = |a_1 a_2| \cdot |b_1 b_2|$, ce qui est toujours vérifié. Dans ce cas on peut prendre

$$F(z) = |a_2 b_2|^{1/2} z_1^2 + |a_1 b_1|^{1/2} z_2^2 + 2\alpha i z_1 z_2,$$

avec

$$\begin{gathered}
2\alpha \in \left]\max\left(|a_2^{-1} b_2|^{1/2} - a_2 |a_1 b_1|^{1/2}, |a_1 b_1^{-1}|^{1/2} - b_1 |a_2 b_2|^{1/2}\right);\right.\\
\left.\min\left(|a_1^{-1} b_1|^{1/2} - a_1 |a_2 b_2|^{1/2}, |a_2 b_2^{-1}|^{1/2} - b_2 |a_1 b_1|^{1/2}\right)\right[,
\end{gathered}$$

et obtenir à nouveau des formes quadratiques définies positives.

c.q.f.d.

BIBLIOGRAPHIE

[1] F. FORSTNERIC, Stability of polynomial convexity of totally real sets, Proc. Amer. Math. Soc., 96 (1986), 489-494.

[2] E. KALLIN, Fat polynomially convex sets ; Function algebras, pp. 149-152 (Proc. Intern. Symp. Function Algebras, Tulane Univ., 1965). Chicago : Scott, Foresman 1966.

[3] J. K. MOSER, S. M. WEBSTER, Normal forms of real surfaces in $\mathbb{C}^2$ near complex tangents and hyperbolic surface transformations, Acta Math., 150 (1983), 255-296.

[4] A. O'FARREL, K. PRESKENNIS, D. WALSH, Holomorphic approximation in Lipschitz norms, Contemp. Math., 32 (1984), 187-194.

[5] N. SIBONY, P.-M. WONG, Some results on global analytic sets. Séminaire Pierre Lelong-Henri Skoda (Analyse) Années 1978/1979, pp. 221-237 (Lecture Notes n° 822). Berlin Heidelberg New York : Springer-Verlag 1980.

[6] E. L. STOUT, W. ZAME, Totally real imbeddings and the universal covering spaces of some domains of holomorphy : some examples, Manuscr. Math., 50 (1985), 29-48.

[7] P. J. THOMAS, Unions minimales de n-plans réels d'enveloppe égale à $\mathbb{C}^n$, à paraître dans Proceedings of Symposia in Pure Mathematics (Santa Cruz, 1989), American Mathematical Society.

[8] B. M. WEINSTOCK, On the polynomial convexity of the union of two maximal totally real subspaces of $\mathbb{C}^n$, Math. Ann., 282 (1988) 131-138.

Manuscrit reçu le 18 janvier 1990,
révisé le 9 avril 1990.

Pascal J. THOMAS,
Laboratoire d'Analyse Complexe
Université Paul Sabatier
118 route de Narbonne
31062 Toulouse.