Annales de l'institut Fourier

Henri Morel

Introduction de poids dans l'étude de problèmes aux limites

Annales de l'institut Fourier, tome 12 (1962), p. 299-413

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1962__12__299_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
12 (1962), 299-414.

INTRODUCTION DE POIDS DANS L'ÉTUDE DE PROBLÈMES AUX LIMITES

par **Henri MOREL** (Paris).

INTRODUCTION

Par bien poser un problème aux limites, on entend en général : préciser des conditions portant sur les données et entraînant l'existence et l'unicité de la solution, avec si possible la continuité de sa dépendance des données : c'est le cas si le théorème associé au problème énonce un isomorphisme; (pour les généralités sur les problèmes aux limites, on peut renvoyer par exemple à Hörmander [29], Lions [37], Magenes et Stampacchia [45], Visǐk et Ladyzenskaya [74], Sobolev [71]); dans certaines méthodes pour traiter des problèmes de type elliptique, ces conditions s'expriment par l'appartenance des données à certains espaces fonctionnels, nous pensons par exemple aux espaces de Sobolev, du type de Beppo-Levi, construits en complétant des espaces de fonctions u, régulières, pour une norme calculée en intégrant une forme quadratique des dérivées jusqu'à un certain ordre de u pour la mesure de Lebesgue dx d'un ouvert Ω de R^n. Nous disons que nous introduisons des poids lorsque nous remplaçons cette mesure par d'autres, définies par une densité h_i par rapport à dx, h_i étant localement intégrable, et en général vérifiant : h_i et $h_i^{-1} \in \mathcal{L}^\infty$ localement; le poids h_i devant être nul ou singulier à la frontière pour nous sortir du cas classique.

Si l'on donne au mot poids un sens général, les divers usages que l'on a pu en faire dans l'étude des problèmes différentiels sont trop nombreux pour être passés en revue; ils s'introduisent naturellement dans l'étude de problèmes du type de Sturm-Liouville ([8] note historique), dans la théorie des développements en fonctions propres, par exemple pour l'équation de Bessel [3]; on trouve une importante bibliographie dans Rosenbloom [58].

Des poids s'introduisent d'autre part à titre auxiliaire, dans la technique de démonstration plus que dans l'énoncé des résultats : en théorie de l'hypoellipticité (L. Schwartz [66], L. Hörmander [29], B. Malgrange [47]); dans les travaux de Browder sur les opérateurs elliptiques à coefficients variables, étendant la classe de Gårding [21], pour laquelle on peut bien poser le problème de Dirichlet; relevons aussi l'usage par Morrey-Nirenberg [49], d'un poids proportionnel à la distance à la frontière, dans une étude d'analyticité au bord. Des poids jouent un rôle important dans la thèse de Trèves [73], et dans l'étude de l'unicité pour le problème de Cauchy: Carleman [13], Aronszajn [2], Cordes [16], Heinz [26], Hörmander [31], Malgrange [69], Müller [51], Pederson [55], etc..., où l'on fait usages d'inégalités entre normes intégrales calculées avec des mesures définies par des densités polynomiales ou exponentielles.

Dans le chapitre I, nous nous occupons de problèmes de Dirichlet, de Neumann, ou de type mixte [24]; les principaux théorèmes viennent au § 4:

Au § 1, après des rappels et deux théorèmes motivant l'utilisation de poids, nous introduisons les espaces fonctionnels $W_{(h),(p)}$ et $W^0_{(h),(p)}$ qui correspondent, si les composantes du multi-poids (h) sont égales à 1, aux espaces classiques $H^{k,p} = \mathcal{E}^k_{L^p}$, et $H^{k,p}_0 = \hat{\mathcal{D}}^k_{L^p}$; on étudie ces espaces en général, et on expose une méthode avec poids pour le problème de Dirichlet.

Au § 2, nous étudions le problème : « $W^0_{(h),(p)}$ est-il un espace de distributions? »; la réponse à cette question ne sera utilisée que pour $p = 2$, au § 4, où nous aurons besoin de la technique hilbertienne; cette technique n'intervient pas ici, aussi avons-nous étudié le problème sous cette forme; son étude utilise un lemme d'injection et des lemmes de majoration que nous avons groupés au n° 2; ces lemmes seront en fait utilisés dans toute la suite du chapitre; le paragraphe se termine sur une étude d'une classe d'espaces $W_{(h)}$ utilisée au § 4, n° 3, et fournissant un exemple d'espace $W_{(h)}$ dont les éléments sont nuls au bord.

Au § 3, nous étudions le problème de la caractérisation des éléments d'un espace $W^0_{(h),p}$, par la propriété d'appartenir à $W_{(h),p}$ et des conditions sur le comportement au bord; les résultats nous serviront à interpréter les théorèmes d'isomorphisme du § 4.

Au § 4, nous obtenons des théorèmes d'isomorphismes pour divers opérateurs, dont le laplacien; les espaces classiques sont des espaces de fonctions nulles au bord et vérifiant au bord une condition de Lipschitz intégrale d'exposant $\gamma = 1/2$ (c.f. § 3); nous obtenons des espaces pour lesquels γ est aussi voisin de 0 ou de 1 que l'on veut; on peut ainsi renforcer ou diminuer la condition de nullité au bord; de pouvoir la diminuer nous permet d'étudier par la méthode des projections, des opérateurs singuliers non situés dans la classe de Gårding, étudiés avec la méthode de Schauder par d'autres auteurs : Brousse et Poncin [11], Huber [32], Schechter [61]; les espaces classiques ne donnent que des résultats partiels pour ces opérateurs (c.f. § 1, n° 2); nous donnons un exemple d'opérateur donnant lieu à un isomorphisme pour le problème de Dirichlet et pour lequel la forme associée n'est pas coercive.

Dans le même paragraphe 4, nous obtenons pour le problème de Dirichlet un théorème d'isomorphisme, avec un autre type de condition de nullité au bord : certains auteurs posent le problème de Dirichlet de telle sorte que la solution u du problème homogène correspondant vérifie $u/h = 0$ au bord, h étant une fonction harmonique positive, par exemple une fonction de Martin; nous obtenons des théorèmes d'isomorphisme où la condition au bord s'écrit $u/h^\gamma = 0$ en un sens que nous précisons, γ étant quelconque vérifiant $0 < \gamma < 1$; nous avons des cas limites de ces théorèmes, où l'on peut énoncer l'existence sans l'unicité. Nos théorèmes dépendent en apparence de deux paramètres; d'après les résultats du § 3, il n'y en a qu'un, à savoir l'exposant γ.

Au chapitre II, beaucoup plus court, nous nous sommes intéressés à l'étude des poids h définis dans un ouvert Ω, pour lesquels un opérateur donné est h-Ω-dissipatif; après des préliminaires justifiant cette étude, nous la conduisons de façon générale au § 2 pour étudier ensuite au § 3 le comportement de quelques opérateurs particuliers devant certaines classes de poids; on utilise le numéro 2 du § 2 du premier chapitre.

Je suis heureux de pouvoir remercier vivement ici Monsieur Laurent Schwartz, mon Directeur de Recherches, à qui je dois ma formation et de m'avoir dirigé sur des questions diverses pendant mon séjour au Centre National de la Recherche Scientifique (C.N.R.S.), ainsi que Monsieur Leray, qui a accepté de m'y parrainer et de me conseiller. Je remercie le C.N.R.S. et Monsieur Jacques Louis Lions, à qui je dois, outre le départ de ce travail, de nombreux encouragements.

Ma reconnaissance va également à Madame Choquet-Bruhat, qui a accepté de se joindre au jury, et à Monsieur Dixmier qui a bien voulu me proposer le sujet de seconde thèse.

Ce travail est divisé en chapitres, eux-mêmes divisés en paragraphes comportant numéros et sous-numéros; le symbole (I, 1, 2-1) renvoie au chapitre I, § 1 numéro 2, sous-numéro 1. Les énoncés ont un rang à l'intérieur des numéros où ils se trouvent; on s'y refère ainsi : théorème 1 de (I, 1, 1). Certaines lignes sont numérotées; ce numérotage est fait par chapitre.

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE I

PROBLÈMES AUX LIMITES, AVEC POIDS, POUR DES OPÉRATEURS ELLIPTIQUES.

N. B. — Si on ne s'intéresse qu'aux théorèmes d'isomorphisme pour le problème de Dirichlet, il vaut mieux lire d'abord le paragraphe 1, au moins (I, 1, 4), puis le paragraphe 4 à partir du numéro 2, en se reportant à (I, 4, 1) et aux paragraphes 2 et 3, où l'étude préparatoire a été conduite avec plus de généralité pour les raisons signalées dans l'introduction.

§ I. Préliminaires.

Sommaire. — Après quelques rappels de résultats connus au numéro 1, nous donnons au numéro 2 des résultats motivant l'utilisation des poids.

Au numéro 3, nous définissons des espaces fonctionnels $W_{(h),(p)}$ et $W^0_{(h),(p)}$ et les étudions en général.

Au cours du numéro 4, nous exposons les méthodes générales utilisées dans la suite du chapitre I pour introduire des poids.

N° 1. Rappels.

1. 1. NOTATIONS; RÉSULTATS DE THÉORIE DES DISTRIBUTIONS.

Dans la suite, Ω désignera toujours un ouvert de R^n, $\dot{\Omega}$ sa frontière; si l'ensemble d'intégration et la mesure ne sont pas précisés, $\int f$ signifie $\int_\Omega f\,dx$, dx étant la mesure de Lebesgue sur Ω.

De plus, $\mathfrak{D}$ signifie $\mathfrak{D}(\Omega)$, l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur Ω, à valeurs complexes, à support compact, muni de la topologie de limite inductive naturelle, le dual $\mathcal{D}'(\Omega)$ se note $\mathcal{D}'$, i. e l'espace des distributions sur Ω; c. f. [62].

Par définition, E est dit espace de distributions sur Ω, s'il existe une injection continue de E dans $\mathcal{D}'$; cela se résume dans la notation :

$$E \subset \mathcal{D}'$$

E est dit normal si $\mathcal{D}$ est dense dans E, l'injection de $\mathcal{D}$ dans E étant continue; c. f. [67].

Pour la notion plus précise d'espaces de Hilbert de distributions, c. f. [68]; à un tel espace (non nécessairement normal) est attaché de façon biunivoque un noyau hermitien de type positif.

Il nous sera commode de nous référer sous le nom de théorème de Krylov-Schwartz à la remarque qui suit le théorème XV, page 40, tome 2 de [62] :

Si des distributions T_i convergent vers O dans $\mathcal{D}'$ et si leurs dérivées premières convergent dans $L^p(K)$, $\forall K$ compact de Ω, les T_i convergent dans $L^q(K)$ pour $1/q \geqslant 1/p - 1/n$; $p > 1$ (1).

De façon générale, sauf mention d'autre chose, étant donné un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ sur le corps des complexes $\mathbb{C}$, le produit scalaire associé sera noté $(u/v)_{\mathcal{H}}$; il est antilinéaire par rapport à v; la norme de u se note $\|u\|_{\mathcal{H}}$, le signe $\langle\ ,\ \rangle$ étant réservé à la dualité, par exemple entre un espace de distributions et son dual.

1. 2. Un premier critère d'existence avec unicité (1re méthode).

Considérons deux espaces de Hilbert V et H avec :

(1) $V \subset H$; l'injection est continue; V est dense dans H.

Considérons $a(u, v)$ sur $V \times V$ satisfaisant à

(H_1) $a(u, v)$ est sesquilinéaire continue.

[D'après le théorème de Banach-Steinhaus, si $a(u, v)$ est séparément continue, on a (H_1).]

Définition 1. — a) *On appelle* N(V, H, a), *ou espace* N *attaché à* V, H, a, *l'espace des* $u \in V$ *tels que l'application anti-*

(1) Si $p = 1$, l'énoncé vaut encore en excluant $q = +\infty$; q est toujours supposé $\geqslant 0$.

linéaire $v \to a(u, v)$ *soit continue sur* V *pour la topologie induite par celle de* H.

b) *D'après* (1), *pour tout* $u \in N$, *il existe* $Au \in H$, *tel que* $\forall v \in V$, *on ait:*

$$(2) \qquad a(u, v) = (Au|v)_H.$$

On appelle A(V, H, *a*) *ou opérateur attaché à* V, H, *a*, *l'application linéaire de* N *dans* H *définie par* (2). *On munit* N *de la topologie la moins fine rendant continues, d'une part l'injection de* N *dans* V, *d'autre part l'application* A.

Définition 2. — *Soit* V *préhilbertien*; *on dit que la forme* $a(u, v)$ *sesquilinéaire sur* $V \times V$ *est* V-*coercive, s'il existe un nombre* $c > 0$ *tel que:*

$$(H_2) \quad \textit{pour tout} \quad u \in V, \quad \mathcal{R}_e a(u, u) \geqslant c\|u\|_V^2.$$

On dira alors que A *est* V-*coercif.*

Notations. — On posera :

$$(3) \qquad \begin{cases} a_1(u, v) = 1/2(a(u, v) + \overline{a(v, u)}) \\ a_2(u, v) = 1/2i(a(u, v) - \overline{a(v, u)}). \end{cases}$$

Les hypothèses (H_1) et (H_2) entraînent que $a_1(u, v)$ définit sur V un produit scalaire équivalent à $(u|v)_V$.

On a alors le théorème d'isomorphisme suivant :

Théorème 1. — *Si l'on a* (H_1) *et* (H_2), A *est un isomorphisme de* N *sur* H.

Ce théorème est une variante du théorème de représentation de Lax-Milgram [54]; pour la démonstration c. f. [37], [65] ou [39]; ce théorème est aussi rappelé et utilisé dans [33].

Définition 3. — *Si l'opérateur* A(V, H, *a*) *est un isomorphisme, l'opérateur* $G = A^{-1}$ *est appelé opérateur de Green attaché à* V, H, *a*.

L'opérateur A apparaît comme opérateur fonctionnel dans les conditions suivantes; on considère :

$$(4) \qquad \mathfrak{D} \subset V \subset E \subset \mathfrak{D}'$$

les injections étant continues, V un espace de Hilbert, E un espace vectoriel topologique localement convexe séparé, $\mathfrak{D}$

étant dense dans E, si bien que le dual E′ apparaît comme un espace de distributions. Soit alors $a(u, v)$ sesquilinéaire (séparément) continue sur $V \times V$. Alors pour tout u, l'application $\varphi \rightarrow a(u, \varphi)$ est semi-linéaire continue sur $\mathfrak{D}$, donc

$$a(u, \varphi) = \langle \tilde{A}u, \bar{\varphi} \rangle \tag{5}$$

le crochet définissant la dualité entre $\mathfrak{D}'$ et $\mathfrak{D}$; on définit ainsi une application $\tilde{A}$ linéaire continue de V dans $\mathfrak{D}'$.

On considère alors l'espace $\mathcal{H} = \tilde{A}^{-1}(E') = \{u, \ u \in V, \tilde{A}u \in E'\}$ muni de la topologie la moins fine rendant continues $\tilde{A}$ et l'injection dans V.

On considère enfin l'espace $\tilde{N}$ suivant :

$$\tilde{N} = \{u, u \in \mathcal{H} \quad \text{et} \quad \forall v \in V, \qquad \langle \tilde{A}u, \bar{v} \rangle = a(u, v)\}$$

muni de la topologie induite par $\mathcal{H}$.

On vérifie alors facilement, que si on prend pour E un espace de Hilbert jouant le rôle de H, introduit précédemment, l'application $\tilde{A}$ est alors une extension de A, et les espaces N et $\tilde{N}$ coïncident.

Si $\mathfrak{D}$ est dense dans V, on a $\mathcal{H} = N$; sinon pour $u \in \mathcal{H}$, $v \in V$, on pose :

$$\langle \tilde{A}u, \bar{v} \rangle - a(u, v) = R(u, v) \tag{6}$$

que l'on peut considérer comme une formule de Green, on a :

$$u \in N \Longleftrightarrow u \in \mathcal{H} \quad \text{et} \quad \forall v \in V, \qquad R(u, v) = 0. \tag{7}$$

Supposons alors que A soit un isomorphisme, ce qui est par exemple le cas si on est dans les conditions du théorème 1 précédent; alors, $\mathfrak{D}$ étant dense dans $H = E$, à l'opérateur de Green G de la définition 3 est associé biunivoquement un noyau-distribution sur Ω, $G_{x,y} \in \mathfrak{D}'(\Omega_x \times \Omega_y)$ ce d'après le théorème des noyaux (L. Schwartz [64]).

Si l'on veut enfin que A soit un opérateur différentiel donné, il faut définir $a(\ , \ )$ de façon adéquate, et l'on a des possibilités différentes suivant que l'on veut atteindre tel ou tel problème aux limites pour l'opérateur donné. Nous verrons, en introduisant des poids, comment, pour un même opérateur et un même type de problème aux limites, obtenir des isomorphismes différents. Remarquons que la condition (H_2), dite de coercivité figurant dans les hypothèses du théorème 1, n'est nullement nécessaire pour que A soit un isomorphisme : nous en donnerons un exemple, (I, 4, 2), où A est un opérateur différentiel; si l'on se permet des opérateurs plus généraux, on a l'exemple très simple suivant : on prend $V = H = L^2(R)$; soit $\alpha > 0$; pour $u, v \in L^2(R)$, on considère :

$$a(u, v) = (u|\tau_\alpha v)_{L^2}$$

où $\tau_\alpha v(t) = v(t - \alpha)$; l'opérateur A associé est un opérateur de translation; il suffit alors de prendre $u = v = \varphi \in \mathcal{D}(R)$ où φ a un support de diamètre inférieur à α, pour infirmer la condition (H_2).

1. 3. Un deuxième critère d'existence : (2e méthode). Nous extrayons maintenant de [40] une généralisation du théorème précédent; en gros, on conserve la condition (H_2) de coercivité, mais on diminue considérablement la condition (H_1), dite de continuité; on n'obtient plus qu'un théorème d'existence; l'unicité, si elle a lieu, doit être établie à part.

Théorème 2. — *Soit* F *un espace de Hilbert*; *soit* G *un espace préhilbertien séparé, c. f.* [8], *supposons* $G \subset F$, *l'injection étant continue.*

On considère sur $F \times G$ *une forme sesquilinéaire :*

$$f, g \to b(f, g)$$

linéaire en f, semi-linéaire en g; cette forme satisfait en outre à :

(H'_1) $\begin{cases} \textit{pour tout } g \in G, \textit{ la forme } f \to b(f, g) \\ \quad \textit{est continue sur } F; \end{cases}$

(H'_2) $\begin{cases} \textit{il existe un nombre } c > 0 \textit{ tel que pour} \\ \quad \textit{tout } g \in G, \ \mathcal{R}e\ b(g, g) \geqslant c\,||g||_G. \end{cases}$

Soit alors $g \to L(g)$ *une forme semi-linéaire continue sur* G. *Il existe un élément u dans* F *tel que :*

$$\textit{pour tout } g \in G, \ L(g) = b(u, g).$$

Remarque. — Il y a unicité de la représentation de L par un élément de F si et seulement si : $b(f, g) = 0$ pour tout $g \in G$ entraîne $f = 0$.

D'après ce théorème, les formes semi-linéaires continues sur G sont réalisées parmi les formes $g \to b(f, g)$ où $f \in F$, qui ne sont pas nécessairement toutes continues; il arrive dans la pratique que l'on ait une condition supplémentaire, (H'_3), de continuité en g:

Soit Ω un ouvert de R^n et supposons dans ce qui précède :

$$\mathfrak{D}(\Omega) \subset F \subset \mathfrak{D}'(\Omega)$$

les injections étant continues et $\mathfrak{D}(\Omega)$ étant dense dans F. Alors le dual F' est un espace de distributions, i. e. $F' \subset \mathfrak{D}'$, l'injection étant continue.

Prenons $G = \mathfrak{D}(\Omega)$, et supposons :

$$(\,.\,|\,.\,)_G = (\,.\,|\,.\,)_F$$

et :

$$(H'_3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{pour tout } f, \text{ la forme } g \to b(f, g) \text{ est} \\ \quad \text{continue sur } \mathfrak{D}(\Omega) \text{ muni de sa propre} \\ \quad \text{topologie.} \end{array} \right.$$

On associe alors à F, G, b, une opération linéaire B(F, G, b) ou B appliquant F dans $\mathfrak{D}'$:

$$(8) \qquad \text{pour tout} \quad f \in F, \quad \text{tout} \quad g \in G, \quad b(f, g) = \langle Bf, \bar{g} \rangle.$$

On a alors une variante du théorème 2 :

Théorème 2'. — *Si outre les hypothèses du théorème* 2, *on a* H'_3, $G = \mathfrak{D} \subset F \subset \mathfrak{D}'$, $\mathfrak{D}$ *dense dans* F, *alors pour toute distribution* $T \in F'$, *il existe* $u \in F$ *telle que :*

$$(9) \qquad Bu = T.$$

N° 2. Applications des critères du N° 1.

Nous donnons maintenant les deux applications des théorèmes précédents que nous avons annoncées. Conformément au plan de la suite de ce travail, nous commençons par une application du théorème 2', pour donner ensuite une application du théorème 1, reprises seulement au § 4, chapitre I.

2. 1. Application de la 2e méthode; [84].

Théorème 1. — *Soit* Ω *un ouvert de* R^n, dx *sa mesure de Lebesgue; soit* h *une fonction harmonique positive sur* Ω; *soit* W_h *le complété de* $\mathfrak{D}(\Omega)$ *pour la norme :*

$$\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega) \to \left[\int_\Omega h(x)\, |\text{grad } \varphi|^2\, dx\right]^{1/2} = ||\varphi||_h.$$

Supposons que W_h *s'identifie à un sous-espace de* $\mathfrak{D}'$, *avec injection continue;* $\mathfrak{D}$ *étant dense dans* W_h *par construction, on identifie alors le dual* W'_h *à un sous-espace de* $\mathfrak{D}'$.

Soit T *une distribution sur* Ω, *telle que:*

$$hT \in W'_h \tag{10}$$

alors, il existe $u \in W_h$, *solution de:*

$$\Delta u = T. \tag{11}$$

Démonstration du Théorème 1. — Pour $u \in W_h$, $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$, considérons :

$$b(u, \varphi) = -\langle u, \Delta(h\overline{\varphi}) \rangle \tag{12}$$

le crochet désignant la dualité entre $\mathfrak{D}'(\Omega)$ et $\mathfrak{D}(\Omega)$. Nous allons montrer que nous nous plaçons dans les conditions du théorème 2′ précédent, en prenant $F = W_h$ muni de sa structure hilbertienne :

$$(u|v)_{W_h} = \int_\Omega h(x)\, \overrightarrow{\text{grad}}\, u . \overrightarrow{\text{grad}}\, \overline{v}\, dx;$$

$G = \mathfrak{D}$ muni de la structure préhilbertienne induite par celle de W_h.

Vérifions (H'_1) : la forme $u \to b(u, \varphi)$ est continue sur $\mathfrak{D}'$ pour tout $\varphi \in \mathfrak{D}$, elle l'est donc à fortiori sur W_h d'après l'hypothèse faite sur W_h.

Vérifions (H'_2) : soit $\varphi \in G = \mathfrak{D}$; on a, en posant $\partial/\partial x_i = D^i$

$$2\mathcal{R}e\, b(\varphi, \varphi) = 2\mathcal{R}e \sum_{i=1}^{n} \langle D^i\varphi, D^i(h\overline{\varphi})\rangle$$
$$= 2\int_\Omega h|\text{grad}\, \varphi|^2\, dx + \sum_{i=1}^{n} \left\{ \int_\Omega D^i\varphi D^i h . \overline{\varphi}\, dx + \int D^i\overline{\varphi} . D^i h . \varphi\, dx \right\}$$

en intégrant par parties, la somme des deux dernières intégrales vaut :

$$\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega D^i h . D^i|\varphi|^2\, dx = -\int_\Omega \Delta h |\varphi|^2\, dx = 0$$

puisque h est harmonique. Par conséquent, pour tout $\varphi \in \mathfrak{D}$, $\mathcal{R}e\; b(\varphi, \varphi) = ||\varphi||^2_{W_h}$ ce qui vérifie (H'_2).

Soit alors la forme semi-linéaire sur $\mathfrak{D}$:

$$\varphi \to L(\varphi) = -\langle hT, \overline{\varphi}\rangle.$$

D'après l'hypothèse sur T, L est continue sur $\mathfrak{D}$ muni de la topologie induite par celle de W_h; d'après le théorème 2, il existe $u \in W_h$, telle que, pour tout $\varphi \in \mathfrak{D}$,

$$-\langle hT, \overline{\varphi}\rangle = b(u, \varphi) = -\langle u, \Delta(h, \overline{\varphi})\rangle = -\langle h\Delta u, \overline{\varphi}\rangle$$

le laplacien étant pris au sens des distributions. Dans le même sens, on a donc

$$-h\Delta u = -hT$$

comme $h > 0$ dans Ω, on peut diviser dans $\mathfrak{D}'$: $\Delta u = T$.

Exemples pour le théorème 1. — On peut prendre $h = 1$; si Ω est borné, d'après l'inégalité de Poincaré, W_1 est bien un espace de distributions ; ce n'est autre que $\hat{\mathfrak{D}}^1_{L^2}(\Omega)$; voir [64]. Mais on peut appliquer le théorème 1 qui donne l'isomorphisme classique pour le problème de Dirichlet.

— Prenons un ouvert borné Ω de R^n, sans hypothèse sur la frontière $\dot{\Omega}$ de Ω ; soit $a \in \dot{\Omega}$ et soit :

$$h(x) = 1/|x-a|^{n-2}; \quad \text{alors} \quad h(x) > c > 0 \quad \text{sur} \quad \Omega.$$

On a alors :

Corollaire. — *Soit* Ω *un ouvert borné de* R^n, $u \in \Omega$; *soit* $T \in \mathfrak{D}'(\Omega)$ *telle que*

$$|x-a|^{2-n}\, T \in W'_{|x-a|^{2-n}}. \tag{13}$$

Il existe alors u *unique dans* $W_{|x-a|^{2-n}}$ *solution de* $\Delta u = T$.

Remarque 1. — Si T est dans $\mathfrak{D}(\Omega)$, alors T vérifie (13), puisque $|x-a|^{2-n}\, T \in \mathfrak{D}(\Omega)$. On a donc le résultat suivant :

Si u est la solution du problème de Dirichlet dans $\hat{\mathfrak{D}}^1_{L^2}(\Omega)$, soit $\Delta u = T$, T étant donnée dans $\mathfrak{D}(\Omega)$, alors u vérifie :

$$|x-a|^{1-n/2} D^i u \in L^2(\Omega)$$

quel que soit a sur la frontière $\dot{\Omega}$ de Ω.

Ce genre de conclusion est banal si la frontière de Ω est régulière, car alors, on a, par exemple, $D^i u \in L^\infty(\Omega)$.

Nous sommes, dans l'exemple précédent, $h = |x-a|^{2-n}$, dans un cas d'unicité : en effet, comme $h(x) > c > 0$, la norme utilisée pour obtenir W_h en complétant $\mathfrak{D}$ est plus fine que celle de $\hat{\mathfrak{D}}^1_{L^2}(\Omega) = W_1$. Il résulte alors d'un lemme d'injection énoncé en (I, 2, 1) que W_h est un espace de distributions et même un sous-espace de W_1. Comme on sait qu'il y a unicité dans ce dernier espace, on a l'unicité à fortiori dans W_h. En fait, on peut comme on le verra plus loin, retrouver ces résultats avec le théorème d'isomorphisme. Le théorème 2 n'est donc pas indispensable dans l'exemple précédent, encore qu'il soit un instrument d'investigation plus souple. Il nous sera en revanche nécessaire, dans des cas limites, pour résoudre certaines des questions suivantes :

Problème 1. — Soit h une fonction harmonique positive, quand l'espace W_h est-il un espace de distributions? En particulier, que se passe-t-il si h est une fonction de Martin?

Problème 2. — Si h est telle que la réponse au problème 1 est affirmative, on est alors dans les conditions du théorème 1. Dans quelles conditions la solution dont le théorème 1 annonce l'existence est-elle unique dans W_h?

Problème 3. — Peut-on par cette méthode, variante de celle de Riemann, obtenir des problèmes aux limites bien posés du type de Dirichlet, où la condition au bord pour la solution u soit en un certain sens $\frac{u}{h} = 0$; cette condition apparaît en effet si l'on passe, du moins formellement, au problème homogène associé au problème inhomogène $\Delta u = 0$, $u/h = f$ au bord considéré par certains auteurs de l'école de Poincaré (principe du maximum) en supposant f définie dans tout l'ouvert, en posant $u - hf = v$, on a $\Delta v = -\Delta(hf)$, $v/h = 0$ au bord.

Nous répondrons à ces questions dans un cadre plus général, en utilisant le théorème 1, le théorème 2 étant indispensable pour interpréter les cas limites qui se présenteront, qui seront semi-exceptionnels, donnant lieu à des théorèmes d'existence sans unicité; en prenant pour h une fonction de Martin dans le théorème 2, on associera au laplacien une forme coercive, non continue; dans les autres exemples étudiés, la condition (H_2) de coercivité est assez riche pour entraîner la condition (H_1) de continuité.

2. 2. Application de la 1re méthode.

On étudie par la méthode des projections le problème de Dirichlet homogène pour l'opérateur $A = \Delta + \frac{k}{x_n} D^n$, pour l'ouvert $\Omega = \{x, x_n > 0\}$ de R^n, avec $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $D^n = \partial/\partial x_n$. Soit $\hat{\mathfrak{D}}^1_{L^2}(\Omega) = W_1$, conformément aux notations précédentes;

on a le lemme suivant qui est un cas particulier du lemme 2 de (I, 2, 2) où on en trouve la démonstration.

LEMME 1. — *Si* $u \in W_1(\Omega)$, *alors* $u/x_n \in L^2(\Omega)$ *et*

$$(14) \qquad ||u/x_n||^2_{L^2} \leqslant 4||D^n u||^2_{L^2}.$$

On a alors :

THÉORÈME 2. — *Si* $k < 1/2$, *pour toute* $T \in \mathfrak{D}^{1'}_{L^2}(\Omega)$, *il existe* $u \in \hat{\mathfrak{D}}^1_{L^2}(\Omega)$, *unique avec*

$$(15) \qquad \left(\Delta + \frac{k}{x_n} D^n\right) u = T.$$

Démonstration. — On se place dans les conditions du théorème 1 en prenant, pour u, $v \in \hat{\mathfrak{D}}^1_{L^2}(\Omega)$.

$$(16) \quad a_k(u, v) = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega D^i u \, D^i \bar{v} . dx - k \int_\Omega D^n u . x_n^{-1} \bar{v} \, dx$$

en majorant les intégrales figurant dans (16) à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on vérifie sans difficulté la condition de continuité (H_1); d'autre part, pour $v \in \mathfrak{D}(\Omega)$, en intégrant par parties, $a_k(v, v) = \int_\Omega |\text{grad } v|^2 \, dx - \frac{1}{2} k \int_\Omega x_n^{-2} \, |v|^2 \, dx$ en utilisant le lemme 1, et en passant à la limite dans $\hat{\mathfrak{D}}^1_{L^2}(\Omega)$, pour tout $u \in \hat{\mathfrak{D}}^1_{L^2}(\Omega)$, on a :

$$a_k(v, v) \geqslant (1 - 2k) \int_\Omega |\text{grad } v|^2 \, dx, \qquad \text{si} \qquad k \geqslant 0$$

ou

$$a_k(v, v) \geqslant \int_\Omega |\text{grad } v|^2 \, dx, \qquad \text{si} \qquad k \leqslant 0$$

donc (H_2) est vérifiée si et seulement si :

$$(17) \qquad k < 1/2.$$

En fait, on sait d'après le lemme 2 de (I, 2, 2) que (14) est écrite avec la meilleure constante, si bien que la condition (17) est la meilleure que l'on puisse atteindre par cette méthode. Or on sait d'après les résultats de Brousse et Poncin [11], de Huber [32], étendus par Schechter [61], que le problème inhomogène à données continues au bord pour (15) peut se poser si et seulement si $k < 1$. Le théorème 4 résout le problème de Dirichlet pour (15) de façon plus large, mais pour $k < \frac{1}{2}$ seulement.

Nous verrons que la méthode des poids permet de résoudre le problème de Dirichlet pour (15), par la méthode des projections, pour $k < 1$.

N° 3. Les espaces $W_{(h),(p)}(\Omega)$ et $W^0_{(h),(p)}(\Omega)$.

3. 1. Définitions.

On utilisera la terminologie et les résultats de N. Bourbaki [6], § 5 : « mesures définies par des densités numériques », en particulier en ce qui concerne les notions de fonctions localement intégrables pour dx, et de mesures équivalentes, etc. Les fonctions h_i considérées sont à valeurs réelles positives, localement intégrables.

Soit h une fonction sur Ω; nous écrirons : $h \in \mathcal{L}^\infty$ localement, pour dire que la restriction de h à tout ouvert Ω' d'adhérence compacte dans Ω est dans $\mathcal{L}^\infty(\Omega')$; exemple : si h est continue dans Ω, $h \in \mathcal{L}^\infty$ localement.

Proposition 1. — *Soit h une fonction sur Ω, $h^{-1} \in \mathcal{L}^\infty$ localement; alors, $L^p(\Omega, h\,dx) \subset \mathcal{D}'$; $(p \geqslant 1)$.*

Démonstration. — L'hypothèse sur h entraîne que les éléments de $L^p(\Omega, h\,dx)$ sont localement dans L^p, d'où la proposition.

Définition 1. — *On appelle multi-poids de longueur $k+1$ et on note $(h) = (h_0, h_1, \ldots, h_k)$ une fonction sur Ω à valeurs dans R_+^{k+1}, les composantes vérifiant:*

$h_k^{-1} \in \mathcal{L}^\infty$ localement; si $i < k$, $h_i^{-1} \in \mathcal{L}^\infty$ localement, ou $h_i \equiv 0$.

Deux multi-poids (h) et (h') de même longueur sont dits analogues si pour tout i, on a soit $h_i = h'_i = 0$, soit h_i/h'_i et h'_i/h_i dans $\mathcal{L}^\infty$. On pose $(1) = (1, 1, \ldots, 1)$ ou mieux, on écrit $(1)_{k+1}$ pour préciser la longueur $k+1$.

Notation. — Soit $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l)$ un multi-indice de longueur $|\alpha| = l$, les indices α_i pouvant prendre des valeurs de 1 à n. On pose :

$$(18)\qquad \begin{cases} D^\alpha = \dfrac{\partial}{\partial x_{\alpha_1}} \dfrac{\partial}{\partial x_{\alpha_2}}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial x_{\alpha_l}}, \\ \text{si } |\alpha| = 1, \quad \text{on pose} \quad D^i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}. \end{cases}$$

Soit u une distribution sur Ω ayant des dérivées d'ordre k mesurables vérifiant :

$$\sum_{|\alpha|=k}\int |D^\alpha u|^{p_k} h_k < \infty\,; \qquad p_k \geqslant 1$$

h_k étant la dernière composante d'un multi-poids (h). Comme (Définition 1) $h_k^{-1} \in \mathcal{L}^\infty$ localement, les $|D^\alpha u|$ pour $|\alpha| = k$ sont de puissance p_k sommable localement dans Ω; il résulte du théorème de Kryloff-Schwartz, c. f. (I, 1, 1-1), que les dérivées d'ordre inférieur le sont aussi (et sont même un peu mieux).

Soit $(p) = (p_0, p_1, \ldots, p_k)$, $p_i \geqslant 1$ et $h = (h_0, \ldots, h_k)$; on suppose de plus que :

$$(19)\quad \begin{cases} \|u\|_{(h),(p)} = \sum\limits_{i=0}^{i=k}\left[\int h_i \sum\limits_{|\alpha|=i} |D^\alpha u|^{p_i}\right]^{\frac{1}{p_i}} < \infty. \\ \text{Si}\quad \forall i,\ p_i = p \quad \text{on pose}\quad \|u\|_{(h),(p)} = \|u\|_{(h),p} \\ \text{et si}\quad p = 2 :\quad \|u\|_{(h),2} = \|u\|_{(h)}. \end{cases}$$

Définition 2. — *Soit (h), (p); on désigne par $W_{(h),(p)}(\Omega)$ l'espace vectoriel topologique des distributions $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, dont les dérivées d'ordre $\leqslant k$ sont mesurables, telles que $\|u\|_{(h),(p)} < \infty$, muni de la topologie la moins fine telle que l'injection dans $\mathcal{D}'$ et la semi-norme $u \to \|u\|_{(h),(p)}$ soient continues;*

si $p_i = p$, on le note $W_{(h),p}(\Omega)$;

si $p = 2$, $W_{(h)}(\Omega)$; enfin $W_{(h),(p)}(\Omega)$ peut s'écrire $W_{(h),(p)}$, s'il n'y a pas de doute sur Ω; ces espaces sont dits du type W.

Proposition 2. — *(h) étant un multi-poids sur Ω, l'espace $W_{(h),(p)}(\Omega)$ est complet.*

La démonstration se fait comme dans [64], exposé 11, compte tenu de la proposition 1.

Les propositions 1 et 2 justifient la définition suivante :

Définition 3. — *Soit (h) un multi-poids, avec $h_0^{-1} \in \mathcal{L}^\infty$ localement; on désigne par $W_{(h)}(\Omega)$ l'espace de Hilbert des distributions u dont les dérivées d'ordre $\leqslant k$ sont mesurables, vérifient $\|u\|_{(h)} < \infty$ le produit scalaire étant :*

$$(20)\qquad (u|v)_{(h)} = \sum_{j=0}^{j=k}\sum_{|\alpha|=j}\int h_j\, D^\alpha u\, D^\alpha \bar{v}.$$

REMARQUE 1. — Soit $j_1 < j < j_2 \leqslant k$.

Dans le cas où $h_{j_1} = h_{j_2} = 1$, on sait d'après des inégalités connues, que si des T_j convergent pour la norme $\|u\|_{(h)}$, les $D^\alpha T_j$ pour $|\alpha| = j$ convergent dans $L^2(\Omega)$. Il en résulte que si $h_{j_1}^{-1}$ et $h_{j_2}^{-1} \in \mathcal{L}^\infty$ localement, et si les T_j convergent pour $\|.\|_{(h)}$, les $D^\alpha T_j$ convergent localement dans L^2. Mais on peut se poser la question suivante pour avoir un résultat global : trouver les h_j, $h_j^{-1} \in \mathcal{L}^\infty$ localement pour lesquels il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $u \in W_{(h)}$:

$$\sum_{|\alpha|=j} \int h_j |D^\alpha u|^2 \leqslant C \sum_{|\alpha|=j_1} \int h_{j_1} |D^\alpha u|^2 + C \sum_{|\alpha|=j_2} \int h_{j_2} |D^\alpha u|^2.$$

DÉFINITION 4. — *Soit* (h) *un multi-poids sur* Ω. *On désigne par* $W^0_{(h),(p)}$ *l'espace de Banach complété de* $\mathcal{D}(\Omega)$ *pour la norme :* $\varphi \to \|\varphi\|_{(h),(p)}$ *définie par* (19). *Si* $\forall i$, $p_i = p$, *on le note* $W^0_{(h),p}$; *si* $p = 2$ *on le note* $W^0_{(h)}$ *et on le considère comme un espace de Hilbert muni de* (20); *ces espaces sont dits du type* W^0.

Cette définition est justifiée, car $\varphi \to \|\varphi\|_{(h),(p)}$ est une norme sur $\mathcal{D}(\Omega)$: si $\|\varphi\|_{(h)} = 0$, comme φ est à support compact, et $h_k^{-1} \in \mathcal{L}^\infty$ localement, pour tout α tel que $|\alpha| = k$, $\int |D^\alpha \varphi|^{p_k} = 0$ donc, $\varphi = 0$.

Problème 1. — Il résulte de la définition 3 ou de 4 que $W_{(h)}$ est un espace de distributions. Il n'en est pas nécessairement de même de $W^0_{(h)}$ d'où la question : pour quels multi-poids (h) définis dans un ouvert donné Ω, $W^0_{(h),(p)}$ est-il un espace de distributions, l'injection étant continue? Ce problème sera étudié au nº 3 du § 2 du même chapitre. On y donnera des exemples simples de multi-poids pour lesquels $W^0_{(h),(p)}$ n'est pas un espace de distributions, et des conditions qui, si elles sont vérifiées par (h), entraînent : $W^0_{(h),(p)} \subset \mathcal{D}'$.

DÉFINITION 5. — *On dit qu'un multi-poids* (h) *est assez lourd (sous-entendu : au bord),* (p) *étant donné, si* $W^0_{(h),(p)}$ *est un espace de distributions.*

Cette terminologie sera justifiée par les théorèmes 1 et 2 de (I, 2, 3); si (h) est assez lourd, $W^0_{(h),(p)}$ est un espace normal de distributions; le dual $W^{0\prime}_{(h),(p)}$ s'identifie à un espace de distributions.

3. 2. Propriétés générales.

a) *Possibilité d'appliquer le théorème du graphe fermé.*

Proposition 3. — *L'espace* $W_{(h),(p)}$ *est métrisable.*

Démonstration. — Soit Ω_i un système fondamental dénombrable d'ouverts relativement compact dans Ω; considérons les semi-normes sur $W_{(h),(p)}$:

$$u \to \int_{\Omega_i} |u|\, dx$$

d'après le théorème de Krylov-Schwartz, elles définissent avec la semi-norme $\|u\|_{(h),(p)}$ une topologie équivalente à celle de $W_{(h),(p)}$; la topologie est alors métrisable; c. f. [7].

Comme ces espaces sont complets, ils pourront intervenir dans des applications du théorème du graphe fermé [7].

b) *Espaces de type local.*

Un espace de distributions $E \subset \mathcal{D}'$ est dit de type local si pour tout $u \in E$ et tout $\varphi \in \mathcal{D}$, $u\varphi \in E$.

Si on peut appliquer le théorème du graphe fermé aux applications de E dans E (c. f. [19] et [23]) et si E est de type local, l'application $u \to \varphi u$ est alors continue de E dans E, puisque le graphe de cette application est fermé dans $\mathcal{D}' \times \mathcal{D}'$, donc à fortiori dans $E \times E$. C'est le cas si E est du type W ou W^0.

Proposition 4. — *Soit* (h) *un multi-poids; alors,* $W_{(h),(p)}$ *est un espace de type local; il en est de même de* $W^0_{(h),(p)}$, *si* (h) *est tel que* $W^0_{(h),(p)}$ *soit un espace de distributions.*

Démonstration. — Si u est dans l'un ou l'autre de ces espaces, $D^\alpha u$ est localement dans $\mathcal{L}^{p_k}$ pour $|\alpha| = k$; d'après le théorème de Krylov-Schwartz, il en est de même de $D^\beta u$ pour $|\beta| \leqslant k$; même raisonnement relativement aux $h_i \not\equiv 0$ (h_i^{-1} est alors localement borné); il suffit alors d'appliquer la formule de Leibniz à $u\varphi$ pour achever la démonstration.

c) *Ordre des éléments.*

La notion d'ordre pour la mesure étant locale, on voit facilement que les éléments de $W_{(h),(p)}$ ou $W^0_{(h),(p)}$ sont d'ordre $\geqslant k$; ceux de leurs duaux sont d'ordre $\geqslant -k$.

3. 3. COMPARAISON DES ESPACES DU TYPE W OU DU TYPE W^0 (SUR UN MÊME OUVERT).

a) *Comparaison de deux espaces du type* W.

PROPOSITION 5. — *Soit p tel que $1 \leqslant p < +\infty$. Pour que les espaces $L^p(h_1\,dx)$ et $L^p(h_2\,dx)$ soient identiques, h_1 et h_2 étant localement intégrables et positives, il faut et il suffit que $g = h_1/h_2$ et h_2/h_1 soient dans $\mathfrak{L}^\infty(\Omega)$.*

Démonstration. — La condition est suffisante : elle entraîne l'inclusion des espaces $L^p(h_1\,dx)$ et $L^p(h_2\,dx)$ dans les deux sens. Elle est nécessaire : l'identité de ces deux espaces entraîne que tout ensemble $h_1\,dx$-négligeable est $h_2\,dx$-négligeable et inversement, on est donc dans les conditions du théorème de Lebesgue-Nikodym, les mesures $h_1\,dx$ et $h_2\,dx$ sont équivalentes, on a $h_1 = gh_2$ où g et g^{-1} sont localement dx-intégrables et > 0 presque partout pour dx. Donc, la multiplication par $g^{1/p}$ laisse stable $\mathfrak{L}^p(h_1\,dx)$, ou mieux la multiplication par g laisse stable $\mathfrak{L}^1(h_1\,dx)$; et il est connu (c. f. par exemple l'exercice nº 25 du § 5 de [6]) que g est alors presque partout égale à une fonction > 0 de $\mathfrak{L}^\infty$, de même que $\dfrac{1}{g}$·

Remarquons que deux mesures positives $h_1\,dx$ et $h_2\,dx$ peuvent être équivalentes sans que les L^p associés soient identiques; par exemple sur l'ouvert $> 0,1 <$ de R, dx et $x\,dx$ sont équivalentes, l'espace $L^p(x\,dx)$ étant évidemment plus grand que $L^p(dx)$.

Supposons les multi-poids (h) et $(\tilde{h})$ tels que $W_{(h),(p)} \subset W_{(\tilde{h}),(\tilde{p})}$: le graphe de l'injection est fermé, puisqu'il l'est pour les topologies induites par $\mathfrak{D}'$. On a donc, en utilisant la proposition 5 :

PROPOSITION 6. — *Soit (h) et $(\tilde{h})$ deux multi-poids sur Ω; pour que $W_{(h),(p)} \subset W_{(\tilde{h}),(\tilde{p})}$, il faut et il suffit qu'il existe une constante C telle que pour toute fonction u de $W_{(h),(p)}$, on ait :*

$$\|u\|_{(\tilde{h}),(\tilde{p})} \leqslant C\|u\|_{(h),(p)}. \tag{21}$$

REMARQUE 2. — Supposons par exemple $(h) = (0, 0, \ldots, 0, h_k)$ et $(\tilde{h}) = (0, 0, \ldots, 0, \tilde{h}_k)$; si $k = 0$, on est dans le cas de la proposition 5; pour que $W_{(h)} \subset W_{(\tilde{h})}$, il faut et il suffit que $\tilde{h}_0 = gh_0$ où $g \in \mathfrak{L}^\infty$; si $k \geqslant 1$, on montre facilement que le résultat est encore vrai pour $n = 1$; mais si $k \geqslant 1$, $n = 1$, il paraît moins commode de se placer dans les conditions du théorème de Nikodym ou de contredire à (21).

Si l'on prend la fonction caractéristique d'un ensemble mesurable, elle sera dérivée d'ordre k, par rapport à x_1 par exemple, d'une distribution T qui n'aura pas de raison d'être dans $W_{(h),(p)}$, à cause de l'irrégularité des autres dérivées de T.

On peut cependant énoncer le corollaire évident de la proposition 6 :

Corollaire 1. — *Soit deux multi-poids* (h) *et* $(\tilde{h})$, *avec* $\tilde{h}_i = g_i h_i$, *les* g_i *étant dans* $\mathcal{L}^\infty$; *alors* $W_{(h),(p)} \subset W_{(\tilde{h}),(p)}$ *et, si* (h) *et* $(\tilde{h})$ *sont analogues,* $W_{(\tilde{h}),(p)} = W_{(h),(p)}$.

En particulier, supposons les multi-poids localement bornés; ce qui arrive fréquemment :

Corollaire 2. — *Soit deux multi-poids* (h) *et* $(\tilde{h})$ *localement bornés et identiques dans le complémentaire d'un compact de* Ω; *alors* $W_{(\tilde{h}),(p)} = W_{(h),(p)}$.

En d'autres termes, pour des multi-poids (h) localement bornés, l'espace $W_{(h),(p)}$ ne dépend que du germe du multi-poids défini pour le filtre des complémentaires des compacts de Ω.

b) *Comparaison de deux espaces du type* W^0.

Supposons (c. f. Problème 1) que $W^0_{(h)\,(p)} \subset W^0_{(\tilde{h}),(\tilde{p})}$ soient deux espaces de distributions; le graphe de cette injection est alors fermé, pour la même raison que plus haut, ce qui démontre une partie de la proposition suivante :

Proposition 7. — *Soient* (h) *et* $(\tilde{h})$ *deux multi-poids tels que* $W^0_{(h),(p)}$ *et* $W^0_{(\tilde{h}),(\tilde{p})}$ *soient des espaces de distributions, pour que* $W^0_{(h),(p)} \subset W^0_{(\tilde{h}),(\tilde{p})}$ *il faut et il suffit que l'on ait l'inégalité* (21) *pour toute u prise dans* $\mathfrak{D}(\Omega)$.

Pour démontrer « il suffit », on prolonge l'application identique de $\mathfrak{D}$ en $W^0_{(\tilde{h}),(\tilde{p})}$, continue d'après (21). Comme $W^0_{(h),(p)} \subset \mathfrak{D}'$ par hypothèse, il est immédiat que l'on a une injection, sans avoir à utiliser les lemmes de (I, 2, 1).

Corollaires 1′ et 2′. — *Les mêmes que les précédents, en rajoutant l'indice* ^{0} *aux notations.*

REMARQUE 3. — (c. f. Remarque 1); il se pose la question suivante, à laquelle il sera répondu pour des catégories de poids particulières, (h) étant donné et tel que $W^0_{(h)} \subset \mathfrak{D}'$, trouver les $(\tilde{h})$ tels que $W_{(\tilde{h})} \subset W_{(h)}$ ou inversement; i. e. tels que l'on ait (21) ou la majoration opposée; dans une perspective un peu différente, on peut introduire des poids dans les questions de coercivité; c. f. [1].

c) *Comparaison de* $W_{(h),(p)}$ *et* $W^0_{(h),(p)}$.

Dans le cas où $h = (1, 1, \dots, 1, 1) = (1)_{k+1}$, $W_h = \mathcal{E}^k_{L^2}(\Omega)$ et $W^0_{(h)} = \hat{\mathfrak{D}}^k_{L^2}(\Omega)$; on sait que si $u \in \mathcal{E}^k_{L^2}(\Omega)$, on peut définir une trace τu sur $\dot{\Omega}$, si la frontière $\dot{\Omega}$ est régulière de même que pour les dérivées de u d'ordre inférieur à k; un élément de $\hat{\mathfrak{D}}^k_{L^2}(\Omega)$ est caractérisé par la propriété d'être dans $\mathcal{E}^k_{L^2}(\Omega)$ et que ces traces soient nulles c. f. [64]. La notion de trace peut disparaître, mais nous poserons le problème suivant, et l'étudierons au § 3 :

Problème 2. — Caractériser les éléments de $W^0_{(h),(p)}$ au sens suivant :

DÉFINITION 6. — *Par caractériser les éléments de* $W^0_{(h),(p)}$, *on entend démontrer une proposition du type suivant :*

$$(22) \quad \begin{cases} u \in W^0_{(h),(p)} \Longleftrightarrow u \in W_{(h),(p)} \text{ et } u \text{ satisfait à certaines} \\ \quad \text{propriétés au bord de } \Omega. \end{cases}$$

Le problème 2 ne se pose que si $W^0_{(h),(p)} \subset \mathfrak{D}'$. C'est en effet nécessaire et suffisant pour que $W^0_{(h),(p)} \subset W_{(h),(p)}$; $W^0_{(h),(p)}$ est alors l'adhérence de $\mathfrak{D}$ dans $W_{(h),(p)}$.

Dans le cas classique cité plus haut, on a $\mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega) \neq \hat{\mathfrak{D}}^1_{L^2}(\Omega)$ si Ω est borné; si Ω est R^n les espaces sont identiques.

DÉFINITION 7. — *On dit que le multi-poids* (h) *annule au bord si* $W^0_{(h),(p)}$ *est un espace de fonctions nulles au bord* (*c. f.* (I, 3, 2) *définition* 1). *On dit que le multi-poids* (h) *est suffisant si on a* $W_{(h),(p)} = W^0_{(h),(p)}$.

On verra que ces notions sont distinctes [c. f. Remarque 2 de (I, 2, 4)].

Notion de trace : c. f. (I, § 3, 1 et 2).

N° 4. Méthode des poids.

Ce qui suit sera utilisé au § 4, où les lettres p et q deviennent disponibles, les anciens exposant p étant pris égaux à 2. On ne s'occupe ici que du problème de Dirichlet homogène; pour le problème de Neumann, c. f. § 4.

4. 1. PROBLÈME DE DIRICHLET.

Comme nous le verrons en (I, 3, 2), l'introduction d'un multi-poids (h) dans la construction de $W^{\circ}_{(h)}$ a pour effet de renforcer ou de diminuer la condition de nullité au bord de ses éléments.

Parallèlement à l'introduction de multi-poids dans la construction des espaces, il nous faut introduire des poids p et q un peu plus réguliers que (h), dans la forme $a(u, v)$ utilisée; c'est l'objet de ce numéro de le montrer sur l'exemple des opérateurs elliptiques à coefficients constants du deuxième ordre.

$$(23)\quad \begin{cases} \tilde{A} = -\sum_{i,j} a_{ij}\, D^i D^j + a_i D^i + a_0 \\ \text{les } a_{ij}, a_i, a_0 \text{ étant des nombres complexes.} \end{cases}$$

considérons la forme sesquilinéaire formelle sur $F \times G$:

$$(24)\quad a(u, v) = \int \sum_{i,j} a_{ij} D^i u D^j \bar{v} + \int \sum_i a_i D^i u . \bar{v} + \int a_0 u . \bar{v}.$$

Si (h) est un multi-poids de longueur 2 assez lourd, $W^{\circ}_{(h)}$ est un espace de distributions, et (24) est définie sur $F \times G$ avec $F = W_{(h)}$ et $G = \mathfrak{D}$; elle est continue en v pour la topologie de $\mathfrak{D}$, on peut donc lui associer comme au numéro 1 un opérateur qui n'est autre que $\tilde{A}$, envoyant $W^{\circ}_{(h)}$ dans $\mathfrak{D}'$.

Considérons maintenant la forme :

$$(25)\quad \begin{cases} \hat{a}(u, v) = a(pu, qv),\ a(\ ,\ ) \text{ donnée par (24), où } p \\ \quad \text{et } q \text{ sont deux fonctions une fois continûment} \\ \quad \text{différentiables, avec } p > 0,\ q > 0 \text{ dans } \Omega; \end{cases}$$

les conditions de régularités de p, q et des éléments de $W^{\circ}_{(h)}$ sont alors suffisantes pour que $\hat{a}(u, v)$ soit définie sur $W^{\circ}_{(h)} \times \mathfrak{D}$, et soit continue en v sur $\mathfrak{D}$, donc :

PROPOSITION 1. — *Si (h) est assez lourd, l'opérateur $\hat{A}$ associé à la forme $\hat{a}(u, v)$ est $q\tilde{A}p$.*

DÉFINITION 1. — *L'opérateur* $\tilde{A}$ *défini par* (23) *est dit* $(p, q, W^0_{(h)})$*-continu si la forme* $\hat{a}(u, v)$ *est continue sur* $\mathfrak{D} \times \mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}$ *étant muni de la topologie de* $W^0_{(h)}$. ($\hat{a}$ *est alors définie et continue sur* $W^0_{(h)} \times W^0_{(h)}$.)

DÉFINITION 2. — *L'opérateur* $\tilde{A}$ *défini par* (23) *est dit* $(p, q, W^0_{(h)})$*-coercif, si la forme sesquilinéaire* $\hat{a}(u, v)$ *est* $\mathfrak{D}$*-coercive.* (*Conférer définition* 2 *de* (I, 1, 1)), $\mathfrak{D}$ *ayant la structure préhilbertienne induite par* $W^0_{(h)}$.

PROPOSITION 2. — *Si* $\tilde{A}$ *est* $(p, q, W^0_{(h)})$*-continu et* $(p, q, W^0_{(h)})$*-coercif, la forme* $\hat{a}(u, v)$ *est* $W^0_{(h)}$*-coercive.*

Démonstration. — Il suffit de passer à la limite dans les deux membres de l'inégalité de coercivité.

Le théorème 1 de (I, 1, 1) prend alors la forme suivante :

THÉORÈME 1. — *Soit* (h) *un multi-poids assez lourd,* $p > 0$ *et* $q > 0$ *deux fonctions une fois continûment différentiables dans* Ω, *tels que l'opérateur* $\tilde{A}$ *soit* $(p, q, W^0_{(h)})$*-continu et* $(p, q, W^0_{(h)})$*-coercif. Alors, l'opérateur* $q\tilde{A}p$ *est un isomorphisme de* $W^0_{(h)}$ *sur son dual.*

DÉFINITION 3. — *Soit* E *un espace de distributions d'ordre* — k, *sur* Ω, *et* q *une fonction* k *fois continûment différentiable, (strictement) positive dans* Ω. *On appelle* qE *l'espace image de* E *dans l'application biunivoque* $T \to qT$ *de* $\mathfrak{D}'^k$ *sur* $\mathfrak{D}'^k$, *muni de la topologie transportée* (qE *est donc un espace de distributions*).

COROLLAIRE DU THÉORÈME 1. — *Dans les mêmes hypothèses,* $\tilde{A}$ *est un isomorphisme de* $pW^0_{(h)}$ *sur* $\frac{1}{q} \cdot W^{0\prime}_{(h)}$.

De même, le théorème 2 de (I, 1, 1) prend la forme suivante :

THÉORÈME 2. — *Soit* (h) *un multi-poids assez lourd de longueur* 2, $p > 0$, $q > 0$, *deux fonctions continûment différentiables dans* Ω, *tels que* $\tilde{A}$ *soit* $(p, q, W^0_{(h)})$*-coercifs. Alors l'opérateur* $q\tilde{A}p$ *applique sur* $W^{0\prime}_{(h)}$.

COROLLAIRE. — *Dans les mêmes hypothèses,* $\tilde{A}$ *applique sur* $\frac{1}{q} W^{0\prime}_{(h)}$.

Il suffit pour passer des théorèmes 1 et 2 à leurs corollaires respectifs, de remarquer que l'on peut diviser par q une égalité de distributions, puisque $q > 0$; pour démontrer les théorèmes, on remarque que les hypothèses faites ici entraînent celles des théorèmes correspondants du n° 1; enfin, dans le cas du théorème 1, l'espace N n'est autre que $W^0_{(h)}$; (on a pris

$$H = V = W^0_{(h)},$$

algébriquement et topologiquement).

Proposition 3. — *S'il existe p, q, (h) satisfaisant aux conditions du théorème 2, tels que $\tilde{A}$ soit $(p, q, W^0_{(h)})$-coercif, l'opérateur $\tilde{A}$ est elliptique, i. e., pour tout $\xi \in R^n$,*

$$\mathcal{R}e \sum_{i,j} a_{ij}\xi_i\xi_j > c|\xi|^2 \qquad \text{avec} \qquad c > 0.$$

La démonstration se fait comme dans [21] en considérant une fonction $\alpha \in \mathcal{D}$ de support assez petit et en écrivant la relation de coercivité pour les fonctions $\alpha \exp. it\xi x$.

La proposition 3 signifie que l'introduction de poids ne permet pas de sortir du cadre des opérateurs elliptiques. Mais la propriété d'ellipticité n'affecte que les termes d'ordre supérieur de A, inversement, elle n'entraîne pas nécessairement une V-coercivité, à cause des termes d'ordre inférieur. En fait, d'introduire des poids nous permettra de rendre des opérateurs elliptiques à coefficients variables $(p, q, W^0_{(h)})$-coercifs alors qu'ils ne sont pas $(1, 1, W^0_{(0,1)})$-coercifs; c. f. (I, 4, 2-2).

4. 2. Discussion des deux méthodes, problèmes.

Continuité et coercivité. — Dans la suite du chapitre, nous nous préoccupons, un opérateur $\tilde{A}$ elliptique étant donné, de trouver des triplets p, q, (h) pour lesquels il soit continu et coercif au sens des définitions 1 et 2, ce qui permet alors de poser, pour ces opérateurs, le problème de Dirichlet dans le cadre commode des espaces de Hilbert, et du théorème des projections. Suivant les façons dont on aborde le problème, par la première ou la deuxième méthode, il suffit de vérifier certaines propriétés pour en obtenir d'autres. Mais si par la 2e méthode, on a obtenu un théorème d'existence et si l'unicité est démontrée par ailleurs, on n'est pas pour autant ramené à appliquer la première méthode; si de plus l'espace $\mathfrak{N}$ des solutions est fermé (alors $\mathfrak{N} = W^0_{(0,h)}$ car $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{N}$), on obtient par le théorème du graphe fermé la continuité (définition 1) [2]; comme on a déjà la $\mathfrak{D}$-coercivité, on a alors la $W^0_{(h)}$-coercivité (proposition 2).

En revanche, l'isomorphisme obtenu sans condition de coercivité n'entraîne pas nécessairement cette dernière (exemple au § 4); donc la 1re et la 2e méthode, mêmes étendues avec les poids, risquent d'être insuffisantes pour trouver tous les théorèmes d'isomorphisme possibles relativement à un opérateur différentiel donné.

D'autre part, la coercivité n'entraîne pas nécessairement la continuité (voir remarque 1 de (I, 4, 2-1).

Ces remarques montrent que les investigations doivent s'étendre à la recherche des triplets $(p, q, (h))$-admissibles (c. f. définition 4 un peu plus loin). Mais il y a plus : parmi ces derniers, il convient de passer au quotient pour la relation d'équivalence définie ci-après :

DÉFINITION 4. — *Un triplet p, q, (h) est dit admissible pour un opérateur $\tilde{A}$ et pour le problème de Dirichlet, si les espaces*

$$pW^0_{(h)} \quad \text{et} \quad \frac{1}{q}W^{0\prime}_{(h)} \quad \textit{sont isomorphes par } \tilde{A}.$$

DÉFINITION 5. — *Deux triplets p, q, (h) et $\tilde{p}$, $\tilde{p}$, $(\tilde{h})$, tous deux admissibles au sens de la définition 4 sont dits équivalents, s'il existe un isomorphisme i_1 de $pW^0_{(h)}$ sur $\tilde{p}W^0_{(\tilde{h})}$ et un isomorphisme i_2 de $\frac{1}{q}W^{0\prime}_{(h)}$ sur $\frac{1}{\tilde{q}}W^{0\prime}_{(\tilde{h})}$, tels que le diagramme suivant soit commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} pW^0_{(h)} & \overset{\tilde{A}}{\longleftrightarrow} & \dfrac{1}{q}W^{0\prime}_{(h)} \\ \updownarrow{\scriptstyle i_1} & & \updownarrow{\scriptstyle i_2} \\ \tilde{p}W^0_{(\tilde{h})} & \overset{\tilde{A}}{\longleftrightarrow} & \dfrac{1}{\tilde{q}}W^{0\prime}_{(\tilde{h})}. \end{array}$$

Nous trouverons ainsi au § 4 des théorèmes d'isomorphisme d'espaces de Hilbert dépendant apparemment de deux paramètres; on pourra déduire du § 3 que certains d'entre eux ne dépendent en fait que d'un paramètre.

[2] Cf. la remarque 1 de (1, 4, 2).

Problème 1. — Pour un opérateur $\tilde{A}$ donné, trouver les triplets admissibles.

Problème 2. — Trouver tous les triplets admissibles équivalents à un triplet admissible donné.

Remarque 1. — Nous avons introduit comme poids p et q deux fonctions à valeurs scalaires. Plus généralement, on peut introduire à leurs places deux opérateurs différentiels que nous notons P et Q; soit alors S un opérateur donné; on se propose de chercher des systèmes d'opérateurs P et, Q, H_i, $i = 1, 2, \ldots, N$, tels qu'il existe $c > 0$ et $C > 0$ tels que, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$(H_2) \qquad c \sum_{i=1}^{N} \int H_i\varphi . H_i\overline{\varphi} \leqslant \mathcal{R}e \int P\varphi . \overline{SQ\varphi}$$

$$(H_1) \qquad \left|\int P\varphi . \overline{SQ\psi}\right|^2 \leqslant C\Big(\sum_i \int |H_i\varphi|^2\Big)\Big(\sum_i \int |H_i\psi|^2\Big).$$

Le cas que nous traiterons correspond aux opérateurs P, Q d'ordre 0 mais à coefficient variable; en tout autre point de vue est celui des opérateurs d'ordre supérieur et à coefficients constants.

Exemple. — Supposons $P = S$, $Q = I$, $N = 1$, $H_1 = S$. On est alors simplement dans le cas du théorème d'anti-isomorphisme d'un espace de Hilbert avec son dual:

Soit $\mathcal{H}$ = le complété de $\mathcal{D}(\Omega)$ pour la norme $\varphi \to \int S\varphi\overline{S\varphi}$; c'est un espace de distributions si Ω est borné, d'après les inégalités d'Hörmander [29]; soit alors L dans le dual de $\mathcal{H}$, lui-même espace de distributions; il existe $u \in S\mathcal{H}$ (image de $\mathcal{H}$ pour l'opérateur S de $\mathcal{D}'$ dans $\mathcal{D}'$) tel que $S^*u = L$; pour le laplacien Δ, cet isomorphisme correspond au problème de Dirichlet pour Δ^2.

§ 2. — Critères pour $W^0_{(h)} \subset \mathcal{D}'$; lemmes de majoration; exemples d'espaces des types W^0 et W.

Sommaire. — Nous donnerons divers types de conditions suffisantes, pour lesquelles $W^0_{(h)}$ soit un espace de distributions; il faut que (h) soit tel que la norme $\|.\|_{(h),(p)}$ définie par (19) définisse une topologie sur $\mathfrak{D}$ plus fine que celle induite par $\mathfrak{D}'$: lorsque ceci est acquis, il faut qu'en complétant $\mathfrak{D}$, on obtienne une injection dans $\mathfrak{D}'$.

Les lemmes d'injection exposés au numéro 1 ramènent la question « $W^0_{(h),(p)} \subset \mathfrak{D}'$ » à la comparaison des topologies définies sur $\mathfrak{D}$ par $\|u\|_{(h),(p)}$ et $\mathfrak{D}'$.

Au numéro 2 sont groupés des lemmes de majoration qui servent dans toute la suite du chapitre, et en particulier au numéro 3, où l'on envisage certaines classes de poids pour lesquelles on peut comparer les topologies, ce qui nous fournit trois critères principaux.

Au numéro 4, on donne un exemple d'espace du type W qui est en même temps du type W^0, et dont les éléments sont nuls au bord.

N° 1. Lemmes d'injection.

Nous donnons deux variantes d'un même lemme, dont les conclusions sont identiques : injection de $W^0_{(h),(p)}$ dans $\mathfrak{D}'$; les hypothèses sont trop exigeantes en ce qui concerne la régularité du multi-poids dans le lemme 1; mais la démonstration est alors très simple; cet énoncé suffit pour de nombreuses applications : par exemple, si (h) est à composantes harmoniques (c. f. § 5).

LEMME 1. — *Soit $(h) = (h_0, h_1, \ldots, h_k)$, un multi-poids de longueur k, les composantes h_i étant ∞ — fois continûment différentiables. Supposons que la topologie déduite de la norme $\|.\|_{(h)}$ soit plus fine sur $\mathfrak{D}(\Omega)$ que celle induite par la topologie de $\mathfrak{D}'$. Alors, le prolongement de l'application identique de $\mathfrak{D}(\Omega)$ en $\mathfrak{D}'(\Omega)$ en application linéaire continue de $W^0_{(h)}$ dans $\mathfrak{D}'(\Omega)$ est une injection.*

Démonstration. — Soit θ le prolongement de l'application identique de $\mathfrak{D}$ dans $\mathfrak{D}'$, au complété $W^0_{(h)}$ de $\mathfrak{D}$ pour la norme $\|.\|_{(h)}$, soit $u \in W^0_{(h)}$ et supposons $\theta(u) = 0$ dans $\mathfrak{D}'(\Omega)$; montrons qu'alors $u = 0$ dans $W^0_{(h)}$: il suffit de montrer que $(u|\varphi)_{(h)} = 0$, pour toute $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$, puisque $\mathfrak{D}$ est dense dans $W^0_{(h)}$. Soit $\psi_n \in \mathfrak{D}(\Omega)$ une suite de fonctions approchant u dans $W^0_{(h)}$. On peut écrire :

$$(26) \qquad (\psi_n|\varphi)_{(h)} = \sum_{i=0}^{k} \sum_{|\alpha|=i} \int h_i D^\alpha \psi_n . D^\alpha \overline{\varphi}$$

d'où en intégrant par parties dans (26) :

$$(\psi_n|\varphi)_{(h)} = -\left\langle \theta(\psi_n),\ \sum_{i=0}^{k}\sum_{|\alpha|=i}(-1)^i \mathrm{D}^\alpha(h_i \mathrm{D}^\alpha\bar{\varphi})\right\rangle$$

la fonction figurant sous le signe Σ étant dans $\mathcal{D}$ et $\theta(\psi_n)$ convergeant à fortiori vers θu dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, *i. e.* vers 0 on a : $(u|\varphi)_{(h)} = 0$, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}$, donc $u = 0$ dans $\mathrm{W}^0_{(h)}$.

La démonstration précédente est à rapprocher de celle de [30], où $(h) = (0, 0, 0, \ldots, 0, 1)$. Elle est liée à celle de la proposition suivante, dont on déduit directement le lemme 1 :

Proposition 1. — *Dans les mêmes hypothèses que celles du lemme* 1 *précédent, les deux topologies* $\mathcal{T}_1$ *et* $\mathcal{T}_2$ *suivantes coïncident sur* $\mathrm{W}^0_{(h)}$ *:*

$\mathcal{T}_1$ *est définie par les semi-normes* $|(\,.\,|\varphi)_{(h)}|$, $\forall \varphi = \mathcal{D}$.

$\mathcal{T}_2$ *est la topologie la moins fine telle que* θ *soit continue en la considérant comme prenant ses valeurs dans* $\mathcal{D}'$ *faible*; (*pour* θ *voir le début de la démonstration précédente*).

Démonstration. — Le fait que $\mathcal{T}_1$ est plus fine que $\mathcal{T}_2$ résulte par exemple de [8], chapitre IV, proposition 6 du n° 2; pour montrer que $\mathcal{T}_2$ est plus fine que $\mathcal{T}_1$, on reprend l'intégration par parties de la démonstration précédente.

On peut rencontrer des (h) non indéfiniment différentiables pour lesquels on ait besoin de la conclusion du lemme 1; par exemple des (h) dont les composantes sont des distances au bord d'un ouvert à frontière assez mais non trop régulière; la topologie $\mathcal{T}_1$ peut alors très bien être strictement plus fine que $\mathcal{T}_2$, et la proposition 1 n'est plus vraie.

Lemme 1'. — *Soit* (p), $p_i \geqslant 1$ *et soit* (h) *un multi-poids de longueur* k *et tel que la topologie définie par* $\|.\|_{(h),(p)}$ *soit plus fine sur* $\mathcal{D}$ *que celle de* $\mathcal{D}'$. *Alors, le prolongement par continuité de l'application identique de* $\mathcal{D}$ *dans* $\mathcal{D}'$ *est une injection de* $\mathrm{W}^0_{(h),(p)}$ *dans* $\mathcal{D}'$.

Démonstration. — Soit $\mathcal{F}$ un filtre de fonctions u de $\mathcal{D}$, $\mathcal{F}$ étant un filtre de Cauchy pour la norme $\|u\|_{(h),(p)}$ et convergeant en outre vers 0 dans $\mathcal{D}'$; il suffit de montrer que $\mathcal{F}$ converge vers 0 pour $\|u\|_{(h),(p)}$; il suffit donc de vérifier que $\int h_i|\mathrm{D}^\alpha u|^{p_i}$ converge vers 0 suivant $\mathcal{F}$; $(|\alpha| = i)$; or, les $v = \mathrm{D}^\alpha u$

convergent vers 0 dans $\mathcal{D}'$ (comme les u); soit $h_i \not\equiv 0$, les v convergent vers v_0 dans $\mathcal{L}^{p_i}(h_i\, dx)$, donc vers v_0 dans $\mathcal{D}'$, puisque par définition d'un multi-poids, $h_i^{-1} \in \mathcal{L}^\infty$ localement. Donc $v_0 = 0$ dans $\mathcal{D}'$, v_0 est nul dans $\mathcal{L}^{p_i}(h_i\, dx)$ localement, donc nul dans $\mathcal{L}^{p_i}(h_i\, dx)$.

Remarque 1. — Dans ce dernier lemme, la structure hilbertienne de $W^0_{(h)}$ n'intervient pas; il n'y a pas les hypothèses de régularité de (h) faites dans le lemme 1 et il nous suffira largement; mais on peut se demander si on peut définir explicitement, i. e. sans utiliser l'axiome de choix, une topologie $\mathcal{T}$ sur $\mathcal{D}$ plus fine que celle de $\mathcal{D}'$ qui ne donne pas lieu à une injection du complété de $\mathcal{D}$ pour $\mathcal{T}$ dans $\mathcal{D}'$: la norme $\|\varphi\|_{L^2} + |\varphi(0)|$ montre que oui.

Remarque 2. — Le procédé employé pour définir $W^0_{(h)}$ consiste à compléter $\mathcal{D}$ pour la norme $\sqrt{K(\varphi \otimes \overline{\varphi})}$, K étant un noyau hermitien de type positif sur $\Omega \times \Omega$; il faut distinguer ce procédé, qui ne donne pas toujours un espace de distributions (c. f. § 2, n° 3), de celui qui consiste à compléter les $K_{x,y}.\ \varphi(x)$ pour la même norme; ce dernier procédé donne toujours un espace de distributions (non nécessairement normal), et l'injection est immédiate (c. f. [68]) (3).

N° 2. Lemmes de majoration et de transmission de majoration d'un compact de mesure non nulle à un compact.

Lemme 1. — *Soit $u(x)$ une fonction absolument continue de la variable réelle x, à valeurs complexes, admettant une dérivée localement intégrable u'; soit $p \geqslant 1$; Alors, il existe une constante* C *positive, inférieure ou égale à 2^p ne dépendant que de p, tels que pour tous réels a et x, on ait :*

$$(27) \qquad \begin{cases} |u(x)|^p \leqslant C|u(a)|^p + C|x-a|^{p/q}\displaystyle\int_a^x |u'(t)|^p\, dt. \\ \text{avec} \quad 1/p + 1/q = 1. \end{cases}$$

Si $p = 2$, la meilleure constante possible est $C = 2$.

(3) Pour la relation entre ces deux procédés, c.f. article ou exposés à paraître de M. L. Schwartz. En particulier, si le deuxième procédé donne un espace normal, le premier en donne le dual, qui est donc un espace de distributions.

Démonstration. — u est l'intégrale de sa dérivée :

$$u(x) = u(a) + \int_a^x u'(t)\,dt;$$

il suffit d'examiner le cas $p \neq 1$:
en écrivant $u' = 1 \times u'$ et en appliquant l'inégalité de Hölder, il vient :

$$|u(x) - u(a)| \leqslant |x - a|^{1/q}\Big[\int_a^x |u'(t)|^p\,dt\Big]^{1/p}$$

d'où

$$|u(x)|^p \leqslant \Big\{|u(a)| + |x - a|^{1/q}\Big[\int_a^x |u'(t)|^p\,dt\Big]^{1/p}\Big\}^p$$

d'où l'on déduit l'inégalité (27), avec $C = 2^p$, et avec $C = 2$ si $p = 2$; en effet, dans ce dernier cas on a

$$(A + B)^2 \leqslant 2(A^2 + B^2),$$

A et B étant deux nombres réels quelconques; si p est quelconque, on a :

$$(28) \quad (A + B)^p \leqslant 2^p(A^p + B^p); \qquad (A \geqslant 0, B \geqslant 0).$$

Montrons que si $p = 2$, la meilleure constante est $C = 2$: il suffit de considérer la fonction $u = t + 1$ et de prendre $a = 0$, $x = 1$.

Remarque. — En fait, on pourrait montrer que la constante 2^p est toujours trop grande dans (28), et supprimer de l'énoncé du lemme 1 les mots « ou égale ».

L'inégalité (27) pour $p = 2$ s'établit directement par le calcul des variations; on obtient de suite $C = 2$.

Corollaire. — *Soit* Ω *un ouvert borné de* R; *il existe une constante* $C > 0$, *ne dépendant que du diamètre de* Ω, *de* k, *et de* p, *telle que pour toute fonction* $u(t)$, k *fois différentiable, on ait, pour tous* x, $a \in \Omega$: $(j \leqslant k - 1)$

$$(29) \quad |u^{(j)}(x)|^p \leqslant C\Big[|u(a)|^p + |u'(a)|^p + \cdots + |u^{(k-1)}(a)|^p + \int_a^x |u^{(k)}(t)|^p\,dt\Big].$$

Démonstration. — Elle se fait par récurrence (il suffit d'examiner le cas $j = 0$) : pour $k = 1$, (29) résulte de (27) en majorant $x - a$ par le diamètre de Ω; pour passer de (29) à la même inégalité écrite avec $k+1$, on applique (27) à $u^{(k)}$ et l'on intègre entre a et x les deux membres de :

$$|u^{(k)}(t)|^p \leqslant C(|u^k(a)|^p + \int_a^x |u^{(k+1)}(t)|^p\, dt).$$

On peut aussi utiliser directement la formule :

$$u(x) = u(a) + u'(a)(x-a) + \cdots + u^{(k-1)}(a)(x-a)^{k-1}/(k-1)!$$
$$+ \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\int_a^x (t-x)^{k-1}u^{(k)}(t)\, dt.$$

Lemme 1'. — *Soit* $\Omega = R_+$, $0 < a < \infty$, $h(x)$ *une fonction mesurable positive sur* Ω : $h^{-1} \in \mathcal{L}^\infty$ *localement*; *soit* $C > 0$;

1° *pour que l'on ait, pour toute* $\varphi \in \mathcal{D}$

$$(30) \qquad |\varphi(a)|^p \leqslant C^p \int_0^a h|\varphi^{(k)}|^p\, dx, \qquad (p > 1)$$

il faut et il suffit que: $(1/p + 1/q = 1)$

$$(31) \quad \int_0^a h^{-q/p} dx < \infty, \quad C \geqslant \frac{1}{(k-1)!}\left[\int_0^a (x-a)^{q(k-1)}h^{-q/p}\, dx\right]^{1/q}.$$

2° *pour que l'on ait, pour toute* $\varphi \in \mathcal{D}$

$$(32) \qquad |\varphi(a)|^p \leqslant C^p \int_a^\infty h|\varphi^{(k)}|^p\, dx, \quad (p > 1)$$

il faut et il suffit que :

$$(33) \quad \int_a^\infty h^{-q/p}(x-a)^{(k-1)q}\, dx = J < \infty \quad \textit{et} \quad C \geqslant J^{1/q}/(k-1)!$$

Démonstration. — Soit $\mathcal{D}(\rangle 0, a\rangle)$ espace des fonctions indéfiniment différentiables dans $\langle 0, a\rangle$, et nulles dans un voisinage de 0. Soit E le complété de $\mathcal{D}(\rangle 0, a\rangle)$ pour

$$||\varphi||_E = \left(\int_0^a h|\varphi^{(k)}|^p\, dx\right)^{1/p}.$$

On cherche une condition nécessaire et suffisante pour que $|\varphi(a)| \leqslant C||\varphi||_E$: considérons l'application $\varphi \to M\varphi = h^{1/p}\varphi^{(k)}$ de $\mathcal{D}(\rangle 0, a\rangle)$ dans $\mathcal{L}^p(\langle 0, a\rangle)$; elle se prolonge par continuité en $u \to Mu$ de $E \to \mathcal{L}^p(\langle 0, a\rangle)$ et « $u \to 0$ dans E » est équivalent à « $Mu \to 0$ dans $\mathcal{L}^p(\langle 0, a\rangle)$ ». Alors, toute forme linéaire continue $u \to L(u)$ sur E est de la forme

$$L(u) = \langle g, Mu\rangle, \qquad g \in \mathcal{L}^q(\langle 0, a\rangle).$$

Donc,

$$\text{(i)}\qquad \begin{cases} L(\varphi) = \langle g,\ h^{1/p}\varphi^{(k)}\rangle = \langle F,\ \varphi^{(k)}\rangle \\ \text{avec}\quad F = gh^{1/p}, \qquad g \in \mathcal{L}^q(\langle 0,\ a\rangle) \end{cases}$$

et la condition $|\varphi(a)| \leqslant C||\varphi||_E$ équivaut à : il existe L de la forme (*i*) avec

$$\text{(ii)}\qquad L(\varphi) = \varphi(a)$$

et $C \geqslant ||g||_{L^q}$.

[La condition sur la constante résulte de ce que les $h^{1/p}\varphi^{(k)}$ sont denses dans $\mathcal{L}^p(\langle 0,\ a\rangle)$: en effet les fonctions de $\mathcal{D}(>0,\ a>)$, qui est dense, sont toutes des fonctions $\varphi^{(k)}$, avec $\varphi \in \mathcal{D}(>0,\ a>)$, et $h^{-1} \in \mathcal{L}^\infty$ localement.]

Donc, $D^kF = 0$ dans $\mathcal{D}'(>0,\ a<)$, et F est un polynôme de degré $\leqslant k-1$; de plus,

$$\langle F,\ \varphi^{(k)}\rangle = \varphi(a) \Longleftrightarrow F = (-1)^k(t-a)^{k-1}/(k-1)\,!$$

Une condition nécessaire et suffisante cherchée est que

$$\text{(iii)}\qquad (t-a)^{k-1}h^{-1/p} \in \mathcal{L}^q\,(>0,\ a<)$$

et

$$C \geqslant \frac{1}{(k-1)\,!}\left[\int_0^a (t-a)^{q(k-1)}h^{-q/p}\,dx\right]^{1/q}.$$

Comme $h^{-1} \in \mathcal{L}^\infty$ localement, la première condition est équivalente à $\int_0^a h^{-q/p}\,dx < \infty$.

2° Même démonstration, en remplaçant 0 par $+\infty$ dans les intervalles d'intégration; mais alors, il faut garder la première condition de (iii) sous sa forme, et elle dépend de k.

Remarque. — On aurait pu mettre dans le lemme 1′ des valeurs initiales comme dans le lemme 1 qui ne serait plus qu'un cas particulier de 1′, mais nous n'en avons pas besoin; le lemme 1 sera utilisé en particulier dans la démonstration du lemme de transmission de majoration, à la fin de ce numéro : les valeurs initiales ne seront pas nulles; 1′ sera utilisé au numéro suivant pour donner des exemples de $W^0_{(h),\,p} \subset \mathcal{D}'$; dans les deux cas nous n'avons pas besoin des meilleures constantes : il est seulement important que $\int_0^a h^{-q/p} < \infty$ soit nécessaire dans 1′.

Nous donnons maintenant un autre lemme de majoration, utilisé au paragraphe suivant, ainsi qu'au chapitre II. Dans le cas particulier $a = -2$, $b = 0$, ce lemme est à rapprocher d'un théorème du chapitre consacré aux inégalités obtenues par des méthodes variationnelles de Hardy, Littlewood et Polya [25].

Soit Ω un ouvert de la droite réelle; ce lemme discute de la validité de l'inégalité :

$$\int_\Omega x^a|\varphi|^p\,dx \leqslant C\int x^b\,|\varphi'|^p\,dx \tag{34}$$

écrite pour toute $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$, et du meilleur choix possible de la constante C; nous avons besoin de la meilleure constante, en particulier pour trouver tous les triplets p, q, (h) de la forme $p = x^a$, $q = x^b$, $(h) = (0, x^c)$, tels que le laplacien soit $(p, q, \overset{0}{W}_{(h)})$-coercif, x désignant la distance au bord d'un ouvert à frontière régulière; il nous avait servi initialement pour étudier les triplets $p = h_A^a$, $q = h_A^b$, $(h) = (0, h_A^c)$, h_A étant une fonction de Martin pour un ouvert à frontière régulière; mais ce cas sera étudié directement et dans des conditions beaucoup plus générales : (I, 2, 2), lemme 3.

Lemme 2. — *Soient a, b, C, p des nombres réels, $p > 1$, $C > 0$.*

1° *Soit $\Omega = R_+ = \{x|x > 0\}$; alors pour toute $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$, on a l'inégalité* (34), *si et seulement si :*

$$b = a + p;\ a \neq -1\ (\textit{donc}\ b \neq p-1);\quad C \geqslant \frac{p^p}{|a+1|^p}. \tag{35}$$

On a l'inégalité suivante, correspondant au cas exceptionnel $a = -1$:

$$\int_0^\infty x^{-1}|\varphi|^p\,dx \leqslant p^p\int_0^\infty x^{p-1}|\log x|^p|\varphi'|^p\,dx \tag{36}$$

qui est écrite avec la meilleure constante possible. Il existe des variantes de (36) *que l'on indique dans la remarque* 1.

2° *Soit Ω un ouvert borné de R_+, contenant un voisinage de* 0; *alors pour toute $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$, on a l'inégalité* (34), *si et seulement si :*

$$b \leqslant a + p;\qquad a \neq -1\quad \textit{ou}\quad b \neq p-1; \tag{37}$$

$$C\ \textit{assez grand et}\qquad C \geqslant \frac{p^p}{|a+1|^p}\quad \textit{si}\quad b = a+p,$$

et on a (36), *qui est écrite avec la meilleure constante, en remplaçant le domaine d'intégration par* Ω.

3° *Soit* $\Omega = \mathrm{R}$, *supposons* $a > -1$; *pour toute* $\varphi \in \mathcal{D}$, *on a :*

$$(38) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^a\, |\varphi|^p\, dx \leqslant \mathrm{C} \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^b\, |\varphi'|^p\, dx$$

si et seulement si les conditions (35) *sont réalisées.*

N. B. — L'inégalité (34) est généralisée dans la remarque 2, un peu plus loin.

Démonstration. — 1° Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathrm{R}_+)$, et $\lambda > 0$; soit φ_λ la fonction $x \to \varphi(\lambda x)$.

Si (34) a lieu pour toute φ_λ, il vient :

$$\int_0^\infty x^a |\varphi_\lambda|^p\, dx \leqslant \mathrm{C}\lambda^p \int_0^\infty x^b |\varphi'(\lambda x)|^p\, dx$$

et, par changement de variables, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}$ et tout $\lambda > 0$:

$$\int_0^\infty t^a |\varphi|^p\, dt \leqslant \mathrm{C}\lambda^{p+a-b} \int_0^\infty t^b |\varphi'|^p\, dt.$$

On a donc nécessairement $b - a = p$; sinon, en faisant tendre λ vers 0 ou $+\infty$, suivant que $p + a - b$ est respectivement positif ou négatif, on aboutit à l'absurdité $\int_0^\infty t^a |\varphi|^p\, dt = 0$ pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\mathrm{R}_+)$.

Supposons d'abord $a \neq -1$: soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathrm{R}_+)$, $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$, où φ_1 et φ_2 sont à valeurs réelles. On a $|\varphi| = \sqrt{\varphi_1^2 + \varphi_2^2}$. La fonction $|\varphi|$ est différente de 0 au plus dans une infinité dénombrable d'intervalles ouverts aux extrémités desquels elle s'annule; dans chacun de ces intervalles elle garde un signe constant et a une dérivée continue; soit $\langle a_n, b_n \rangle$ le $n^{\text{ième}}$ intervalle; $|\varphi|$ s'annulant en a_n et b_n, on peut écrire, en intégrant par parties :

$$\int_{a_n}^{b_n} x^a |\varphi|^p\, dx = -\frac{p}{a+1} \int_{a_n}^{b_n} x^{a+1}\, |\varphi|^{p-1}\, |\varphi|'\, dx.$$

Appliquons l'inégalité de Hölder :

$$\int_\Omega |fg|\, dx \leqslant \left(\int_\Omega |f|^r\, dx\right)^{1/r} \left(\int_\Omega |g|^s\, dx\right)^{1/s}$$

avec $r > 1$, $1/r + 1/s = 1$, en prenant : $r = p/(p-1)$, $s = p$, $f = x^{a-\frac{a}{p}} |\varphi|^{p-1}$, $g = x^{1+\frac{a}{p}} |\varphi|'$; il vient alors :

$$\int_{a_n}^{b_n} x^a |\varphi|^p \, dx \leqslant \frac{p}{|a+1|} \left(\int_{a_n}^{b_n} x^a |\varphi|^p \, dx \right)^{1-1/p} \left(\int_{a_n}^{b_n} x^{p+a} ||\varphi|'|^p \, dx \right)^{1/p}$$

d'où :

$$\int_{a_n}^{b_n} x^a |\varphi|^p \, dx \leqslant \frac{p^p}{|a+1|^p} \int_{a_n}^{b_n} x^{p+a} ||\varphi|'|^p \, dx$$

or, $||\varphi|'| = \dfrac{|\varphi_1\varphi_1' + \varphi_2\varphi_2'|}{\sqrt{\varphi_1^2 + \varphi_2^2}} \leqslant \sqrt{\varphi_1'^2 + \varphi_2'^2} = |\varphi'|$, d'après l'inégalité de Cauchy; en sommant sur tous les intervalles $\langle a_n, b_n \rangle$, il vient :

$$\int_0^\infty x^a |\varphi|^p \, dx \leqslant \frac{p^p}{|a+1|^p} \int_0^\infty x^{p+a} |\varphi'|^p \, dx.$$

Supposons maintenant $a = -1$: on procède comme ci-dessus :

$$\int_{a_n}^{b_n} x^{-1} |\varphi|^p \, dx = -p \int_{a_n}^{b_n} \log x \; |\varphi|^{p-1} |\varphi|' \, dx$$

on applique l'inégalité de Hölder avec $f = x^{-1+\frac{1}{p}} |\varphi|^{p-1}$, $g = x^{1-\frac{1}{p}} \log x \; |\varphi|'$ pour obtenir :

$$\int_{a_n}^{b_n} x^{-1} |\varphi|^p \leqslant p^p \int_{a_n}^{b_n} x^{p-1} |\log x|^p \, ||\varphi|'|^p \, dx$$

d'où l'inégalité (36).

N. B. — La démonstration précédente s'allège si $p = 2$: il suffit de démontrer les inégalités pour φ à valeurs réelles et d'ajouter membre à membre les inégalités écrites pour φ_1 et φ_2, si φ est à valeurs complexes. Le signe $|.|$ ne figurant pas, il est inutile de considérer les intervalles $\langle a_n, b_n \rangle$.

Il reste à montrer que les inégalités ont été obtenues avec la meilleure constante. Voyons par exemple ce que suggère le calcul des variations : l'équation d'Euler, écrite pour

$$\int_0^\infty (4x^2\varphi'^2 - \varphi^2) \, dx$$

c'est-à-dire pour (34) écrite dans les conditions (35) avec $a = 0$, $p = 2$, s'écrit $4x^2\varphi'' + 8x\varphi' + \varphi = 0$; en cherchant les solutions de la forme x^n, on trouve $n = -1/2$ deux fois; ce qui suggère de prendre une tronquée-régularisée de $1/\sqrt{x}$; de même l'équation d'Euler correspondant à

$$\int [4x\,|\log x|^2\,\varphi'^2 - \varphi^2/x]\,dx,$$

i. e. à (36) dans le même cas particulier, a pour solution générale :

$$\varphi = \mathrm{C}\log|\log x|/\sqrt{\log x} + \mathrm{D}/\sqrt{|\log x|}$$

en fait, nous utiliserons des fonctions x^λ correspondant aux équations d'Euler pour $\int_0^\infty x^2\varphi'^2 - \mathrm{C}\varphi^2$, et correspondant au cas où on a l'égalité dans les majorations de Hölder utilisées dans la démonstration. Il faut tronquer convenablement ces fonctions x^λ.

Montrons que pour (34), $\mathrm{C} = \dfrac{p^p}{|a+1|^p}$ est la meilleure constante :

Soit $0 < \eta < 1$; si $a > -1 - p$, considérons la fonction $\theta(x) = x^{-(a+1)/p}$ pour $\eta \leqslant x \leqslant 1$, et égale à $\eta^{-(a+1+p)/p}.x$ pour $0 \leqslant x \leqslant \eta$; régulière et de support borné pour $x \geqslant 1$; et prenons comme fonction $\varphi \in \mathfrak{D}(\mathrm{R}_+)$ une régularisée convenable $\tilde{\theta}$ de θ; on vérifie facilement que si $\eta \to 0$,

$$\int_0^\infty x^a\tilde{\theta}^p\,dx \sim -\log\eta \qquad \text{et} \qquad \int_0^\infty x^{a+p}\tilde{\theta}'^p\,dx \sim -\frac{|a+1|^p}{p^p}\log\eta$$

l'intégrale relative à l'intervalle $\langle 0, \eta\rangle$ étant de l'ordre de $\eta^{-(a+1+p)}\int_0^\eta x^{a+p}\,dx$: elle reste finie ($p > 1 \Rightarrow 1 + a + p > 0$).

Pour régulariser θ dans $\mathfrak{D}(\mathrm{R}_+)$, on peut procéder ainsi : on laisse θ inchangé pour $x \geqslant \eta$; pour $x \leqslant \eta$ on fait une affinité de la courbe représentative par rapport à l'axe $x = \eta$, avec un rapport que l'on prendra aussi voisin de 1 qu'il faut; puis on régularise le tout dans $\mathfrak{D}(\mathrm{R}_+)$; les intégrales calculées ainsi pour $\tilde{\theta}$ approchent d'autant qu'on veut celles calculées pour θ.

Considérons maintenant le cas $a \leqslant -1 - p$: on se ramène immédiatement au cas précédent, en remarquant, par le changement de variable $t = x^{a+1}$ que si p^p est la meilleure constante pour $a = 0$, $p^p/|a+1|^p$ est la meilleure constante pour tout $a \neq -1$.

Montrons que (36) est écrite avec la meilleure constante : s'il n'en était pas ainsi, par le changement de variable $t = \log x$, on infirmerait ce qui vient d'être montré pour $a = 0$.

2° La nécessité de $b \leqslant a + p$ s'établit par un argument d'homogénéité analogue à celui du 1° : on fait tendre λ vers l'infini, le support de φ_λ reste dans Ω.

Soit $b = a + p$; pour montrer que $C = p^p/|a + 1|^p$, on peut utiliser la démonstration précédente si $a > -1 - p$; en effet la suite de fonctions $\tilde{\theta}$ utilisée est telle que les supports des $\tilde{\theta}$ restent sur un compact fixe; il n'en est plus ainsi si $a < -1 - p$, le changement de variable utilisé au 1° intervertissant 0 et $+\infty$; nous construisons une autre suite de fonctions θ dont les supports sont dans Ω.

Soit $\alpha > 0$ tel que Ω contienne $\rangle 0, \alpha \langle$; soit $\lambda > 0$, considérons la fonction $\theta = x^\lambda$ dans l'intervalle $\langle 0, \alpha \rangle$, et fixe, régulière et de support compact dans Ω pour $x \geqslant \alpha$; soit $\alpha = 1$ pour simplifier les notations.

Supposons $a + p\lambda + 1 > 0$.

Alors on a

$$\int_0^1 x^a \theta^p \, dx = 1/(a + \lambda p + 1)$$

et
$$C \int_0^1 x^{a+p} \, \theta'^p \, dx = C\lambda^p/(a + \lambda p + 1)$$

on prend alors $\lambda p = |a + 1| + \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$; si on prend $C = p^p/|a + 1|^p$, $C\lambda^p = (1 + \varepsilon/|a + 1|)^p \to 1$ si $\varepsilon \to 0$; les deux intégrales sont alors des infiniments grands équivalents et les termes relatifs à $x > \alpha$, finis et fixes sont négligeables; comme $\lambda p = |a + 1| + \varepsilon > 0$, on vérifie sans peine que si on remplace θ par $\tilde{\theta}$ obtenue en faisant comme plus haut une affinité pour $x < 1$ par rapport à $x = 1$ et une régularisation, les intégrales calculées pour $\tilde{\theta}$ sont aussi voisines qu'on veut de celles calculées pour θ.

(Le raisonnement précédent peut être conduit si

$$|a + 1| + a + 1 = 0$$

soit si $a < -1$; les deux modes de construction pour θ utilisés sont applicables si $-1 - p < a < -1$.)

On montre que (36) est toujours écrite avec la meilleure constante en faisant par exemple le changement de variable $\log x = -1/t$, qui conserve un voisinage de 0, on est ramené au cas précédent $a \neq 1$; et ceci montre qu'il faut $a \neq -1$ ou $b \neq 1$.

Montrons que les conditions sont suffisantes : soit $a \neq -1$; d'après le 1°, on peut écrire :

$$\int_0^\infty x^a |\varphi|^p \, dx \leqslant \frac{p^p}{|a+1|^p} \int_0^\infty x^{a+p} \, |\varphi'|^p \, dx;$$

mais sur Ω, borné par hypothèse, on a $x^{a+p} \leqslant Cx^b$, puisque $b \leqslant a + p$, C étant une constante qu'il est facile de majorer à l'aide de la dimension de Ω; d'où le résultat; si maintenant $a = -1$, on utilise l'inégalité (36), et on utilise le fait qu'il existe $C > 0$ tel que $x^{p-1} \, |\log x|^p < Cx^b$, puisque $b \leqslant a + p$ et $b \neq p - 1$ entraîne $b < p - 1$.

3° La démonstration se fait aisément en reprenant les arguments utilisés dans 1°.

Remarque 1. — Le fait que $C = p^p$ soit la meilleure constante pour (36) prouve à fortiori qu'une inégalité du type (34) est impossible si $a = -1$, notons cependant qu'il existe d'autres inégalités du type (36) : considérons seulement le cas de $p = 2$; partons de (36) avec $\varphi = \alpha\psi$ où, φ, $\psi \in \mathfrak{D}(R_+)$; il vient : (fonctions réelles)

$$\int_0^\infty \psi^2[\alpha^2/x - 4x(\log x)^2\alpha'^2 + 4(x(\log x)^2\alpha\alpha')'] \, dx \leqslant 4\int_0^\infty x(\log x)^2\alpha^2\psi^{2\prime} \, dx$$

déterminons α de façon que $k^2\alpha^2/x = x(\log x)^2\alpha'^2$ il vient $\alpha = |\log x|^k$; pour que $\psi \in \mathfrak{D} \Longrightarrow \varphi \in \mathfrak{D}$ il faut $k > 0$; celà ne suffit pas à cause du point $x = 1$, mais on peut étendre (36) à cette classe de fonctions avec la seule condition $k > 0$; on obtient alors :

$$(36') \quad \int_0^\infty \frac{|\log x|^{2k}}{x} |\varphi|^2 \, dx \leqslant \frac{4}{(1+2k)^2} \int_0^\infty x|\log x|^{2k+2}|\varphi'|^2 \, dx; \quad k > 0;$$

en prenant k quelconque $\neq -1/2$, on peut écrire :

$$(36'') \quad \forall \varphi \in (>0, 1<), \quad \int_0^1 \frac{|\log x|^{2k}}{x} |\varphi|^2 \, dx \leqslant \frac{4}{(1+2k)^2} \int_0^1 x \, |\log x|^{2k+2}|\varphi'|^2 \, dx$$

pour $k = -\frac{1}{2}$, on a :

(36‴) $\forall \varphi \in \mathcal{D}(>0, 1<)$,
$$\int_0^1 \frac{|\varphi|^2}{x|\log x|}\, dx \leqslant 4 \int_0^1 x|\log x|\, (\log|\log x|)^2 |\varphi'|^2\, dx.$$

On a de même des inégalités correspondant à (36″) et (36‴) pour l'intervalle $x > 1$ et $\varphi \in \mathcal{D}(>1, \infty<)$.

Ces dernières inégalités peuvent s'établir directement comme (36), mais la façon dont nous les avons obtenues, ou tout au moins la façon inverse qui marche aussi, prouve que comme (36), elles sont écrites avec la meilleure constante, sauf peut-être pour (36‴) que nous n'avons pas étudiée; on démontre directement des inégalités analogues pour $p \neq 2$.

Remarque 2. — Une généralisation de l'inégalité de Hardy (4).

Soit α une fonction réelle sur R_+ de classe C^1 ayant une dérivée α' positive; soit $\varphi \in \mathcal{D}(R_+)$; le procédé que nous avons utilisé donne plus généralement, avec les notations utilisées plus haut :

$$\int_0^\infty \alpha'|\varphi|^p\, dx = \sum_{n=1}^\infty \int_{a_n}^{b_n} \alpha'|\varphi|^p\, dx = -\sum_{n=1}^\infty p \int_{a_n}^{b_n} \alpha|\varphi|^{p-1}\varepsilon|\varphi|'\, dx$$

en majorant avec l'inégalité de Hölder pour $r = \frac{p}{p-1}$, $s = p$, $f = (\alpha')^{(p-1)/p}|\varphi|^{p-1}$, $g = (\alpha')^{(1-p)/p}\alpha\varepsilon|\varphi|'$ et usant de $||\varphi|'| \leqslant |\varphi'|$, il vient pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(R_+)$:

(39) $$\int_0^\infty \alpha'|\varphi|^p\, dx \leqslant p^p \int_0^\infty (\alpha')^{1-p}|\alpha|^p|\varphi'|^p\, dx.$$

Appelons $D\mathcal{D}$ l'image dans $\mathcal{D}'$ de $\mathcal{D}(R_+)$ par l'opérateur d/dt; posons :

$$M = \alpha'^{1-p}|\alpha|^p; \qquad L^p_M(0, \infty) = \left\{ g \,\Big|\, \int_0^\infty M(x)|g|^p\, dx < \infty \right\}$$

(39) signifie alors que $f \to (\alpha'/|\alpha|) \int_0^x f(y)\, dy$ est continue de $D(\mathcal{D})$ muni de la norme L^p_M, dans L^p_M; on peut prolonger si $D(\mathcal{D})$ est dense dans L^p_M; on vérifie de suite qu'il en est ainsi si et seulement si $\int_0^\infty M^{-q/p}\, dx = +\infty$. Nous avons

(4) Cf. aussi P. R. Beesack, [91]. (Note après impression de thèse.)

donc obtenu l'énoncé suivant qui donne, si $\alpha = x^{1-p}$, l'inégalité de Hardy :

si $\int_0^\infty \mathrm{M}^{-q/p}\,dx = +\infty$, $1/p + 1/q = 1$, *l'application*

$$f \to (\alpha'/|\alpha|)\int_0 f(y)\,dy$$

est continue de $\mathrm{L}^p_{\mathrm{M}}$ *dans lui-même, et de norme* $\leqslant p$.

Applications de (39). — Cherchons en particulier α tel que les poids soient proportionnels dans les deux membres de (39) : il vient $\alpha' = \mathrm{C}|\alpha'|^{1-p}|\alpha|^p$; soit si $k > 0$: $\alpha = \exp kx$ ou $\alpha = -\exp(-kx)$; donc, pour toute $\varphi \in \mathfrak{D}(\mathrm{R})$ on a : (on passe facilement de R_+ à R, α étant régulière en 0) :

$$(40)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \exp kx\,|\varphi|^p\,dx \leqslant \frac{p^p}{|k|^p}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp kx\,|\varphi'|^p\,dx,$$

pour tout $k \neq 0$.

On reconnaît dans (40), généralisée pour $p \neq 2$, un cas très particulier des inégalités étudiées par Trèves dans sa thèse [73] où il détermine les opérateurs pouvant remplacer d/dx dans (40).

Si on prend $\alpha = \exp x^k$, il vient :

$$(41)\quad \int_0^\infty x^{k-1}\exp x^k\,|\varphi|^p\,dx \leqslant \frac{p^p}{|k|^p}\int_0^\infty x^{(k-1)(1-p)}\exp x^k\,|\varphi'|^p\,dx$$

une autre inégalité, étendue par Trèves à tout opérateur, s'écrit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp x^2\,|\varphi|^2\,dx \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \exp x^2\,|\varphi'|^2\,dx$$

pour toute $\varphi \in \mathfrak{D}(\mathrm{R})$; elle est différente de (41); il semble que l'existence de $\mathrm{C} > 0$ tel que

$$\forall\varphi \in \mathfrak{D}(\mathrm{R}_+),\quad \int_0^{+\infty} h|\varphi|^2\,dx \leqslant \mathrm{C}\int_0^\infty h|\varphi'|^2\,dx$$

est liée à une assez grande croissance ou une assez grande décroissance de h à l'infini; voyons si $h = \exp(-x^2)$ ne conviendrait pas (puisque $p = 2$, on suppose φ à valeurs réelles) : en posant $\varphi = \psi\exp(x^2/2)$, on est ramené à : existe-t-il $\mathrm{C} > 0$ telle que pour toute $\psi \in \mathfrak{D}(\mathrm{R})$.

$$(42)\quad (1 + \mathrm{C})\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^2\,dx \leqslant \mathrm{C}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'^2\,dx + \mathrm{C}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\varphi^2\,dx$$

or , il est possible d'avoir des inégalités de ce type : en écrivant :

$$\int_0^\infty \varphi^2\, dx = -2\int (x\varphi)\varphi'\, dx,$$

on obtient en majorant par Cauchy-Schwarz :

$$(43)\qquad \forall l > 0, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathrm{R}),$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi|^2\, dx < l\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi'|^2\, dx + l^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2|\varphi|^2\, dx.$$

Soit un couple (C, D) de constantes > 0 telles que :

$$(44)\quad \forall \varphi \in \mathcal{D},\ \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi|^2\, dx < \mathrm{C}\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi'|^2\, dx + \mathrm{D}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2|\varphi|^2\, dx$$

un tel couple est dit admissible pour (44); si (C, D) est admissible, pour tout $l > 0$, $\left(l\mathrm{C}, \frac{1}{l}\mathrm{D}\right)$ l'est aussi; on le voit par un argument d'homogénéité. Un couple (C, D) admissible est dit meilleur que le couple admissible (C′, D′), si $\mathrm{CD} \leqslant \mathrm{C'D'}$; les deux couples sont dits équivalents si $\mathrm{C.D} = \mathrm{C'.D'}$; nous avons établi (44) pour la classe d'équivalence du couple (1, 1) : pour avoir (42), il nous faudrait (et il nous suffirait de) démontrer l'existence d'un couple admissible pour (44), strictement meilleur que (1, 1). Or ceci est impossible :

Proposition. — *Pour que l'on ait* (44) *il faut et il suffit que* $\mathrm{C.D} \geqslant 1$.

Démonstration. — Substituons dans (44)

$$\varphi = \exp(-kx^2),$$

avec $k > 0$; cette fonction n'est pas dans $\mathcal{D}(\mathrm{R})$, mais il n'y a pas de difficulté à l'approcher par une suite de fonctions de $\mathcal{D}$ à supports de plus en plus grand, les intégrales figurant dans (44) ayant pour limites celles calculées pour $\exp(-kx^2)$, qui tend vers 0 à l'infini.

Le premier membre de (44) a pour valeur :

$$\mathrm{I} = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-2kx^2)\, dx;$$

or, en intégrant par parties : $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \exp(-2kx^2)\, dx = \mathrm{I}/4k.$

Le deuxième membre de (44) vaut donc

$$(4Ck^2 + D)I/4k;$$

en prenant $K = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{D}{C}}$, il vaut donc $\sqrt{CD}$; il faut donc $CD \geqslant 1$ et on sait que c'est suffisant.

Corollaire (5). — *Il n'existe pas de constante* $C > 0$ *telle que* $\forall \varphi \in \mathcal{D}(R)$, *on ait*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\ (-x^2)\ |\varphi|^2\, dx \leqslant C \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\ (-x^2) |\varphi'|^2\, dx.$$

Remarque 3. — La démonstration que nous avons donnée du lemme 2 présente des analogies avec celle du lemme 3, (où $n > 1$), et nous aurons à nous référer aux deux sortes de fonctions θ construites dans la 1re et 2e partie; aussi avons nous mis cette démonstration en premier plan : on peut en donner une autre de la première partie, en utilisant le changement de variable $x = \exp \xi$; (c. f. [82], page 532); on est ramené à montrer que ($\Phi(\xi) = \varphi(\exp \xi)$, $\Phi \in \mathcal{D}$) :

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\exp (a+1)\xi) |\Phi(\xi)|^p\, d\xi \leqslant C \int_{-\infty}^{+\infty} (\exp (a+1)\xi) |\Phi'(\xi)|^p\, d\xi$$

posons $a + 1 = \lambda p$, $(\exp \lambda\xi)\Phi' = \Psi$ et prenons alors :

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} (\exp - \lambda y) \Psi(y)\, dy, \qquad \text{si} \quad \lambda < 0$$

et $$\Phi(x) = -\int_{x}^{\infty} (\exp - \lambda y) \psi(y)\, dy, \qquad \text{si} \quad \lambda > 0$$

alors,

$$(\exp \lambda x)\, \Phi(x) = \begin{Bmatrix} 0 & \text{si} & x < 0 \\ \exp \lambda x & \text{si} & x > 0 \end{Bmatrix} * \Psi, \qquad \text{si} \quad \lambda < 0$$

et

$$(\exp \lambda x)\, \Phi(x) = -\begin{Bmatrix} \exp \lambda x & \text{si} & x < 0 \\ 0 & \text{si} & x > 0 \end{Bmatrix} * \Psi, \quad \text{si} \quad \lambda > 0$$

on doit montrer que l'application $\psi \to (\exp \lambda x)\psi$ est continue de $L^p(R)$ dans $L^p(R)$; cela résulte de ce que la

(5) Ce corollaire se voit directement par dualité : on a

$$d\left(\left(\exp -\frac{x^2}{2}\right) L^2\right) \Big/ dx \neq \left(\exp -\frac{x^2}{2}\right) L^2.$$

fonction $\{.\}$ est dans $L^1(R)$; et comme $\{.\}$ est de signe constant, la norme de l'application est l'intégrale de cette fonction, soit $p/|a+1|$.

COROLLAIRE DU LEMME 2. — *Soit k un entier positif, et $a \in R$, a différent des valeurs*

$$-1, \quad -1-p, \quad \ldots, \quad -1-(k-1)p;$$

il existe alors une constante $C > 0$ telle que pour toute $\varphi \in \mathfrak{D}(R_+)$ on ait :

$$\int_0 |\varphi|^p x^a \, dx < C \int_0^\infty |\varphi^{(k)}|^p x^{a+pk} \, dx. \tag{45}$$

Démonstration. — Il suffit d'appliquer k fois le lemme 2.

Dans le lemme 2 n'intervenait qu'une variable, les poids introduits étant, sauf dans les cas exceptionnels, des puissances de la variable; nous verrons (Remarque 4) que le lemme 2 est en partie un cas particulier du lemme suivant, où interviennent plusieurs variables et un opérateur différentiel A, homogène, du second ordre, elliptique, à coefficients constants réels, i. e., à peu de choses près, le Laplacien; nous utiliserons des espaces $W^0_{(h)}$ où $(h) = (0, h)$ avec $Ah = 0$, h devant être à valeurs réelles positives. On pourrait considérer des opérateurs elliptiques plus généraux (Remarque 6); mais il serait plus difficile d'étudier quelles sont les meilleures constantes. Nous nous plaçons dans le cas $p = 2$ (c. f. Remarque 5).

LEMME 3. — *Soit A un opérateur elliptique homogène du 2e ordre à coefficients constants réels, écrit sous la forme*

$$A = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} D^i D^j, \quad \Sigma a_{ij} \xi_i \xi_j \geqslant 0$$

où i et j prennent leurs valeurs indépendamment de 1 à n, de telle sorte que

$$a(u, v) = \sum_{i,j} \int_\Omega a_{ij} D^i u D^j \bar{v} \, dx$$

soit une forme de Dirichlet associée à A, i. e. sesquilinéaire hermitienne sur $\mathfrak{D}(\Omega) \times \mathfrak{D}(\Omega)$; soit h une sous-solution (i. e. $Ah \geqslant 0$), deux fois continûment différentiable, de A dans Ω, *réelle et positive; alors, si* $a > -1$, *pour toute* $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a :

$$(46) \quad \int_\Omega h^a |\mathrm{grad}_A h|^2 |\varphi|^2 \, dx \leqslant \frac{4}{|a+1|^2} \int_\Omega h^{a+2} |\mathrm{grad}_A \varphi|^2 \, dx$$

où $|\mathrm{grad}_A w|^2$ *désigne* $\sum_{i,j} a_{ij} D^i w D^j \overline{w}$; *Si h est sur-solution* (*i. e.* $Ah \leqslant 0$) *et si* $a < -1$, *on a encore* (46); *si* $a = -1$, *et si h est solution* (*i. e.* $Ah = 0$), (46) *peut être remplacée par :*

$$(47) \quad \int h^{-1} |\mathrm{grad}_A h|^2 |\varphi|^2 \, dx \leqslant 4 \int h \, |\log h|^2 \, |\mathrm{grad}_A \varphi|^2 \, dx.$$

Démonstration. — Il suffit de la faire pour φ à valeurs réelles puisque $p = 2$; si $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$, on ajoute membre à membre (46) écrite pour φ_1 puis pour φ_2. En intégrant par partie le terme $h^a D^i h$ dans chacun des termes d'indices i, j du premier membre de (46) : $(a \neq -1)$

$$(48) \quad \int_\Omega h^a |\mathrm{grad}_A h|^2 \varphi^2 \, dx = -\int_\Omega \Big(\sum_{i,j} a_{ij} D^i D^j h\Big) \frac{h^{a+1}}{a+1} \varphi^2 \, dx - \int_\Omega 2 \sum_{i,j} a_{ij} \frac{h^{a+1}}{a+1} D^j h . \varphi D^i \varphi \, dx;$$

majorons le deuxième terme du second membre : soit $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ et $\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ deux vecteurs de R^n; la forme bilinéaire symétrique sur $R^n \times R^n$: $\sum_{i,j} a_{ij} \xi_i \xi_j$ est positive par définition de l'ellipticité de A, donc on a l'inégalité de Schwarz :

$$\Big|\sum_{i,j} a_{ij} \xi_i \xi_j\Big| \leqslant \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij} \xi_i \xi_j} \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij} \eta_i \eta_j}$$

que nous appliquons, pour x donné aux vecteurs de composantes :

$$\xi = (\ldots, h^{a/2}(D^i h)\varphi, \ldots) \qquad \eta = (\ldots, h^{a/2+1} D^i \varphi, \ldots)$$

si h est sous-solution, le 1^er^ terme du 2^e^ membre de (48) est négatif si $a > -1$; il en est de même si h est sur-solution et $a < -1$; on a donc :

$$\int h^a |\mathrm{grad}_A h|^2 \varphi^2 \, dx \leqslant \frac{2}{|a+1|} \int \sqrt{h^a \varphi^2 |\mathrm{grad}_A h|^2} \sqrt{h^{a+2} |\mathrm{grad}_A \varphi|^2} \, dx;$$

en appliquant une nouvelle fois l'inégalité de Cauchy-Schwarz, en élevant au carré et simplifiant, il vient bien (46).

Le cas $a = -1$ se traite de façon analogue, le terme $\log h$ apparaissant au lieu de $\dfrac{h^a}{a+1}$ au cours de l'intégration par partie.

Le 1er terme intégré est alors $-\int_\Omega \mathrm{A}h.\log h.\varphi^2\,dx$: on prend $\mathrm{A}h = 0$, $\log h$ changeant de signe dans les cas nous intéressant.

REMARQUE 4. — Soit $n = 1$, $\mathrm{A} = d^2/dx^2$, $h = x$ sur $\Omega = \mathrm{R}_+$; on a $\mathrm{A}h = 0$; on retrouve un cas particulier du lemme 2.

REMARQUE 5. — Partons de $\mathrm{I} = \int h^a \sum_i |\mathrm{D}^i h|^2 |\varphi|^p$; h deux fois *c. d.*; (i. e. $\mathrm{A} = \Delta$); supposons $\varphi \geqslant 0$ pour simplifier; on peut intégrer I par partie, il vient, si $a \neq -1$:

$$\mathrm{I} = -\int \frac{h^{a+1}}{a+1} \Delta h\, \varphi^p - \int p \frac{h^{a+1}}{a+1} \sum_i (\mathrm{D}^i h).\varphi^{p-1}\mathrm{D}^i\varphi$$

le premier terme du 2e membre est négatif, si

$$(a+1)\,\Delta h \geqslant 0;$$

on majore chacun des autres à l'aide de l'inégalité de Hölder:

$$f = h^{a(p-1)/p}|\mathrm{D}^i h|^{2(p-1)/p}\varphi^{p-1}; \; g = h^{1+a/p}|\mathrm{D}^i h|^{(2-p)/p}\mathrm{D}^i\varphi$$

$r = \dfrac{p}{p-1}$, $s = p$; il vient :

$$\mathrm{I} \leqslant \frac{p}{|a+1|} \sum_i \left(\int h^a |\mathrm{D}^i h|^p \varphi^p\right)^{1-1/p} \left(\int h^{a+p} |\mathrm{D}^i h|^{2-p} |\mathrm{D}^i \varphi|^p\right)^{1/p}$$

certains termes du second membre pouvant être infinis à cause de $\mathrm{D}^i h$; si φ peut changer de signe, on considère séparément les domaines où elle est positive et négative; si φ est à valeurs complexes on procède comme au lemme 2; on a donc, en appliquant une nouvelle fois l'inégalité de Hölder avec les mêmes exposants à la sommation Σ, et en simplifiant :

PROPOSITION. — *Si h est une fonction positive vérifiant $(a+1)\Delta h \geqslant 0$ dans Ω, de classe C^2, si $a \neq -1$ et si*

$\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, *on a:*

$$(49) \quad \int h^a \sum_i (\mathrm{D}^i h)^2 |\varphi|^p \leqslant \frac{p^p}{|a+1|^p} \int h^{a+p} \sum_i |\mathrm{D}^i h|^{2-p} |\mathrm{D}^i \varphi|^p.$$

(*On voit sur* (49) *le rôle particulier joué par* $p = 2$: (46) *donne alors une majoration des dérivées d'une sous-solution h à partir de h, tandis que les dérivées de la sous-solution apparaissent au second membre de* (49) *pour* $p \neq 2$.)

Remarque 6. — Nous avons utilisé pour simplifier la positivité de la forme quadratique $\Sigma a_{ij}\xi_i\xi_j$ sur $\mathrm{R}^n \times \mathrm{R}^n$; cette propriété peut disparaître pour les opérateurs d'ordre supérieur (c. f. L. Gårding [21], p. 61); soit un opérateur elliptique homogène d'ordre m à coefficients réels constants $\mathrm{A} = (-1)^m \Sigma a_{\alpha\beta} \mathrm{D}^\alpha \mathrm{D}^\beta$, écrit de telle façon que $\Sigma a_{\alpha\beta} \mathrm{D}^\alpha u \mathrm{D}^\beta \overline{v}$ soit sesquilinéaire hermitienne sur $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$ et permette de définir une intégrale de Dirichlet

$$a(u, v) = \int \Sigma a_{\alpha\beta} \mathrm{D}^\alpha u \mathrm{D}^\beta \overline{v};$$

$\Sigma a_{\alpha\beta} \xi^\alpha \xi^\beta$ n'est pas nécessairement positive sur $\mathrm{R}^{n^m} \times \mathrm{R}^{n^m}$, mais en utilisant la définition de l'ellipticité et la transformation de Fourier, on peut majorer, pour $\varphi, \psi \in \mathcal{D}$, $|a(\varphi, \psi)|^2$ par $\mathrm{C}a(\varphi, \varphi).a(\psi, \psi)$, la détermination de la meilleure constante C posant un problème purement algébrique; nous aurions pu nous contenter de cette majoration dans la démonstration précédente.

Dans le cas $a = 0$, et sans préoccupation de la meilleure constante, l'inégalité (46) est à rapprocher de celles utilisées pour démontrer l'hypoellipticité des opérateurs elliptiques. On peut obtenir ce type de majoration pour des opérateurs à coefficients variables bornés, c. f. K. O. Friedrichs [20].

Nous améliorons maintenant le lemme 3 en ce qui concerne la régularité de h, dans le cas du laplacien; le cas de l'opérateur A du lemme 3 s'y ramène par une transformation linéaire de R^n.

LEMME 3'. — 1° *Soit h une fonction sous-harmonique supposée non négative dans l'ouvert Ω de R^n; soit $a > -1$, alors, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, les deux membres de* (50) *ont un sens, et on a:*

$$(50) \qquad \int_\Omega h^a |\text{grad } h|^2 |\varphi|^2 \, dx \leqslant \frac{4}{(a+1)^2} \int_\Omega h^{a+2} |\text{grad } \varphi|^2 \, dx$$

2° *même énoncé en changeant « sous-harmonique » en « surharmonique » et la condition $a > -1$ en $a < -1$. De plus, h et h^{-1} sont supposés localement bornées.*

Démonstration. — On sait d'après (46) que (50) a lieu pour h deux fois continûment différentiable; la méthode consistera à approcher h par des régularisées. On sait que toute distribution sous-harmonique h est limite décroissante d'une suite h_k de fonctions sous-harmoniques indéfiniment dérivables, presque partout: on prend $\alpha(r)$, fonction $\geqslant 0$, $\alpha \in \mathcal{D}$, normalisée: $\int_{R^n} \alpha(r) \, dx = 1$; on prend $\alpha_k(r) = k^n \alpha(kr)$, k entier et on prend $h_k = h \ast \alpha_k$; c. f. [14].

Ainsi, h_k converge vers h localement dans $\mathcal{L}^p$, avec $1 \leqslant p < \infty$. Soit $\mathcal{K}$ un compact de Ω, et $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$; $\varphi = 1$ sur $\mathcal{K}$; appliquons (46) à φ et h_k, pour $a = 0$; le second membre de (46) reste borné si $k \to +\infty$, car h est localement bornée; la compacité faible de la boule unité d'un espace de Hilbert entraîne que grad h, pris *a priori* au sens des distributions, est localement dans $\mathcal{L}^2$. Si alors $h > 0$, (46) s'obtient pour les a de l'énoncé; si on a seulement $h \geqslant 0$, on a (46) pour $h + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$; le deuxième membre reste majoré si $\varepsilon \to 0$, d'où la fin de la démonstration à l'aide du lemme de Fatou.

Autre démonstration, sans argument de compacité faible, si h est continue.

1° Montrons que les h_k forment une suite de Cauchy pour la semi-norme $\int_K |\text{grad } h_k|^2 \, dx$: on ne peut utiliser directement (46), car la différence de deux fonctions h_k et $h_{k'}$ n'est pas nécessairement sous-harmonique; en reprenant le terme complémentaire, on a, pour h de classe C^2, quelconque, en intégrant par parties:

$$\int_\Omega |\text{grad } h|^2 \varphi^2 \, dx = -\int_\Omega h \Delta h \varphi^2 \, dx - \sum_{i=1}^n 2 \int_\Omega h (D^i h) \varphi D^i \varphi \, dx$$

pour φ dans $\mathfrak{D}(\Omega)$, à valeurs réelles ; en majorant pour chaque i par Cauchy-Schwarz et Minkowski :

$$\int |\operatorname{grad} h|^2\varphi^2 \leqslant -\int h(\Delta h)\varphi^2 + \lambda\int |\operatorname{grad} h|^2\varphi^2 + \frac{1}{\lambda}\int h^2|\operatorname{grad}\varphi|^2,$$

pour tout $\lambda > 0$; en prenant $\lambda = 1/2$:

$$(51)\qquad \int |\operatorname{grad} h|^2\varphi^2\,dx \leqslant -2\int h(\Delta h)\varphi^2 + 4\int h^2\,|\operatorname{grad}\varphi|^2.$$

Comme h est continue, h_k converge vers h dans $\mathfrak{L}^\infty(\mathrm{K})$; on peut écrire :

$$\int (h_{k'} - h_k)\,\Delta(h_{k'} - h_k)\varphi^2 = \int (h_{k'} - h_k)(\mu \star \alpha_{k'})\varphi^2 \\ - \int (h_{k'} - h_k)(\mu \star \alpha_k)\varphi^2 ;$$

si k et k' sont assez grands, $|h_{k'} - h_k| \leqslant \varepsilon$ (pour tout $\varepsilon > 0$) ; $\mu \star \alpha$ étant une mesure négative, et $h_k - h_{k'}$ de signe constant :

$$\left|\int (h_{k'} - h_k)\,\varphi^2(\mu \star \alpha_{k'})\right| \leqslant \varepsilon\left|\int \varphi^2(\mu \star \alpha_{k'})\right|$$

comme $\int \varphi^2(\mu \star \alpha_{k'})$ converge vers $\int \varphi^2\,d\mu$, le premier terme du second membre de (51) peut être aussi petit que l'on veut pour $h = h_{k'} - h_k$, k et k' assez grands ; il en est de même pour le second ; les composantes de grad h_k convergent donc dans L^2, on voit alors de façon classique que grad h_k est localement de carré sommable.

Si on suppose h positive, i. e. sur tout compact K de Ω, sa borne essentielle inférieure est > 0, alors, h^a converge dans $\mathfrak{L}^\infty(\mathrm{K})$ pour tout a, ce qui permet d'achever la démonstration de (50).

2° Même démonstration ; les h_k forment une suite croissante, le fait que $h \in \mathfrak{L}^\infty(\mathrm{K})$ ne résulte plus de $h > 0$ et $\Delta h < 0$.

N.B. Dans les applications, h est une fois c.d. et le résultat précédent suffit ; on peut aussi lever l'hypothèse de régularité en utilisant les méthodes de Deny [17].

Remarque 7. — De la démonstration précédente, on extrait une partie de celle de la proposition suivante :

Proposition. — *Soit h une fonction sous-harmonique, continue, positive dans $\Omega \subset \mathrm{R}^n$, $n \geqslant 2$, pour que, quel que* *soit h, son gradient soit localement dans $\mathcal{L}^p$, il faut et il suffit que $p \leqslant 2$.*

Démonstration. — Il suffit de donner un exemple de mesure μ négative, dont le potentiel est borné et continu, dont le gradient du potentiel ne soit pas dans $\mathcal{L}^p$, pour $p > 2$.

Voici un exemple d'une telle mesure :

Soit $n > 2$; soit dans R^n, rapporté aux axes Ox_n, D la droite $x_1 = x_2 = \cdots, x_n$; soit $d_1 > d_2 > \cdots, > d_q, \cdots$, une suite décroissante de nombres positifs tendant vers 0; soit M_q le point de D de coordonnées positives situé à la distance d_q de 0 et Q_q le cube de diagonale M_qM_{q+1} de faces parallèles aux hyperplans de coordonnées; soit $l_q = \frac{1}{\sqrt{n}}(d_q - d_{q+1})$ la longueur de l'arète de ce cube; soit un nombre entier N_q; nous subdivisons Q_q en N_q^n cubes égaux; nous obtenons dans Q_q un réseau dont chaque point est le centre d'une boule de rayon ε_q; soit $m_q > 0$: nous répartissons la masse m_q entre ces N_q^n boules, de façon égale, chaque boule ayant une densité constante. Nous imposons aux m_q les conditions suivantes :

$$\sum_{q=1}^{\infty} m_q/d_q^{n-2} \text{ est convergente;} \qquad m_q/l_q^{n-2} < 1.$$

Nous choisirons, pour chaque q, ε_q tel que $N_q^n\, \varepsilon_q^{n-2} = 1$; le rapport de ε_q à la maille du réseau est alors : $N_q^{-2/(n-2)}/l_q$; nous choisirons N_q assez grand pour qu'il soit inférieur à $1/4$. On vérifie alors facilement que le potentiel de la mesure ainsi construite est borné et continu, quel que soit le choix des N_q fait en respectant la condition précédente. (On le vérifie en 0, puis dans chaque cube.)

Si maintenant, on évalue l'intégrale $\int_{\varepsilon_q < r < 2\varepsilon_q} |\text{grad}\, h_i|^p\, dx$ r étant la distance de x au centre d'une des boules B_i de Q_q, dont la densité est $s_q = m_q/\sigma N_q^n \varepsilon_q^n$, σ le volume de la boule unité, h_i le potentiel provenant de la seule boule B_i, on trouve $k_q N_q^{\alpha - n}$, k_q ne dépendant pas de N_q, avec $\alpha = \frac{-n(2-p)}{n-2}$; il est facile de voir que si N_q est assez grand, les intégrales calculées sont prépondérantes dans les mêmes intégrales calculées en remplaçant h_i par le potentiel de toute la mesure; en prenant ces termes relatifs aux N_q^n boules de Q_q, on obtient $k_q N_q^\alpha$; si alors $p > 2$, α est positif, et il suffira de prendre pour N_q une fonction suffisamment croissante de q pour faire diverger $\int_{\cup Q_q} |\text{grad}\, h|^p dx$. (Si on n'avait pas fait de subdivisions dans les Q_q, on n'aurait eu de contre-exemple que pour $p > n$.) Si maintenant $n = 2$, on choisit $N^2 |\log \varepsilon|^{-1} = 1$; le potentiel est alors borné, et le terme prépondérant pour $\int_{Q_q} |\text{grad}\, h|^p dx$ est $k_q\, |\log \varepsilon|^{1-p} \varepsilon^{2-p}$; si $p > 2$, ce terme est aussi grand qu'on veut en prenant ε assez petit, et on peut construire le contre-exemple.

Si $n = 1$ ce procédé ne convient pas. Signalons que si la mesure qui intervient dans la décomposition de Riesz de h est dans $\mathfrak{L}^1$, localement, les inégalités de Sobolev prouvent que $|\text{grad}\, h|$ est localement dans $\mathfrak{L}^p$ pour $p \leqslant n/(n-1)$, ce qui, sauf pour $n = 2$, donne un résultat plus faible que la proposition précédente.

Remarque 8. — Le lemme 3′, auquel nous avons été conduits naturellement par les problèmes posés, offre dans le cas $a = 0$ une certaine parenté avec le lemme 1 de J. Moser [50], où il est supposé directement que grad h est localement dans $\mathfrak{L}^2$.

L'inégalité (46) (ou (50)) est en quelque sorte d'autant meilleure en ce qui concerne φ, que $|\text{grad}\, h|$ diffère de 0 : si h est constante, elle dégénère; or si on prend $\Omega = R^n$, on sait, par exemple, d'après l'inégalité de Harnack, qu'il n'y a pas de fonction harmonique positive autre que les constantes; le champ d'application de ces lemmes peut donc être limité, pour un ouvert donné.

Nous donnons maintenant, dans des hypothèses particulières sur h, une clause de meilleure constante au lemme 3 :

Lemme 4. — *Soit Ω une boule ouverte de R^n, de rayon 1, de centre 0; soit h_A la fonction de Martin relative à un point de frontière A, i. e.*

(52) $h_A(M) = (1 - OM^2)/AM^n$ (h_A *n'est pas normalisée*)

Alors, une condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait, pour toute $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$, $(a \neq -1)$

$$(53) \quad \int_\Omega h_A^a \, |\text{grad } h_A|^2 |\varphi|^2 \, dx \leqslant C \int_\Omega h_A^{a+2} \, |\text{grad } \varphi|^2 \, dx$$

est que l'on ait $C \geqslant \dfrac{4}{(a+1)^2}$.

Démonstration. — On montre par le changement de fonctions : $\psi = h_A^{a/2}\varphi$, et en intégrant par parties, qu'il suffit de montrer que pour $a = 0$, $C = 4$ est la meilleure constante. Si on substitue formellement à φ la fonction $h_A^{-1/2}$, pour $a = 0$, dans (53), il vient :

$$(54) \qquad \int |\text{grad } h_A|^2 h_A^{-1} \leqslant \frac{C}{4} \int |\text{grad } h_A|^2 h_A^{-1}$$

les deux membres sont alors infinis, car h_A s'annule sur la frontière de la boule, sauf au point A, comme la distance à la frontière; cela donne donc le résultat $C \geqslant 4$, si l'on peut approcher h_A par une suite de fonctions de $\mathfrak{D}(\Omega)$ de façon à réaliser (54), à la limite. En fait, nous allons d'abord tronquer $h_A^{-1/2}$ de façon fixe, en la multipliant par une fonction α de $\mathfrak{D}(R^n)$, ayant son support dans le complémentaire du point A, différente de 0 pour $1 \leqslant AM \leqslant 2$; nous éviterons ainsi la singularité de h_A au point A, et nous aurons l'avantage de n'utiliser le fait que h_A s'annule au bord comme la distance au bord, que sur une partie du bord, de surface non nulle toutefois. Soit maintenant η tel que $0 < \eta < 1$; soit Ω_η la boule concentrique à Ω de rayon $1 - \eta$; considérons la fonction θ_η égale à $\alpha h_A^{-1/2}$ dans Ω_η et sur $\dot{\Omega}_\eta$, égale à 0 sur la frontière $\dot{\Omega}$ de Ω, linéaire par rapport à la distance au centre de Ω : $OM = r$ dans la couronne $1 - \eta \leqslant r \leqslant 1$; dans cette couronne, on fait ensuite une affinité par rapport à $\dot{\Omega}_\eta$, de rapport aussi voisin de 1 qu'il le faudra; on obtient une fonction $\tilde{\theta}_\eta$ que l'on remplace par une régularisée φ_η; nous allons étudier les deux membres de (53) $(a = 0)$ pour θ_η; nous montrerons que les intégrales dites de troncature relatives à la couronne $\Omega - \Omega_\eta$ restent finies, pendant que les intégrales relatives à Ω_η sont des infiniments grands équivalents si $C = 4$, lorsque $\eta \to 0$; le passage de θ_η à φ_η n'offre alors pas de difficulté.

1° Intégrales dans le domaine Ω_η, pour φ remplacé par θ_η : au premier membre, on trouve $I_1 = \int_{\Omega_\eta} \alpha^2 |\text{grad}\, h_A|^2 h_A^{-1}\, dx$. Pour évaluer l'intégrale :

$$I_2 = 4 \int_{\Omega_\eta} h_A^2 \, |\text{grad}\, \theta_\eta|^2 \, dx$$

on écrit :

$$|\text{grad}\, (\alpha h_A^{-1/2})|^2 = \alpha^2 \, |\text{grad}\, h_A|^2 / 4 h_A^3 + |\text{grad}\, \alpha|^2 / h_A - \sum_i \alpha (D^i \alpha) h_A^{-2} D^i h_A$$

on a donc

$$I_2 = I_1 + 4 \int_{\Omega_\eta} h_A \, |\text{grad}\, \alpha|^2 \, dx - 4 \int_{\Omega_\eta} \sum_i \alpha (D^i \alpha) D^i h_A \, dx.$$

Soit (r, ω) les coordonnées polaires de centre 0; comme h_A et ses dérivées sont bornées au-dessus du support K de α, les deux dernières intégrales restent finies; comme I_1 devient infinie, puisque $h_A^{-1}\, |\text{grad}\, h_A|^2 \sim H(\omega)/(1 - r)$ avec $H(\omega) > 0$ sur une partie de la frontière où α est différente de 0, on a bien $I_1 \sim I_2$;

2° il reste à voir que les intégrales dans la couronne restent finies : sur $\dot{\Omega}_\eta$ et au-dessus du support de α, θ_η peut être majorée par $C(R - r)^{-1/2}$; l'intégrale $\int_{\Omega - \Omega_\eta} |\text{grad}\, h_A|^2 \theta_\eta^2 \, dx$ reste donc majorée par une constante obtenue en intégrant par rapport à ω la constante obtenue dans la première partie de la démonstration du lemme 2 du présent numéro; l'intégrale du second membre $\int_{\Omega - \Omega_\eta} h_A^2 |\text{grad}\, \theta_\eta|^2 \, dx$ se décompose en deux termes, suivant la décomposition de $|\text{grad}\, \theta_\eta|^2$ en somme d'un terme radial $|\text{grad}_r\, \theta_\eta|^2$ et d'un terme tangentiel $|\text{grad}_\omega\, \theta_\eta|^2$; la première reste bornée, on le voit en se référant comme un peu plus haut au lemme 2; le terme $|\text{grad}_\omega\, \theta_\eta|$ se majore par

$$\text{Constante} \times (1 - r) |\text{grad}_\omega\, h_A| / h_A^{3/2};$$

$|\text{grad}_\omega\, h_A|$ reste borné au-dessus du support de α d'où une majoration par

$$\text{Constante} \times \int_{(\Omega - \Omega_\eta) \cap K} (1 - r)^2 / h_A \, dx$$

qui est bornée, h_A s'annulant comme $1 - r$.

REMARQUE. — En fait, on aurait pu ne pas tronquer par α, mais il aurait fallu définir θ_η dans la couronne comme $C(\omega)(1-r)^s$ avec s assez grand à cause de la singularité de h_A en A; on aurait même pu ne se servir que de la singularité en A : c. f. (I, 4, 1), proposition 7.

En fait, la troncature par α permet d'isoler le comportement de h_A sur un morceau de frontière; le fait d'avoir pris h_A sous harmonique n'intervient que pour avoir l'inégalité (53) (pour $a = 0$) que l'on peut prendre comme hypothèse; le fait d'avoir pris pour Ω une boule n'intervient que pour donner un système de paramètres tout fait; le fait que h_A soit fonction de Martin n'intervient que parce que h_A s'annule sur un morceau de frontière une fois continûment différentiable comme la distance à ce morceau; on peut donc énoncer le lemme 4′ suivant, que l'on démontre comme le lemme 4, i. e. en « intégrant » par rapport à $d\omega$ la démonstration du lemme 2; il faut toutefois faire la démonstration pour a quelconque différent de 1; on est donc conduit à utiliser les deux parties de la démonstration du lemme 2, en définissant θ_η radialement de la même façon que dans le lemme 2; si $a \leqslant 1 - p = -3$, on laisse η fixe, on définit θ_η radialement comme $C(\omega)(1-r)^\lambda$, avec

$$\lambda = (|a+1| + \varepsilon)/2, \quad \varepsilon > 0,$$

et on fait tendre ε vers 0.

LEMME 4′. — *Soit Ω un ouvert de R^n admettant un morceau Γ de frontière une fois continûment différentiable tel que d'un côté de Γ et assez près de Γ, il n'y ait pas d'autre point de $\dot{\Omega}$; soit Θ une fonction réelle une fois continûment différentiable s'annulant sur Γ comme la distance à Γ, définie dans Ω et telle que pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $(a \neq -1)$*

$$(55) \qquad \int_\Omega \Theta^a\, |\mathrm{grad}\, \Theta|^2 |\varphi|^2\, dx \leqslant C \int_\Omega \Theta^{a+2}\, |\mathrm{grad}\, \varphi|^2\, dx$$

les deux membres ayant un sens; *alors* $C \geqslant 4/|a+1|^2$.

REMARQUE 9. — On pourrait encore généraliser : la régularité de Θ n'est utile qu'au voisinage de Γ; Θ pourrait s'annuler plus fortement, ou un petit peu moins fortement sur Γ; il est surtout important que

$$\int_\Omega |\mathrm{grad}\ \Theta|^2/\Theta\, dx = +\infty\,;$$

le lemme 4′ est valable pour Θ fonction de Martin d'un ouvert à frontière partiellement régulière; on peut se demander s'il est vrai pour une fonction de Martin d'un ouvert borné quelconque; enfin, sans que cela suffise pour démontrer le lemme 4 dans ces conditions, on peut se demander si pour toute fonction de Martin de n'importe quel ouvert,

$\int_\Omega |\mathrm{grad}\ \Theta|^2/\Theta\, dx$ est localement divergente en un point de la frontière euclidienne.

Avant de terminer le numéro 2 avec le lemme de transmission de majoration, donnons un corollaire des lemmes 3 et 4′.

Lemme 5. — *Soit* Ω *une boule de rayon* 1, *dans* R^n, *de centre* 0; *soit* $r(\mathrm{M}) = \mathrm{OM}$; *alors, si* $a < -1$ *on a, pour toute* $\varphi \in (\Omega)$:

$$\int (1-r)^a |\varphi|^2\, dx \leqslant \mathrm{C} \int (1-r)^{a+2} |\mathrm{grad}\ \varphi|^2\, dx$$

si et seulement si $\mathrm{C} \geqslant 4/(a+1)^2$.

Démonstration. — On a $\Delta(1-r) = -(n-1)/r$; la fonction $(1-r)$ étant sur-harmonique, on peut alors appliquer le lemme 3; la meilleure constante est alors donnée par le lemme 4′.

Lemme 6. — *(Transmission de majoration). Soit* Ω *un ouvert connexe de* R^n; *soient* K *et* K′ *deux compacts de* Ω, K *contenant une boule de* R^n; *alors pour toute fonction* u *définie sur* Ω *et pour laquelle les intégrales écrites existent, on a, si* $(h) = (h_1, \cdots, h_k)$ *est un multi-poids sur* Ω,

$$(56) \qquad ||u||^p_{k-1,p,\mathrm{K}'} \leqslant \mathrm{C}\,(||u||^p_{k-1,p,\mathrm{K}} + ||u||^p_{(h),p}) \qquad (p \geqslant 1)$$

C *étant une constante positive ne dépendant que de* n, (h), Ω, K, K′, *et* $||u||^p_{k-1,p,\mathrm{K}}$ *désignant* $\int_{\mathrm{K}} \sum_{|\alpha|<k} |\mathrm{D}^\alpha u|^p\, dx$.

N. B. — *Ce lemme sera renforcé par la proposition* 3 *de* (I, 2, 3).

Démonstration. — Soit B la boule contenue dans K et O son centre; choisissons un système de coordonnées x_i; on appelle pavé l'ensemble des x tels que $a_i \leqslant x_i \leqslant b_i$; $(a_i < b_i,\ i = 1,$

$2, \cdots, n)$; deux pavés se coupent si leur intersection est un pavé; K' étant compact, il est recouvert par un nombre fini de pavés K'_j, $j = 1, 2, \cdots, N$, de centre O_j; il suffit donc de démontrer (56) en y remplaçant K' par K'_j; Ω étant connexe, il existe un arc d'extrémités O, O_j; il existe un recouvrement de cet arc par une suite finie de pavés, le premier étant dans B, chacun coupant le suivant, sauf le dernier K'_j; d'après la forme de (56), il suffit donc de l'établir dans le cas où K et K' sont deux pavés se coupant (i. e. de montrer que la majoration peut « tourner »). Nous nous contenterons d'un terme plus petit au second membre de (56), en remplaçant K par son intersection avec K' : il suffit alors d'établir (56) si $K \subset K'$; on fait alors une récurrence (finie) sur la dimension : on intercale des pavés entre K et K'.

Soit K défini par $a_i \leqslant x_i \leqslant b_i$, K' par $a'_i \leqslant x_i \leqslant b'_i$; on considère K_j défini par $a'_i \leqslant x_i \leqslant b'_i$ pour $i = 1, 2, \ldots, j$ et $a_i \leqslant x_i \leqslant b_i$ pour $i = j+1, \ldots, n$; $K_0 = K$, $K_n = K'$; on est donc ramené au cas suivant, en prenant une nouvelle origine et en numérotant les coordonnées autrement :

$$\begin{gathered} \text{K défini par } a_1 \leqslant x_1 \leqslant b_1,\ a_i \leqslant x_i \leqslant b_i \text{ pour } i \neq 1, \\ \text{K' défini par } a'_i \leqslant x_1 \leqslant b'_1,\ a_i \leqslant x_i \leqslant b_i \text{ pour } i \neq 1; \\ a'_1 \leqslant a_1 < b_1 \leqslant b'_1. \end{gathered}$$

Soit alors $I = \|u\|_{k-1,p,K}$; il existe nécessairement d, entre a_1 et b_1, tel que, M désignant l'intersection de K et de l'hyperplan $x_1 = d$,

$$(57) \qquad \int_M \sum_{|\alpha|=0}^{k-1} |Du|^p \, dx_2, \ldots, dx_n \leqslant I/(b_1 - a_1)$$

tenant compte de ce que (cf. Définition 1 de (I, 1, 3)) $h_k^{-1} \in \mathcal{L}^\infty$ localement, il suffit d'appliquer (29) du corollaire du lemme 1 de ce numéro, pour la variable x_1 à toutes les $D^\alpha u$, $|\alpha| < k-1$, d'intégrer par rapport à $dx_2, \ldots, dx_n$, d'utiliser (57), et d'intégrer entre a'_1 et b'_1, pour avoir (56).

Remarque 10. — Seule la composante h_k de (h) a servi, toutes les autres peuvent être nulles; si $k = 1$, $p = 2$, $(h) = (0, h)$, alors $\|u\|^2_{(h)}$ peut être remplacée par

$$\int h \, |\mathrm{grad}_A \, u|^2,$$

A étant l'opérateur elliptique du lemme 3; si $k > 1$, il n'en est pas ainsi : prenons par exemple $\int |\Delta u|^2$ à la place de $||u||^2_{(h),2}$ dans (56) : cela donnerait une majoration dont L. Gårding a démontré qu'elle ne peut avoir lieu que pour un opérateur hyperbolique [21] (6).

N° 3. — Exemples de $W^0_{(h),p}$ espaces de distributions.

N. B. — On désigne par C une constante pouvant changer en cours de démonstration.

3. 1. Inégalité de poincaré généralisée.

Définition 1. — *Soit $p \geqslant 1$ et $(h) = (h_0, h_1, \ldots, h_k)$ un multi-poids sur Ω, ouvert de R^n; on dit que (h) donne lieu à une inégalité de Poincaré (généralisée), si pour tout compact* K *de* Ω, *il existe une constante* $\mathrm{C} > 0$ *telle que pour toute* $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$, *et pour tout* β *tel que* $|\beta| \leqslant k - 1$,

$$(58) \qquad \int_{\mathrm{K}} |\mathrm{D}^\beta \varphi|^p \, dx \leqslant \mathrm{C} ||\varphi||^p_{(h),p}.$$

Remarque 1. — Si (58) n'a lieu que pour $\beta = 0$, on voit avec le théorème de Krylov-Schwartz qu'elle a lieu pour les autres β, avec peut être un changement de constante; de même, on peut améliorer l'exposant p du premier membre de (58), ou le remplacer par 1, on obtient des inégalités équivalentes à un changement près de constante.

Un disque d'hyperplan de rayon ε est l'intersection d'une boule de rayon ε centrée sur un hyperplan et de cet hyperplan :

Proposition 1. — *Soit $p \geqslant 1$, $\varepsilon > 0$; pour que (h) donne lieu à une inégalité de Poincaré généralisée dans Ω,*

1° *il faut que pour tout disque d'hyperplan* P *de* Ω *de rayon* ε, *il existe une constante* $\mathrm{C} > 0$ *telle que pour toute* $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$,

$$(59) \qquad \int_{\mathrm{P}} \sum_{|\alpha| < k} |\mathrm{D}^\alpha \varphi|^p \, d\sigma \leqslant \mathrm{C} ||\varphi||^p_{(h),p}$$

2° *il suffit que l'on ait* (59) *pour un tel disque dans* Ω.

Démonstration. — La condition est nécessaire : soit P un disque, K engendré en translatant P dans une direction

(6) Prendre les poids suffisamment nuls au bord sauf sur une portion du bord.

transversale avec une amplitude assez faible pour rester dans Ω, (58) entraîne (59) pour au moins un translaté P' de P, donc pour tous les translatés en intégrant (29).

La condition est suffisante : on utilise encore (29) pour obtenir (58) sur un K engendré par translation de P, et le lemme de transmission.

Proposition 2. — *Soit* (h) *un multi-poids sur* Ω. *Pour que* $W^0_{(h),p}(\Omega)$ *soit un espace de distributions, il faut et il suffit que* (h) *donne lieu, pour l'exposant* p, *à une inégalité de Poincaré, pour tout compact* K.

Démonstration. — La condition est nécessaire : soit u_m une suite convergeant vers 0 dans $W^0_{(h),p}$; elle converge aussi vers 0 dans $\mathcal{D}'$, donc d'après le théorème de Krylov-Schwartz, les dérivées de u_m d'ordre $\leqslant k$ convergent localement dans L^p (et même mieux que cela), d'où pour chaque compact une inégalité (58).

La condition est suffisante : cela résulte du lemme d'injection du numéro 1.

Proposition 3. — *S'il existe un ensemble mesurable, relativement compact* K *de* Ω, *de mesure non nulle, pour lequel on ait une inégalité de Poincaré* (58), *il existe un pavé de dimension* n *de* Ω *pour lequel on a* (58); $(p \geqslant 1)$.

Démonstration. — Soit Ox_1, Ox_2, ..., Ox_n un système d'axes de référence de R^n, soit $\varepsilon > 0$ assez petit pour que l'ensemble K_1, engendré par les translatés de K pour les translations $(t, 0, ..., 0)$, $0 \leqslant t \leqslant \varepsilon$, soit un compact de Ω; soit $L(x_2, ..., x_n)$ la partie de K constituée par les points ayant mêmes coordonnées x_2, x_n, de même $L_1(x_2, ..., x_n)$ pour K_1; L et L_1 sont mesurables, p. p. en $(x_2, ..., x_n)$: soit $l(x_2, ..., x_n)$ la mesure linéaire de L. En appliquant le théorème de Fubini-Lebesgue à la fonction caractéristique de K (supposé de mesure non nulle). on voit qu'il existe $\eta > 0$ et une partie k_2 de R^{n-1} mesurable de mesure non nulle, telle que si $(x_2, ..., x_n) \in k_2$, $l(x_2, ..., x_n) \geqslant \eta$; soit alors K_2 la partie correspondante de K_1 :

$$K_2 = \{x \in K_1,\ (x_2, \ ..., \ x_n) \in k_2\} ;$$

K_2 est mesurable et de mesure non nulle dans R^n et est une réunion de pavés de dimension 1, de longueur $\geqslant \varepsilon$;

$$(60) \quad \int_{K_2} |D^\beta \varphi|^p dx = \int_{k_2} dx_2 \quad \dots \quad dx_n \int_{L_1(x_2, \dots, x_n)} |D^\beta \varphi|^p \, dx_1 :$$

il existe sur $L(x_2, \cdots, x_n)$ un point P au moins tel que

$$(61) \qquad \frac{1}{l} \quad \int_L \sum_{|\alpha|<k} |D^\alpha \varphi|^p \, dx_1 \geqslant \sum_{|\alpha|<k} |D^\alpha \varphi(P)|^p.$$

On applique alors le corollaire du lemme 1 de (I, 2, 2) : on a pour $M \in L_1$, $|\beta| < k$,

$$(62) \quad \int_{L_1} |D^\beta \varphi(M)|^p \, dx_1 \leqslant C\Big[\sum_{|\alpha|<k} |D^\alpha \varphi(P)|^p + \int_{L_2} \Sigma |D^\alpha \varphi|^p dx_1\Big]$$

L_2 désignant l'enveloppe convexe de L et L_1, et C ne dépendant pas de $(x_2, \dots, x_n)$; on majore alors le second membre de (62) à l'aide de (61) on majore $1/l\,(x_2, \dots, x_n)$ par la constante $1/\eta$ et (60) donne l'inégalité de Poincaré pour K_2, ($h_k^{-1} \in \mathcal{L}^\infty$ localement), compte tenu de celle qui a lieu pour K.

Comme K_2 est réunion de pavés de dimension 1, de longueur $\geqslant \varepsilon$, il existe alors $K_2' \subset K_2$, K_2' mesurable de mesure non nulle et produit d'un pavé de dimension 1 de Ox_1 par un compact de l'hyperplan $x_1 = 0$; on recommence le raisonnement précédent en partant de K_2' et en translatant dans la direction Ox_2; on obtient ainsi une inégalité de Poincaré pour une réunion de pavés de dimension 2; en faisant n fois cette opération, on obtient une inégalité (58) pour une réunion de pavés de dimension n.

Des propositions précédentes, il résulte :

Proposition 4. — *Soit* (h) *un multi-poids sur* Ω *connexe*; *pour que* $W^0_{(h),p}$ *soit un espace de distributions il faut et il suffit qu'il existe un ensemble* K *de* Ω, *mesurable de mesure non nulle, relativement compact, pour lequel on ait* (58); $(p \geqslant 1)$.

La proposition 4 donne un aspect plus commode au problème de variations attaché à la recherche des (h) tels que $W^0_{(h)} \subset \mathcal{D}'$; nous allons donner, en application des lemmes 1′ et 3 du numéro précédent, des théorèmes établissant l'existence d'assez larges classes de multi-poids (h) pour lesquels $W^0_{(h),p}$ est un espace de distributions; nous n'utilisons pas ici les clauses de meilleure constante de ces lemmes; le lemme 2 de (I, 2, 2) donne lui-même, avec la proposition 2 ci-dessus le résultat suivant: soit $\Omega = \{x \in \mathrm{R}^n,\ x_n > 0\}$; si $h = (0, x_n^\alpha)$, $\alpha \neq p - 1$, $\mathrm{W}^0_{(h),p}$ est un espace de distributions; mais c'est un cas particulier des théorèmes 1 et 2 suivants.

Inversement, les inégalités de Poincaré déduites de ces lemmes sont moins fortes en ce sens que la constante y dépend du compact K. A un multi-poids assez lourd, on peut toutefois se poser la question d'associer un autre multi-poids à placer aux premiers membres de (58) pour se permettre d'intégrer sur tout Ω; exemple: $(0, h)$ étant assez lourd, trouver des $\mathrm{H}(x)$ tels que, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\mathrm{R}_+)$,

$$\int_0^\infty \mathrm{H}|\varphi|^2\, dx \leqslant \mathrm{C} \int_0^\infty h\, |\mathrm{grad}\ \varphi|^2\, dx.$$

Supposons $\int_0^\infty h^{-1}\, dx < \infty$ et soit $\mathrm{I}(x) = \int_0^x h^{-1}\, dt$ alors, si $\mathrm{C} = \int_0^\infty \mathrm{H}(x)\mathrm{I}(x) < \infty$ on a $|\varphi(x)|^2 \leqslant \mathrm{I}(x) \int_0^\infty h|\mathrm{grad}\ \varphi|^2\, dx$ d'où $\int_0^\infty \mathrm{H}|\varphi|^2\, dx \leqslant \mathrm{C} \int_0^\infty h|\mathrm{grad}\ \varphi|^2\, dx$; [cf. Remarque 1 de (I, 1, 2)].

3. 2. 1er CRITÈRE POUR $\mathrm{W}^0_{(h),p} \subset \mathcal{D}'$.

THÉORÈME 1. — *Soit Ω connexe, (h) un multi-poids de longueur $k+1$: $(h) = (0, 0, \ldots, h_k)$; on écrira h pour h_k; supposons qu'il existe un axe $\mathrm{O}x_1$ et un ensemble Π relativement compact dans Ω, porté par un hyperplan transversal, mesurable et de mesure non nulle dans cet hyperplan, vérifiant l'hypothèse suivante:*

Soit N un point décrivant Π, $\mathrm{F_N}$ le premier point frontière de Ω, à distance finie ou non, rencontré par l axe d'origine N, équipollent à $\mathrm{O}x_1$; l'ensemble Π_1 engendré par le segment $\mathrm{NF_N}$ est mesurable; soit $\mathrm{O}x_2, \ldots, \mathrm{O}x_n$, tels que Π soit dans $\{x_1 = 0\}$; on a:

$$\int_{\Pi_1} x_1^{q(k-1)} h^{-q/p}\, dx < \infty \tag{63}$$

avec $p > 1$ et $1/p + 1/q = 1$.

Alors $\mathrm{W}^0_{(h),p}(\Omega)$ est un espace normal de distributions; (on peut remplacer x_1^{k-1} par 1 dans (63) si $\mathrm{F_N}$ reste à distance finie).

Démonstration. — On peut supposer Π compact, quitte à le remplacer par un sous-ensemble compact de mesure non nulle ; soit $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$,

$$I = \int_{\Pi} |\varphi| \, dx_2 \ \dots \ dx_n = C \int_{\Pi} dx_2 \ \dots \ dx_n \left| \int_{N}^{F_N} x_1^{k-1} \varphi^{(k)} \, dx_1 \right| ;$$

avec $C = 1/|k-1|\,!$ et l'indice (k) signifiant la dérivation d'ordre k par rapport à x_1 ; en appliquant l'inégalité de Hölder à l'intégration en dx_1 avec les exposants p et q :

$$I \leqslant C \int_{\Pi} dx_2 \ \dots \ dx_n \Big[\int_{N}^{F_N} h |\varphi^{(k)}|^p \, dx_1 \Big]^{1/p} \Big[\int_{N}^{F_N} x_1^{q(k-1)} h^{-q/p} \, dx_1 \Big]^{1/q}.$$

En appliquant l'inégalité de Hölder à l'intégration en $dx_2 \dots dx_n$ avec les exposants p et q, il vient :

$$I \leqslant C \Big[\int_{\Pi_1} h |\varphi^{(k)}|^p \, dx \Big]^{1/p} \Big[\int_{\Pi_1} x_1^{q(k-1)} h^{-q/p} \, dx \Big]^{1/q} ;$$

Π_2 étant engendré par une translation de Π parallélement à Ox_1, d'amplitude assez petite pour rester dans Ω ; l'intégrale (63) restant bornée au cours de cette translation, puisque h^{-1} est localement borné, on a :

$$(64) \qquad \int_{\Pi_2} |\varphi| \, dx \leqslant C \Big[\int h |\varphi^{(k)}|^p \, dx \Big]^{1/p}$$

on peut alors reprendre l'argument de la démonstration de la proposition 3 en y remplaçant p par 1 : On obtient l'inégalité de Poincaré (65), K étant un pavé à n dimension, l'exposant p au premier membre étant obtenu par application du théorème de Krylov-Schwartz :

$$(65) \qquad \int_{K} |\varphi|^p \, dx \leqslant C \|\varphi\|^p_{(h),p}, \text{ pour toute } \quad \varphi \in \mathfrak{D} ;$$

la proposition 4 montre alors que $W^0_{(h),p} \in \mathfrak{D}'$.

Exemples simples de (h), Ω, *tels que* $W^0_{(h),p}(\Omega) \subset \mathfrak{D}'$, *et contre-exemples.*

Exemple 1. — Prenons $\Omega = \{x \in R^n, \ x_n > 0\}$, $p = 2$, et $(h) = (0, 0, \dots, 0, x_n^\alpha)$ de longueur $k+1$; la proposition 2 et le théorème précédent, ou le lemme (1′) de (I, 2, 2) montrent que $W_{(h),2} \subset \mathfrak{D}'$ si $\alpha < -1$ ou $\alpha > k$; si alors $n = 1$ on a des contre-exemples, $\alpha = 1$ si $k = 1$ et un intervalle pour α si $k > 1$; (pour $\alpha < 1$, on considère l'intervalle $>0, \ a<$, pour $\alpha > k$ l'intervalle $> a, \ +\infty <$; pour les contre-exemples, on contredit à la proposition 2 avec le lemme 1'). En fait on montre, à partir de $W^0_{(0,1)}(R^{n-1}) \subset \mathfrak{D}'$ pour $n>3$, que si $n>3$ on a $W^0_{(0,x_n)} \subset \mathfrak{D}'$; il en est encore ainsi si $n=2$ ou $n=3$ (2e critère).

Exemple 2. — Si Γ est de mesure $\neq 0$ sur Γ_1, le théorème 1 contient le théorème suivant, dont nous donnons une autre démonstration : « Soit $\Omega \subset R^n$, $n \geqslant 2$. On suppose qu'il existe $\Gamma \subset \Gamma_1 \subset \dot{\Omega}$, Γ fermé borné de capacité positive, porté par une variété différentiable Γ_1 de dimension $n-1$ et que $h(x) \geqslant \alpha > 0$ dans un voisinage de Γ dans $\overline{\Omega}$; alors $W^0_{(0,h)} \subset \mathfrak{D}'(\Omega)$ ». Démonstration : Soit φ et ψ dans $\mathfrak{D}(\Omega)$; il suffit de démontrer que $\varphi \to \int_\Omega \varphi\overline{\psi}\, dx$ est continue pour $||\varphi||_{(0,h)}$: soit $\mathcal{O}$ un ouvert borné, de frontière $\dot{\mathcal{O}} = \Gamma \cup \Sigma$, connexe, $\mathcal{O}$ contenant le support de ψ et $\sqrt{1/h} \in \mathcal{L}^\infty(\mathcal{O})$. Désignons par V l'espace des $u \in W_{(1,1)}(\Omega)$ nuls sur Γ, i. e. l'adhérence dans $W_{(1,1)}(\Omega)$ des fonctions identiquement nulles au voisinage de Γ; on peut supposer que $\mathcal{O}$ est un ouvert de Nikodym [18], de sorte qu'alors

$$(u, \ v)_V = \sum_i (D^{(i)}u, \quad D^{(i)}\overline{v})_{L^2(\mathcal{O})}$$

munit V d'une structure hilbertienne équivalente à celle induite par $W_{(1,1)}(\mathcal{O})$. Par conséquent, il existe $u \in V$ tel que

$$(u, \ v)_V = \int \psi\overline{v}\, dx, \quad \text{pour tout} \quad v \in V.$$

Mais la restriction $\varphi_{\mathcal{O}}$ de φ à $\mathcal{O}$ est dans dans V, de sorte que

$$\int \psi \ \overline{\varphi}\, dx = \int_{\mathcal{O}} \psi \ \overline{\varphi}_{\mathcal{O}}\, dx = (u, \ \varphi_{\mathcal{O}})_V = \sum_i \int_{\mathcal{O}} (h^{-1/2}D^i u)(h^{1/2}D^i\overline{\varphi}) \ dx$$

et comme $1/\sqrt{h}$ est dans $\mathcal{L}^\infty(\mathcal{O})$, et $D^i u$ dans $\mathcal{L}^2(\mathcal{O})$, le résultat suit (7).

REMARQUE 1. — Une méthode analogue à la précédente conduit à la proposition suivante : L'application $\varphi \to \{\varphi + c\}$, $c \in R$ est toujours continue de $\mathfrak{D}(\Omega)$ muni de la topologie induite par $W^0_{(0,h)}$ dans $\mathfrak{D}'(\Omega)/c$.

Démonstration. — Soit ψ donnée dans $\mathfrak{D}(\Omega)$, avec $\int \psi\, dx = 0$. Soit $\mathcal{O}$ un ouvert borné, avec $\overline{\mathcal{O}} \subset \Omega$, conte-

(7) On peut supprimer l'hypothèse que Γ est porté par Γ_1, en utilisant un meilleur lemme de transmission que le notre, à paraître dans la réédition de [62], t. 2, après le théorème de Krylov-Schwartz.

nant le support de ψ. Soit u une solution du problème de Neumann :

$-\Delta u = \psi$, $\partial/\partial_n u = 0$ au bord de $\mathcal{O}$ (dans un sens faible), alors,

$$\int \psi\bar{\varphi} = \Sigma \int_{\mathcal{O}} (h^{-1/2}\mathrm{D}^i u)(h^{1/2}\mathrm{D}^i\bar{\varphi})\, dx$$

d'où le résultat, puisque $\bar{\mathcal{O}} \subset \Omega$, donc $h(x) \geqslant \alpha_1 > 0$ sur $\mathcal{O}$.

3. 3. 2e CRITÈRE [8].

THÉORÈME 2. — *Soit* Ω *connexe*, $(h) = (0, 0, \ldots, 0, h_k)$ *un multi-poids de longueur* $k + 1$; *supposons qu'il existe une boule* T_ε *de* R^n, *de rayon* $\varepsilon > 0$, *de centre un point frontière* T *de* $\dot{\Omega}$, *et un ensemble* K *porté par l'intersection de* Ω *et de la frontière* $\dot{\mathrm{T}}_\varepsilon$ *de* T_ε, *relativement compact dans* Ω, *mesurable et de mesure non nulle sur* $\dot{\mathrm{T}}_\varepsilon$, *vérifiant les hypothèses suivantes: soit* N *décrivant* K; *le cône* K_1 *engendré par* TN *est dans* Ω (*à part le point* T); TN *coupe la sphère unité de centre* T *en* $\sigma(\mathrm{N})$; *soit* K' *le lieu de* $\sigma(\mathrm{N})$, *t et* σ *les coordonnées polaires de centre* T. *On a:*

$$\int_{\mathrm{K}_1} t^{-q(n-1)} h^{-q/p}\, dx < +\infty \tag{66}$$

avec $p > 1$, $1/p + 1/q = 1$; *alors*, $\mathrm{W}^0_{(h),p}(\Omega)$ *est un espace normal de distributions.*

Démonstration. — Elle est analogue à celle du théorème 1; soit

$$\mathrm{I} = \int_{\mathrm{K}'} |\varphi(\varepsilon, \sigma)| \varepsilon^{n-1}\, d\sigma = \mathrm{C}\int_{\mathrm{K}'} d\sigma \left|\int_0^\varepsilon (t-\varepsilon)^{k-1}\varphi^{(k)}\right| dt$$

l'indice (k) signifiant la dérivation d'ordre k par rapport à t; en appliquant deux fois l'inégalité de Hölder, on a

$$\left|\int_0^\varepsilon (t-\varepsilon)^{k-1}\varphi^{(k)}\, dt\right| \leqslant \left[\int_0^\varepsilon t^{n-1} h |\varphi^{(k)}|^p\, dt\right]^{1/p} \left[\int_0^\varepsilon (t-\varepsilon)^{q(k-1)} [t^{n-1}h]^{-q/p}\, dt\right]^{1/q}$$

et

$$\mathrm{I} \leqslant \mathrm{C}\left[\int_{\mathrm{K}_1} h|\varphi^{(k)}|^p\, dx\right]^{1/p} \left[\int_{\mathrm{K}_1} (t-\varepsilon)^{q(k-1)} t^{-(n-1)q} h^{-q/p}\, dx\right]^{1/q};$$

[8] En fait on peut donner n critères, suivant la dimension n' de la portion de frontière près de laquelle on fait des hypothèses sur (h); ici $n' = n - 1$ pour le 1er critère; pour le 2e, $n' = 0$.

d'où le théorème 2, $h^{-q/p}$ étant borné au voisinage de K, en achevant la démonstration comme pour le théorème 1.

Scolie. — *On suppose dans les critères 1 et 2 que le poids h est assez lourd près d'une portion du bord; le lemme de transmission, et la proposition 3 sont nécessaires pour que cette hypothèse se fasse sentir sur tout l'ouvert connexe; une fois que l'on sait que* $W^0_{(h)} \subset \mathcal{D}'$, *on n'a plus besoin que du théorème de Krylov-Schwartz pour écrire des inégalités de Poincaré sur tout compact.* $W^0_{(h)}$ *est alors un espace de Beurling-Deny;* c.f. [12].

Corollaire des théorèmes 1 et 2. — *Soit* Ω *une boule de* R^n, $(n > 1)$, *de centre* O, *de rayon* 1; $h_T(M) = (1 - OM^2)/TM^n$ *la fonction de Martin (non normalisée) relative au point frontière* T, *et* $(h) = (0, ..., 0, h_T^\alpha)$ *un multi-poids de longueur* $k + 1$; *alors pour tout* k *et pour tous* α, p *tels que* $\alpha < p/q$, *ou* $\alpha > (n-p)/(n-1)$, $W^0_{(h),p}$ *est un espace de distributions.*

Démonstration. — On voit que h_T s'annule au bord, sauf en T, comme la distance au bord; d'après le théorème 1, le corollaire est démontré si $\alpha < p/q$; on voit qu'il existe un cône de sommet T, situé dans Ω, et d'ouverture non nulle où $h_T > cTM^{1-n}$ avec $c > 0$; le théorème 2 montre donc que le corollaire est démontré si $-(n-1)(1-\alpha)q/p > -1$ soit $\alpha > (n-p)/(n-1)$.

Remarque 2. — Les conditions du corollaire précédent sont réalisées pour tous k et α si $p > (2n-1)/n$, en particulier si $p = 2$. Si $\alpha > p/q$, le premier critère n'est pas applicable; en effet, si petit que soit un voisinage de T, h_T est, en dehors de ce voisinage et près du bord, comme la distance au bord, et l'intégrale $\int_{\Pi_1} h^{-p/q}$ est toujours divergente, quelque soit Π.

Les critères précédents nous donnent le cas $\alpha = 1$, $p = 2$ que ne nous donnera pas le théorème 3. Ce corollaire peut s'étendre à tout ouvert borné à frontière régulière pour lequel on connaît le comportement au bord des fonctions de Martin; si l'ouvert n'est pas borné, on a un contre-exemple pour $\alpha = 1$, $p = 2$ avec la fonction harmonique positive minimale x_n de l'exemple 1 donné à la suite du théorème 1. $(n = 1)$.

Remarque 3. — Donnons un contre-exemple à $W^0_{(h)} \subset \mathcal{D}'$, de nature différente de ceux déjà donnés : soit Ω le complémentaire de l'origine, $h = 1/r^{n-2}$, $r = |x|$; $(h) = (0, h)$. On va voir que $W^0_{(h)}$ n'est pas un espace de distributions (bien que $W^0_{(0,1)}$ le soit si $n > 2$) ; on contredit à la proposition 2 en prenant pour P (proposition 1) la sphère unité (ce n'est pas un disque d'hyperplan mais cela revient au même) ; et on prend φ invariante par rotation. Si on avait $W^0_{(h)} \subset \mathcal{D}'$, on aurait donc pour toute $\psi \in \mathcal{D}(\mathrm{R}_+)$,

$$|\psi(1)|^2 < \mathrm{C}\int_0^\infty r|\partial\psi/\partial r|^2\, dr, \quad \mathrm{C} > 0, \ \mathrm{C} \text{ finie}$$

ce qui est impossible, d'après le lemme 1′ de (I, 2, 2).

3. 4. 3e critère.

Nous donnons maintenant une classe de (h) assez lourds pour lesquels les hypothèses portent sur le comportement de (h) à l'intérieur, et non directement sur le comportement au bord (c. f. Remarques 4).

Théorème 3. — 1° *Soit h une fonction sous-harmonique positive continue, non constante sur Ω connexe ; soit $(h) = (0, h^\alpha)$; alors, si $\alpha > 1$, $W^0_{(h)}$ est un espace de distributions ;*

2° *si h est une fonction sur-harmonique continue, positive, non constante sur Ω connexe et si $\alpha < 1$, $W^0_{(h)}$ est un espace de distributions.*

Démonstration. — On utilise le lemme 3 de (I, 2, 2) ; puisque h est non constante, il existe $\eta > 0$ et un compact K de mesure non nulle de Ω sur lequel $|\mathrm{grad}\, h| \geqslant \eta$; (46) nous donne alors une inégalité de Poincaré pour le compact K ; on achève la démonstration avec la proposition 4.

Remarques 4. — On a $\Delta h^a = a(a-1)\,|\mathrm{grad}\, h|^2 + ah^{a-1}\Delta h$; donc si h est sous-harmonique, h^a l'est aussi pour $a \geqslant 1$; si h est sur-harmonique, h^a l'est aussi pour $0 \leqslant a \leqslant 1$.

On peut introduire des $p \neq 2$ dans un énoncé analogue au théorème 3 en utilisant (49) et l'hypothèse $\sum_i |\mathrm{D}^i h|^{2-p}$ localement borné.

Même si on prend pour h une fonction minimale de Martin, le lemme de transmission sert dans la démonstration précédente. Voici un exemple de fonction de Martin dont le gradient s'annule en un point; il m'a été donné par M. Hervé, et touche de près à des questions de [27] : on prend pour Ω le domaine compris entre deux cercles $C_1 \subset C_2$ de R^2, non tangents, et la fonction de Martin h_A relative à l'extrémité $A \in \dot{C}_2$ d'un diamètre commun; soit B et C les extrémités du segment de ce diamètre situé dans Ω et disjoint de A; h_A s'annule en B et C et est symétrique par rapport à BC, donc $|\text{grad } h_A|$ s'annule en un point intérieur au segment BC. Si $\Omega \subset R^2$ est simplement connexe, on voit par transformation conforme qu'il n'y a pas de telle h_A; on peut se demander ce qui se passe à cet égard pour un ouvert de R^n où tout point est rétracte de toute surface homéomorphe à une sphère, le contenant.

Si l'on prend pour Ω une boule modifiée en lui ajoutant une pointe assez effilée pour ne contenir aucun cône d'ouverture non nulle, ni le théorème 1, ni le théorème 2 ne s'appliquent à la fonction de Martin relative au sommet A de la pointe si l'on n'en connaît pas la croissance en A; le théorème 3 donne le résultat $W^0_{(0, h_A^\alpha)} \subset \mathfrak{D}'$ si $\alpha \neq 1$; le cas $\alpha = 1$ qui était résolu pour la boule, non par le théorème 3 mais par le théorème 2 (Remarque 2) reste ici non résolu; en fait, l'inégalité de Harnack, qui modère la croissance au bord d'une fonction sous-harmonique positive, permet à h_A de croître d'autant plus vite que la pointe est effilée et le seul fait que $W_{(0, h_A^\alpha)} \subset \mathfrak{D}'$ pour $\alpha > 1$ suggère qu'elle fait bien ainsi.

La recherche, h étant donnée, de fonctions H telle que

$$\forall \varphi \in \mathfrak{D}, \qquad \int H|\varphi|^2 < \int h\, |\text{grad } \varphi|^2$$

pourrait conduire à une généralisation du théorème 3; (cf. la fin de (I, 2, 3-1).

Remarque 5. — On connaît le rôle des fonctions harmoniques positives minimales et la possibilité d'exprimer toute fonction harmonique positive dans Ω à l'aide des minimales; cf. [15], [48]; à la notion de fonction harmonique > 0 minimale, on peut attacher une notion de fonction hilbertiennement minimale :

LEMME. — *Soit h continue sur Ω alors, si* $\int h\,|\mathrm{grad}\,\varphi|^2 \geqslant 0$ *pour toute* $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$, $h(x) \geqslant 0$ *sur* Ω.

Conséquence. — Si h et $\tilde{h}$ sont continues,

$$W_{(0,h)} \subset W_{(0,\tilde{h})} \Longleftrightarrow (\exists\lambda,\ \lambda\tilde{h} \leqslant h,\ \lambda > 0) \Longleftrightarrow \tilde{h} \prec h;$$

la dernière équivalence définissant $\prec$.

DÉFINITION. — *h est hilbertiennement minimale si*

$$W_{(0,h)} \subset W_{(0,\tilde{h})} \Longrightarrow \tilde{h} = \mu h, \quad \mu \in \mathrm{R}$$

i. e. si :

$$\tilde{h} \prec h \Longleftrightarrow \tilde{h} = \mu h.$$

On vérifie alors très simplement qu'il y a identité entre l'ensemble des fonctions de Martin et l'ensemble des fonctions harmoniques positives hilbertiennement minimales, parmi les harmoniques positives.

N° 4. Exemples d'espaces des types W et W^0 et de multipoids annulant au bord.

Les théorèmes suivants seront utilisés en (I, 4, 3). Ils se généralisent facilement pour $p \neq 2$ en prenant des espaces $W_{(h^{-1},h),(p,q)}$ où $1/p + 1/q = 1$, $p > 1$.

THÉORÈME 1 (cas $n = 1$). — *Soit* $\Omega = \mathrm{R}_+$, $h(x)$ *mesurable sur* Ω, *positive*, h^{-1} *localement bornée et h telle que* $\int_\varepsilon^{\mathrm{N}} h^{-1}\,dx$ *tend vers l'infini si ε tend vers* 0, *de même que si* N *tend vers l'infini, alors :*

1° *Les éléments u de $W_{(h^{-1},h)}$ sont des fonctions absolument continues sur tout compact et nulles au bord, i. e.* $u(x) \to 0$ *si* $x \to 0$ *ou si* $x \to +\infty$.

2° $\mathfrak{D}$ *est dense dans* $W_{(h^{-1},h)}$; *autrement dit cet espace est identique à* $W^0_{(h^{-1},h)}$;

3° *Soit* $h = x$: *l'application* $u \to v = x^{(1-c)/2}u$ *définit un isomorphisme de* $W_{(x^{-1},x)}$ *sur* $W_{(x^{c-2},x^c)}$; *en particulier,* $W_{(x^{c-2},x^c)} = W^0_{(x^{c-2},x^c)}$ *et si v est dans ce dernier espace,* $x^{(c-1)/2}v$ *est nulle au bord.*

Démonstration. — 1° La continuité absolue sur tout compact résulte de [62], chapitre II. Soit $u \in W_{(h^{-1},h)}$; si u ne tend pas vers 0, il existe un nombre $l > 0$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a > 0$, $a < \varepsilon$ avec $|u(a)| \geqslant l$; de même, pour tout $\varepsilon < 0$, il existe b, $0 < b < \varepsilon$, avec $|u(b)| \leqslant l/2$: sinon $\int_0^\infty h^{-1}|u|^2\,dx$ ne pourrait être finie, h^{-1} n'étant pas sommable; on peut donc construire une suite :

$$a_n > b_n > a_{n+1} > b_{n+1}, \ldots \to 0$$

telle que $|u(a_n)| \geqslant l$ et $|u(b_n)| \leqslant l/2$, pour tout n. En majorant par Cauchy-Schwarz : (il suffit de prendre u réelle)

$$u^2(a_n) - u^2(b_n) = 2\int_{b_n}^{a_n} h^{-1/2}u \,.\, h^{1/2}u'\,dx,$$

il vient :

$$(67)\quad |u^2(a_n) - u^2(b_n)| \leqslant \int_{b_n}^{a_n} h^{-1}u^2\,dx + \int_{b_n}^{a_n} hu'^2\,dx = \mathrm{J}$$

et comme $|u^2(a_n) - u^2(b_n)| \geqslant l^2/2 > 0$, on obtient que J majore $pl^2/2$, p étant un entier aussi grand qu'on veut, ce qui est absurde.

On démontre de même que si $x \to +\infty$, $u(x) \to 0$: on construit une suite :

$$a_n < b_n < a_{n+1} < b_{n+1}, \ldots \to \infty$$

ayant les mêmes propriétés que la précédente.

2° Soit $0 < \eta < \varepsilon < 1$; considérons la fonction $\varphi = u$ pour $\varepsilon \leqslant x \leqslant 1$, $\varphi = 0$ pour $0 \leqslant x \leqslant \eta$, et, pour $\eta \leqslant x \leqslant \varepsilon$,

$$\varphi = u(\varepsilon)\Big(\int_\eta^x h^{-1}\,dx\Big)\Big/\int_\eta^\varepsilon h^{-1}\,dx$$

un calcul facile montre que :

$$\mathrm{I} = \int_\eta^\varepsilon (h^{-1}\varphi^2 + h\varphi'^2)\,dx \leqslant u^2(\varepsilon)\Big(\int_\eta^\varepsilon h^{-1}\,dx + 1\Big/\int_\eta^\varepsilon h^{-1}\,dx\Big)$$

comme $\int_0^1 h^{-1}\,dx$ diverge, ε étant donné, on peut toujours trouver η tel que $\int_\eta^\varepsilon h^{-1}\,dx = 1$, donc $\mathrm{I} \leqslant 2u^2(\varepsilon)$; si ε tend vers 0, en choisissant ainsi η pour chaque ε, I tend vers 0 d'après le 1°; on définit φ de façon analogue pour $x > 1$, et en la remplaçant par une régularisée convenable, on approche u dans $\mathrm{W}_{(h^{-1}, h)}$ d'aussi près qu'on veut avec des fonctions de $\mathfrak{D}(\mathrm{R}_+)$.

3° De $$v' = x^{(1-c)/2}u' + \frac{1-c}{2}x^{(-1-c)/2}u$$

et de $$u' = x^{(c-1)/2}v' + \frac{c-1}{2}x^{(c-3)/2}v,$$

on déduit

$$\int v'^2 x^c = \frac{(1-c)^2}{4}\int x^{-1}u^2 + \int xu'^2 + (1-c)\int uu'$$

et

$$\int xu'^2 = \frac{(c-1)^2}{4}\int x^{c-2}v^2 + \int x^c v'^2 + (c-1)\int x^{c-1}vv'$$

comme d'après Cauchy-Schwarz,

$$2\left|\int uu'\right| \leqslant \int xu'^2 + \int x^{-1}u^2 \quad \text{et} \quad 2\left|\int x^{c-1}vv'\right| \leqslant \int x^{c-2}v^2 + \int x^c v'^2$$

on obtient la bicontinuité de l'application; comme $\mathfrak{D}$ est dense dans $W_{(x^{-1},x)}$ et est invariant, le théorème est démontré.

Remarque 1. — En fait, on sait à priori que les éléments de $W_{(h^{-1},h)}$ ont une trace $u(0)$ (et une trace $u(+\infty)$) qui dépend continûment de u pour $\|u\|_{(h)}$: il suffit d'utiliser (67). Si on fait tendre a_n et b_n vers 0, on voit que $u^2(x)$ converge, suivant le filtre des voisinages de 0, vers un nombre $\geqslant 0$, et de même de $u(x)$; on obtient de même par (67), en laissant b_n fixe à l'infini, la continuité de la trace qui est donc à priori nulle pour les $u \in W^0_{(h^{-1},h)}$; mais cela ne montre pas l'identité des deux espaces.

Remarque 2. — D'après le théorème 1, le multi-poids (h^{-1}, h) considéré annule au bord et est suffisant (c. f. définition 7 de (I, 1, 3)); pour tout c, les multi-poids (x^{c-2}, x^c) sont suffisants, mais n'annulent pas nécessairement au bord par exemple, $W_{(x^2,x^4)}$ contient une tronquée à droite de $1/x$.

Remarque 3. — Le théorème précédent se généralise facilement pour $W_{(h^{-1},h),(p,q)}$; de plus, on peut obtenir des énoncés analogues pour des intervalles bornés; par exemple, $\Omega = \;> 0$, $a <$, $h = x(a-x)$, $a > 0$. On peut dire aussi « les éléments de $W_{(x^{-1},x)}(\Omega)$ sont des fonctions continues, nulles au point 0 et admettant une trace $u(a)$ continue sur $W_{(x^{-1}, x)}(\Omega)$; dans cet espace, les restrictions à Ω des fonctions de $\mathfrak{D}(R_+)$ sont denses ».

THÉORÈME 1′ (cas $n > 1$). — *Soit* $\Omega = \{x \in R^n,\ x_n < 0\}$, *h une fonction mesurable de* x_n, *h et* h^{-1} *localement bornées; supposons que* $\int_\varepsilon^N h^{-1}\, dt$ *tend vers l'infini si* $\varepsilon \to 0$ *ou si* $N \to +\infty$; *alors,*

1° *pour tout ensemble mesurable* $\Pi \in R^{n-1}$, *l'intégrale*

$$\int_\Pi |u|^2\, dx_1 \ \ldots\ dx_{n-1}$$

où $u \in W_{(h^{-1}, h)}$ *est p. p. égale à une fonction absolument continue sur tout compact,* $[U(x_n)]^2$ *qui tend vers* 0 *si* $x_n \to 0$ *ou si* $x_n \to +\infty$.

2° *L'espace* $\mathfrak{D}$ *est dense dans* $W_{(h^{-1}, h)}$.

3° *Soit* $h = x_n$; *l'application* $u \to v = x_n^{(1-c)/2}\, u$ *définit un isomorphisme de* $W_{(x_n^{-1}, x_n)}$ *sur* $W_{(x_n^{c-2}, x_n^c)}$.

Démonstration. — Pour la définition de U, voir par exemple le théorème 1 de (I, 3, 1); comme $\int h|u|^2 < \infty$, Π peut être $x_n = 0$ tout entier; on vérifie (Cauchy-Schwarz) que

$$\int h^{-1} U^2\, dx_n + \int h U'^2\, dx_n < \infty\,;$$

on est ramené à la démonstration du théorème précédent, sauf en ce qui concerne le 2°, où il faut faire une troncature différente : soit $0 < \eta < \varepsilon < 1 < \varepsilon_1 < \eta_1 < \infty$; soit $\omega(x_n)$ nulle en dehors de $\rangle\eta, \eta_1\langle$; $\omega = 1$ dans $\langle\varepsilon, \varepsilon_1\rangle$;

$$\omega(x_n) = \log \frac{I(x_n)}{I(\eta)} \Big/ \log \frac{I(\varepsilon)}{I(\eta)},$$

où $I = \int_{x_n}^1 h^{-1}\, dt$, dans $\langle\eta, \varepsilon\rangle$; on définit $\omega(x_n)$ de façon analogue dans $\langle\varepsilon_1, \eta_1\rangle$; on vérifie que si η, ε, ε_1, η_1, sont correctement choisis, ωu approche d'aussi près qu'on veut u dans $W_{(h^{-1}, h)}$; cette vérification est faite en détail dans la démonstration du théorème 3 de (1, 3, 1), ω est la fonction de troncature de Poulsen qui s'adapte à la situation présente bien que la première composante de (h) ne soit pas nulle. Il reste à montrer qu'on peut approcher ωu dans $W_{(h^{-1}, h)}$, avec des fonctions de $\mathfrak{D}$; cela résulte du fait classique que $\mathfrak{D}(R^{n-1})$ est dense dans $W_{(1,1)}(R^{n+1})$, et de ce que h^{-1} n'est pas nulle.

§ 3. — Caractérisation des éléments d'un $W^0_{(h),p} \subset \mathcal{D}'$; traces ; applications.

Sommaire. — Au numéro 1, nous posons les problèmes de façon générale, pour $p \geqslant 1$ quelconque et, en ce qui concerne les traces, pour $k > 1$; au numéro 2, nous énonçons, comme conséquences du n° 1, les résultats utilisés dans l'interprétation des théorèmes d'isomorphisme ou d'existence obtenus au § 4. On rapprochera certains résultats de [57], [83], [85]. Certains points seront développés dans [90] : nous ne nous occuperons au § 4 que de problèmes homogènes.

N° 1. Caractérisation et traces.

1. 1. Théorèmes de traces.

Les notations suivantes sont utilisées dans plusieurs énoncés; elles sont analogues à celles du théorème 1 de (I, 2, 3).

Notations I.

1° Soit $\Omega \subset R^n$; $(Ox_1, Ox_2, \ldots, Ox_n)$ est un système quelconque d'axes de coordonnées; Π est un ensemble relativement compact dans Ω, porté par l'hyperplan $x_1 = 0$, Π étant mesurable et de mesure non nulle dans cet hyperplan; le point N décrit Π; F_N est le premier point de $\dot{\Omega}$, à distance finie ou non, rencontré par l'axe d'origine N, équipollent à Ox_1; Π_1 est l'ensemble engendré par le segment NF_N; $\dot{\Omega}_{1,\Pi}$ est le lieu de F_N (l'indice 1 rappelle l'axe Ox_1); $\dot{\Omega}^\varepsilon_{1,\Pi}$ est le translaté de $\dot{\Omega}_{1,\Pi}$ pour la translation $(-\varepsilon, 0, \ldots, 0)$, $\varepsilon > 0$; Π^ε_1 est Π_1 diminué de l'ensemble engendré par $\dot{\Omega}_{1,\Pi}$ au cours de la translation précédente.

F^θ_N est le point de NF_N d'abscisse $x_1 = \inf(\theta, NF_N)$; $\theta > 0$; $\dot{\Omega}^\theta_{1,\Pi}$ est le lieu de F^θ_N; $\Pi(t)$ est le translaté de Π pour la translation $(t, 0, 0, \ldots, 0)$; soit $t_N = NF_N$ et $f = \sup\limits_{N \in \Pi} t_N$.

2° Soit h une fonction mesurable, positive sur Ω, $h^{-1} \in \mathcal{L}^\infty$ localement; sauf avis contraire $(h) = (0, 0, \ldots, 0, h)$, de longueur

$k+1$; soit $0 \leqslant t \leqslant \theta \leqslant f$ et $\tau = \inf(\theta, \mathrm{NF_N}) = \mathrm{NF}_\mathrm{N}^\theta$; on pose, si $j \leqslant k$, et si $\Pi(t) \in \Omega$:

$$(68) \quad \mathrm{J}_r^j(\theta) = \int_\Pi dx_2 \ldots dx_n \Big[\int_0^\tau (\tau - x_1)^{q(j-1)} h^{-q/p}\, dx_1\Big]^{r/q}$$

De plus, si $f < \infty$

$$(69) \quad \mathrm{I}_r^j(\varepsilon) = \int_\Pi dx_2 \ldots dx_n \Big[\int_{t_\mathrm{N}-\varepsilon}^{t_\mathrm{N}} (t_\mathrm{N} - x_1)^{q(j-1)} h^{-q/p}\, dx_1\Big]^{r/q}$$

3° On entend par $u(t)$: $u(t, x_2, \ldots, x_n)$, $u^{(j)}$ signifie : $\partial^j/\partial x_1^j$

$$(70) \qquad \mathrm{U}_s^\alpha(t) = \int_{\Pi(t)} |\mathrm{D}^\alpha u|^s\, dx_2 \quad \ldots \quad dx_n$$

$$(71) \qquad \mathrm{U}_s(t) = \sum_{|\alpha| < k} \mathrm{U}_s^\alpha(t).$$

Enfin, C pourra désigner des constantes positives finies différentes.

Lemme 1. — *Soit $(h) = (h_0, \ldots, h_k)$ un multi-poids sur Ω; et supposons que, k_1 étant un compact de $\rangle 0, f\langle$,*

$$\mathrm{K}_1 = \{x,\ x \in \Pi(t),\ t \in k_1\}$$

est relativement compact dans Ω; alors, si une suite de u_m converge dans $\mathrm{W}_{(h),p}$, et si $1 \leqslant s \leqslant p_k$, les $\mathrm{U}_s(t)$ convergent uniformément p. p. sur k_1.

Démonstration. — L'ensemble K_1 étant relativement compact dans Ω, on a : $h_k > \mathrm{C} > 0$ sur K_1; soit C′ la constante relative à K_1 du corollaire du lemme 1 de (I, 2, 2) : $\forall t_1, t_2 \in k_1$, $|\alpha| < k$, on a p. p. en $(x_2, \ldots, x_n)$:

$$|\mathrm{D}^\alpha u(t_1)|^s < \mathrm{C}'\Big[|\mathrm{D}^\alpha u(t_2)|^s + |\mathrm{D}^\alpha u'(t_2)|^s + \cdots + |\mathrm{D}^\alpha u^{k-|\alpha|-1}(t_2)|^s + \int_{t_1}^{t_2} |\mathrm{D}^\alpha u^{(k-|\alpha|)}|^s\, dt\Big]$$

en intégrant en $dx_2 \ldots dx_n$:

$$\mathrm{U}_s(t_1) \leqslant \mathrm{C}'\Big[\mathrm{U}_s(t_2) + \mathrm{C}^{-1}\int_{\mathrm{K}_1} h_k \sum_{|\alpha|=k} |\mathrm{D}^\alpha u|^s\, dx\Big],$$

p. p. en t_1, t_2; soit $\eta > 0$; il existe N entier tel que pour $m > \mathrm{N}$, $m' > \mathrm{N}$, on ait, en posant $u = u_m - u_{m'}$, en supposant $l_1 =$ mesure de k_1, avec $l_1 \neq 0$, ce que l'on peut toujours faire quitte à agrandir k_1 :

$$\mathrm{U}_s(t) < \mathrm{C}'\mathrm{C}^{-1}[\eta/l_1 + \eta]$$

p. p. en t sur k_1, en effet, si ε est assez petit et si

$$\int_{K_1} h_k \sum_{|\alpha|=k} |D^\alpha u|^s < \varepsilon < \eta,$$

il existe $t_2 \in k_2$ tel que :

$$U_s(t_2) < C^{-1}\eta/l_1.$$

THÉORÈME 1 (traces). — 1° *Si* $f < +\infty$; *si* $q \leqslant r < \infty$ *avec* $1/p + 1/q = 1$; *si* $1 \leqslant s \leqslant rp/(p+r)$; *et si* $J_r^j(f) < \infty$, $(1 \leqslant j \leqslant k)$ *alors, pour toute* $u \in W_{(0,\ldots,0,h),p}$ *et tout* $|\alpha| \leqslant k-j$;

la trace $D^\alpha u(F_N) = D^\alpha u(a) + \int_a^{t_N} D^\alpha u'(t)\,dt$ *est définie p. p. en* N, *mesurable, et ne dépend pas de a, a étant pris dans le complémentaire dans un ouvert de* R_+ *d'un ensemble de mesure nulle*;

de plus, l'intégrale :

$$U_s^\alpha(\dot\Omega_{1,\Pi}) = \int_\Pi |D^\alpha u(F_N)|^s\,dx_2 \ldots dx_n \tag{72}$$

est convergente, dépend continûment de u pour $\|u\|_{(h),p}$; *pour* $\varepsilon > 0$ *(assez petit),* $U_s^\alpha(\Omega_{1,\Pi}^\varepsilon)$ *existe et tend vers* $U_s^\alpha(\dot\Omega_{1,\Pi})$ *si* $\varepsilon \to 0$; *on la nomme intégrale de trace de u, d'exposant s, sur la partie de frontière voisine de* Π *dans la direction orientée* Ox_1.

2° *On suppose f quelconque,* $q \leqslant r < \infty$, $1 \leqslant s \leqslant rp/(p+r)$; *si* $|\alpha| = k-1$ *et si*

$$\lim_{\theta\to\infty} J_r^1(\theta) < \infty,$$

alors,

$$U_s^\alpha(\dot\Omega_{1,\Pi}) = \lim_{\theta\to\infty}\int_\Pi |D^\alpha u(F_N^\theta)|^s\,dx_2 \ldots dx_n \tag{73}$$

existe, dépend continûment de u de même que $U_s^\alpha(\dot\Omega_{1,\Pi}^\varepsilon)$ *qui tend vers* $U_s^\alpha(\dot\Omega_{1,\Pi})$ *si* $\varepsilon \to 0$; *cette expression porte le même nom qu'au* 1°; $\dot\Omega_{1,\Pi}$ *peut être partiellement à l'infini.*

Démonstration. — 1° On a p. p. en $(x_2, \ldots, x_n)$, si $j = k - |\alpha|$:

$$\begin{aligned} D^\alpha u(t) &= D^\alpha u(0) + tD^\alpha u'(0) + \cdots \\ &+ \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} D^\alpha u^{(j-1)}(0) - \frac{(-1)^j}{(j-1)!}\int_0^t (t-x_1)^{j-1} D^\alpha u^{(j)}\,dx_1 \end{aligned} \tag{74}$$

soit $T_N = NF_N$; en intégrant en $dx_2 \ldots dx_n$ sur Π, et en tenant compte de ce que Π_1 est borné, il vient, si $s = rp/(p+r)$

(d'où $1 \leqslant s < p$) et en supposant $U_s(0) < \infty$ quitte à changer d'origine (Krylov-Schwartz),

$$\int_\Pi |D^\alpha u(t_N)|^s dx_2 \dots dx_n \leqslant CU_s(0) + C\int_\Pi dx_2 \dots dx_n \left[\int_0^{t_N} (t_N - x_1)^{j-1} |D^\alpha u^{(j)}| dx_1\right]^s$$

or, en utilisant la majoration de Hölder avec les exposants p et q,

$$\int_0^t (t - x_1)^{j-1} |D^\alpha u^{(j)}| dx_1 < \left[\int_0 (t - x_1)^{q(j-1)} h^{-q/p} dx_1\right]^{1/q} \left[\int_0^t h |D^\alpha u^{(j)}|^p dx_1\right]^{1/p}$$

et en appliquant encore la majoration de Hölder à l'intégration sur Π, avec les exposants p/s et $p/(p-s)$, il vient :

$$(75) \qquad U_s^\alpha(\dot{\Omega}_{1,\Pi}) \leqslant CU_s(0) + C\|u\|_{(h),p}^s [J_r^j(f)]^{s/r}$$

d'où le 1°, en tenant compte du lemme 1 pour établir la continuité par rapport à u; on démontre la continuité par rapport à ε par une majoration analogue à (75), où $U_s(0)$ est remplacé par $U_s(\dot{\Omega}^\varepsilon_{1,\Pi})$ et tenant compte de ce que l'on aurait pu écrire (75) en y remplaçant $\|u\|_{(h),p}$ par $\int_{\Pi_1 - \Pi'_1} h \sum_{|\beta|=k} |D^\beta u|^p$.

2° On obtient de la même façon, si $|\alpha| = k - 1$

$$(76) \qquad \int_\Pi |D^\alpha u(F_N^\theta)|^s dx_2 \dots dx_n \leqslant CU_s(0) + C\|u\|_{(h),p}^s (J_r^1(\theta))^{s/r}$$

en effet pour passer de (74) à (75) on n'a plus besoin que Π_1 soit borné, (74) ne comprenant plus que le premier et le dernier terme de (76); on déduit facilement les conclusions.

THÉORÈME 2. — *Soit* Ω, Π; *l'axe* Ox_1 *transversal à* Π, *soit* $f < +\infty$, *soit* $s = rp/(p+r)$, *soit* $(h) = (0, 0, \dots, 0, h)$, *de longueur* $k+1$; *alors pour que* $u \in W^0_{(h),p}$, *il faut que pour tout* j, $1 \leqslant j \leqslant k$, *pour tout* r, $q \leqslant r < \infty$, $(1/p + 1/q = 1)$, *on ait :*

$$(77) \qquad J_s^j(f) = +\infty \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{pour tout } \alpha \text{ avec } |\alpha| \leqslant k - j, \\ \qquad U_s^\alpha(\dot{\Omega}_{1,\Pi}) = 0 \\ \text{et même :} \\ \qquad U_s^\alpha(\dot{\Omega}^\varepsilon_{1,\Pi})/[I_r^j(\varepsilon)]^{s/r} \to 0 \\ \text{avec } \varepsilon. \end{array} \right.$$

Démonstration. — L'alternative est une conséquence directe du théorème 1; d'autre part, si $U_s^\alpha(\dot{\Omega}_{1,\Pi}^\varepsilon) = 0$, on obtient, en utilisant les deux majorations de Hölder utilisées pour le théorème 1 :

$$(78) \quad U_s^\alpha(\dot{\Omega}_{1,\Pi}^\varepsilon) \leqslant C[I_r^j(\varepsilon)]^{s/r}\left[\int_{\Pi - \Pi_\varepsilon} h \sum_{|\beta|=k} |D^\beta u|^p \, dx\right]^{s/p}.$$

Remarque 1. — Soit dans R^2, l'ouvert :

$$\Omega = \{x | 0 < x_1 < 1, \ 0 < x_2 < 1,$$
$$x \neq (t_1, \ b_m) \text{ pour } 0 < t_1 \leqslant 1/2 \text{ et tout } m\}$$

b_m étant une suite tendant vers 0 dans $\rangle 0, 1\langle$ et soit par exemple $h = 1$: il existe une trace dans la direction $\overrightarrow{x_1 O}$, alors qu'il n'y a pas de trace sur toute la frontière : si on prend $u = 1$, sa trace est infinie, puisque la frontière a une longueur infinie; cet exemple d'ouvert montre aussi que les hypothèses du théorème 2 sont en général insuffisantes pour une réciproque.

Remarque. — Dans le cas de divergence, où la trace n'existe pas, on peut écrire des majorations de croissance au bord pour les éléments de $W_{(h),p}$; cf. Remarque 1 de (I, 3, 2).

1. 2. Théorèmes de caractérisation.

Ouverts du type de la boule unité, h étant la distance au bord.

Notations II. — On prend pour Ω la boule de centre O, de rayon 1; Ω_y est la boule de centre O de rayon $1 - y$, $(y < 1)$; $(\rho, \ \omega)$ sont les coordonnées polaires de centre O; par u' on désigne $\partial u / \partial \rho$.

Si Π est un compact de $\dot{\Omega}$, on pose

$$\Pi_1 = \{(\rho, \ \omega) | \omega \in \Pi, \ 0 \leqslant \rho \leqslant 1\},$$
$$U_s^\Pi(y) = \int_\Pi |u(1 - y, \ \omega)|^s \, d\omega \quad s \geqslant 1$$

et
$$U(y) = U_p^{\dot{\Omega}}(y).$$

Soit h sur Ω, positive, $h^{-1} \in \mathcal{L}^\infty$ localement; $A(\rho)$ désigne une fonction positive, mesurable, A^{-1} localement bornée ne dépendant que de ρ; C_1 et C_2 sont des constantes positives finies.

On se réferera ou non à l'hypothèse :

(79) $\exists C_1,\ C_2,\ A,$ tels que $C_1 A < h < C_2 A.$

THÉORÈME 3 (Poulsen). — 1° *Si* $J_r(y) = \int_\Pi d\omega \left| \int_0^y h^{-q/p}\, d\rho \right|^{r/q}$ *converge,* $(y > 0)$ *avec* $q \leqslant r < \infty$, $1/p + 1/q = 1$; $p > 1$; *si* $1 \leqslant s = rp/(p+r)$, *alors* $W^0_{(0,h)} \subset \mathcal{D}'$ *et si* $u \in W^0_{(0,h)}$,

$$\forall \Pi, \quad U_s^\Pi(y)/[J_r(y)]^{s/r} \to 0 \quad \text{avec } y.$$

2° *Supposons que l'on ait* (79), $p > 1$; *pour que* $u \in W^0_{(0,h),p}$, *il suffit que* $u \in W_{(0,h),p}$ *et que :*

$$\int_0^1 A^{-q/p}$$

diverge, ou $U(y) \to 0$ *avec* y.

Démonstration. — La première partie est un corollaire du théorème 1 de traces, qui s'adapte immédiatement à la situation présente, les Ω_y correspondant aux $\Pi(t)$.

Montrons la deuxième partie : soit $u \in W_{(0,h)}$; soit

$$0 < \eta < \varepsilon < 1;$$

nous allons définir $\omega(\rho)$, $0 \leqslant \omega(\rho) \leqslant 1$, nulle pour $\rho \leqslant \eta$, égale à 1 pour $\varepsilon \leqslant \rho \leqslant 1$, et telle dans $\langle \eta, \varepsilon \rangle$ que l'intégrale

$$S = \int_{\Omega - \Omega_\varepsilon} A\, |\mathrm{grad}\ \omega u|^p$$

puisse être aussi petite qu'on veut.

(Une fois ω obtenue, il suffit de régulariser.)

Or,

$$S \leqslant C \int_{\Omega - \Omega_\varepsilon} A |\omega'|^p |u|^p + C \int_{\Omega - \Omega_\varepsilon} A\, |\mathrm{grad}\ u|^p.$$

La deuxième intégrale tend vers 0 avec ε; la première est majorée par :

$$S_1 = \int_\eta^\varepsilon A |\omega'|^p U(y)\, dy;$$

Cas où $\int_0^1 A^{-q/p}\, d\rho$ *converge.* — Soit $J(y) = \int_0^y A^{-q/p}\, d\rho$; d'après le théorème de traces, $U(y)/(J(y))^{p/q} \to 0$ avec y, donc, pour ε assez petit,

$$S_1 \leqslant \int_\eta^\varepsilon A |\omega'|^p J^{p/q}\, dy;$$

l'équation d'Euler du calcul des variations suggère alors de prendre :

$$\omega' = \mathrm{CA}^{-q/p}\mathrm{J}^{-1}.$$

d'où pour avoir $\omega(\eta) = 0$, $\omega(\varepsilon) = 1$: $\omega = \log \dfrac{\mathrm{J}(y)}{\mathrm{J}(\eta)} \Big/ \log \dfrac{\mathrm{J}(\varepsilon)}{\mathrm{J}(\eta)}$ alors, $\mathrm{S}_1 < |\log(\mathrm{J}(\varepsilon)/\mathrm{J}(\eta))|^{1-p}$; comme $p > 1$, ε ayant été choisi, $\mathrm{S}_1 \to 0$ avec η.

Cas où $\int_0^1 \mathrm{A}^{-q/p}\, d\rho$ *diverge.* — On choisit encore ε pour que $\int_{\Omega-\Omega_\varepsilon} \mathrm{A}\,|\mathrm{grad}\, h|^p$ soit assez petit; soit alors

$$\mathrm{I}(y) = \int_y^\varepsilon \mathrm{A}^{-q/p}\, d\rho$$

le théorème de trace appliqué pour $y = \varepsilon$ donne :

$$|\mathrm{U}(y) - \mathrm{U}(\varepsilon)| < \mathrm{CI}^{p/q},$$

donc, pour $y < \varepsilon/2$, $\mathrm{U}(y) < \mathrm{CI}^{p/q}$, pour C assez grand ne dépendant que de ε. On obtient, par le même choix de ω que précédemment dans $\langle\eta,\ \varepsilon/2\rangle$, $\mathrm{I}(y)$ remplaçant $\mathrm{J}(y)$, et en prenant $\omega = 1$ pour $\varepsilon/2 \leqslant y \leqslant 1$:

$$\mathrm{S}_1 < |\log(\mathrm{I}(\varepsilon/2)/\mathrm{I}(\eta))|^{1-p}$$

qui tend vers 0 avec η, ε restant fixe, puisque $\mathrm{I}(\eta) \to \infty$.

N. B. — Nous avons du reproduire le théorème précédent pour l'adapter à nos notations; l'artifice de troncature de Poulsen est conservé, la démonstration a été conduite pour $p \neq 2$, ce qui ne change guère de $p = 2$; la première partie est mise sous forme plus générale. c.f [57].

THÉORÈME 3'. — *Soit* $\Omega = \{x \in \mathrm{R}^n | x_n > 0\}$; *soit h mesurable positive sur* Ω, $h^{-1} \in \mathfrak{L}^\infty$ *localement*; *soit* Π *un ensemble mesurable de* $x_n = 0$ *et* $\xi = (x_1, \ldots, x_{n-1})$;

1° *si*
$$\mathrm{J}_r^0|x_n| = \int_\Pi d\xi \left| \int_0^{x_n} h^{-q/p}\, dx_n \right|^{r/q}$$

converge, ou si

$$\mathrm{J}_r^\infty(x_n) = \int_\Pi d\xi \left| \int_{x_n}^\infty h^{-q/p}\, dx_n \right|^{r/q}$$

converge, pour $0 < x_n < \infty, q \leqslant r < \infty, 1/p + 1/q = 1; p > 1$ *et si* $1 \leqslant s = rp/(p + r)$, *alors* $\overset{0}{W}_{(0, h)} \subset \mathfrak{D}'$, *et*

$$\left\{\begin{array}{l} \textit{si } u \in \overset{0}{W}_{(0,h)}, \\ \qquad\qquad U_s^{\Pi}(x_n) = \int_{\Pi} |u(\xi, x_n)|^s d\xi, \\ \textit{alors pour } \varkappa = 0 \textit{ ou } +\infty,\ \forall \Pi,\ J_r^{\varkappa}(1) \textit{ diverge, ou} \\ \qquad U_s^{\Pi}(x_n)/[J_r^{\varkappa}(x_n)]^{s/r} \to 0 \quad \textit{si} \quad x_n \to \varkappa. \end{array}\right.$$

2° *S'il existe* $\tilde{h}$ *mesurable, ne dépendant que de* x_n, *et des constantes* C_1 *et* $C_2 > 0$ *telles que* $C_1\tilde{h}(x_n) < h < C_2\tilde{h}(x_n)$; *pour que* $u \in \overset{0}{W}_{(0, h), p}$, $p > 1$, *il suffit que* $u \in W_{(0, h), p}$ *et: pour* $\varkappa = 0$ *et pour* $\varkappa = \infty$, $\int_1^{\varkappa} \tilde{h}^{-q/p}$ *diverge, ou* $U_2^{R^{n-1}}(x_n)$ *est finie et tend vers* 0 *si* x_n *tend vers* $\varkappa$.

Démonstration. — Elle se fait comme la précédente; c. f. aussi la démonstration du théorème 1' de (I, 2, 4); ici, si Π n'est pas relativement compact $U_2^{\Pi}(x_n)$ n'existe pas nécessairement pour $u \in W_{(0, h)}$; si cette intégrale de trace est finie pour une valeur finie de x_n, ou pour $x_n = \varkappa$ dans le cas où $J_q^{\varkappa}(1)$ converge, alors elle est finie pour toute valeur finie de x_n (c'est le cas si $u \in \overset{0}{W}_{(0, h)}$); lorsqu'on a tronqué u vérifiant les conditions du 2° avec $\omega(x_n)$, ω étant à support compact, on obtient une fonction $\omega u \in W_{(1, 1)}(\Omega')$ et on approche alors u de façon classique avec des fonctions de $\mathfrak{D}$; (l'ouvert Ω' est défini par $0 < \eta < x_n < \eta_1 < \infty$).

Cas $\Omega = R^+$.

Le théorème suivant résout entièrement les problèmes $\overset{0}{W}_{(h), p} \subset \mathfrak{D}'$ et de la caractérisation des éléments de $\overset{0}{W}_{(h), p}$, pour $(h) = (0, 0, ..., 0, h)$, et $n = 1$; Dans ce cas, on peut faire une troncature plus simple; on peut aussi utiliser celle du théorème précédent, près de 0 et de $+\infty$.

Théorème 4. — *Soit* $\Omega = > 0$, $a < \subset R$, $a > 0$, *a fini ou non*; *soit b fini*, $0 < b < a$; *soit h définie sur* Ω, *positive*, $h^{-1} \in \mathfrak{L}^{\infty}$ *localement*; *soit*

$$I(\varepsilon) = \int_0^{\varepsilon} h^{-q/p}\, dt; \qquad J(\varepsilon_1) = \int_{\varepsilon_1}^{a} h^{-q/p}\, dt.$$

1° *Pour que* $\overset{0}{W}_{(h), p} \subset \mathfrak{D}'$ *il est nécessaire et suffisant que l'une des intégrales* $I(b)$ *ou* $J(b)$ *converge.*

2° *S'il en est ainsi, pour que* $u \in W^0_{(h),p}$, *il faut que* $u \in W_{(h),p}$ *et que l'on ait* (80) *et* (81) :

(80) I(b) *diverge, ou* $u(\varepsilon)/[I(\varepsilon)]^{1/q} \to 0$ *avec* ε

(81) J(b) *diverge, ou* $u(\varepsilon_1)/[J(\varepsilon_1)]^{1/q} \to 0$ *si* $\varepsilon_1 \to a$.

3° *Pour que* $u \in W^0_{(h),p}$, *il suffit que* $u \in W_{(h),p}$ *et que l'on ait* (82) *ou* (83) :

(82) I(b) *diverge, ou* $u(\varepsilon) \to 0$ *avec* ε;

(83) J(b) *diverge, ou* $u(\varepsilon_1) \to 0$ *si* $\varepsilon_1 \to a$.

Démonstration. — 1° C'est une conséquence de la proposition 4 de (I, 2, 3) et du lemme 1' de (I, 2, 2).

2° C'est une conséquence du théorème 2, qui peut s'énoncer ici pour $f = +\infty$;

3° Soit $0 < t < \varepsilon < b < \varepsilon_1 < t_1 < a$; soit :

$$H(x) = \int_t^x h^{-q/p}\,dt \qquad \text{et} \qquad H_1(x) = \int_x^{t_1} h^{-q/p}\,d\tau;$$

nous donnons la démonstration dans le cas où I(b) converge, et où J(b) diverge; elle s'adapte facilement aux autres cas; soit $u \in W_{(h),p}$; si $|u(\varepsilon)| \to 0$ avec ε, il en est de même de $u(\varepsilon)/[I(\varepsilon)]^{1/q}$: on a en effet :

$$|u(\varepsilon)|^p = \left|\int_0^\varepsilon u'\,dx\right|^p < \left(\int_0^\varepsilon h^{-q/p}\right)^{p/q} \int_0^\varepsilon h|u'|^p\,dx;$$

supposons ε et ε_1 choisis tels que :

$$u(\varepsilon)/[I(\varepsilon)]^{1/q} < \eta; \qquad \int_0^\varepsilon h|u'|^p < \eta; \qquad \int_{\varepsilon_1}^a h|u'|^p < \eta$$

et prenons

$\varphi(x) = u$ si $\varepsilon \leqslant x \leqslant \varepsilon_1$; $\varphi(x) = 0$ si $0 \leqslant x \leqslant t$ ou si $t_1 \leqslant x \leqslant a$
et $\varphi(x) = H(x).u(\varepsilon)/H(\varepsilon)$ pour $t \leqslant x \leqslant \varepsilon$;
$\varphi(x) = H_1(x)u(\varepsilon_1)/H_1(\varepsilon_1)$ si $\varepsilon_1 \leqslant x \leqslant t_1$,

on a alors :

$$\int_0^a h|u-\varphi|^p\,dx < 2\eta + \int_t^\varepsilon h|\varphi'|^p\,dx + \int_{\varepsilon_1}^{t_1} h|\varphi'|^p\,dx$$

or,

$$\int_t^\varepsilon h|\varphi'|^p\,dx = |u|^p(\varepsilon)/H^{p-1}(\varepsilon); \qquad \int_{\varepsilon_1}^{t_1} h|\varphi'|^p\,dx = |u|^p(\varepsilon_1)/H_1^{p-1}(\varepsilon_1);$$

on impose alors à t d'être assez petit pour que $H^{p-1}(\varepsilon)$ soit assez voisin de $[\mathrm{I}\ (\varepsilon)]^{p/q}$ pour que $|u|^p(\varepsilon)/\mathrm{H}^{p-1}(\varepsilon) < 2\eta$; enfin, on prend t_1 assez voisin de a pour que $|u|^p(\varepsilon_1)/\mathrm{H}^{p-1}(\varepsilon_1) < \eta$, ce qui est possible car $\mathrm{H}(\varepsilon_1) \to \infty$ si $t_1 \to a$.

Remarque 2. — La condition nécessaire indique en détail la condition de nullité au bord; elle ne peut guère être renforcée dans l'exemple suivant :

Exemple : $h = x^\alpha$, $\alpha < 1$; soit $n = 1$,

$$u \in \mathrm{W}^0_{(0,h)}, \qquad u = x^{(1-\alpha)/2}v(x);$$

alors, v n'est plus astreint à une condition de Lipschitz au point O : une fonction $= 1/\log x$ près de 0 peut convenir pour v; en revanche une fonction s'annulant à l'origine comme $1/\log|\log x|$ ne peut convenir pour v : *les conditions de Lipschitz écrites au bord sont maximales du point de vue de l'exposant.*

Remarque 3. — Le théorème précédent se généralise ainsi pour $k > 1$: soit

$$\mathrm{I}^j(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon (\varepsilon - t)^{q(j-1)} h^{-q/p}\, dt; \quad \mathrm{J}^j(\varepsilon_1) = \int_{\varepsilon_1}^a (t - \varepsilon_1)^{q(j-1)} h^{-q/p}\, dt$$

il suffit de remplacer I par I^1 et J par J^k dans le 1°; et de remplacer (80) et (81) par :

$$(84) \qquad \mathrm{I}^1(b) \text{ diverge, ou } \forall j,\ 1 \leqslant j \leqslant k,$$
$$u^{(k-j)}(\varepsilon)/[\mathrm{I}^j(\varepsilon)]^{1/q} \to 0 \text{ avec } \varepsilon.$$
$$(85) \qquad \forall j,\ \mathrm{J}^j(b) \text{ diverge}$$
$$\text{ou} \qquad u^{(k-j)}(\varepsilon_1)/[\mathrm{J}^j(\varepsilon_1)]^{1/q} \to 0 \text{ si } \varepsilon_1 \to \infty$$

avec modification analogue dans (82) et (83).

Nous l'avons vérifié en posant :

$$\mathrm{H}_j = \int_t^x dt_1 \int_t^{t_1} \cdots \int_t^{t_{j-1}} h^{-q/p}\, dt_j$$

et en prenant pour φ dans l'intervalle $\langle t, \varepsilon\rangle$ la fonction

$$\varphi = \alpha_k \mathrm{H}_k(x) + \alpha_{k-1} x \mathrm{H}_{k-1}(x) + \cdots + \alpha_1 x^{k-1} \mathrm{H}_1(x)$$

cette fonction s'annule en t jusqu'à l'ordre $k - 1$; on détermine les α_i pour qu'elle coïncide en ε avec u jusqu'au même ordre; définition analogue pour φ au delà de ε_1.

Cas où h a une singularité polaire.

Notations III. — Soit toujours Ω la boule unité; $T \in \dot{\Omega}$, (t, σ) les coordonnées polaires de pôle T, T_z la boule de centre T de rayon z; $\dot{T}_z$ la sphère de centre T et de rayon z;

K est un compact de $\dot{T}_1 \cap \Omega'$, où Ω' est le demi-espace ouvert contenant Ω et limité par l'hyperplan tangent en T à Ω;

pour $u \in W_{(0, h)}$, on pose p. p. en z:

$$V_s^K(z) = \int_K |\varphi(z, \sigma)|^s \, d\sigma.$$

Corollaire 1 du théorème 1. — *Si*

$$I_r(z) = \int_K d\sigma \left[\int_0^z h^{-q/p} t^{-(n-1)q/p} \right]^{r/q}$$

converge $(z > 0)$ *avec* $q \leqslant r < \infty$, $1/p + 1/q = 1$; *si*

$$1 \leqslant s = rp/(p + r)$$

alors $W^0_{(0, h)} \subset \mathfrak{D}'$ *et si* $\varphi \in W^0_{(0, h)}$, *on a*

$$V_s^K(z)/I_r^{s/r}(z) \to 0 \quad \text{avec} \quad z. \tag{86}$$

Démonstration. — Elle est identique à celle du théorème 1 précédent, h étant remplacé par $t^{n-1}h$.

N° 2. Applications.

Nous tirons du n° 1 les conséquences nécessaires à l'interprétation des théorèmes d'isomorphisme du § 4; nous prenons donc $p = 2$ et h est soit la distance au bord, soit une fonction de Martin d'un ouvert à frontière régulière; nous utilisons les notations du numéro précédent.

Définition 1. — 1° *Soit* Ω *la boule unité de centre* 0; ρ, ω, *les coordonnées polaires de pôle* 0; $y = 1 - \rho$; *soit* Π *un compact de* $\dot{\Omega}$; *nous disons que u vérifie une condition de Lipschitz intégrale* (*sur* Π), *d'exposant* γ, *si*

$$\text{I \textit{existe et}} \quad I = \int_\Pi |u(1 - y, \omega)| \, d\omega / y^\gamma \to 0 \quad \textit{avec} \quad y. \tag{87}$$

2° *Soit* Ω *un ouvert de* R^n, *à frontière* $\dot{\Omega}$ *non vide, une fois c. d. et régulièrement plongée; nous disons qu'un espace de* *distributions sur* Ω *est un espace de fonctions nulles au bord, si pour tout* u *pris dans cet espace, et tout* Π *pris dans le complémentaire d'un ensemble fixe de mesure nulle de* $\dot{\Omega}$, *on a* (87) *avec* $\gamma \geqslant 0$, (y, ω) *étant un paramétrage local de* Ω *près de* Π, y *s'annulant sur* Π *comme la distance au bord,* $(\dim \dot{\Omega} = n - 1)$.

Définition 2. — *Soit* T *un point de* R^n, (t, σ) *les coordonnées polaires de pôle* T; *soit* K *un compact de la sphère unité* T_1 *de centre* T; *nous disons que* u *vérifie une condition de Lipschitz intégrale (sur* K*), de pôle* T, *d'exposant* γ, *si :*

$$\left(\int_K |u(t, \sigma)|\, d\sigma\right)/t^\gamma \to 0 \quad \text{avec} \quad t,$$

l'intégrale étant supposée exister. On dit que u *est nulle en* T *si elle y vérifie la condition précédente avec* $\gamma \geqslant n - 1$.

Théorème 1. — *Pour que* $u \in W^0_{(0, y^c)}(\Omega)$, *où* Ω *est la boule unité,* y *la distance au bord,*

1° *il suffit que* $u \in W_{(0, y^c)}$ *et que soit* $c \geqslant 1$, *soit*

$$\int_{\dot{\Omega}} |u(1 - y, \omega)|^2\, d\omega \to 0 \quad \text{avec} \quad y;$$

2° *il faut que* $u \in W_{(0, y^c)}$, *et, si* $c < 1$, *que pour tout compact* $\Pi \in \dot{\Omega}$, u *vérifie une condition de Lipschitz intégrale sur* Π, *d'exposant* $\gamma = (1 - c)/2$.

Théorème 2. — (Notations II et III). *Soit* Ω *la boule unité de centre* O; *soit* $h_T(M) = (1 - \rho^2)/t^n$ *une fonction de Martin non normalisée relative au point* $T \in \dot{\Omega}$ *de la sphère unité de centre* O ($\rho = OM$, $t = TM$).

Pour tout c, $W^0_{(0, h^c_T)} \subset \mathcal{D}'$ (*c. f.* (I, 2, 3)); *si alors* $u \in W^0_{(h)}$, *on a le comportement suivant de* u : *si* $c < 1$, *pour tout compact* Π *du complémentaire du point* T *dans* Ω, u *vérifie une condition de Lipschitz intégrale, sur* Π *d'exposant* $\gamma = (1 - c)/2$;

si $c > (n - 2)/(n - 1)$, *pour tout compact* K *du complémentaire dans* T_1 *de l'hyperplan tangent en* T *à* Ω, u *vérifie une condition de Lipschitz intégrale sur* K, *de pôle* T, *d'exposant* $\gamma = [(n - 1)c - (n - 2)]/2$.

Remarque 1. — Supposons dans les hypothèses du théorème 1, $c \geqslant 1$; alors $W_{(0, y^c)} = W^0_{(0, y^c)}$ et les éléments de cet espace ne sont plus nuls au bord; mais en fait les éléments vérifient encore, si $c \geqslant 1$, une condition de Lipschitz intégrale d'exposant γ, pour $\gamma < (1-c)/2 \leqslant 0$, qui modère la croissance au bord; voyons-le pour $n = 1$: soit $u \in W^0_{(0,x^c)}(R_+)$; $0 < \varepsilon < 1/2$; alors d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $|u(\varepsilon) - u(1)|^2 < \int_0^1 x^c u'^2\, dx . \left[\frac{x^{1-c}}{1-c}\Big|_1^\varepsilon\right]$, d'où $|u(\varepsilon)| < C\varepsilon^{(1-c)/2}$.

Remarque 2. — On voit comme dans la remarque 2 du n° 1 que les conditions nécessaires énoncées dans les deux théorèmes précédents sont maximales du point de vue de l'exposant : on prend des exemples simples de fonctions, les unes nulles dans un voisinage de T, les autres nulles en dehors d'un cône de sommet T situé dans Ω. Les conditions de Lipschitz peuvent toutefois être renforcées avec le jeu des exposants r et s du théorème 1 de (I, 3, 1), mais cela n'a pas d'effet sur γ; par exemple, on peut remplacer dans le théorème 1 précédent

$$\int_K |u(t, \ \sigma)\, d\sigma|/t^\gamma \to 0$$

par $\sqrt{\int_K |u|^2\, d\sigma} \Big/ t^\gamma \to 0$.

Proposition 1. — *Dans les conditions du théorème* 1, *si* $c < 1$, *l'espace* $y^a W^0_{(0,y^{a+b})}$ *ne dépend que d'un paramètre*

$$\gamma = [1 + (a-b)]/2.$$

Démonstration. — On vérifie comme dans le théorème 1 de (I, 2, 4) que $y^a W_{(0,y^{a+b})} = W_{(y^{2\gamma-2},\, y^{2\gamma})}$; et d'autre part, l'exposant maximum de la condition de Lipschitz intégrale vérifiée par les éléments est γ, d'après la remarque 1; donc le paramètre est effectif.

Remarque 3. — Dans les conditions du théorème 1, l'espace $h_T^a W^0_{(0,h_T^{a+b})}$ ne dépend probablement que d'un paramètre : les exposants maximaux des conditions de Lipschitz intégrales vérifiées par les éléments sont $\gamma_1 = (1 + a - b)/2$ pour la première et $\gamma_2 = [(n-1)(b-a) - (n-2)]/2$ pour la deuxième; seul le paramètre $a - b$ apparaît; pour avoir un résultat précis, il faudrait caractériser les éléments de $W_{(0,h_T^c)}$; en fait, il y a une marge entre les conclusions du théorème de traces et les hypothèses à faire sur h pour pouvoir caractériser; cette marge est due au fait que le théorème de trace ne fait pas intervenir le comportement tangentiel de h; dans le cas de h_T, on le connaît; il est possible que les conditions nécessaires que l'on peut énoncer avec le théorème 1 et son corollaire 1 du nº 1 soient suffisantes pour caractériser dans ce cas.

PROPOSITION 2. — *L'espace* $W_{(0, h_T)}$ *contient des fonctions harmoniques non nulles.*

On le montre en prenant un polynôme harmonique ayant en T un zéro d'ordre suffisant; connaissant de façon précise son comportement en T, il est fastidieux mais sans difficulté de l'approcher dans $W_{(0, h_T)}$ par des fonctions à support compact avec la méthode de la démonstration du théorème 4 du nº 1.

§ 4. — Problèmes de Dirichlet et de Neumann avec poids.

Sommaire. — Au cours du numéro 1, nous étudions des triplets $(p, q, (h))$ tels que des opérateurs donnés soient $(p, q, \overset{0}{W}_{(h)})$-coercifs; nous utilisons les lemmes de (I, 2, 2), et les meilleures constantes.

Au cours du numéro 2, nous énonçons des théorèmes d'isomorphisme, correspondant au problème de Dirichlet, pour divers opérateurs, et diverses classes de poids; nous utilisons la méthode exposée dans les préliminaires (I, 1, 4), et pratiquement tous les résultats du § 2 et du § 3, ainsi que le numéro 1 du § 4.

Au cours du numéro 3, nous définissons et étudions une méthode des poids pour le problème de Neumann.

Nº 1. Étude des triplets $(p, q, (h))$ tels que A soit $(p, q, \overset{0}{W}_{(h)})$-coercif.

N. B. — Nous examinerons des triplets $(p, q, (h))$ quelconques, puis du type $(\theta^a, \theta^b, (0, \theta^c))$, θ étant sur- ou sous-harmonique (en particulier le cas où θ est une distance au bord, pour certains ouverts). Les sous-numéros correspondent à divers opérateurs A étudiés; nous rappelons que A est par définition (cf. (I, 1, 4)) (p. q, $W^0_{(0,h)}$)-coercif, s'il existe $C > 0$ telle que pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\mathcal{R}e\hat{a}(\varphi, \varphi) = \mathcal{R}ea(p\varphi, q\varphi) \geqslant C\int h\,|\text{grad}\,\varphi|^2,$$

$a(\ ,\ )$ étant la forme naturelle, associée à A, que l'on rappellera.

1. 1. $A = -\Delta + \alpha$.

La forme $a(u, v)$ est $\sum_i \int D^i u\, D^i \bar{v} + \alpha \int u\bar{v}$.

Proposition 1. — *Soit un triplet réel* (p, q, (h)) *sur* Ω, p *et* q *deux fois continûment différentiables; pour que* $-\Delta + \alpha$ *soit* (p, q, $W^0_{(0,h)}$)*-coercif, il faut et il suffit qu'il existe* $C > 0$ *telle que pour toute* $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, *à valeurs réelles,*

$$(88)\qquad \int (p\Delta q + q\Delta p - 2\alpha pq)\varphi^2 \leqslant 2\int (pq - Ch)\,|\text{grad}\,\varphi|^2.$$

Démonstration. — Soit $\alpha = 0$; la condition de (p, q, $W^0_{(0,h)}$)-coercivité s'écrit (c. f. (I, 1, 4)) pour φ à valeurs complexes :

$$\mathcal{R}e\sum_{i=1}^{n}\int D^i(q\varphi)D^i(p\bar{\varphi}) \geqslant C\int h\,|\text{grad}\,\varphi|^2$$

soit :

$$\int (pq - Ch)\,|\text{grad}\,\varphi|^2 + \frac{1}{2}\sum_i\int (pD^iq + qD^ip)D^i|\varphi|^2 + \sum_i\int D^ip.D^iq.|\varphi|^2 \geqslant 0$$

et, en intégrant par partie le terme du milieu :

$$(89)\qquad \int (pq - Ch)|\text{grad}\,\varphi|^2 \geqslant \int\left(\frac{1}{2}\Delta(pq) - \sum_i D^ipD^iq\right)|\varphi|^2 \quad .$$

d'où la proposition.

Proposition 2. — *Soit* $p = \theta^a$, $q = \theta^b$, $h = \theta^c$ *où* θ *est une fonction positive deux fois continûment différentiable; alors la condition de coercivité* (88) *s'écrit:*

$$(90)\qquad \frac{1}{2}(a + b)\int \theta^{a+b-1}\Delta\theta\,.\,\varphi^2 + \frac{1}{2}(a(a-1) + b(b-1))\int \theta^{a+b-2}\,|\text{grad}\,\theta|^2\,\varphi^2 - \alpha\int \theta^{a+b}\,\varphi^2 \leqslant \int (\theta^{a+b} - C\theta^c)|\,\text{grad}\,\varphi|^2$$

Démonstration. — On utilise :

$$\Delta\theta^a = a(a-1)\theta^{a-2}\,|\text{grad }\theta|^2 + a\theta^{a-1}\Delta\theta.$$

PROPOSITION 3. — *Soit* θ *une fonction harmonique positive dans* Ω; *pour que* $-\Delta$ *soit* $(\theta^a, \theta^b, W^0_{(0,\theta^{a+b})})$*-coercif, il suffit que, et, si* θ *s'annule sur un morceau* Γ *de variété* C^1 *de dimension* $n-1$, *appartenant à* $\dot\Omega$, *il faut que :*

(91) soit $(a-b)^2 < 1$; *soit* $a=0,\ b=1$; *soit* $a=1,\ b=0$.

N. B. — Nous entendons que assez près et d'un côté de Γ, il n'y a pas d'autre point frontière.

Démonstration. — La condition est suffisante : (90) sera réalisée, d'après le lemme 3 de (I, 2, 2), si

$$a + b \neq 1, \qquad \text{et} \qquad (a(a-1) + b(b-1))/2 < (a+b-1)^2/4;$$
$$\text{soit} \qquad a + b \neq 1 \qquad \text{et} \qquad (a-b)^2 < 1.$$

Dans le cas exceptionnel du lemme : $a + b = 1$, (90) est encore possible si $(a(a-1) + b(b-1))/2 \leqslant 0$; soit $0 \leqslant b \leqslant 1$ et $a = 1 - b$; on a encore $(a-b)^2 < 1$ sauf si $a = 0$, $b = 1$ ou $a = 1$, $b = 0$.

La condition est nécessaire : si θ s'annule sur Γ, d'après le théorème de Cauchy-Kovalewski, θ s'annule sur $\Gamma' \subset \Gamma$ comme la distance au bord, Γ' de mesure non nulle pour la mesure induite de Lebesgue; on est alors, d'après le lemme 4′ de (I, 2, 2), assuré d'avoir utilisé la meilleure constante.

PROPOSITION 4. — *Soit* θ *une fonction surharmonique deux fois continûment différentiable sur* Ω; *alors, pour que* $-\Delta$ *soit* $(\theta^a, \theta^b, W^0_{(0,\theta^{a+b})})$*-coercif,*

1° *il suffit que*

(92) $\quad [(b-a)^2 < 1$ et $0 \leqslant a + b < 1]$
ou $\quad [a = 1,\ b = 0]$, $\quad$ ou $\quad [a = 0,\ b = 1]$;

2° *si* $\dot\Omega$ *possède un morceau* Γ *de variété une fois continûment différentiable de dimension* $n-1$, *si assez près et d'un côté de* Γ, *il n'y a pas d'autre point de* $\dot\Omega$, *et si* θ *s'annule sur* Γ *comme la distance à* Γ, *il faut que l'on ait :*

(93) $(b-a)^2 < 1$ *ou* $a = 1,\ b = 0$, *ou* $a = 0,\ b = 1$.

Démonstration. — La condition est suffisante : dans tous les cas $a + b \geqslant 0$; comme $\Delta\theta \leqslant 0$, le premier terme du premier membre de (90) est négatif ; si $a + b < 1$, on peut appliquer le lemme 3 de (I, 2, 2) ; si $a = 0$, $b = 1$ ou $a = 1$, $b = 0$, (90) est évidente.

La condition est nécessaire : on utilise encore le lemme 4' de (I, 2, 2), en remarquant que le terme complémentaire $\int \theta^{a-1}(\Delta\theta)\varphi^2$ est négligeable pour la suite de fonctions φ utilisée pour trouver la meilleure constante de (55).

Corollaire. — *Si* Ω *est tel que la distance au bord* θ *est surharmonique et deux fois continûment différentiable et s'il existe un morceau* Γ *de* $\dot{\Omega}$, *une fois continûment différentiable, tous les points assez près et d'un côté de* Γ *appartenant à* Ω, $-\Delta$ *est* $(\theta^a, \theta^b, W^0_{(0, \theta^{a+b})})$*-coercif si l'on a* (92) *et seulement si l'on a* (93) : *en particulier les hypothèses sont réalisées pour une boule de* R^n.

Démonstration. — Si R est le rayon de la boule, r la distance au centre, on a $\Delta\theta = -(n-1)/r < 0$.

1. 2. L'opérateur $A_n = \sum_{i=1}^{n} (D^i)^4$.

La forme $a(u, v)$ est :

$$\sum_i \int (D^i)^2 u (D^i)^2 \overline{v}.$$

Proposition 5. — *Soit un triplet réel* $(p, q, (h))$, p *et* q *quatre fois continûment différentiables* ; *soit* $(h) = (0, 0, h)$; *une condition nécessaire et suffisante pour que* A_1 *soit* $(p, q, W^0_{(h)})$*-coercif est qu'il existe* $C > 0$ *telle que, pour toute* $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$, *réelle :*

$$(94) \quad -\frac{1}{2}\int (p^{(4)}q + pq^{(4)})\varphi^2 + 2\int (pq'' + p''q - p'q')\varphi'^2 < \int (pq - ch)\varphi''^2.$$

Démonstration. — Elle se fait par des intégrations par parties, comme pour la proposition 1.

Exemple. — $n = 1$; *soit* $p = 1$, $q = x^a$, $h = x^a$; il vient:

$$(95)\quad -\frac{1}{2}a(a-1)(a-2)(a-3)\int x^{a-4}\varphi^2 + 2a(a-1)\int x^{a-2}\varphi'^2 < (1-C)\int x^a\varphi''^2.$$

1. 3. L'OPÉRATEUR $A = -\Delta - (\alpha/x_n)D^n$, $\alpha \in R$.

La forme $a(u, v)$ est $\sum_i \int D^i u D^i \bar{v} - \alpha \int (D^n u)\bar{v}/x_n$.

PROPOSITION 6. — *Soit* $\Omega \subset R^n$ *défini par* $x_n > 0$; *pour que* A *soit* $(x_n^a, x_n^b, W^0_{(0, x_n^{a+b})})$-*coercif, il faut et il suffit que l'on ait:*

$$(96)\quad \begin{cases} -1 < a-b < 1-2\alpha \quad ou \quad 1-2\alpha < a-b < -1 \\ ou \quad (a = 0 \text{ et } b = 1) \quad ou \quad (a = 1-\alpha \text{ et } b = \alpha). \end{cases}$$

Démonstration. — La condition de coercivité s'écrit:

$$(97)\quad [\alpha(a-b+1) + a(a-1) + b(b-1)]\int x_n^{a+b-2}\varphi^2 \leqslant 2(1-C)\int x_n^{a+b}\,|\text{grad}\,\varphi|^2.$$

En effet, on a bien (97) si $\alpha = 0$ d'après la proposition 2, x_n étant harmonique; le terme supplémentaire pour $\alpha \neq 0$, placé à gauche s'écrit, en intégrant par parties:

$$\mathcal{R}e\int (\alpha/x_n)D^n(x^a\varphi)\,.\,x^b\bar{\varphi} = \alpha a\int x_n^{a+b-2}\varphi^2 + \int \alpha x^{a+b-1}D^n|\varphi^2|/2 = \frac{\alpha}{2}(a-b+1)\int x_n^{a+b-2}|\varphi|^2.$$

On utilise alors le lemme 3, où l'on a la meilleure constante d'après le lemme 4′ de (I, 2, 2); (le lemme 2 suffirait). Si $a + b \neq 1$, il vient

$$2\alpha(a-b+1) + 2a(a-1) + 2b(b-1) < (a+b-1)^2.$$

Soit, en posant $a-b = u$: $u^2 + 2\alpha u + 2\alpha - 1 < 0$ qui s'écrit $(u+1)(u+2\alpha-1) < 0$ d'où les inégalités de (96); si $a + b = 1$, il faut et il suffit que

$$\alpha(u+1) + a(a-1) + b(b-1) \leqslant 0;$$

soit $(u+1)(u-1+2\alpha) \leqslant 0$; on n'obtient donc, comme cas supplémentaires à ceux définis par les inégalités de (96), que :

$$(a + b = 1 \quad \text{et} \quad a - b = -1)$$

ou $$(a + b = 1 \quad \text{et} \quad a - b = 1 - 2\alpha);$$

1\. 4. L'opérateur $A = -\Delta - (\alpha/\rho)\partial/\partial\rho$; $\alpha \in \mathrm{R}$; $\rho = \mathrm{OM}$, $\mathrm{O} \in \dot{\Omega}$.

La forme $a(u, v)$ est $\int \sum_i \mathrm{D}^i u \mathrm{D}^i \bar{v} - \alpha \int \partial u/\partial\rho . \bar{v}/\rho$.

Proposition 7. — *Soit* $\mathrm{O} \in \dot{\Omega}$, *et* Ω *tel qu'il existe un disque* Π *d'hyperplan ne passant pas par* 0, *tel que,* B *décrivant* Π, *les points de* OB *distincts de* 0 *soient dans* Ω; *soit* $\rho = \mathrm{OM}$; *pour que* A *soit* $(\rho^a, \rho^b, \mathrm{W}^0_{(0, \rho^{a+b})})$*-coercif, il faut et il suffit que :*

$$(98) \quad \begin{cases} \qquad n - 2 < a - b < -2\alpha - n + 2 \\ \textit{ou} \qquad -2\alpha - n + 2 < a - b < n - 2 \\ \textit{ou} \quad (a = 0, \ b = 2 - n) \ \textit{ou} \ (a = 2 - n - \alpha, \ b = \alpha). \end{cases}$$

Démonstration. — On a $\Delta\rho = (n - 1)/\rho$, ce qui permet d'écrire la condition de coercivité dans le cas $\alpha = 0$, avec la proposition 2. Le terme correspondant à $\alpha \neq 0$, placé à gauche dans (90), s'écrit : (ρ, ω, étant les coordonnées polaires de pôle 0)

$$\mathcal{R}e\,\alpha \int \rho^{-1} \frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^a \varphi) . \rho^b \bar{\varphi} = \alpha a \int \rho^{a+b-2} |\varphi|^2 + \frac{\alpha}{2} \int d\omega \int \rho^{a+b+n-2} \frac{\partial}{\partial\rho} |\varphi|^2$$

en intégrant par parties en ρ le dernier terme, la condition (90) s'écrit :

$$(99) \quad [(a + b)(n - 2) + a^2 + b^2 + \alpha(a - b - n + 2)]$$
$$\int d\omega \int \rho^{a+b+n-3} |\varphi|^2 \, d\rho \leqslant 2(1 - \mathrm{C}) \int d\omega \int \rho^{a+b+n-1} |\mathrm{grad}\, \varphi|^2 \, d\rho,$$

(99) sera d'autant mieux vérifiée si elle l'est en remplaçant $|\mathrm{grad}\, \varphi|^2$ par le terme radial $(\partial\varphi/\partial\rho)^2$; on peut alors utiliser le lemme 2 de (I, 2, 2) : il suffira que l'on ait, si $a + b \neq 2 - n$:

$$\mathrm{E} = (a + b)(n - 2) + a^2 + b^2 + (a - b - n + 2) < (a + b + n - 2)^2/2$$

ce qui donne les inégalités de (98), les autres conditions étant obtenues en écrivant $a + b = 2 - n$ et $\mathrm{E} \leqslant 0$.

La condition est nécessaire : cela résulte de ce que l'inégalité :

$$\int d\omega \int \rho^a |\varphi|^2 \, d\rho \leqslant \frac{4}{(a+1)^2} \int d\omega \int \rho^{a+2} \, |\text{grad } \varphi|^2 \, d\rho$$

est écrite avec la meilleure constante : pour le voir, on prend une fonction fixe $\psi(\omega)$ ayant son support sur l'image de Π sur la sphère unité de centre O, et on prend pour suite de φ des $\tilde{\theta}(\rho) . \psi(\omega)$ où $\tilde{\theta}$ est une régularisée convenable de la fonction utilisée au lemme 2 de (I, 2, 2); on vérifie que l'intégrale relative au terme tangentiel de $|\text{grad } \varphi|^2$ est négligeable devant les autres; il est essentiel que Π soit de mesure non nulle et que Ω contienne le cône de base Π : si Ω est trop effilé en O, la singularité risque de ne pas se faire sentir suffisamment; cf. la remarque 5 de (I, 4, 2).

N° 2. Le problème de Dirichlet.

Sommaire. — Nous avons étudié d'abord au numéro 1 la condition de coercivité, indispensable dans la première et la deuxième méthode, parce qu'elle est la plus forte — trop forte même pour le problème de Dirichlet, cf. Remarque 4 de ce numéro — en ce sens que la condition (H_1) de continuité (1re méthode) se trouve presque toujours subordonnée à celle de coercivité sauf dans des cas limites où la deuxième méthode nous donnera un théorème d'existence; chaque fois, sauf dans les cas limites, nous pourrons reconnaître la résolution d'un problème de Dirichlet dans nos théorèmes d'isomorphismes, en application des résultats du paragraphe 3.

DÉFINITION. — *Nous disons qu'un isomorphisme d'un espace* E *sur un espace* F, *assuré par un opérateur* A, *résout un problème de Dirichlet si* E *est un espace de fonctions nulles au bord au sens de la définition* 1 *de* (I, 3, 2).

2. 1. L'OPÉRATEUR $A = -\Delta$.

THÉORÈME 1. — I. *Soit θ une fonction harmonique positive non constante sur Ω supposé connexe; si a et b vérifient :*

$$(100) \qquad |a - b| < 1 \qquad \text{et} \qquad a + b \neq 1,$$

I-1. — *alors*, $W^0_{(0,\theta^{a+b})}$ *et son dual sont des espaces de distributions, et* Δ *est un isomorphisme de* $\theta^a W^0_{(0,\theta^{a+b})}$ *sur* $\theta^{-b} W^{0\prime}_{(0,\theta^{a+b})}$.

I-2. — *Si de plus,* $a + b < 1$ *et* $\theta = h_T$, h_T *étant la fonction de Martin relative à un point* $T \in \dot{\Omega}$, T *à distance finie,* $\dot{\Omega}$ *étant une fois c. d. et régulièrement plongée* [8], *cet isomorphisme résout un problème de Dirichlet; les solutions, i. e. les éléments de* $\theta^a W^0_{(0,\theta^{a+b})}$ *vérifient sur tout compact* Π *du complémentaire de* T *dans* $\dot{\Omega}$ *une condition de Lipschitz intégrale d'exposant*

$$\gamma = [1 + (a - b)]/2,$$

cette valeur de γ *étant la meilleure possible pour cet espace* (*cf.* (I, 3, 2), *déf.* 1).

I-3. — *Même énoncé qu'au* 2°, *en prenant* $\Omega = \{x \in R^n | x_n > 0\}$ *et le point* T *à l'infini, i. e.* $\theta = x_n$.

II. — *Soit* ($a = 0$, $b = 1$) *ou* ($a = 1$, $b = 0$) *et supposons* $W^0_{(0,\theta)} \subset \mathfrak{D}'$ (*ce qui est le cas si* θ *est la fonction* h_T *de* I-2, *et n'est pas le cas si* θ *est la fonction* h_T *de* I-3, $n = 1$);

II-1. — *alors, il existe un sous-espace* $\mathcal{N}$ *de* $W^0_{(0,\theta)}$, *tel que* Δ *applique* $\theta^a \mathcal{N}$ *sur* $\theta^{-b} W^{0\prime}_{(0,\theta)}$;

II-2. — *si* $\theta = h_T$, Ω *et* h_T *étant définis en* I-2, *et si* $a = 0$, $b = 1$, *il n'y a pas unicité dans* $W^0_{(0,\theta)}$ *de la solution de* $\Delta S = \theta^{-1} T$ *où* $T \in W^{0\prime}_{(0,\theta)}$.

Démonstration. — I-1. — On a $W^0_{(0,\theta^{a+b})} \subset \mathfrak{D}'$ d'après (I, 2, 3), théorème 3.

Nous utilisons la première méthode (cf. § I) on prend $V = H = W^0_{(0,\theta^{a+b})}$; $a(u, v) = \sum_i \int D^i u D^i \bar{v}$ et $\hat{a}(u, v) = a(\theta^a u, \theta^b v)$, à laquelle est associé l'opérateur $\hat{A} = \theta^b \Delta \theta^a$. Nous appliquons le théorème 1 de (I, 1, 1) à la forme $\hat{a}(.,.)$:

d'après la proposition 3 du n° 1, la condition (H_2) de coercivité est vérifiée dans les hypothèses (100); examinons la condition de continuité (H_1); elle s'écrit : il existe $C > 0$ telle que, pour tous φ, ψ de $\mathfrak{D}$,

$$E = \left| \int \sum_i D^i(\theta^a \varphi) D^i(\theta^b \bar{\psi}) \right| \leqslant C \sqrt{\int \theta^{a+b} |\text{grad } \varphi|^2} \sqrt{\int \theta^{a+b} |\text{grad } \psi|^2}$$

[8] On sous-entend par ces mots, ici, et dans la suite que la dimension de $\dot{\Omega}$ est $n - 1$.

les termes de E se laissent majorer soit directement, soit à l'aide du lemme 3 de (I, 2, 2) pour $a+b\neq 1$ s'ils sont du type :

$$(101)\quad \int \theta^{a+b-2}(D^i\theta)^2\,|\varphi|\,|\psi| \leqslant \left[\int \theta^{a+b-2}\,|\mathrm{grad}\,\theta|^2\,|\varphi|^2 . \int \theta^{a+b-2}\,|\mathrm{grad}\,\theta|^2\,|\psi|^2\right]^{1/2}$$

ou du type :

$$(102)\quad \int \theta^{a+b-1}\,|D^i\theta|\,|\varphi|\,|D^i\psi| = \int \theta^{(a+b)/2-1}(D^i\theta)\,|\varphi|\,\theta^{(a+b)/2}\,|D^i\psi| \leqslant \left[\int \theta^{a+b-2}\,|\mathrm{grad}\,\theta|^2\,|\varphi|^2 . \int \theta^{a+b}\,|\mathrm{grad}\,\psi|^2\right]^{1/2}.$$

I-2. — La fonction h_T s'annule sur Π comme la distance au bord, et la conclusion résulte du théorème 2 de (I, 3, 2), et de la remarque 2 suivant ce théorème.

I-3. — Même démonstration; le théorème 3′ de (I, 3, 2) analyse en plus le comportement des solutions à l'infini.

II-1. — On applique la deuxième méthode, i. e. le théorème 2 de (I, 1, 1); on prend la même forme $\hat{a}(u, v)$ qu'en I, $G = \mathfrak{D}$, $F = W_{(0,\theta)}$; la condition H_1' est vérifiée de par l'hypothèse $W_{(0,\theta)} \subset \mathfrak{D}'$, en particulier si θ est la fonction h_T de I-2 : cf. (I, 2, 3), remarque 2, où l'on voit si $n = 1$ que $\theta = x_n$ ne convient pas; la condition H_2' est vérifiée d'après la proposition 3 du n° 1.

II-2. — En effet $W^0_{(0,\theta)}$ contient des fonctions harmoniques non nulles d'après la proposition 2 de (I, 3, 2).

N. B. — Nous avons supposé θ non constante pour la commodité d'énoncer; si θ est constante, ou même si θ varie sans s'annuler ni devenir infinie en aucun point de $\dot{\Omega}$, les espaces utilisés sont les espaces classiques; pour la question $W^0_{(0,1)} \subset \mathfrak{D}'$, cf. [18].

Remarque 1. — Soit $a = 0$, $b = 1$; on voit facilement que pour $\varphi = \psi$, la condition de continuité est vérifiée; or si $\theta = h_T$ de I-2 elle ne peut l'être pour $\varphi \neq \psi$, sinon on aurait unicité : on a un exemple de forme bilinéaire, soit $\int \sum_i (D^i\theta\varphi)\,(D^i\bar{\psi})$, non continue sur $W^0_{(0,\theta)} \times \mathfrak{D}$, mais continue sur la diagonale; par symétrie, il en est de même de la forme $\int \sum_i (D^i\varphi)\,(D^i\theta\psi)$.

THÉORÈME 2. — *Soit* Ω *une boule de* R^n *ou un ouvert tel que la distance au bord* θ *soit surharmonique et deux fois continûment différentiable; alors si*

$$(103) \qquad 0 \leqslant a + b < 1 \qquad et \qquad (b - a)^2 < 1,$$

$W^0_{(0, \theta^{a+b})}$ *est un espace de distributions, et* Δ *est un isomorphisme de* $\theta^a W^0_{(0, \theta^{a+b})}$ *sur* $\theta^{-b} W^{0\prime}_{(0, \theta^{a+b})}$*; cet isomorphisme résout un problème de Dirichlet; les solutions, i. e. les éléments du premier espace, vérifient sur tout compact d'une partie régulièrement plongée de* $\dot{\Omega}$ *une condition de Lipschitz intégrale d'exposant* $\gamma = (1 + a - b)/2$*; cette valeur de* γ *est la meilleure possible pour cet espace.*

Démonstration. — On applique le théorème 1 de (I, 1, 1), i. e. la première méthode; on prend $V = H = W^0_{(0, \theta^{a+b})}$ et la forme $\hat{a}(u, v) = a(\theta^a u, \theta^b v)$ où $a(u, v) = \int \sum_i D^i u D^i \bar{v}$; d'après la proposition 4, les hypothèses entraînent la condition (H_2); comme $a + b < 1$, on sait, par exemple par le théorème 1 de (I, 2, 3) que $W^0_{(0, \theta^{a+b})} \subset \mathcal{D}'$; de plus, on peut appliquer le lemme 3 de (I, 2, 3) et démontrer que la condition (H_1) de continuité est vérifiée, comme il est fait pour le théorème précédent. Enfin, comme $(b - a)^2 < 1$, on voit d'après le théorème 1 de (I, 3, 2) que l'espace des solutions est un espace de fonctions nulles au bord, avec $\gamma = (1 + a - b)/2$, cet exposant étant le meilleur possible pour cet espace.

N. B. — L'hypothèse de surharmonicité de la distance au bord tient à la méthode employée et non au problème de Dirichlet lui-même : nous sommes limités par la condition de coercivité; cf. remarque 4. Comme autre exemple de Ω : R^n_+.

REMARQUES 2. — Nous n'avons pas de cas exceptionnels $a = 0$, $b = 1$ ou $a = 1$, $b = 0$ bien que (H_2) soit vérifiée dans ce cas : $W^0_{(0, \theta)}$ n'est plus un espace de distributions; c. f. (I, 2, 3); dans le théorème 1, la singularité de h_T en T assurait à elle seule la condition $W^0_{(0, h_T)} \subset \mathcal{D}'$; (T à distance finie).

La condition $(b - a)^2 < 1$ fait que l'espace des solutions est constitué par des fonctions intégralement Lipschitziennes au bord (cf. (I, 3, 2)) pour un exposant

$$\gamma = (1 + a - b)/2,$$

aussi voisin de 0 ou de 1 que l'on veut, i. e. plus grand ou plus petit que l'exposant $\gamma = 1/2$ de l'espace classique $\hat{\mathfrak{D}}^1_{L^2} = W^0_{(0,1)}$: on peut soit augmenter, soit diminuer la condition de nullité au bord.

Il résulte de (I, 3, 2) que les espaces de solutions ne dépendent en fait que d'un paramètre; on peut prendre $a = 0$.

On aurait pu prendre pour θ une fonction harmonique positive quelconque, ($\dot{\Omega}$ étant régulière), dans le théorème 1; sur la portion de frontière où θ ne s'annule pas, le comportement des solutions est comme dans $W^0_{(0,1)}$.

2. 2. $A = -\Delta - (\alpha/x_n)D^n$.

Théorème 3. — *Soit* $\Omega \subset R^n$, *défini par* $x_n > 0$ *et soit:*

(104) $\alpha < 1; \quad a + b \neq 1; \quad -1 < a - b < 1 - 2\alpha;$

alors, l'opérateur A *est un isomorphisme de* $x_n^a W^0_{(0, x_n^{a+b})}$ *sur* $x_n^{-b} W^{0\prime}_{(0\, x_n^{a+b})}$, *correspondant à la résolution d'un problème de Dirichlet; l'exposant* γ *de la condition de Lipschitz intégrale vérifiée par les solutions sur tout compact de* $x_n = 0$, *et même* $x_n = 0$ *tout entier, est* $(1 + a - b)/2$ [9].

Démonstration. — La condition $a + b < 1$ entraîne $W^0_{(0, x_n^{a+b})} \subset \mathfrak{D}'$ (cf. (I, 2, 3) critères 1 ou 3);

On applique encore la première méthode (cf. (I, 1, 1,)); on prend $V = H = W^0_{(0, x_n^{a+b})}$ et la forme $\hat{a}(u, v) = a(x_n^a u, x_n^b v)$, où $a(u, v) = \int \sum_i D^i u D^i \bar{v} - \alpha \int x_n^{-1} D^n u . \bar{v}$; la condition (H_2) est réalisée d'après la proposition 6 du n° 1; comme $a + b \neq 1$, on établit la condition (H_1) de continuité avec le lemme 3 de (I, 2, 2), comme pour le théorème 1: le terme facteur de α est du type (102). Enfin comme $a - b > -1$, les éléments de l'espace des solutions sont nulles au bord $x_n = 0$, et limitées en croissance à l'infini; (cf. théorème 3′ de (I, 3, 1), et remarque 1 de (I, 3, 2)).

Remarques 3. — Si α est voisin de 1, $|a - b|$ doit être pris petit, si bien que les solutions sont « moins nulles » au bord que dans l'espace classique pris au théorème 2

(9) Note après impression de thèse: Cf. Lizorkyn, Doklady, 1961.

(de I, 1, 2) : c'est en perdant sur cette condition, grâce aux poids, que l'on a pu atteindre le cas $\alpha < 1$.

On peut remplacer dans les théorèmes 1 et 3 précédents la condition $a + b < 1$ par $a + b \neq 1$; mais alors, si $a + b > 1$, il faut remplacer $\gamma = (1 + a - b)/2$ par $\gamma < (1 + a - b)/2$: cf. la remarque 1 de (I, 3, 2); en fait la condition $a + b < 1$ ne gène pas pour obtenir toutes les valeurs possibles du paramètre γ; cf. la proposition 1 de (I, 3, 2.). On a deux familles à 1 paramètre.

Bien que la condition de coercivité soit réalisée pour $a = 0$, $b = 1$ ou $a = 1 - \alpha$ et $b = \alpha$, nous n'avons pas de cas limite comme au théorème 1, si $n = 1 : a + b = 1$ et $W^0_{(0, x_n)}$ n'est pas un espace de distributions (cf. (I, 2, 3)).

Si $\alpha \geqslant 1$, on peut énoncer un théorème d'isomorphisme, qui ne résout pas un problème de Dirichlet, à moins que l'on accepte de considérer eomme « nulle au bord » une fonction dont la croissance est limitée au bord : étant donnée une donnée continue au bord, définie par $u \in \mathcal{E}(R^n)$, on démontre qu'il existe une seule solution S, avec la condition au bord : S diffère de u d'une fonction de $x_n^a W^0_{(0, x_n^{a+b})}$, cette fonction n'étant pas nécessairement nulle au bord, puisque $(a - b) \geqslant 1$ (cf. (I, 3, 2)); cf. le théorème suivant. D'autre part, cf. le « principe de correspondance » [88], [89], [32].

Remarque 4. — Nous donnons un exemple de forme bilinéaire non coercive, telle que l'opérateur associé est un isomorphisme : le théorème 3 précédent montre que A est un isomorphisme de $W^0_{(0, x^b)}(R_+)$ sur $x^{-b} W^{0\prime}_{(0, x^b)}(R_+)$, pour $2\alpha - 1 < b < 1$. Cet isomorphisme est obtenu avec la forme $\hat{a}(u, v) = a(u, x^b v)$, définie sur $W^0_{(0, x^b)} \times W^0_{(0, x^b)}$, $a(u, v)$ étant la forme classique associée à A; prenons $1/2 < \alpha < 1$; alors, d'après le lemme 2 de (I, 2, 2) il existe $\psi \in \mathcal{D}(R_+)$, avec :

$$(105) \qquad 2\int |\psi'|^2 < \alpha \int |\psi|^2/x^2.$$

Soit $0 < t_1 < t_2 < \infty$, le support de ψ entre t_1 et t_2; soit h une fonction indéfiniment dérivable, constante pour $t_1 < x < t_2$, égale à x^b en dehors d'un compact de $\Omega = R_+$; considérons la forme $\hat{\hat{a}}(u, v) = a(u, hv)$: elle n'est pas coercive sur $W^0_{(0,h)}$, sinon (105) serait infirmée; or d'après (I, 1, 3) ou (I, 3, 1), $W^0_{(0,h)} = W^0_{(0,x^b)}$ et $h^{-1}W^{0'}_{(0,h)} = x^{-b}W^{0'}_{(0,x^b)}$, et l'opérateur associé à $\hat{\hat{a}}(u, v)$, i. e. hd^2/dx^2, est, d'après ce qui précède, un isomorphisme de cet espace sur son dual.

THÉORÈME 3'. — *Soit* $\Omega \subset R^n$ *défini par* $x_n > 0$ *et soit*

(106) $\alpha > 1,\ a + b > 1;\qquad 1 - 2\alpha < a - b < -1.$

Alors, l'opérateur $A = -\Delta - (\alpha/x_n)D^n$ *est un isomorphisme de l'espace de distributions*: $x_n^a W^0_{(0, x_n^{a+b})}$ *sur* $x_n^{-b}W^{0'}_{(0, x_n^{a+b})}$; *les solutions u sont nulles à l'infini et y vérifient une condition de Lipschitz intégrale à l'infini d'exposant* $\gamma = (1 + (a - b))/2$; *plus précisément, pour tout ensemble mesurable* Π *de* $x_n = 0$,

$$\int_\Pi u(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_{n-1}/x_n^\gamma \to 0 \quad si \quad x_n \to \infty.$$

Démonstration. — Elle est analogue à celle du théorème 3, on interprète l'isomorphisme avec le théorème 3' de (1, 3, 1).

2. 3. L'OPÉRATEUR $A = -\Delta - (\alpha/\rho)\partial/\partial\rho;\ \rho = OM;\ 0 \in \dot{\Omega}$.

THÉORÈME 4. — *Soit* Ω *quelconque*, $0 \in \dot{\Omega}$;

1° *si a et b sont tels que:*

$a + b \neq 2 - n$ *et* $a - b$ *compris strictement entre* $n - 2$ *et* $-2\alpha - n + 2$, *alors*, A *est un isomorphisme de* $\rho^a W^0_{(0, \rho^{a+b})}$ *sur* $\rho^{-b}W^{0'}_{(0, \rho^{a+b})}$, *les solutions sont nulles au sens de la trace usuelle sur toute portion régulière de frontière à distance finie et ne contenant pas* 0;

2° *si* $\alpha < 2 - n$ *et* $n - 2 < a - b < -2\alpha - n + 2$,

$$a + b > 2 - n,$$

on a encore le même isomorphisme, et de plus les solutions sont nulles au point O, *dans les conditions précisées par le théorème de* (I, 3, 2), *et limitées en croissances à l'infini d'après la remarque* 1 *de* (I, 3, 2).

3° *si* $(a = 0,\ b = 2 - n)$, *ou* $(a = 2 - n - \alpha,\ b = \alpha)$, *et si* Ω *possède un morceau* Γ *de frontière porté par un morceau de variété régulière* Γ_1 *de dimension* $n - 1$, Γ *étant de mesure* *non nulle sur* Γ_1, *alors* A *applique un sous-espace de* $\rho^a W^0_{(0,\rho^{n-2})}$ *sur* $\rho^{-b} W^{0\prime}_{(0,\rho^{n-2})}$.

Démonstration. — 1° On applique la première méthode; on prend $V = H = W^0_{(0,\rho^{a+b})}$; et la forme $\hat{a}(\rho^a u, \rho^b v)$, où $a(u, v)$ est la forme naturelle $\int \Sigma D^i u D^i \bar{v} - \int \rho^{-1} \partial u/\partial \rho . \bar{v}$ associée à A; comme $a + b \neq 2 - n$, $V \subset \mathcal{D}'$, par exemple d'après le théorème 3 de (I, 2, 3).

La condition H_2 est vérifiée d'après la proposition 7; la condition $a + b \neq 2 - n$ entraîne la condition (H_1) de continuité, en utilisant le lemme 2 de (I, 2, 2) en coordonnées polaires et en majorant par Cauchy-Schwarz comme pour le théorème 1; donc on applique le théorème 1 de (I, 1, 4); le comportement des solutions sur la frontière à distance finie est le même que pour le cas classique, car ρ^{a+b} est borné inférieurement et supérieurement sur tout compact dans le complémentaire de l'origine.

2° On est dans les conditions du 1° et la condition

$$n - 2 < a - b$$

permet d'appliquer le corollaire 1 du théorème 1 de (I, 3, 1).

3° On a encore la condition de coercivité, mais on ne peut plus établir (H_1); l'hypothèse sur la frontière garantit

$$W^0_{(0,\rho^{a+b})} \subset \mathcal{D}'$$

(1er critère de (I, 2, 3)). On peut donc appliquer le théorème 2 de (I, 1, 4).

Remarques 5. — Si Ω est suffisamment effilé en O, il est probable que les conditions (98) peuvent s'améliorer (voir les dernières lignes à la démonstration de la proposition 7 du n° 1), ce qui permettrait d'améliorer la condition sur α dans le théorème 4..

Le 2° du théorème 4 s'applique en particulier au complémentaire de l'origine dans R^n; mais si $n \geqslant 2$, il n'est pas possible de prendre $\alpha = 0$.

On peut associer au théorème 4 un théorème 4′ comme le théorème 3′ a été associé au théorème 3 (solutions nulles à l'infini, limitation de croissance en 0).

N° 3. Le problème de Neumann.

3. 1. Rappel.

On résout classiquement [21], [37], le problème de Neumann avec le théorème 1 de (I, 1, 2) en prenant

$$H = L^2(\Omega), \qquad V = \mathcal{E}^1_{L^2}(\Omega) = W_{(1,1),2}(\Omega)$$

et la forme $a(u, v)$ associée à $-\Delta + \alpha$, où $\alpha > 0$; l'espace $N(V, H, a)$ des solutions est constitué par les $u \in V$, telles que

$$(107) \qquad a(u, v) = \sum_i \int D^i u D^i \bar{v} + \alpha \int u\bar{v}$$

soit continue en v pour la topologie induite sur V par H; or, pour $n = 1$, $\Omega =]0,1[$ par exemple, en prenant $v \in \mathcal{D}$, on voit que $u \in N$ nécessite que $\langle \Delta u, \bar{\varphi} \rangle$ soit continue pour φ dans L^2, donc $\Delta u \in L^2$, ce qui est la condition $u \in \mathcal{H}$ (cf. (I, 1, 2)); elle entraîne l'existence de $u'(0)$ et de $u'(1)$; en prenant v quelconque dans V, (107) s'écrit, si $u \in \mathcal{H}$:

$$a(u, v) = u'(1).\bar{v}(1) - u'(0).\bar{v}(0) + (-\Delta u + \alpha u|v)_{L^2};$$

on peut prendre $\bar{v}(0) = 0$; $\bar{v}(1)$ n'est pas continue en v sur le sous-espace de V déterminé par $v(0) = 0$, donc $u \in N$ entraîne $u'(1) = 0$ et de même $u'(0) = 0$, on a donc bien un problème de Neumann homogène.

3. 2. Introduction de poids.

Nous avons vu (théorèmes 3 et 4 du numéro précédent) que la méthode des poids ($\theta = x_n$ ou ρ) associe naturellement à l'opérateur homogène $-\Delta$ des opérateurs singuliers non homogènes $-\Delta - (\alpha/\theta)\partial/\partial\theta$.

Le théorème 1 suivant est un cas particulier du théorème 1′; cette présentation nous permet d'alléger les notations dans la démonstration; d'autre part, en remplaçant dans le théorème 1, Ω par $]0,1[$, ce qui fait perdre la possibilité d'obtenir une condition de Neumann, on obtient un théorème qui peut s'adapter au cas ou Ω est une boule, x étant remplacé par la distance au bord.

Théorème 1. — *Soit* $\Omega = R_+$, $A = -\Delta + \alpha/x^2$; *supposons que:*

$$(108) \qquad 2\alpha + a(1-a) + b(1-b) > 0$$

alors, si $\tilde{a}(u, v) = \int (x^a u)'(x^b \bar{v})' + \alpha \int x^{b-2}(x^a u)' \bar{v}$, A *est un isomorphisme de* $x^a N(W_{(x^{a+b-2}, x^{a+b})}, W_{(x^{a+b-2})}, \tilde{a})$ *sur* $x^{-b} W'_{(x^{a+b-2})}$, *et cet espace* N *est constitué des*

$$u \in W_{(x^{a+b-2}, x^{a+b})} \text{ tels que } \int x^{a+b+2} |u''|^2 < \infty; \quad si \quad u \in N,$$

la solution $x^a u = x^{(1+a-b)/2} \theta(x)$, *où* θ *est nulle au bord:* $\theta \in W_{(x^{-1}, x)}$ *et* $w = (x^a u)' = x^{(a-b-1)/2} \theta_1$, *où* θ_1 *est nulle au bord:* $\theta_1 \in W_{(x^{-1}, x)}$; *on peut donner l'interprétation suivante:*

1° *si* $\alpha > 0$, *il existe a et b vérifiant* (108), *et tels que:*

$$(109) \qquad 1 \leqslant a - b < \sqrt{1 + 4\alpha}$$

si on a (108) *et* (109), *les solutions* $x^a u$ *sont nulles ainsi que leur dérivée première en* 0;

2° *si* $\alpha > 0$, *il existe a et b vérifiant* (108) *et tels que:*

$$(110) \qquad -\sqrt{1 + 4\alpha} < a - b \leqslant -1;$$

si on a (108) *et* (110), $x^a u$ *et sa dérivée sont nulles à l'infini;*

3° *si* $\alpha > -1/4$, *il existe a et b vérifiant* (108) *et*

$$(111) \qquad |a - b| \leqslant 1;$$

si on a (108) *et* (111), *la solution est nulle à l'origine et sa dérivée est nulle à l'infini (condition de Neumann à l'infini).*

Démonstration. — On se place dans les conditions d'applications du théorème 1 de (I, 1, 1) (1re méthode), en prenant $V = W_{(x^{a+b-2}, x^{a+b})}$; et $H = W_{(x^{a+b-2})}$ et comme forme,

$$\hat{a}(u, v) = a(x^a u, x^b v),$$

où $a(u, v)$ est la forme naturelle $\Sigma \int D^i u D^i \bar{v} + \alpha \int x^{-2} u \bar{v}$ associée à A.

La condition (H_1) de continuité s'écrit:

$$\hat{a}(u, v) = \int x^{a+b} u' \bar{v}' + (ab + \alpha) \int x^{a+b-2} u \bar{v} + a \int x^{a+b-1} u \bar{v}' + b \int x^{a+b-1} u' \bar{v},$$

$$|\hat{a}(u, v)| \leqslant C \|u\|_{(h)} \|v\|_{(h)}; \qquad (h) = (x^{a+b-2}, x^{a+b})$$

elle est toujours vérifiée d'après Cauchy-Schwarz;

La condition (H_2) de coercivité s'écrit $\mathcal{R}e\hat{a}(u, u) \geqslant C\|u\|^2_{(h)}$; or, on peut écrire, en intégrant par parties :

$$\frac{1}{2}(a+b)\int x^{a+b-1}(|u|^2)' = -\frac{1}{2}(a+b)(a+b-1)\int x^{a+b-2}|u|^2$$

en effet, d'après le théorème 1 de (I, 2, 4), $x^{a+b-1}u^2$ tend vers 0 si x tend vers 0 ou $+\infty$; on a donc pour u réelle, ce qui suffit :

$$(H_2) \quad \forall u \in W_{(h)}, \quad \int x^{a+b}u'^2 + \frac{1}{2}[2\alpha + a(1-a) + b(1-b)] \int x^{a+b-1}u^2 \geqslant C\|u\|^2_{(h)}$$

ce qui sera réalisé si et seulement si on a (108).

On peut donc appliquer le théorème 1 de (I, 1, 4) : A assure l'isomorphisme de l'énoncé.

Déterminons l'espace N : $u \in N$ si et seulement si $u \in W_{(h)}$ et si $\hat{a}(u, v)$ est continue en v pour la topologie induite sur $W_{(h)}$ par $W_{(x^{a+b-2})}$; le terme en α est continu; il faut et il suffit donc que $\int (x^a u)'(x^b v)'$ le soit; en prenant $v \in \mathcal{D}$, on voit qu'il est nécessaire que $x^b(x^a u)''$ soit dans $W_{(x^{2-a-b})}$, ce qui donne, compte tenu de $u \in W_{(h)}$, la condition annoncée:

$$\int x^{a+b+2}|u''|^2 < \infty :$$

c'est la condition $u \in \mathcal{H}$; soit alors $u \in \mathcal{H}$; et $w = (x^a u)'$; $u \in \mathcal{H}$ (et $u \in W_{(h)}$) entraînent $w \in W_{(x^{b-a},\, x^{b-a+2})}$; donc, d'après le théorème 1 de (I, 2, 4), $w = x^{(a-b-1)/2}\theta_1$ où θ_1 est nulle au bord, plus précisément $\theta_1 \in W_{(x^{-1}, x)}$; d'autre part, d'après le même théorème, u et v étant dans $W_{(h)}$, $x^a u = x^{(1+a-b)/2}\theta(x)$, $\theta \in W_{(x^{-1}, x)}$ et $x^b\bar{v} = x^{(1+b-a)/2}\theta_2(x)$, $\theta_2 \in W_{(x^{-1}, x)}$; pour que $(x^a u)'\,(x^b v)'$ soit continue pour v quelconque, il faut et suffit que $u \in \mathcal{H}$ et que, en intégrant par partie, la partie intégrée soit continue en v; or cette partie intégrée est :

$$w x^b v\Big|_0^\infty = w x^{(1+b-a)/2}\theta_2\Big|_0^\infty = \theta_1\theta_2\Big|_0^\infty = 0$$

il n'y a donc pas de condition supplémentaire : $\mathcal{H} = N$; les 1°, 2°, 3° s'ensuivent aussitôt, en mettant (108) sous la forme

$$-2a^2 + 2a(1+d) - d - d^2 + 2\alpha > 0, \qquad d = a - b$$

il y a des solutions si et seulement si $\alpha > -1/4$; des solutions avec $d > 1$ si et seulement si $\alpha > 0$.

N. B. — On peut donner une variante du théorème précédent pour l'opérateur $-\Delta - (\beta/x)\, d/dx$; la condition (108) est à remplacer par : $a(1-a) + b(1-b) + \beta(b-a-1) > 0$; on peut alors obtenir une condition de Neumann à l'infini si on a $\beta < 1$.

THÉORÈME 1'. — *Même énoncé que celui du théorème* 1, *en y remplaçant* Ω *par* $\{x \in \mathrm{R}^n | x_n > 0\}$, A *par* $-\Delta + \alpha/x_n^2$, *et, dans l'énoncé des conditions au bord,* u *par*

$$\mathrm{U}(x_n) = \int_\Pi dx_1 \ldots dx_{n-1} |u|,$$

pour n'importe quel ensemble mesurable Π *de* $x_n = 0$.

Démonstration. — Mêmes changements que dans l'énoncé, en utilisant le théorème 1' de (I, 2, 4).

REMARQUE 1. — On peut chercher de nouveaux espaces pour le problème de Neumann de la façon suivante : on prend $\mathrm{V} = \mathcal{E}^1_{\mathrm{L}^2} = \mathrm{W}_{(1,1)}$ comme en 3. 1 et la même forme $a(u, v)$; pour H au lieu de L^2, on prend le sous-espace des fonctions u de L^2 telles que $\int |u^{(\beta)}|^2 < \infty$, $0 < \beta < 1/2$, où $u^{(\beta)}$ est la dérivée fractionnaire de u d'exposant β, définie pour l'ouvert Ω (comme $u \in \mathrm{L}^2$, on étend u comme fonction sur R^n, on prend la transformée de Fourier $\hat{u}$ et $u^{(\beta)}$ est la transformée inverse de $|\xi|^\beta \hat{u}$); on a $\mathrm{V} \subset \mathrm{H}$, la forme classique associée à $-\Delta + \alpha$, $\alpha > 0$ définit bien un isomorphisme, et la condition d'appartenance à N sera bien celle de Neumann, dans le cas particulier $\Omega =]0,1[\subset \mathrm{R}$, d'après 3. 1, si et seulement s'il n'existe pas de constante C telle que :

$$|u(0)| \leqslant \mathrm{C}\|u\|_{\mathrm{H}} \quad \text{pour } u \in \mathrm{H},\ u(1) = 0.$$

Autrement dit, on obtient un problème de Neumann si et seulement si le lemme 1 de (I, 2, 2) n'est plus vrai lorsqu'on remplace u' par $u^{(\beta)}$ au deuxième membre.

CHAPITRE II

OPÉRATEURS h — Ω — DISSIPATIFS.

Sommaire. — On utilise les notations de (I, 1, 1) et de [62]. Au § 1, un premier rappel justifie l'étude faite aux §§ 2 et 3; un deuxième rappel d'une méthode d'utilisation des semi-groupes est suivi immédiatement au § 1 de deux théorèmes où l'on introduit des poids dans cette dernière méthode.

§ 1. — Préliminaires et introductions de poids.

1) *Rappels* (*c. f. R. S. Phillips*, [56]).

Soit L un opérateur linéaire non borné dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, D(L) son ensemble de définition; il est dit dissipatif si $\forall \varphi \in D(L)$, $\mathcal{R}e(L\varphi|\varphi) \leqslant 0$; il est dissipatif maximal si tout opérateur dissipatif L′ dont il est la restriction est tel que $D(L') = D(L)$.

A un système hyperbolique qui ne fait pas s'accroître l'énergie est associé un opérateur restreint L_0 dissipatif : par exemple, $\mathcal{H}$ est un espace normal de distributions et L_0 est l'opérateur différentiel classique sur $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$, et on associe au système un opérateur élargi L_1 opérant au sens des distributions. Supposons les coefficients du système indépendants du temps; on peut alors résoudre le problème de Cauchy par la théorie des semi-groupes, si on associe au système un opérateur L qui soit générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions, et c'est le cas si L est dissipatif maximal à domaine dense; or on peut mettre en correspondance biunivoque l'ensemble des opérateurs dissipatifs de domaine dense et l'ensemble des contractions J^0 tels que l'ensemble des valeurs de $1 + J^0$ soit dense; ceci permet de montrer l'existence d'un prolongement dissipatif maximal L pour tout opérateur dissipatif L_0 de domaine dense; L est encore un opérateur différentiel et déterminé par de bonnes conditions aux limites s'il est extension de L_0 et restriction de L_1. La théorie du prolongement maximal dissipatif se fait dans un espace de Hilbert abstrait; aussi introduirons nous au § 2 un poids $h(x) > 0$, mesurable, h^{-1} localement borné sur Ω, et prendrons pour $\mathcal{H}$, $L^2(\Omega, h\,dx)$, pour nous intéresser aux opérateurs dissipatifs dans cet espace.

2) *Rappels. La théorie des semi-groupes appliquée aux problèmes aux limites abstraits ou concrets.*

Soit V et H deux espaces de Hilbert, $V \subset H$, V dense dans H; $a(u, v)$ une forme sesquilinéaire continue sur $V \times V$, avec, pour λ convenable :

$$(1) \quad \forall v \in V, \quad \mathcal{R}e\, a(v, v) + \lambda \|v\|_H^2 \geqslant \alpha \|v\|_V^2; \qquad \alpha > 0.$$

Soit A l'opérateur non borné défini par $a(u, v)$, et $N = D(A)$ son espace de définition (cf. (I, 1, 1)); alors, $-A$ est générateur infinitésimal d'un semi-groupe $G(t) \in \mathcal{L}(H, H)$; de plus $G(t) \in \mathcal{L}(D(A), D(A))$, $AG(t)u = G(t)Au$ et $G(t) \in \mathcal{L}(V, V)$; cf. [37], [78], [28]; $\mathcal{L}(X, Y)$ signifie l'espace des applications linéaires continues de X dans Y.

Application: Soit $H = L^2$, $\hat{V} = \mathcal{D}^1_{L^2}(\Omega) = W^0_{(1,1)}$; soit

$$a(u, v) = \sum_i \int D^i u\, D^i \bar{v};$$

l'opérateur associé est $A = -\Delta$; on résout ainsi le problème

$$Au + \partial u/\partial t = 0, \quad u(0) = f \in D(A) = N; \quad \text{par} \quad u(t) = G(t)f.$$

3) *Introduction de poids dans la méthode exposée au* 2° *précédent.*

Prenons la forme $a(u, v)$ précédente et considérons la forme $\hat{a}(u, v) = a(pu, qv)$, p et q étant une fois c. d. et positives sur Ω; soit h_0 et h deux fonctions positives mesurables, h_0^{-1} et h_1^{-1} localement bornées sur Ω; prenons $V = W^0_{(h_0, h)}$ et $H = W_{(h_0)}$; l'opérateur associé est alors $\tilde{A} = qAp$; si $\hat{a}(.,.)$, V et H vérifient (1), alors $\tilde{A}$ est générateur d'un semi-groupe $\tilde{G}(t)$; soit $f \in D(\tilde{A})$; $\tilde{u}(t) = \tilde{G}(t)f$ est solution du problème :

$$(i) \qquad \begin{cases} qAp\tilde{u} + \partial\tilde{u}/\partial t = 0, \\ \tilde{u}(0) = f. \end{cases}$$

Soit p et q tels que $pq = 1$; et soit $p\tilde{u} = v$; alors (i) s'écrit :

$$(ii) \qquad \begin{cases} Av + \partial v/\partial t = 0, \\ v(0) = pf \end{cases}$$

donc si $g \in pD(\tilde{A})$, $v = p\tilde{G}(t).\left(\frac{g}{p}\right)$ résout le problème

$$Av + \partial v/\partial t = 0; \quad v = g.$$

Exemple: θ est une fonction harmonique positive sur Ω;

$$V = W^0_{(h_0, 1)}; \qquad H = W_{(h_0)}; \qquad \hat{a}(u, v) = a(\theta^b u, \theta^{-b} v);$$

avec toujours $a(u, v) = \sum_i \int D^i u\, D^i \bar{v}$; alors (1) est vérifié si et seulement s'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$(1 - \alpha) \int |\text{grad } \varphi|^2 \geqslant b^2 \int \frac{|\text{grad } \theta|^2}{\theta^2} |\varphi|^2,$$

pour toute $\varphi \in \mathcal{D}$, soit d'après le lemme 3 de (I, 2, 2) si $b^2 < 4$; (on peut de même prendre pour θ une distance au bord surharmonique et faire aussi varier les conditions de nullité au bord des données).

Nous avons obtenu le théorème suivant :

THÉORÈME 1. — *Soit θ une fonction harmonique positive sur Ω; soit $b \in R$, $b^2 < 4$;*

soit h_0 mesurable positive sur Ω, h_0^{-1} bornée;

soit $V = W^0_{(h_0, 1)}$; $H = W_{(h_0)}$; *soit* $a(u, v) = \sum_i \int D^i u D^i \bar{v}$;

alors, $\hat{a}(u, v) = a(\theta^b u, \theta^{-b} v)$ est définie et continue sur $V \times V$, *et définit un opérateur $\theta^{-b}\Delta\theta^b = \tilde{A}$ de l'espace* $N(V, H, \hat{a}(.,.))$, *à valeurs dans* $H' \subset \mathcal{D}'$ *(cf.* (I, 1, 1)); $\tilde{A}$ *est générateur infinitésimal d'un semi-groupe*: $\tilde{G}(t) \in \mathcal{L}(V, V)$; *soit* $g \in \theta^b N$; *alors $v = \theta^b \tilde{G}(t)(\theta^{-b} g)$ résout le problème $\Delta v + \partial v/\partial t = 0$; $v(0) = g$.*

Plus généralement, on a le théorème suivant : (pour les notations N et $\tilde{A}$, cf. (I, 1, 1)).

Théorème 2. — *Soit* Ω, $V \subset H$ *deux espaces de Hilbert de distributions sur* Ω; $a(u, v)$ *une forme sesquilinéaire sur* $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$, *continue en* v *sur* $\mathcal{D}$ *et définissant un opérateur* A *de* $\mathcal{D}$ *dans* $\mathcal{D}'$; *soit* p *une fonction mesurable positive sur* Ω, *assez régulière pour que la multiplication par* p *soit définie de* V *dans* $\mathcal{D}'$ *et de plus telle que la forme* $\hat{a}(u, v) = a(pu, p^{-1}v)$ *soit définie, et sesquilinéaire continue sur* $V \times V$; *supposons enfin que* $\hat{a}(.,.)$, V, H *vérifient* (1) ; *alors, l'opérateur* $\tilde{A}$ *attaché à* $(V, H, \hat{a}(.,.))$ *a pour restriction à* $\mathcal{D}$ *l'opérateur* $p^{-1}Ap$; $\tilde{A}$ *est générateur infinitésimal d'un semi-groupe* $\tilde{G}(t)$, *et, si* $p^{-1}g \in N(V, H, \hat{a}(.,.))$, *alors* $v = p\tilde{G}(t).(p^{-1}g)$ *résout le problème:*

$$(p\tilde{A}p^{-1})v + \partial v/\partial t = 0, \qquad v(0) = g.$$

§ 2. — Étude générale.

Nous définissons et étudions les opérateurs h-Ω-dissipatifs.

Notations. — Soit $\Omega \subset R^n$, (x_i) un système de coordonnées rectilignes de R^n; soit $P(\xi)$ un polynôme à coefficients constants complexes de degré m; soit P_k sa partie homogène de degré k; soit P(D) l'opérateur différentiel associé à P :

$$(D^i = \partial/\partial x_i), \qquad D = (D^i);$$

soit $h(x)$ une fonction mesurable positive dans Ω, h^{-1} localement bornée.

Définition 1.

$$(2)\quad \begin{cases} P(D) \textit{ est } h\text{-}\Omega\textit{-dissipatif} \iff \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \mathcal{R}e\int [P(D)\varphi]\bar{\varphi}h \leqslant 0, \\ P(D) \textit{ est } h\text{-}\Omega\textit{-conservatif} \iff \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \mathcal{R}e\int [P(D)\varphi]\bar{\varphi}h = 0, \\ P(D) \textit{ est } h\text{-}\Omega\textit{-accrétif} \iff -P(D) \textit{ est } h\text{-}\Omega\textit{-dissipatif}; \end{cases}$$

si h (*resp.* Ω) *est absent des notations, on sous-entend* $h \equiv 1$ (*resp.* $\Omega = R^n$); *exemple: dissipatif signifie* 1-R^n-*dissipatif.*

Exemples: cf. [56].

Définition 2. — *On dit que* P(D) *est faiblement* h-Ω-*dissipatif si* $P_m(D)$ *est* h-Ω-*dissipatif.*

Proposition 1. — *Pour que* P(D) *soit dissipatif, il est nécessaire et suffisant que pour tout* $\xi \in R^n$, $\mathcal{R}e P(i\xi) \leqslant 0$.

Démonstration. — On voit que la condition est suffisante par transformation de Fourier; la condition est nécessaire sinon, il existe ξ_0 tel que $\mathcal{R}e\mathrm{P}(i\xi) > 0$ dans un voisinage ouvert ω de ξ_0; soit alors $\varphi \in \mathcal{D}(\omega)$; alors $\hat{\varphi} = \overline{\mathcal{F}}(\varphi) \in \mathcal{S}(\mathrm{R}^n)$ et $\mathcal{R}e\int \mathrm{P}(\mathrm{D})\hat{\varphi}.\bar{\hat{\varphi}} > 0$ ce qui est impossible, en effet

$$\left[\forall\psi \in \mathcal{D}(\mathrm{R}^n), \mathcal{R}e\int \mathrm{P}(\mathrm{D})\psi.\bar{\psi} \leqslant 0\right] \Longrightarrow \left[\forall\psi \in \mathcal{S}, \mathcal{R}e\int \mathrm{P}(\mathrm{D})\psi.\bar{\psi} \leqslant 0\right].$$

Remarques 1. — Ce raisonnement n'est plus valable pour un opérateur Ω-dissipatif, Ω-quelconque; on en donne plus loin un contre-exemple.

Par un argument d'homogénéité, en remplaçant ξ par $t\xi$, t tendant vers l'infini, on voit que :

$$\mathrm{A} = [\forall\xi, \mathcal{R}e\mathrm{P}(i\xi) \leqslant 0] \Longrightarrow [\forall\xi, \mathcal{R}e\mathrm{P}_m(i\xi) \leqslant 0];$$

si $\mathcal{R}e\mathrm{P}_m(i\xi_0) = \cdots = \mathcal{R}e\mathrm{P}_k(i\xi_0) = 0$, alors A entraîne que $\mathcal{R}e\mathrm{P}_{k+1}(i\xi_0) \leqslant 0$; la réciproque n'étant évidemment pas vraie; exemple pour $n = 1$: $-\xi^4 + \xi^2 > 0$ pour $|\xi| < 1$, $\xi \in \mathrm{R}$.

Proposition 2. — *Si* P *est homogène, la propriété* $\exists\Omega$ *tel que* P(D) *soit* Ω*-dissipatif est équivalente à :* « P(D) *est dissipatif* ».

Démonstration. — Si P est homogène, on a :

$$\left[\forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \mathcal{R}e\int \mathrm{P}(\mathrm{D})\varphi.\bar{\varphi} \leqslant 0\right] \Longrightarrow \left[\forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathrm{R}^n), \mathcal{R}e\int \mathrm{P}(\mathrm{D})\varphi.\bar{\varphi} \leqslant 0\right].$$

Corollaire. — *Si* P *est homogène, il faut et il suffit pour qu'il soit* Ω*-dissipatif que* $\mathcal{R}e\mathrm{P}(i\xi) \leqslant 0$.

Proposition 3. — *Pour que* P(D) *soit* Ω*-dissipatif, il suffit que* $\mathcal{R}e\mathrm{P}(i\xi) \leqslant 0$, *pour tout* $\xi \in \mathrm{R}^n$.

Proposition 4. — *Pour que* P *soit* h-Ω*-dissipatif, il faut que* $\forall\xi \in \mathrm{R}^n$, $\mathcal{R}e\mathrm{P}_m(i\xi) \leqslant 0$.

Démonstration. — Soit $\alpha \in \mathcal{D}(\Omega)$; on écrit $\mathcal{R}e\int h\mathrm{P}(\mathrm{D})\varphi.\bar{\varphi} \leqslant 0$ pour $\varphi = \alpha \exp\langle it\xi, x\rangle$; on applique la formule de Leibniz; on fait tendre t vers $+\infty$.

Proposition 5. — *Pour que* P(D) *homogène soit* h-Ω*-dissipatif il faut qu'il soit dissipatif.*

Exemple. — Soit $n = 2$; $P(D) = \partial^2/\partial x_1^2 - \partial^2/\partial x_2^2$ n'est pas dissipatif, il ne peut être h-Ω-dissipatif.

Nous donnons maintenant des exemples d'opérateurs Ω-dissipatifs non dissipatifs. Soit $\Omega \subset R^n$; d'après la terminologie de [29] un opérateur P est dominé par Q sur Ω, s'il existe $C > 0$ ne dépendant que de P, Q, Ω, telle que pour toute φ de $\mathcal{D}(\Omega)$ on a $\int |P\varphi|^2 \leqslant C\int |Q\varphi|^2$; disons que les P_i sont strictement dominés sur Ω par les Q_j, $i = 1, 2, \ldots, N$, $j = 1, 2, \ldots, N'$ si pour toute φ de $\mathcal{D}(\Omega)$,

$$\sum_i \int |P_i\varphi|^2 \leqslant \sum_j \int |Q_j\varphi|^2. \tag{3}$$

Proposition 6. — *Soit* P_i, $i = 1, 2, \ldots, N$, *des opérateurs strictement dominés sur* Ω *dans leur ensemble par les* Q_j, $j = 1, 2, \ldots, N'$; *alors l'opérateur* $P = \sum_{j=1}^{N'} Q_j^* Q_j - \sum_{i=1}^{N} P_i^* P_i$ *est* Ω-*accrétif.*

Rappelons (Hörmander [29]) que les P_i sont dominés par les Q_j si et seulement si $\exists A > 0$, $A < \infty$ telle que

$$\sum_i \tilde{P}_i < A \sum_j \tilde{Q}_j; \quad (\tilde{S} = \Sigma i^{|\alpha|} S^{\alpha}(i\xi)\overline{S}^{\alpha}(i\xi));$$

pour caractériser ainsi la domination stricte, il faudrait étudier la meilleure constante A.

Exemple. — Soit $n = 1$, $P(D) = d^4/dx^2 + d^2/dx^2$; on a alors : $P(i\xi) = \xi^4 - \xi^2$ n'est pas $\geqslant 0$; or

$$\mathcal{R}e\int_\Omega P\varphi\overline{\varphi}dx = \int_\Omega |\varphi''|^2\, dx - \int_\Omega |\varphi'|^2\, dx$$

est positif ou nul pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, si le diamètre de Ω est assez petit. Donc un opérateur peut être Ω-dissipatif sans être dissipatif donc sans vérifier $\mathcal{R}eP(i\xi) \leqslant 0$; d'après la proposition 1, il vérifie $\mathcal{R}eP_m(i\xi) \leqslant 0$.

On peut se poser les questions suivantes :

Q_1. — Caractériser algébriquement, Ω étant donné, les opérateurs $P(D)$, Ω-dissipatif; on entend par algébriquement : trouver des conditions portant directement sur $P(\xi)$; cette question paraît liée à la détermination de meilleures constantes; pour que $P(D)$ soit h-Ω-dissipatif, faut-il qu'il existe Ω' où $P(D)$ soit dissipatif.

Q_2. — Soit un opérateur P(D), Ω-dissipatif et $\Omega' \subset \Omega$; existe t'il des h tels que P(D) soit h-Ω'-dissipatif; en particulier existe-t-il un poids H sur R^n tel que tout opérateur à coefficients constants H-Ω-dissipatif soit H — R^n-dissipatif; (on sait que la notion de domination de Trèves avec le poids exp t^2x^2 ne dépend pas de Ω, contrairement à celle de Hörmander; mais ici, la question semble aussi liée à la recherche de meilleures constantes).

§ 3. — Opérateurs particuliers.

Nous donnons des exemples d'opérateurs h-Ω-dissipatifs, auxquels on peut appliquer la méthode du premier rappel du § 1.

L'opérateur Δ.

Par intégration par parties, on démontre facilement la proposition suivante :

PROPOSITION 1. — *Une condition nécessaire et suffisante pour que Δ soit h-Ω-dissipatif est que pour toute $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$,*

$$\int \Delta h |\varphi|^2 \, dx \leqslant 2 \int h \, |\text{grad } \varphi|^2 \, dx. \tag{4}$$

COROLLAIRE. — *Si h est surharmonique positive sur Ω, Δ est h-Ω-dissipatif.*

PROPOSITION 2. — *Soit $a \in R$ et h harmonique positive sur Ω; pour que Δ soit h^a-Ω-dissipatif, il suffit que :*

$$-1 \leqslant a \leqslant 1 \tag{5}$$

si de plus h est nulle sur un morceau de frontière de dimension $n - 1$ régulièrement plongé, la condition (4) *est nécessaire.*

Démonstration. — La condition (4) prend la forme :

$$\forall \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega), \quad \int a(a-1) h^{a-2} \, |\text{grad } h|^2 |\varphi|^2 \leqslant 2 \int h^a \, |\text{grad } \varphi|^2 \tag{6}$$

il suffit donc, d'après le lemme 3 de (I, 2, 2) et il faut d'après le lemme 4 de (I, 2, 2), si h satisfait à l'hypothèse supplémentaire :

$$a \neq 1 \quad \text{et} \quad \frac{a(a-1)}{2} \leqslant \frac{(a-1)^2}{4} \quad \text{ou} \quad a = 1;$$

d'où (5).

REMARQUE. — Si $0 < a < 1$, h^a n'est pas surharmonique donc, la proposition 2 n'est pas impliquée par le corollaire précédent; on peut d'ailleurs en utilisant toutes les possibilités du lemme 3 de (I, 2, 2), donner une proposition plus large que la proposition 2.

L'opérateur $A = \sum_i (D^i)^4$.

En faisant des intégrations par parties, on démontre aisément la proposition suivante :

PROPOSITION 3. — *Soit* $\Omega \subset R$. *Une condition nécessaire et suffisante pour que* $-d^4/dx^4$ *soit* h-Ω-*dissipatif est que pour toute* $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$,

$$(7) \qquad 2\int |\varphi'|^2 h'' < \int |\varphi''|^2 h + \frac{1}{2}\int |\varphi|^2 h^{\mathrm{IV}}.$$

COROLLAIRE. — *Si* h *est telle que* $\Delta h \leqslant 0$, $h > 0$,

$$\sum_i (D^i)^4 h \geqslant 0,$$

alors $-\sum_i (D^i)^4$ *est* h-Ω-*dissipatif.*

Procurons-nous, par exemple, les poids du type x^b, pour lesquels $-d^4/dx^4$ est $R_+ - x^b$-dissipatif. Il nous faut, pour une étude complète, connaître les meilleurs couples de constantes C et D telles que :

$$(8) \quad \int_0^\infty x^a |\varphi'|^2\,dx \leqslant C\int_0^\infty x^{a-2}|\varphi|^2\,dx + D\int_0^\infty x^{a+2}|\varphi''|^2\,dx;$$

l'argument d'homogénéité utilisé pour l'inégalité (44) du chapitre I ne donne rien ici. Pour $C = 0$, le lemme 2 de (I, 2, 2) nous donne la meilleure valeur possible pour D soit $4/(a+1)^2$; on peut obtenir d'autres couples (C, D) admissibles pour (8) en majorant par Cauchy-Schwarz

$$\int x^a \varphi'^2 = -a\int x^{a-1}\varphi\,.\,\varphi' - \int x^a \varphi\,.\,\varphi''$$

où φ est dans $\mathfrak{D}$ et à valeurs réelles; mais on n'obtient pas ainsi les meilleures constantes; procédons autrement: soit $x = \exp\, t$; posons $a - 1 = 2b$ et $(\exp\, bt)\varphi(e^t) = \psi(t)$; (8) prend la forme:

$$(9)\quad \int |\Phi' - b\Phi|^2\, dt \leqslant C \int |\Phi|^2\, dt + D \int |\Phi'' - (2b+1)\Phi' + b(b+1)\Phi|^2\, dt$$

d'où si $\hat{\Phi} = \mathcal{F}\Phi$

$$(10)\quad \int |i\xi - b|^2 |\hat{\Phi}|^2 \leqslant C \int |\hat{\Phi}|^2 + D \int |-\xi^2 - i\xi(2b+1) + b(b+1)|^2 |\hat{\Phi}|^2.$$

Les meilleures constantes C *et* D *sont celles pour lesquelles*

$$b^2 + \xi^2 \leqslant C + D(b^2 + \xi^2)[(b+1)^2 + \xi^2]$$

ou $D\eta^2 + [(2b+1)D - 1]\eta + C \geqslant 0$, *pour tout* $\eta \geqslant b^2$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. Aronszajn, On coercive integro-differential quadratic forms. Conference on Partial Differential equations, *Univ. Kansas*, 1954, Tech. Rep. nº 14, pp. 94-106.

[2] N. Aronszajn, A unique continuation theorem for solutions of elliptic partial differential equations or inequalities of second order, *J. Math. Pures Appl.*, 36, 1957, pp. 235-249.

[3] C. Blanc, Les équations différentielles de la technique, *Éditions du Griffon*, 1947, Neuchâtel.

[4] N. Bourbaki, *Topologie générale*, Paris, Hermann.

[5] N. Bourbaki, *Intégration*, Paris, Hermann, 1952.

[6] N. Bourbaki, *Intégration des mesures*, Paris, Hermann, 1956.

[7] N. Bourbaki, *Espaces vectoriels topologiques* I, Paris, Hermann, 1953.

[8] N. Bourbaki, *Espaces vectoriels topologiques* II, Paris, Hermann, 1955.

[9] M. Brelot, Sur l'allure des fonctions harmoniques et sous-harmoniques à la frontière, *Math. Nachr.* 4, 1950, pp. 298-307.

[10] M. Brelot, La théorie moderne du potentiel. *Annales de l'Institut Fourier* (1952), pp. 112-139.

[11] P. Brousse et H. Poncin, Quelques résultats généraux concernant la détermination de solutions d'équations elliptiques par les conditions aux frontières. Jubilé Scientifique de M. P. Riabonchinsky, *Publ. Sci. et techn. du Ministère de l'Air*, Paris, 1954.

[12] Beurling, A. Deny, J. — Dirichlet spaces, *Proc. nat. Acad. Sci. U. S. A.* t. 45, 1959, p. 208-215.

[13] T. Carleman, Sur les systèmes linéaires aux dérivées partielles du premier ordre à deux variables. *C. R. Acad. Sci.*, Paris, vol. 197, 1933, pp. 471-474.

[14] H. Cartan, Théorie générale du balayage en potentiel newtonien. *Annales Univ. Grenoble, Math. Phys.*, 22 (1946), pp. 221-280.

[15] G. Choquet, Existence et unicité des représentations intégrales au moyen des points extrémaux dans les cônes convexes. *Sem. Bourbaki*, Décembre 1956.

[16] H. O. Cordes, Uber die Bestimmheit der Lösungen elliptischer Differential gleichungen durch Anfangsvorgaben, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math. Phys.*, nº 11 (1956), pp. 239-258.

[17] J. Deny, Les potentiels d'énergie finie. *Acta Math.*, 82 (1950), pp. 107-183.

[18] J. Deny et J. L. Lions, Les espaces du type de Beppo Levi. *Annales de l'Institut Fourier*, V (1953-1954), pp. 305-370.

J. Deny, Voir Beurling-Deny.

[19] Dieudonné-Schwartz, La dualité dans les espaces $\mathcal{F}$ et $\mathcal{LF}$. *Annales de l'Institut Fourier*, tome I, 1949, pp. 61-101.

[20] K. O. Friedrichs, On the differentiability of the solutions of linear elliptic differential equations, *Comm. on Pure and Applied Math.*, VI (1953), pp. 299-325.

[21] L. Gårding, Dirichlet Problem for linear elliptic partial differential equations, *Math. Scand.*, 1 (1953), pp. 55-72.

[22] I. M. Gel'fand et G. E. Šilov, Fourier transforms of rapidly increasing functions and questions of uniqueness of the solution of Cauchy's problem. *Am. Math. Soc. Translations*, Séries 2, vol. 5 et *Uspehi Mat. Nauk* (N. S.) 8, nº 6 (58), pp. 3-54 (1953).

[23] Grothendieck, Sur les espaces (F) et (DF), *Summa Brasiliensis, Math.*, vol. 3, 1954, pp. 57-123.

[24] Hadamard, *Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques*, Paris, 1932.

[25] G. H. Hardy, J. E. Littlewood et G. Polya, Inequalities, Cambridge, at the *University Press*, 1952.

[26] E. Heinz, Uber die Eindeutigkeit beim Cauchyschen Anfangswertproblem einer elliptischen Differentialgleichung zweiter Ordnung, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math. Phys.*, nº 1 (1955), pp. 1-12.

[27] M. Hervé, *Quelques propriétés des transformations intérieures d'un domaine borné*, Paris, Gauthier-Villars, 1951.

[28] Hille, Functional analysis and semi-groups. *Amer. Math. Soc. Coll. Publ.* XXXI, New-York, 1948.

[29] L. Hörmander, On the theory of general partial differential operators. *Acta Math.*, t. 94, 1955, p. 160.

[30] L. Hörmander et J. L. Lions, Sur la complétion par rapport à une intégrale de Dirichlet. *Math. Scand.*, t. 4, 1956, p. 259.

[31] L. Hörmander, Unicity of the Cauchy's problem, *Math. Scand.*, 1958.

[32] A. Huber, Some results on generalised axially symmetric potential. Proceedings of the Conference on Differential Equations, *University of Maryland*, 1955.

[33] D. Huet, Phénomènes de perturbation singulière dans les problèmes

aux limites. *Annales de l'Institut Fourier*, X (1960), pp. 67-150.

LADYZENSKAYA, voir VISǏK-LADYZENSKAYA.

[34] Peter LAX, A remark on the method of orthogonal projections. *Comm. on Pure and Applied Math.*, IV (1951), pp. 457-464.

[35] J. LERAY, La résolution des problèmes de Cauchy et de Dirichlet au moyen du calcul symbolique et des projections orthogonales et obliques. *Séminaire Bourbaki*, Mai 1951.

[36] (BEPPO-)LEVI, Sul principio di Dirichlet. *Rend. Palermo*, 22 (1906), pp. 293-359.

J. L. LIONS, Voir aussi Deny-Lions, Hörmander-Lions.

[37] J. L. LIONS, Problèmes aux limites en théorie des distributions. *Acta Mathematica*, 94 (1955), pp. 13-151.

[38] J. L. LIONS, Ouverts *m*-réguliers. *Revista di la Union Matematica Argentina*, XVII de Homenage à Beppo-Levi, pp. 103-116, Buenos-Aires, 1955.

[39] J. L. LIONS, On elliptic partial differential equations. Cours professé à Bombay, *Tata Institute*, 1957.

[40] J. L. LIONS, Sur les problèmes mixtes pour certains systèmes paraboliques dans des ouverts non cylindriques. *Annales de l'Institut Fourier*, 7 (1957).

[41] J. L. LIONS, Espaces intermédiaires entre espaces Hilbertiens et applications. *Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. Phys. de la R.P.R.*, 2 (50), nº 4, 1958.

[42] J. L. LIONS, Quelques procédés d'interpolation d'opérateurs linéaires et quelques applications. *Séminaire Schwartz*, 5ᵉ année 1960-1961, exposés 1, 2, 3.

[43] J. L. LIONS et E. MAGENES, Problemi ai limiti non omogenei (I). *Scuola Normale Superiore*, Pisa, 1960, pp. 269-308.

[44] J. L. LIONS et E. MAGENES, Problèmes aux limites non homogènes (II) à paraître aux *Annales de l'Institut Fourier*, t. 11.

J. E. LITTLEWOOD, Voir G. H. HARDY, J. E. LITTLEWOOD et G. POLYA.

E. MAGENES, Voir J. L. LIONS et E. MAGENES.

[45] E. MAGENES et G. I. STAMPACCHIA, problemi al contorno per le equazioni differenziali di tipo ellitico. *Scuola Normale Superiore*, Pisa, 1958.

[46] B. MALGRANGE, Sur l'intégrale de Dirichlet. *Math. Scand.*, 4 (1956), pp. 271-275.

[47] B. MALGRANGE, Sur une classe d'opérateurs différentiels hypoelliptiques. *Bull. Soc. Math. de France*, 85 (1957), pp. 283-306.

[48] R. S. MARTIN, Minimal positive harmonic functions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 49 (1941), pp. 125-159.

[49] C. B. MORREY et L. NIRENBERG, On the analyticity of the solutions of linear elliptic systems of partial differential equations. *Comm. on pure and applied math.*, X (1957), pp. 271-290.

[50] J. MOSER, A new proof of de Giorgi's Theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations. *Comm. on Pure and Applied Math.*, XIII (1960), pp. 457-468.

[51] C. MÜLLER, On the behaviour of the solutions of the differential equation $\Delta u = F(x, u)$ in the neighbourhood of a point. *Comm. Pure and Applied, Math.*, 7 (1954), pp. 505-515.

[52] L. Naïm, Sur le rôle de la frontière de R. S. Martin dans la théorie du Potentiel. *Annales de l'Institut Fourier*, t. 7, 1957, pp. 6-103.

[53] Narasimham, M. S. Identity of the weak and strong extensions of a linear elliptic différential operator. *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 43, 1957, p. 513.

L. Nirenberg, Voir Morrey-Nirenberg.

[54] L. Nirenberg, On elliptic partial differential equations. *Annali della Scuola Normale Superiore de Pisa*, XIII (1959).

[55] R. N. Pederson, On the unique continuation theorem for certain second and fourth order elliptic equations. *Comm. on pure and applied Math.*, XI (1958), pp. 67-80.

[56] R. S. Phillips, Dissipative operators and hyperbolic systems of partial differential equations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 90 (1959), pp. 193-254.

G. Polya, Voir G. H. Hardy, J. E. Littlewood et G. Polya.

H. Poncin, Voir P. Brousse et H. Poncin.

[57] E. T. Poulsen, Boundary value properties connected with some improper Dirichlet integrals. *Math. Scand.*, 8 (1960), pp. 5-14.

[58] P. C. Rosenbloom, lecture notes : linear partial differential equations, *Harvard University*, 1957.

[59] J. Schauder, Uber lineare elliptische Differentialgleichungen zweiter ordnung. *Math. Z.*, vol. 38, 1934, pp. 257-282.

[60] J. Schauder, Numerische Abschätzungen in elliptischen linearen Differentialgleichungen, *Studia Math.*, 5 (1934), pp. 34-42.

[61] M. Schechter, On the Dirichlet problem for second order elliptic equations with coefficients singular at the boundary. *Comm. on Pure and Applied Math.*, XIII, pp. 321-328.

L. Schwartz, Voir Dieudonné-Schwartz.

[62] L. Schwartz, *Théorie des distributions*, t. 1, Paris, Hermann, 1950.

L. Schwartz, *Théorie des distributions*, t. 2, Paris, Hermann, 1951.

[63] L. Schwartz, Les travaux de Gårding sur le problème de Dirichlet. *Sem. Bourbaki*, Mai, 1952.

[64] L. Schwartz, *Séminaire sur les équations aux dérivées partielles*, 1954-1955; *Séminaire sur les produits tensoriels topologiques*, 1953-1954.

[65] L. Schwartz, *Problèmes aux limites dans les équations aux dérivées partielles elliptiques*, Second Coll. de Bruxelles sur les équations aux dérivées part. (1955), Masson, Paris.

[66] L. Schwartz, *Ecuaciones diferenciales parciales elipticas. Curso explicado por el Profesor Laurent Schwartz*, Bogota, D. E. Columbia, 1956.

[67] L. Schwartz, Théorie des distributions à valeurs vectorielles, I, *Ann. Inst. Fourier*, tome 7, 1957; II, *Ann. Inst. Fourier*, tome 8, 1959.

[68] L. Schwartz, Particules élémentaires. *Cours de Sao-Paulo*, 1959, et Berkeley 1960.

[69] L. Schwartz, *Séminaire*, 1959-1960, Unicité du Problème de Cauchy.

G. E. Šilov, Voir I. M. Gel'fand et G. E. Šilov.

[70] Sobolev. Sur un théorème d'analyse fonctionnelle, *Mat. Sbornik.*, 4 (46), (1938), p. 472.

[71] Sobolev, *Sur certaines applications de l'analyse fonctionnelle à la physique mathématique*, Leningrad, 1950.

[72] G. Stampacchia, *Séminaire*, L. Schwartz, 1960-1961, Paris.
G. Stampacchia, Voir E. Magenes et G. Stampacchia.

[73] F. Trèves, Relations entre opérateurs différentiels, *Acta Math.*, t. 101, 1959, pp. 1-139.

[74] Visǐk et O. A. Ladyzenskaya, Boundary value problems for partial differential equations and certain classes of operator equations, *Translation* 10.

[75] Visǐk et O. A. Ladyzenskaya, Kraebые zagaчu gля уравнений b частных npouzbogных u некоторых kлaccob операторных уравнений, *Uspehi Mat. Nauk.* (N. S.), 11 (1956), n° 6 (72), 41-97.

[76] M. I. Visǐk, On general boundary problems for elliptic differential equation, Trudy Moskov, *Mat. Obšč.*, vol. 1 (1952), pp. 187-246.

[77] Yosǐda, On the differentiability and the representation of one parameter semi-group of linear operators. *Journal of the Math. Soc. of Japan*, 1 (1948), pp. 15-21.

[78] Yosǐda, On Cauchy's problem in the large for wave equation. *Proc. of the Japan Acad.*, 28 (1952), pp. 396-403.

[79] A. Weil, *Intégration dans les groupes topologiques*, Paris, Hermann.

[80] H. Weyl, The method of orthogonal projection in potential theory. *Duke Math. Journal*, 7 (1940), pp. 411-444.

SUPPLÉMENT A LA BIBLIOGRAPHIE

J. B. Diaz, Voir [89].

[81] J. L. Doob, Probability methods applied to the first boundary value problem. *Proc. of the Third Berkeley Symp. on Math. Statistics and Probability*, 2, 1954-1955, pp. 49-80 publié en 1956.

[82] Dunford-Schwartz, Linear Operators, Part I, General theory. *Pure Appl. Math.*, vol. 7 (1958).

[83] Gagliardo, Caratterizzazioni della trace sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in n variables. *Rend Sem. Math. Univ. Padova*, 27 (1957), pp. 284-305.

[84] J. L. Lions, Équations différentielles opérationnelles et problèmes aux limites. *Collection jaune*, Springer, t. 111, 1961.

[85] J. L. Lions, Théorèmes de traces et d'interpolation (I). *Annali Scuola Norm. Sup. Pisa*, vol. 13 (1959), pp. 389-403.

[86] E. T. Poulsen, *Boundary values in function spaces.* A paraître.

[87] A. A. Vacharin, Propriétés de traces, ..., *Isv. Akad. Nauk.*, t. 23 (1959), pp. 421-454.

[88] A. Weinstein, Generalized axially symmetric potential theory. *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 59 (1953), pp. 20-38.

[89] J. B. Diaz et A. Weinstein, On the fundamental solution of a singular Beltrami-Operator, Studies in Math. and Mech presented to R. von Mises, *Acad. Press. Inc.*, New-York (1954), pp. 97-102.

[90] J. L. Lions et H. Morel, *Espaces singuliers et problèmes aux limites non homogènes.* A paraître.

[91] P. K. Beesack, Hardy's Inequalities and its extensions. *Pacific J. of Math.*, vol. 2, 1961, pp. 39-61, n° 1.