ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

MARC TROYANOV

Coordonnées polaires sur les surfaces riemanniennes singulières

Annales de l'institut Fourier, tome 40, nº 4 (1990), p. 913-937

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1990__40_4_913_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
40, 4 (1990), 913-937.

COORDONNÉES POLAIRES SUR LES SURFACES RIEMANNIENNES SINGULIÈRES

par Marc TROYANOV

Introduction.

Sur une surface riemannienne lisse (de classe C^2), il existe au voisinage de tout point un système de coordonnées polaires ayant ce point pour pôle. Ces coordonnées permettent d'étudier facilement le comportement local des géodésiques. On montre ainsi qu'un point d'une surface C^2 est relié à tout point suffisamment proche par une unique géodésique minimale, cette géodésique varie continûment avec son extrémité ou avec sa direction initiale. En particulier, deux géodésiques coïncidant sur un ouvert coïncident partout.

L'existence de coordonnées polaires en tout point d'une surface riemannienne lisse découle du fait que les géodésiques sont les solutions d'une équation différentielle de classe C^1.

Sur une surface riemannienne singulière, les géodésiques peuvent avoir un comportement local compliqué. Commençons par convenir d'une

DÉFINITION. — *Une courbe rectifiable dans une surface riemanienne est une géodésique si elle minimise la distance au voisinage de chacun de ses points.*

Voici un exemple illustrant le comportement possible des géodésiques en un point singulier : Soit S la surface obtenue en recollant par isométrie le long du bord deux copies de la couronne $A := \{z \in \mathbf{C} : 1 \leqslant |z| \leqslant 2\}$ munie de sa métrique usuelle $ds^2 = |dz|^2$. Alors S est une surface, homéomorphe au tore, munie

---

Mots-clés : Coordonnées polaires — Métriques singulières — Singularités coniques.
Classification A.M.S. : 53B.

d'une métrique (de classe $C^{0,1}$) plate sur le complémentaire de deux cercles Γ_1 et Γ_2 formés de points singuliers (Γ_i correspond à $|z|=i$). On observe que dans tout voisinage d'un point $p_2 \in \Gamma_2$, les points de Γ_2 assez proches de p_2 sont reliés à p_2 par *deux* géodésiques. On observe aussi que dans tout voisinage d'un point $p_1 \in \Gamma_1$, il existe une infinité de géodésiques minimisantes issues de p_1 et ayant un segment initial commun (plus précisément, il existe une infinité de géodésiques distinctes coïncidant avec Γ_1 dans un voisinage de p_1).

Les points de $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ n'admettent par conséquent de système de coordonnées polaires dans aucun voisinage.

Dans cet article, on étudie l'existence et la régularité des coordonnées polaires en un point donné d'une surface riemannienne. On s'intéresse seulement aux surfaces admettant au voisinage de chaque point un système de coordonnées isothermes (surfaces « admissibles »). On sait que cette hypothèse est très peu restrictive. On supposera en outre que la surface possède au pire des singularités isolées de type conique. Notre résultat principal peut être énoncé de la façon suivante (voir les théorèmes (2.1), (3.1) et (4.1)) :

THÉORÈME. — *Soit S une surface riemannienne admissible pouvant avoir des singularités coniques. Supposons que la courbure de S soit bornée.*

Alors tout point de S possède un voisinage admettant des coordonnées polaires de classe $C^{0,1}$.

Si la courbure de S est de classe C^k, alors ces coordonnées sont de classe C^{k+1}.

Nous montrons aussi que dans une surface admissible dont la courbure est bornée, il existe un unique segment géodésique issu d'un point donné et ayant une direction initiale donnée (proposition 2.6).

Le premier paragraphe de l'article est consacré aux définitions utiles pour la suite.

Dans le second paragraphe, nous démontrons l'existence de coordonnées polaires en un point qui n'est pas une singularité conique. L'idée de la preuve (qui m'a été suggérée par François Labourie) est d'approximer notre métrique (dont la courbure est seulement bornée) par des métriques de classes C^2 pour lesquelles on peut utiliser l'application exponentielle.

Au § 3, nous construisons les coordonnées polaires en un point conique. Pour ce faire, on étudie un voisinage du point conique secteur par secteur et on se ramène au théorème du second paragraphe.

Dans le dernier paragraphe, nous étudions la régularité des coordonnées polaires en fonction de celle de la courbure. Nous utilisons pour cela la théorie de la dépendence des solutions d'une équation différentielle ordinaire par rapport aux conditions initiales.

J'ai eu avec François Labourie et Pierre Pansu plusieurs conversations qui m'ont permis de considérablement améliorer une première version de ce travail.

1. Définitions — Généralités.

Soit S une surface (de classe C^∞) munie d'une métrique riemannienne singulière ds^2. On dira que ds^2 est *admissible* s'il existe en tout point $p \in S$ un voisinage U de p, un système de coordonnées (x,y) sur U, ainsi qu'une fonction $u \in L^1(U,\mathbf{R})$ tels que

i) $z(p) = 0$;

ii) $ds^2 \ = e^{2u}|z|^{2\beta}|ds|^2$ sur U ;

iii) $\Delta u \ \in L^1(U)$,

où $z = x + iy$, $\beta \in \mathbf{R}$ et $\Delta = -4\dfrac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}$ est le laplacien défini par ce système de coordonnées.

On dit que p est un point *régulier* si $\beta = 0$ et que p est une *singularité simple d'ordre* β dans le cas contraire. Lorsque $\beta > -1$, on dit aussi que p est une singularité conique d'*angle* $\Theta := 2\pi(\beta+1)$. On trouvera dans [HT] § 2 et [T] § 1, une discussion des métriques à singularités simples. La fonction $K : S \to \mathbf{R}$ définie par

$$\Delta u = K e^{2u}|z|^{2\beta}, \tag{1.1}$$

est la *courbure* de ds^2 dans le voisinage U. On vérifie facilement que cette fonction ne dépend pas du système de coordonnées choisi.

La régularité de la métrique est étroitement liée à celle de sa courbure :

1.2. PROPOSITION. — *Soit z_0 un point régulier d'une surface riemannienne admissible (S,ds^2) dont la courbure K est de classe L^p (pour la mesure de Lebesgue). Alors, dans un voisinage de z_0, la métrique s'écrit*

$ds^2 = e^{2u}|dz|^2$ *où*

$$u \in C^{\alpha} \quad si \quad 1 < p \leqslant 2 \quad et \quad \alpha < 2 - 2/p\,;$$
$$u \in C^{1,\alpha} \quad si \quad p > 2 \quad et \quad \alpha < 1 - 1/p\,.$$

Si K est de classe $C^{k,\alpha}$, alors u est de classe $C^{k+2,\alpha}$ ($\forall k, \alpha$ tels que $0 \leqslant k \leqslant \infty, 0<\alpha<1$).

Preuve. — On a $\Delta u \in L^1_{\mathrm{loc}}$, cela implique que $e^u \in L^q_{\mathrm{loc}}$ pour tout $q < \infty$ (cf. [HT] proposition 1.7). L'inégalité de Hölder entraîne donc que $\Delta u = Ke^{2u} \in L^r$ pour tout $r < p$. Par régularité L^p du laplacien, on a $u \in W^{2,r}$; la première assertion découle par conséquent du théorème de plongement de Sobolev (cf. [GT]).

Si K est Hölder-continue, alors K est en particulier de classe L^p pour tout p. Donc e^u est de classe C^1 et la seconde assertion découle donc de la régularité hölderienne du laplacien. □

Le comportement de la métrique en un point singulier conique sera étudié au § 3 (proposition 3.2).

1.3. DÉFINITION. — *Soit $V \subset (S, ds^2)$ une partie d'une surface riemannienne admissible et $p \in S$ un point de S. On dit que V admet des coordonnées polaires de pôle p s'il existe une application*

$$h : [0,\rho] \times I \to V,$$

où I est soit un cercle $\mathbf{R}/\Theta\mathbf{Z}$, soit un intervalle (ouvert ou fermé), $\rho > 0$ et h est une application continue telle que

a) *$h(r,\theta) = p$ si et seulement si $r = \theta$;*

b) *$h|_{]0,\rho]\times I}$ est un homéomorphisme localement bilipschitzien sur $V - \{p\}$;*

c) *$h^*\,(ds^2) = dr^2 + g^2(r,\theta)\,d\theta^2$ où $g\,]0,\rho] \times I \to \mathbf{R}$ est une fonction telle que $0 < a \leqslant g(r,\theta)/r \leqslant b$ pour tous r, θ (a et b sont des constantes) et $\lim_{r\to 0} g(r,\theta)/r = 1$ pour tout θ.*

Remarquons qu'il n'est pas restrictif de demander à h de vérifier une condition de Lipschitz ; en effet, une isométrie entre deux variétés riemanniennes de classe L^∞ est toujours lipschitzienne (et donc, en particulier, h est presque partout différentiable par le théorème de Rademacher, cf. [F], th. 3.1.6, p. 216).

Soit $V \subset (S, ds^2)$ admettant des coordonnées polaires (r,θ) de pôle p, et soit $q = h(r_1, \theta_1) \in V$.

1.4. LEMME. — *L'unique géodésique reliant p à q est la courbe $\theta \equiv \theta_1$.*

Preuve. — Rappelons d'abord qu'une courbe $\gamma(t) = h(r(t),\theta(t))$ est une géodésique si et seulement si elle minimise la distance entre deux points assez proches. Observons que la courbe $\lambda(t) := h(tr_1,\theta_1)$ est l'unique courbe minimisant la longueur entre p et q : En effet,

$$\text{long}\,(\lambda) = \int_\lambda ds = r_1,$$

et donc $d(p,q) \leqslant r_1$. D'autre part, si $\gamma(t) = h(r(t),\theta(t))\ (0 \leqslant t \leqslant 1)$ relie p à q, alors $r(1) = r_1$ et

$$\text{long}\,(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{\dot{r}^2 + g^2\dot{\theta}^2}\, dt \geqslant \int_0^1 |\dot{r}|\, dt \geqslant \left| \int_0^1 \dot{r}\, dt \right| = r_1,$$

avec égalité si et seulement si $\dot{\theta} \equiv 0$. Donc $d(p,q) \geqslant r_1$ et λ est l'unique courbe minimisante.

Soit maintenant $\gamma(t) = h(r(t),\theta(t))\ (0 \leqslant t \leqslant 1)$ une géodésique quelconque reliant p à q. Par définition, il existe un voisinage de $t = 0$ sur lequel γ est minimisante. Sur ce voisinage, $\theta(t)$ est constante. Par la proposition de l'appendice, $\theta(t)$ est constante sur $[0,1]$. □

1.5. COROLLAIRE (unicité des coordonnées polaires). — *Soit $V \subset (S,ds^2)$ une partie d'une surface riemannienne admissible admettant des coordonnées polaires de pôle p. Soient $h : [0,\rho] \times I \to V$ et $h' : [0,\rho'] \times I' \to V$ deux applications vérifiant les conditions* a), b) *et* c) *de la définition* 1.3.

Alors $\rho = \rho'$ et il existe θ_0 tel que $h(r,\theta) = h'(r,\theta_0 \pm \theta)$; en particulier, I et I' ont même longueur.

Preuve. — Le lemme 1.4 entraîne que, pour tout $q \in V$, si

$$q = h(r,\theta) = h'(r',\theta'),$$

alors $r = r'$. D'autre part, $ds^2 = dr^2 + g^2\, d\theta^2 = dr'^2 + g'^2\, d\theta'^2$, donc $g\, d\theta = \pm\, g\, d\theta'$.

Par conséquent, la forme $\left(\frac{g}{g'}\right) d\theta = \pm\, d\theta'$ est fermée, et donc, $\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{g}{g'}\right) = 0$.

En outre, $\left(\frac{g}{g'}\right) = \left(\frac{g/r}{g'/r'}\right) \to 1$ lorsque $r \to 0$. Donc $g = g'$ et $d\theta = \pm\, d\theta'$. □

Nous concluons ce paragraphe sur une remarque concernant la différentiabilité des géodésiques :

1.6. LEMME. — *Soit* $ds^2 = e^{2u}|dz|^2$ *une métrique conforme sur un ouvert* $\Omega \subset \mathbf{C}$ *dont la courbure est de classe* L^p *pour un* $p > 2$.

Alors les géodésiques sont de classes C^2 *(après reparamétrisation éventuelle).*

Preuve. — Par la proposition 1.2, la métrique ds^2 est de classe C^1. Si $\gamma : [0,1] \to \Omega$ est une géodésique paramétrisée par la longueur d'arc, alors γ est un point critique pour la fonctionnelle énergie :

$$E(\gamma) := \int_0^1 e^{2u}|\dot{z}|^2\, dt.$$

La fonction u étant C^1, cette fonctionnelle est régulière. En particulier, $\gamma(t) = z(t)$ satisfait à l'équation d'Euler-Lagrange :

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(e^{2u}|\dot{z}|^2) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{\bar{z}}}(e^{2u}|\dot{z}|^2)\right).$$

Donc

$$2e^{2u}|\dot{z}|^2 \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = e^{2u}\ddot{z} + 2e^{2u}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\dot{z} + \frac{\partial u}{\partial \bar{z}}\dot{\bar{z}}\right)\dot{z}.$$

D'où il suit

$$\ddot{z} = -2\frac{\partial u}{\partial z}\dot{z}^2. \tag{1.7}$$

Comme $\dfrac{\partial u}{\partial z}$ est continue, (1.7) entraîne que $z(t)$ est C^2. □

2. Coordonnées polaires en un point d'ordre 0.

Dans ce paragraphe, nous démontrons le

2.1. THÉORÈME. — *Soit* (S, ds^2) *une surface riemannienne admissible dont la courbure est bornée* $(K \in L^\infty)$. *Alors tout point* p *d'ordre* 0 *possède un voisinage* V *admettant des coordonnées polaires*

$$h : [0,\rho] \times \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z} \to V$$

de pôle p.

Un résultat analogue a déjà été obtenu par Philip Hartman en 1951 (cf. [H1], [HW]).

Le résultat ci-dessus est en un sens le meilleur possible. Il existe en effet pour tout $q < \infty$ une métrique admissible dont la courbure est de classe L^q et pour laquelle il existe un point n'admettant de coordonnées polaires dans aucun voisinage. P. Hartman a donné l'exemple suivant : $ds^2 = (1+|y|^\lambda)(dx^2+dy^2)$ qui est une métrique admissible sur le plan si $\lambda > 1$. Si $2 - 2/q < \lambda < 2$, alors la courbure

$$K = \frac{\lambda}{2}\left(\frac{|y|^{2\lambda-2}-(\lambda-1)|y|^{\lambda-2}}{(1+|y|^\lambda)^3}\right)$$

est de classe L^q_{loc}. Or, aucun voisinage de 0 n'admet de coordonnées polaires (cf. [H1], [HW]).

La démonstration du théorème 2.1 repose sur deux lemmes. Faisons quelques remarques avant de les énoncer. Nous pouvons supposer que $S = D := \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$ et que $ds^2 = e^{2u}|dz|^2$ où u est une fonction $C^{1,\alpha}$ sur le disque (par la proposition 1.2). Vu la nature locale du problème, on peut se ramener au cas où la courbure K de ds^2 est à support compact dans le disque. On a alors par la formule de Riesz

$$(2.2) \qquad u(z) = u_0(z) + \frac{1}{2\pi}\int\int_D \log|z-\zeta| K(\zeta)e^{2u(\zeta)}\, d\lambda(\zeta)$$

où u_0 est une fonction harmonique car $\Delta u = Ke^{2u}$ (on a représenté par $d\lambda$ la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{C}$).

Avec u et u_0 comme ci-dessus, on a le

2.3. LEMME. — *Soit $\{F_n\}$ une suite de fonctions sur le disque unité D. Supposons F_n de classe C^1, uniformément bornées et convergeant au sens L^p vers K (pour un certain $p > 1$).*

Définissons $v_n : D \to \mathbf{R}$ par

$$v_n(z) = u_0(z) + \frac{1}{2\pi}\int\int_D \log|z-\zeta| F_n(\zeta)e^{2u(\zeta)}\, d\lambda(\zeta).$$

Alors la suite $\{v_n\}$ converge uniformément vers la fonction u.

De plus, la métrique $e^{2v_n}|dz|^2$ est de classe C^2 et sa courbure

$$K_n = e^{-2v_n}\Delta v_n = F_n e^{2(u-v_n)}$$

est uniformément bornée (en n).

Preuve. — On a pour tout $z \in D$:

$$|v_n(z) - u(z)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \sup (e^{2u}) \, \|F_n - K\|_{L^p(D)} \| \log |z - \zeta| \, \|_{L^q(D)}$$

où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, donc $v_n \to u$ uniformément.

La dernière assertion est immédiate (en utilisant 1.2). □

2.4. Lemme. — *Soit* $ds_0^2 = e^{2v}|dz|^2$ *une métrique de classe* C^2 *sur* $\mathbf{C}$ *dont la courbure est bornée :* $|K| \leqslant c$. *Supposons* $v(0) = 0$.

Soit $W := \{w \in T_0\mathbf{C} : |w| < \pi/\sqrt{c}\} \subset T_0\mathbf{C}$, *alors*

i) *la restriction à* W *de l'exponentielle est un difféomorphisme tel que* $\|d \exp\| \leqslant 4 \sup (e^{-v})$;

ii) *l'application* $\exp : W \to (\mathbf{C}, ds_0^2)$ *est dilatante lorsque* W *est muni de la métrique*

$$d\sigma_1^2 := \frac{4|dw|^2}{(1 + c|w|^2)^2},$$

et contractante lorsque W *est muni de la métrique*

$$d\sigma_2^2 := \frac{4|dw|^2}{(1 - c|w|^2)^2}.$$

Preuve. — Identifions $T_0\mathbf{C}$ à $\mathbf{C}$, et notons (r,θ) les coordonnées polaires de $T_0\mathbf{C}$ pour la métrique usuelle (en sorte que $w = re^{i\theta}$).

Montrons d'abord la seconde assertion du lemme : Soit $d\sigma_0^2 := \exp^*(ds_0^2) = dr^2 + g_0^2 \, d\theta^2$, alors on a

$$\frac{\partial^2 g_0}{\partial r^2} + \tilde{K} g_0 = 0$$

(où $\tilde{K} := K \circ \exp$ est la courbure de $d\sigma_0^2$). Donc, par le théorème de comparaison de Sturm (cf. [H2]), on a

$$(2.5) \quad g_1(r) := \frac{\sin(\sqrt{c}r)}{\sqrt{c}} \leqslant g_0(r,\theta) \leqslant g_2(r) := \frac{\operatorname{sh}(\sqrt{c}r)}{\sqrt{c}}.$$

L'assertion ii) découle immédiatement des inégalités ci-dessus et du fait qu'en coordonnées polaires, on a $d\sigma_i^2 = dr^2 + g_i^2 \, d\theta^2 \; (i = 1,2)$.

Passons à la première assertion. On doit montrer que si

$$d\exp\left(\alpha\frac{\partial}{\partial r}+\beta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)=\gamma\frac{\partial}{\partial x}+\delta\frac{\partial}{\partial y},$$

alors

$$\sqrt{\gamma^2+\delta^2}\leqslant 4\sup(e^{-v})\sqrt{\alpha^2+\beta^2}.$$

Comme $\exp:(W,d\sigma_0^2)\to(\mathbf{C},ds_0^2)$ est une isométrie, on a

$$\left\|\left(\alpha\frac{\partial}{\partial r}+\beta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\right\|_{ds_0}=\left\|\left(\gamma\frac{\partial}{\partial x}+\delta\frac{\partial}{\partial y}\right)\right\|_{ds_0}.$$

Donc

$$\left(\alpha^2+\frac{g_0(r,\theta)^2}{r^2}\beta^2\right)=e^{2v}(\gamma^2+\delta^2).$$

On a par ailleurs, pour $0<r<\pi/\sqrt{c}$,

$$\frac{g_0(r,\theta)^2}{r^2}\leqslant\frac{\mathrm{sh}^2(\sqrt{c}r)}{cr^2}\leqslant\frac{\mathrm{sh}^2(\pi)}{\pi^2}\approx 13.6,$$

donc

$$(\gamma^2+\delta^2)\leqslant\sup(e^{-2v})\left(\alpha^2+\frac{\mathrm{sh}^2(\pi)}{\pi^2}\beta^2\right)\leqslant 4^2\sup(e^{-2v})(\alpha^2+\beta^2).$$

□

Démonstration du théorème 2.1. — La métrique étudiée est $ds^2=e^{2u}|dz|^2$ où u est une fonction sur le disque unité vérifiant (2.2). Soit F_n une suite de fonctions de classes C^1 sur le disque, qui sont uniformément bornées et qui convergent vers K au sens L^p (pour un certain $p\in\,]1,\infty[$). On considère la suite de métriques $ds_n^2:=e^{2v_n}|dz|^2$ où v_n est défini par

$$v_n(z):=u_0(z)+\frac{1}{2\pi}\int\int_D\log|z-\zeta|F_n(\zeta)e^{2u(\zeta)}\,d\lambda(\zeta).$$

Le lemme (2.3) entraîne que la courbure de ds_n^2 est uniformément bornée (disons $K_n\leqslant c$), et que v_n converge uniformément vers u.

Le lemme (2.4) implique que sur $W:=\{w\in T_0\mathbf{C}:|w|<\pi/\sqrt{c}\}$, l'application $\exp_n$ est bijective et $d\exp_n$ est uniformément bornée (où $\exp_n$ est l'exponentielle au point 0 pour la métrique ds_n^2).

Par le théorème d'Ascoli, on peut donc extraire de $\{\exp_n\}$ une sous-suite uniformément convergente. On supposera donc que $\{\exp_n\}$ converge et on notera exp la limite.

Le lemme (2.4 ii) nous dit (en passant à la limite) que exp est contractante lorsque W est muni de la métrique $d\sigma_1^2$ et dilatante lorsque W est muni de la métrique $d\sigma_2^2$, donc exp est un homéomorphisme bilipschitzien.

De plus, $\exp_n$ est une isométrie sur les rayons $\theta = \text{cte}$, donc exp a la même propriété. En outre, $d\exp$ est défini presque partout et $d\exp(dr)$ et $d\exp(d\theta)$ sont orthogonaux pour la métrique ds^2 (lemme de Gauss).

Donc il existe une fonction $g(r,\theta)$ telle que

$$\exp^*(ds^2) = dr^2 + g^2\, d\theta^2$$

et les inégalités (2.5) nous disent que $\lim_{r\to 0} g(r,\theta)/r = 1$.

Ainsi la fonction $h\colon\ [0,\pi/\sqrt{c}] \times \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z} \to V$ définie par $h(r,\theta) := \exp(re^{i\theta})$ vérifie les conditions a), b) et c) de la définition 1.3. $\square$

Le théorème 2.1 nous dit qu'en chaque point d'une surface riemanienne admissible à courbure bornée, l'application exponentielle est bien définie. La proposition suivante nous dit que cette application est différentiable en 0.

2.6. PROPOSITION. — *Soit $ds^2 = e^{2u}|dz|^2$ une métrique conforme dont la courbure est bornée sur un ouvert $\Omega \ni 0$ de $\mathbf{C}$.*

Soit $V \subset T_0\Omega$ un voisinage de 0 où l'application

$$\exp\colon V \to \Omega$$

est définie.

Alors exp *est régulière en* 0.

(Une application est régulière en un point si elle est différentiable en ce point et si sa différentielle est inversible.)

Démonstration. — Soient (r,θ) les coordonnées polaires sur V pour la métrique ds^2. On a donc $ds^2 = dr^2 + g^2(r,\theta)\, d\theta^2$ où $g(r,\theta)$ vérifie $g(0,\theta) = 0$, $\dfrac{\partial g}{\partial r}(0,\theta) = 1$ et $\dfrac{\partial^2 g}{\partial r^2} = -Kg$ (presque partout).

Définissons $f(r,\theta)$ par $g = r + f$, alors f vérifie

$$(2.6) \qquad f(0,\theta) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial r}(0,\theta) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \in L^\infty.$$

D'où l'on déduit

$$(2.7) \qquad |f(r,\theta)| \leqslant Cr^2,$$

pour une certaine constante C. Définissons également

$$\mu(r,\theta) := -e^{2i\theta}\frac{f(r,\theta)}{2r+f(r,\theta)} \quad \text{et} \quad \lambda(r,\theta) = \left(1+\frac{1}{2r}f(r,\theta)\right)^2$$

et posons $w := re^{i\theta}$. Un calcul montre que

$$ds^2 = dr^2 + g^2\,d\theta^2 = \lambda|dw+\mu\,d\bar{w}|^2.$$

On a ainsi $\lambda|dw+\mu\,d\bar{w}|^2 = e^{2u}|dz|^2$, l'application $z = \exp(w)$ est donc μ-quasi-conforme.

D'autre part, (2.7) montre que $|w|^{-2}\mu$ est intégrable au voisinage de 0, le théorème 7.1 page 233 de [LV] entraîne alors que exp est régulière en 0. □

Rappelons (lemme 1.6) que les géodésiques sont des courbes différentiables, le résultat suivant nous dit que toute direction définit une unique géodésique :

2.8. Corollaire. — *Soit $ds^2 = e^{2u}|dz|^2$ une métrique conforme dont la courbure est bornée sur un ouvert $\Omega \ni 0$ de $\mathbf{C}$.*

Pour tout point $p \in \Omega$ et tout vecteur $\xi \in T_0\Omega$, il existe une géodésique $\gamma : [0,\varepsilon] \to \Omega$ telle que $\gamma(0) = p$ et $\dot\gamma(0) = \xi$. Cette géodésique est unique à reparamétrisation près.

Preuve. — Soit $\xi \in T_0\Omega$, par la proposition 2.6, il existe un unique vecteur $\eta = T_0(T_0\Omega)$ tel que $d\exp_0(\eta) = \xi$. La géodésique $\lambda : t \to \exp_p(t\eta)$ vérifie la condition voulue.

Réciproquement, le théorème 2.1 avec le lemme 1.4 nous dit que toute géodésique $\gamma : [0,1] \to \Omega$ coïncide au voisinage de 0 (à reparamétrisation près) avec un « rayon » $\lambda : t \to \exp_p(t\eta)$. □

Au cours du paragraphe suivant, nous aurons besoin du résultat ci-dessous, qui généralise le théorème (2.1) au cas des secteurs. (Par abus de langage, on dira quelquefois qu'une partie $G \in (S,ds^2)$ admet des coordonnées polaires de pôle p si $p \in G$ et s'il existe $V \subset S$ tel que $G \subset V$ et V admet des coordonnées polaires de pôle p au sens de la définition 1.3).

2.9. THÉORÈME. — *Soit* $ds^2 = e^{2v}|dz|^2$ *une métrique conforme de classe* C^1 *et à courbure bornée définie sur le secteur* $G := \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1$ *et* $-\varphi < \arg(z) < \varphi\}$. *Supposons que* $u(z) = O(|z|^2)$ *et* $\frac{\partial u}{\partial x} = O(|z|)$, $\frac{\partial u}{\partial y} = O(|z|)$.

Alors, pour tout $\varepsilon \in]0, \varphi/2[$, *il existe* $\eta > 0$ *tel que le secteur* $G_{\varepsilon,\eta} := \{z \in \mathbf{C} : |z| < \eta$ *et* $\varepsilon - \varphi < \arg(z) < \varphi - \varepsilon\}$ *admet des coordonnées polaires de pôle* 0 *pour la métrique* ds^2.

Preuve. — Nous allons construire une métrique sur le disque unité qui coïncidera avec ds^2 sur $G_{\varepsilon,\eta}$. Donnons-nous pour cela une fonction $\mu : [-\varphi, \varphi] \to \mathbf{R}$ telle que $\mu \in C^\infty$ et

$$\mu(\theta) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \theta < \varepsilon/4 - \varphi \quad \text{ou si} \quad \theta > \varphi - \varepsilon/4 \\ 1 & \text{si} \quad \varepsilon - \varphi < \theta < \varphi - \varepsilon . \end{cases}$$

Définissons à présent la métrique ds_1^2 sur $D_\eta := \{z : |z| < \eta\}$ par

$$ds_1^2 = \begin{cases} e^{2u_1(z)}|dz|^2 & \text{si} \quad -\varphi < \arg(z) < \varphi, \\ |dz|^2 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $u_1 := u(z)\mu(\arg(z))$.

Un calcul montre que les hypothèses sur u entraînent que $\Delta(u_1) = O(1)$, donc la courbure de ds_1^2 est bornée. Le corollaire découle alors du théorème 2.1, puisque $ds^2 = ds_1^2$ sur $G_{\varepsilon,\eta}$. □

3. Coordonnées polaires en un point conique.

Nous démontrons dans ce paragraphe le résultat principal de cet article.

3.1. THÉORÈME. — *Soit* (S, ds^2) *une surface riemannienne admissible dont la courbure est bornée* $(K \in L^\infty)$. *Soit* $p \in S$ *un point conique d'ordre* $\beta > -1$. *Alors* p *possède un voisinage* V *admettant des coordonnées polaires*

$$h : [0, \rho] \times \mathbf{R}/\Theta\mathbf{Z} \to V \quad (\Theta := 2\pi(\beta + 1))$$

de pôle p.

La démonstration de ce théorème repose sur le théorème 2.9, or pour pouvoir utiliser ce résultat, il faut se ramener à une situation où la métrique a un comportement asymptoptique particulier au voisinage de p. Cela peut se faire grâce à la proposition suivante (déjà remarquée par Picard [P]).

3.2. PROPOSITION. — *Soit* (S, ds^2) *une surface admissible ayant en* $p \in S$ *une singularité conique d'ordre* β *et dont la courbure est bornée.*

Alors il existe une coordonnée $z = x + iy$ *définie dans un voisinage de* p *pour laquelle*

$$ds^2 = e^{2u}|z|^{2\beta}|dz|^2,$$

où u *est une fonction continue vérifiant :*

$$(3.3) \quad u(z) = O(|z|^{2\beta+2}); \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = O(|z|^{2\beta+1}), \qquad \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = O(|z|^{2\beta+1}).$$

Nous utiliserons deux lemmes dans la preuve de cette proposition.

3.4. LEMME. — *Soit* $v(z)$ *une fonction harmonique dans un voisinage de* $z = 0$ *et* $\beta \in \mathbf{R} \backslash \mathbb{Z}_-$ *(i.e.* β *est un réel différent d'un entier strictement négatif). Alors il existe une fonction holomorphe non singulière* $w = w(z)$ *définie dans un voisinage de* $z = 0$ *et telle que*

$$|w|^\beta |dw| = e^{v(z)}|z|^\beta |dz|.$$

Preuve. — Il existe une fonction holomorphe $f(z)$ au voisinage de 0 telle que $v(z) = \mathrm{Re}\,(f(z))$. Supposons qu'il existe une fonction holomorphe $h(z)$ telle que $h(0) \neq 0$ et

$$z \cdot h'(z) + (\beta+1)h(z) = e^{f(z)},$$

alors on peut choisir une détermination du logarithme au voisinage de $h(0)$ et poser $w := az \cdot h(z)^{1/\beta+1}$ (où $a := (\beta+1)^{1/(\beta+1)}$). On a alors

$$(\beta+1)\frac{dw}{dz} := ah(z)^{-\beta/(\beta+1)}e^{f(z)},$$

donc $|w|^\beta |dw| = e^{v(z)}|z|^\beta |dz|$.

Il ne reste par conséquent qu'a montrer l'existence de h. Si $e^{f(z)} := \sum a_k z^k$ dans un voisinage de l'origine, alors h est donné par $h(z) = \sum b_k z^k$ où $b_k := a_k/(\beta+1+k)$. □

3.5. LEMME. — *Soient* $\beta > -1$; $0 < s < 2$ *et* $\delta > 0$. *Posons*

$$J(z) := \iint_{|\zeta|<\delta} \frac{|\zeta|^{2\beta}}{|z-\zeta|^s} d\lambda(z).$$

Alors il existe une constante C *(qui peut dépendre de* β *et de* δ, *mais pas de* z*) telle que si* $|z| \leqslant \delta$, *alors*

$$J(z) \leqslant \begin{cases} C\delta^{2+2\beta-s} & \text{si } 2+2\beta-s>0; \\ C|z|^{2+2\beta-s} & \text{si } 2+2\beta-s \leqslant 0. \end{cases}$$

Preuve. — Remarquons d'abord que si $|z| < \delta$, alors

$$\iint_{|\zeta|<\delta} \frac{1}{|z-\zeta|^s} d\lambda(z) \leqslant \iint_{|w|<2\delta} \frac{1}{|w|^s} d\lambda(w) = \frac{2\pi}{2-s}(2\delta)^{2-s}.$$

a) Si $\beta > 0$, alors $2+2\beta-s>0$ et on a

$$J(z) \leqslant \delta^{2\beta} \iint_{|\zeta|<\delta} \frac{1}{|z-\zeta|^s} d\lambda(z) \leqslant \left(\frac{2\pi}{2-s} 2^{2-s}\right) \delta^{2\beta+2-s}.$$

b) Si $\beta < 0$ et $2\beta+2-s>0$, alors on peut choisir p tel que $\frac{2}{2-s} < p < -\frac{1}{\beta}$. Alors $q := \frac{p}{p-1} < \frac{2}{s}$, et on a

$$J(z) \leqslant \left[\iint_{|\zeta|<\delta} |\zeta|^{2p\beta} d\lambda(z)\right]^{1/p} \cdot \left[\iint_{|\zeta|<\delta} \frac{1}{|z-\zeta|^{sq}} d\lambda(z)\right]^{1/q} \leqslant \mathrm{Cte}\,.\,\delta^{2\beta+2-s}.$$

c) Si $2+2\beta-s<0$, on partage $\{\zeta : |\zeta|<\delta\}$ en trois domaines :

$$D_1 : \quad |\zeta| \leqslant 2|z| \quad \text{et} \quad |z-\zeta| \geqslant \frac{1}{2}|z|;$$

$$D_2 : \quad |\zeta| < \delta \quad \text{et} \quad |z-\zeta| \leqslant \frac{1}{2}|z|;$$

$$D_3 : \quad 2|\zeta| \leqslant |\zeta| < \delta.$$

Soit

$$I_k := \iint_{D_k} \frac{|\zeta|^{2\beta}}{|z-\zeta|^s} d\lambda(z) \quad (k=1,2,3).$$

Dans D_1, on a $|z-\zeta| > \frac{1}{2}|z|$, donc

$$I_1 \leqslant \frac{2^s}{|z|^s} \iint_{|\zeta|<2|z|} |\zeta|^{2\beta} d\lambda \leqslant \mathrm{Cte}\,|z|^{2+2\beta-s}.$$

Dans D_2, on a $|\zeta| > \frac{1}{2}|z|$, comme $\beta < 0$, il vient :

$$I_2 \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{2\beta} |z|^{2\beta} \iint_{|z-\zeta|<\frac{1}{2}|z|} \frac{d\lambda}{|z-\zeta|^s} \leqslant \text{Cte}\, |z|^{2+2\beta-s}.$$

Dans D_3, $|z-\zeta| > \frac{1}{2}|\zeta|$, donc

$$I_3 \leqslant 2^s \iint_{2|z|\leqslant 2|\zeta|<\delta} |\zeta|^{2\beta-s}\, d\lambda \leqslant \text{Cte}\, ((2|z|)^{2+2\beta-s} - \delta^{2+2\beta-s}).$$

Ceci achève la preuve du second lemme. □

Preuve de la proposition 3.2. — Vu la nature locale de cette proposition, nous pouvons supposer que S est le disque unité, $p = 0$, et que la courbure K de ds^2 est à support compact. On a donc $ds^2 = e^{2u}|z|^{2\beta}|dz|^2$ où $u(z) = u_0(z) + u_1(z)$ avec u_0 harmonique et

$$u_1(z) = \frac{1}{2\pi} \iint_D \log|z-\zeta| K(\zeta)|\zeta|^{2\beta} e^{2u(\zeta)}\, d\lambda(\zeta).$$

Une dérivation sous le signe d'intégration peut se justifier et on a

$$\frac{\partial u_1}{\partial z}(z) = \frac{1}{4\pi} \iint_D \frac{|\zeta|^{2\beta}}{(z-\zeta)} K(\zeta) e^{2u(\zeta)}\, d\lambda(\zeta), \tag{3.6}$$

ainsi qu'une formule similaire pour $\partial u_1/\partial \bar{z}$.

Remarquons encore que, quitte à dilater la coordonnée z, on peut supposer que $u(0) = 0$.

Cas 1 : $2\beta + 1 < 0$.

Le lemme (3.5), et la formule (3.6) montrent que $\left|\frac{\partial u}{\partial z}\right|$ et $\left|\frac{\partial u}{\partial \bar{z}}\right| \leqslant C|z|^{2\beta+1}$.

On obtient l'estimation sur u par intégration :

$$u(z) = \int_0^1 \frac{du(tz)}{dt} = \int_0^1 \left\{\frac{\partial u(tz)}{\partial z}\cdot z + \frac{\partial u(tz)}{\partial \bar{z}}\cdot \bar{z}\right\} dt,$$

donc $|u(z)| \leqslant C \int_0^1 |tz|^{2\beta+1}.|z|\, dt = O(|z|^{2\beta+2})$.

Cas 2 : $2\beta + 1 > 0$.

Suivant une idée de Lipman-Bers ([B]), nous posons :

$$a_\nu(\zeta) = -\frac{1}{4\pi}\frac{|\zeta|^{2\beta}}{\zeta^{1+\nu}}K(\zeta)e^{2u(\zeta)},$$

en sorte que

$$\frac{1}{4\pi}\frac{|\zeta|^{2\beta}}{z-\zeta}K(\zeta)e^{2u(\zeta)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(\zeta)z^\nu.$$

La convergence de la série ci-dessus est uniforme sur $\{z : |\zeta| \geqslant \delta|z|\}$ pour tout $\delta > 1$.

Soit $\ell \geqslant 0$ le plus grand entier strictement inférieur à $2\beta + 1$. Posons pour $0 \leqslant \nu \leqslant \ell$:

$$A_\nu := \iint_D a_\nu(\zeta)\, d\lambda(\zeta).$$

Notons également

$$Q(z) = \sum_{\nu=0}^{\ell} A_\nu z^\nu; \qquad R_1(z) = \frac{\partial u_1}{\partial z} - Q(z).$$

D'après (3.6), Q est un développement limité de degré ℓ de $\partial u_1/\partial z$ dont le reste est R_1. Nous voulons estimer ce reste, considérons pour cela les intégrales

$$J_1 := \frac{1}{4\pi}\iint_{|\zeta|\leqslant 2|z|}\frac{|\zeta|^{2\beta}}{z-\zeta}K(\zeta)e^{2u(\zeta)}\,d\lambda(\zeta);$$

$$J_1^* := \frac{1}{4\pi}\iint_{|\zeta|\geqslant 2|z|}\frac{|\zeta|^{2\beta}}{z-\zeta}K(\zeta)e^{2u(\zeta)}\,d\lambda(\zeta);$$

$$J_2 := \sum_{\nu=0}^{\ell} z^\nu\left(\iint_{|\zeta|\leqslant 2|z|} a_\nu(\zeta)\,d\lambda(\zeta)\right);$$

$$J_2^* := \sum_{\nu=0}^{\ell} z^\nu\left(\iint_{|\zeta|\geqslant 2|z|} a_\nu(\zeta)\,d\lambda(\zeta)\right);$$

et

$$J_3^* := \sum_{\nu>\ell} z^\nu\left(\iint_{|\zeta|\geqslant 2|z|} a_\nu(\zeta)\,d\lambda(\zeta)\right).$$

On remarque que $\dfrac{\partial u_1}{\partial z} = J_1 + J_1^*$, $Q(z) = J_2 + J_2^*$ et $J_1^* = J_2^* + J_3^*$.

Donc

$$R_1(z) = J_1 - J_2 + J_3^*.$$

Une estimation directe nous donne

$$|J_2| \leqslant \text{Cte}\cdot|z|^{2\beta+1}, \qquad |J_3^*| \leqslant \text{Cte}\cdot|z|^{2\beta+1}.$$

Le lemme (3.5) nous donne $|J_1| \leqslant \text{Cte}\cdot|z|^{2\beta+1}$, on a donc

$$\left|\frac{\partial u_1}{\partial z} - Q(z)\right| = |R_1(z)| \leqslant \text{Cte}.|z|^{2\beta+1}.$$

On montre de même $\left|\dfrac{\partial u_1}{\partial \bar{z}} - \bar{Q}(z)\right| \leqslant \text{Cte}.|z|^{2\beta+1}$.

Posons à présent

$$P(z) := 2\sum_{\nu=0}^{\ell} \frac{1}{\nu+1} A_\nu z^{\nu+1},$$

ainsi que $v(z) := u_1(z) - \operatorname{Re}(P(z))$, et $v'(z) = \operatorname{Re}(P(z)) + u_0(z)$.

Alors $u(z) = v(z) + v'(z)$ où v' est harmonique et v vérifie

$$\frac{\partial v}{\partial z} = O(|z|^{2\beta+1}), \qquad \frac{\partial v}{\partial \bar{z}} = O(|z|^{2\beta+1}).$$

De plus, $v(0) = 0$. Une intégration montre alors (comme dans le cas (1)) que

$$v(z) = O(|z|^{2\beta+2}).$$

En utilisant le lemme (3.4), on voit qu'il existe une transformation holomorphe $w = w(z)$ telle que $w(0) = 0$ et $|w|^\beta|dw| = e^{v'}|z|^\beta|dz|$. On a donc $ds^2 = e^{2u}|z|^{2\beta}|dz|^2 = e^{2v}e^{2v'}|z|^{2\beta}|dz|^2 = e^{2v}|w|^{2\beta}|dw|^2$, où v est une fonction vérifiant (3.3).

Cas 3 : $2\beta + 1 = 0$.

On pose $z = f(w) = \frac{1}{4}w^2$ et $\tilde{u}(w) := u \circ f(w)$. Soit $d\tilde{s}^2 := e^{2\tilde{u}}|dw|^2$. Quitte à faire un changement holomorphe de coordonnée, on peut supposer (en utilisant le cas (2)) que

$$\tilde{u} = O(|w|^2), \qquad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial w} = O(|w|), \qquad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \bar{w}} = O(|w|).$$

On a $d\tilde{s}^2 = f^*(e^{2u}|z|^{-1}|dz|^2) = f^*(ds^2)$, donc $u(z)$ vérifie $u = O(|w|^2) = O(|z|)$ et

$$\left|\frac{\partial u}{\partial z}\right| = \left|\frac{\partial \tilde{u}}{\partial w}\right| \cdot \left|\frac{\partial w}{\partial z}\right| = O(1)$$

(on raisonne de même pour $|\partial u/\partial \bar{z}|$). □

Démonstration du théorème 3.1. — On peut supposer en utilisant la proposition (3.2) que $ds^2 = e^{2v}|w|^{2\beta}|dw|^2$ où $v(w)$ vérifie les conditions (3.3).

La démonstration du théorème s'effectue en se ramenant à une étude par secteur. Considérons pour cela le domaine $D_+ := \{z = x+iy : |z|<1 ; x \geqslant 0\}$, et définissons pour tout $\tau \in [0,2\pi]$, $\Omega_\tau := \{w \in \mathbf{C} : |w|<a ; |\tau - \arg(w)| < \pi/(2\beta+2)\}$ où $a := (\beta+1)^{1/(\beta+1)}$.

Soit ensuite $f_\tau : D_+ \to \Omega_\tau$ l'application définie par $f_\tau(z) := a(\tau)z^{1/(\beta+1)}$ où $a(\tau) := ae^{i\tau} = e^{i\tau}(\beta+1)^{1/(\beta+1)}$.

Notons $u_\tau := v \circ f_\tau :\ D_+ \to \mathbf{R}$, alors $f_\tau^*(ds^2) = e^{2u_\tau}|dz|^2$ (car si $w = f_\tau(z)$, alors $|dz| = |w|^\beta|dw|$).

D'autre part, comme v satisfait (3.3), on a

$$u_\tau = O(|z|^2), \qquad \frac{\partial u_\tau}{\partial z} = O(|z|), \qquad \frac{\partial u_\tau}{\partial \bar{z}} = O(|z|).$$

Le théorème 2.9 nous dit alors qu'un sous-secteur de D_+ admet des coordonnées polaires pour la métrique $e^{2u_\tau}|dz|^2$. Donc, il existe un sous-secteur de Ω_τ admettant des coordonnées polaires pour la métrique $ds^2 = e^{2v}|dw|^2$.

Par unicité des coordonnées polaires (corollaire (1.5)), ces systèmes de coordonnées polaires obtenus dans toutes les directions se recollent pour former un système de coordonnées polaires dans un voisinage de 0. □

4. Régularité des coordonnées polaires.

Passons à l'étude de la régularité des coordonnées polaires. Commençons par un exemple : soit $ds^2 = e^{2u}(dx^2+dy^2)$ une métrique de classe C^1 sur le plan dont la courbure est donnée par :

$$K(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad y \geqslant 0\,; \\ 0 & \text{si} \quad y \leqslant 0\,, \end{cases}$$

et pour laquelle l'axe des x est géodésique.

Alors, en coordonnées polaires, on a $ds^2 = dr^2 + g^2(r,\theta)\,d\theta^2$ où

$$g(r,\theta) = \begin{cases} \sin(r) & \text{si} \quad 0 < \theta < \pi\,; \\ r & \text{si} \quad \pi < \theta < 2\pi\,. \end{cases}$$

Par conséquent, la paramétrisation géodésique polaire $h(r,\theta) = (x,y)$ ne peut pas être de classe C^1 (car si tel était le cas, g serait continue).

(Remarquons que l'on peut prendre ds^2 de classe $C^{1,1}$, par exemple

$$ds^2 = \begin{cases} \dfrac{dx^2+dy^2}{\mathrm{ch}^2(y)} & \text{si} \quad y \geqslant 0\,; \\ dx^2+dy^2 & \text{si} \quad y \leqslant 0\,. \end{cases}$$

le théorème (III) de [HW] contient donc une erreur.)

Si on suppose, en revanche, la courbure continue, alors $g(r,\theta)$ est continue et les coordonnées polaires sont régulières.

4.1. Théorème. — *Soit (S, ds^2) une surface riemannienne admissible dont la courbure K est bornée. Soit p un point conique de S d'ordre $\beta(> -1)$.*

Si K est de classe C^k dans un voisinage de p, alors il existe un voisinage V de p admettant une paramétrisation géodésique polaire

$$h : [0,\rho] \times \mathbf{R}/\Theta\mathbf{Z} \to V \quad (\Theta := 2\pi(\beta+1))$$

de pôle p telle que $h|_{]0,\rho]\times\mathbf{R}/\Theta\mathbf{Z}}$ soit de classe $C^{k+1}(k=0,1,2,\ldots,\infty)$.

Vu les arguments de la démonstration du théorème (3.1) (étude par secteurs etc.), et vu la proposition (3.2), il est clairement suffisant de démontrer le théorème (4.1) dans le cas où p est un point d'ordre 0 et $ds^2 = e^{2u}(dx^2+dy^2)$ avec u de classe C^1. De plus, il suffit de démontrer la différentiabilité des coordonnées polaires dans un petit secteur encadrant (par exemple) une partie de l'axe des x.

Soit donc $ds^2 = e^{2u}(dx^2+dy^2)$ une métrique de classe C^1 sur le disque unité $D := \{(x,y) : x^2+y^2<1\}$ dont la courbure $K(x,y) \in L^\infty$. Soit $h : [0,\rho] \times \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z} \to D$ une paramétrisation géodésique polaire, et $h^*(ds^2) = dr^2 + g^2(r,\theta)\,d\theta^2$. Rappelons que h est localement bilipschitzienne, en particulier, h^{-1} définit deux formes de classes L^∞_{loc} sur $D - \{0\} : dr$ et $d\theta$. Rappelons aussi (lemme 1.6) que les géodésiques sont des courbes de classe C^2.

4.2. Lemme. — *Il existe un secteur* $G = \{(x,y) : |y| \leqslant mx\,;\ x^2+y^2<\eta\} \subset D$ *dans lequel on a*

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-u}(1+p^2)^{-1/2} & -pq \\ e^{-u}(1+p^2)^{-1/2}p & q \end{pmatrix}$$

où $p := (\partial y/\partial r)(\partial x/\partial r)^{-1}$ *est la pente en* (x,y) *du rayon géodésique* $r \to (x(r),y(r))$ *passant par* 0 *et* (x,y), *et* $q := \partial y/\partial \theta$.

Preuve. — Ces relations sont des conséquences algébriques de l'équation

$$e^{2u}(dx^2+dy^2) = dr^2 + g^2\, d\theta^2. \qquad \square$$

4.3. Lemme. — *Supposons que* $K(x,y)$ *et* h *soient de classe* $C^k (0 \leqslant k \leqslant \infty)$. *Alors* $\partial g/\partial r$ *est de classe* C^k.

Preuve. — Les hypothèses entraînent que K est de classe C^k par rapport à (r,θ). D'autre part, la fonction g est donnée par

$$\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + K(r,\theta) g = 0, \qquad g(0,\theta) = 0, \qquad \frac{\partial g}{\partial r}(0,\theta) = 1.$$

On peut donc appliquer le théorème de dépendence C^k des solutions d'une équation différentielle par rapport à un paramètre (cf. [H2], chap. V, corollaire 4.1). $\square$

4.4. Lemme. — *Soit* $G = \{(x,y) : |y| \leqslant mx\,;\ x^2+y^2<\eta\} \subset D$ *un secteur assez petit pour que les rayons géodésiques* $(x(r,\theta),y(r,\theta))$ *contenus dans ce secteur soient donnés par des graphes*

$$y = y(x,\theta).$$

Posons $p := (\partial y/\partial r)(\partial x/\partial r)^{-1}$ *et* $q := \partial y/\partial \theta$. *Alors* $(y(x,\theta), p(x,\theta), q(x,\theta))$ *est solution du système*

$$(4.5) \qquad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = p\,; \\[2mm] \dfrac{dp}{dx} = (1+p^2)\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} - p\dfrac{\partial u}{\partial x}\right); \\[2mm] \dfrac{dq}{dx} = -\, q(1+p^2)\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) + (1+p^2)\left(\dfrac{\partial g}{\partial r}\right), \end{cases}$$

avec condition initiale $(y,p,q) = (0, \operatorname{tg}(\theta), 0)$ *en* $x = 0$.

Preuve. — La première équation est évidente.

Soit $t \to (x(t), y(t))$ une géodésique (paramétrée par la longueur) pour la métrique $ds^2 = e^{2u}|dz|^2$. On a vu (lemme 1.6) que $(x(t), y(t))$ est de classe C^2 et vérifie l'équation (1.7) :

$$\ddot{x} + i\ddot{y} = -\left(\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}\right)(\dot{x}^2 - \dot{y}^2 + 2i\dot{x}\dot{y}).$$

Si $\dot{x}$ ne s'annule pas, on peut poser $p = \dot{y}/\dot{x}$. Multiplions l'équation ci-dessus par $(1-ip)/\dot{x}^2$ et prenons la partie imaginaire ; il vient

$$\frac{\ddot{y} - p\ddot{x}}{\dot{x}^2} = (1+p^2)\left(\frac{\partial u}{\partial y} - p\frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

cela montre la seconde équation puisque $\dfrac{dp}{dx} = \dfrac{\ddot{y} - p\ddot{x}}{\dot{x}^2}$.

Pour montrer la troisième équation, on remarque tout d'abord qu'il découle du lemme (4.2) que

$$\begin{cases} dr = e^u(1+p^2)^{-1/2}(dx + p\,dy)\,; \\ d\theta = \dfrac{1}{q}(dy - p\,dx). \end{cases}$$

Donc, en résolvant en g l'identité $e^{2u}(dx^2 + dy^2) = dr^2 + g^2\,d\theta^2$, on obtient

$$g = qe^u(1+p^2)^{-1/2}.$$

D'autre part, on a

$$\frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} + p\frac{\partial}{\partial y} = e^u(1+p^2)^{1/2}\frac{\partial}{\partial r}.$$

Donc

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial r}(qe^u(1+p^2)^{-1/2}) \\ &= e^u(1+p^2)^{-1/2}\frac{\partial q}{\partial r} + qe^u(1+p^2)^{-1/2}\frac{\partial u}{\partial r} - qe^u(1+p^2)^{-3/2}p\frac{\partial p}{\partial r},\end{aligned}$$

ainsi,

$$(1+p^2)\frac{\partial g}{\partial r} = \frac{dq}{dx} + q\frac{du}{dx} - \frac{qp}{1+p^2}\frac{dp}{dx}.$$

La seconde équation nous dit

$$\frac{dp}{dx} = (1+p^2)\left(\frac{\partial u}{\partial y} - p\frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

et par ailleurs

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + p\,\frac{\partial u}{\partial y},$$

ce qui nous donne

$$(1+p^2)\,\frac{\partial g}{\partial r} = \frac{dq}{dx} + q(1+p^2)\,\frac{\partial u}{\partial x}. \qquad \square$$

Preuve du théorème 4.1. — Comme nous l'avons déjà mentionné, il suffit de démontrer ce théorème dans le cas d'un point d'ordre 0.

Soit donc $ds^2 = e^{2u}(dx^2+dy^2)$ une métrique admissible dont la courbure K est de classe C^0. Soit $G = \{(x,y) : |y| \leqslant mx;\ x^2+y^2<\eta^2\}$ un secteur assez petit pour être contenu dans un domaine paramétré par des coordonnées polaires de pôle (0,0) et pour que les lemmes (4.2) et (4.3) soient vérifiés.

Alors le système (4.5) possède une unique solution (y,p,q) de condition initiale $(0,\mathrm{tg}(\theta),0)$ définie pour $0 \leqslant x \leqslant \eta_1$ si η_1 est assez petit et $|\mathrm{tg}(\theta)| \leqslant m/2$.

(En effet, par le corollaire 2.8, il existe une unique géodésique (reparamétrée) $y(x)$ telle que $y(0)=0$ et $dy/dx(0)=\mathrm{tg}(\theta)$. Il existe donc une unique solution (y,p) au sous-système formé par les deux premières équations de (4.5). L'unicité s'étend à la dernière équation, car celle-ci est linéaire. On choisit η_1 assez petit pour que les solutions ne sortent pas de G.)

D'autre part, le lemme (4.3) entraîne que $\partial g/\partial r$ est continue ; et la proposition (1.2) nous dit que $\partial u/\partial x$ et $\partial u/\partial y$ sont continues. Le second membre de (4.5) est donc continu et on peut appliquer le théorème 2.1 chap. V de [H2] qui nous dit que (y,p,q) dépend continûment de la condition initiale $(0,\mathrm{tg}(\theta),0)$.

Ainsi donc, $p(x,\theta)$ et $q(x,\theta)$ sont des fonctions continues (que l'on peut voir comme fonctions continues de (x,y)). Par le lemme (4.2), ceci implique que $(x,y) = h(r,\theta)$ est un difféomorphisme C^1 sur $G_1\backslash\{(0,0)\} = \left\{(x,y) : |y| < \frac{m}{2}x, 0<x<\eta_1\right\}$. On a donc montré que si K est continue, alors h est C^1 sur un voisinage de 0.

Supposons à présent que $K \in C^k$ $k \geqslant 1$, alors en particulier $K \in C^{k-1}$ et on peut supposer démontré (par induction) que $h \in C^k$.

Par la proposition (1.2) et le lemme (4.2), le second membre de (4.5) est alors de classe C^k. La solution (y,p,q) de ce système dépend donc de façon C^k de sa condition initiale $(0,\operatorname{tg}(\theta),0)$. Le lemme (4.2) entraîne alors que h est un difféomorphisme de classe C^{k+1}. □

Appendice : Sur les coordonnées géodésiques.

Un système de coordonnées (x,y) sur un ouvert V d'une surface riemannienne admissible (S, ds^2) est dit *géodésique* si la métrique s'écrit sur V :

$$ds_0^2 = dx^2 + f(x,y)\, dy^2,$$

où $f(x,y)$ est une fonction vérifiant $0 < a_1 \leqslant f(x,y) \leqslant a_2$ (a_1 et a_2 étant des constantes).

Il est facile de voir que les courbes $y = $ cte sont des géodésiques minimisantes. Nous appellerons ces géodésiques « horizontales ». Nous nous proposons de démontrer la proposition suivante :

PROPOSITION. — *Si* $\gamma : [0,1] \to V$ *est une géodésique et si* γ *est horizontale sur* $[0,\varepsilon] (\varepsilon > 0)$, *alors* γ *est horizontale sur* $[0,1]$.

Démonstration. — Soit τ le suprémum des ε pour lesquels γ est horizontale sur $[0,\varepsilon]$. Montrons que $\tau < 1$ entraîne une contradiction :

Supposons pour simplifier que $o := (0,0)$ et $p := (-1,0) \in V$ et que $\gamma(\tau) = o$, $\gamma(0) = p$.

Notons $\gamma(t) = (x(t), y(t))$; l'hypothèse est que $y(t) = 0$ pour $0 \leqslant t \leqslant \varepsilon$ et qu'il existe une suite $t_j > \tau$ telle que $t_j \to \tau$ et $y(t_j) \neq 0\ \forall j$. Nous noterons $q_j = \gamma(t_j) = (x(t_j), y(t_j))$.

Introduisons les métriques auxiliaires

$$ds_1^2 = dx^2 + a_1^2\, dy^2, \qquad ds_2^2 = dx^2 + a_2^2\, dy^2,$$

observons que

$$ds_1^2 \leqslant ds_0^2 \leqslant ds_2^2.$$

Notons $d_i((x,y),(x',y')$ la distance entre deux points pour la métrique ds_i^2. Les métriques ds_1^2 et ds_2^2 sont euclidiennes et l'on a

$$d_i((x,y),(x',y')) = \sqrt{(x-x')^2 + a_i^2(y-y')^2}, \qquad i = 1, 2.$$

On ne perd pas de généralité en supposant que γ est minimisante, en particulier on peut supposer que

$$d_0(p,q_j) = d_0(p,o) + d_0(o,q_j).$$

Nous avons d'autre part

$$\begin{aligned} d_0(p,q_j) &\leqslant d_2(p,q_j) = \sqrt{(x(t_j)+1)^2 + a_2^2 y(t_j)^2}, \\ d_0(p,o) &= 1, \\ d_0(o,q_j) &\geqslant d_1(o,q_j) = \sqrt{x(t_j)^2 + a_1^2 y(t_j)^2}, \end{aligned}$$

D'où l'inégalité suivante :

$$1 + \sqrt{x(t_j)^2 + a_1^2 y(t_j)^2} \leqslant \sqrt{(x(t_j)+1)^2 + a_2^2 y(t_j)^2}.$$

Un calcul montre que cette inégalité entraîne

$$a_1^2 y(t_j)^2 \leqslant 2cx(t_j)y(t_j)^2 + c^2 y(t_j)^4$$

où $c := \frac{1}{2}(a_2^2 - a_1^2) > 0$. Comme $y(t_j) \neq 0$ pour tout j, on obtient

$$a_1^2 \leqslant 2cx(t_j) + c^2 y(t_j)^2.$$

Lorsque $j \to \infty$, on a $(x(t_j), y(t_j)) \to (0,0)$, ce qui entraîne une contradiction puisque $a_1 > 0$. □

BIBLIOGRAPHIE

[B] L. Bers, Local solution of General Linear Elliptic Equation, Comm. Pure Appl. Math., VIII (1955), 473-496.

[F] H. Federer, Geometric Measure Theory, Springer, 1969.

[GT] D. Gilbarg and N. S. Trudinger, Elliptic Partial Differential Equation of Second Order, Springer Verlag, New York, 1977.

[H1] P. Hartman, On the local uniqueness of geodesics, Amer. Jour. Math., 72 (1950), 723-730.

[H2] P. HARTMAN, Ordinary Differential Equations, second edition, Birkhaüser, 1982.

[HT] D. HULIN et M. TROYANOV, Prescribing curvature on open surfaces, preprint (1990).

[HW] P. HARTMAN and A. WINTNER, On the problem of geodesics in the small, Amer. Jour. Math., 73 (1951), 132-148.

[LV] O. LEHTO et K. VIRTANEN, Quasiconformal Mappings in the Plane, Springer Verlag, New York, 1973.

[P] E. PICARD, De l'intégration de l'équation $\Delta u = e^u$ sur une surface de Riemann fermée, Journal de Crelle, 130 (1905), 243-258.

[T] M. TROYANOV, Prescribing curvature on compact surfaces with conical singularities, Trans. A.M.S. (to appear).

Manuscrit reçu le 17 mai 1990.

Marc TROYANOV,

Dept. of Mathematics
University of Utah 233 JWB
Salt Lake City, Utah 84112 (USA).