

ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

AHMED JEDDI

Singularité réelle isolée

Annales de l'institut Fourier, tome 41, n° 1 (1991), p. 87-116

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1991__41_1_87_0

© Annales de l'institut Fourier, 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SINGULARITÉ RÉELLE ISOLÉE

par Ahmed JEDDI

Le plan de cet article est le suivant :

1. *Introduction et énoncé des deux résultats principaux.*
2. *Quelques propriétés du module des développements asymptotiques. Démonstration du théorème 1.1.*
3. *Démonstration du théorème 1.3.*
4. *Exemples.*

Remerciements. Je voudrais remercier le Professeur D. Barlet pour toutes les discussions que nous avons eues pendant ses missions à l'université Cadi Ayyad (Marrakech) et le Département de Mathématiques de Nancy I pour son hospitalité. Je remercie également le referee pour ses critiques constructives.

1. Introduction et énoncé des deux résultats principaux.

Soit un germe de fonction analytique réelle $f : (\mathbf{R}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbf{R}, 0)$, ($n \geq 1$), à singularité isolée en 0 dans \mathbf{R}^{n+1} , c'est-à-dire que dans un voisinage de 0 on a $df(x) = 0$ équivaut à $x = 0$.

Mots-clés : Développement asymptotique - Monodromie - Singularité.
Classification A.M.S. : 32S05 - 26E05 - 14B15.

Notons par $f : (\mathbf{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbf{C}, 0)$ le complexifié de ce germe. D'après J. Milnor (voir [11]) on a une fibration qui s'obtient en prenant $\overline{B}_\varepsilon \cap f^{-1}(\overline{D})$ où $B_\varepsilon = \{z \in \mathbf{C}^{n+1} \mid \|z\| < \varepsilon\}$ et $D = \{s \in \mathbf{C} \mid |s| < \eta\}$, avec $0 < \eta \ll \varepsilon \ll 1$. La situation topologique ainsi obtenue est indépendante de ε et η . Posons $X = B_\varepsilon \cap f^{-1}(D)$, on a ainsi un représentant de Milnor $f : X \rightarrow D$, qui vérifie (voir aussi l'article de D. Barlet [4]) :

1) X est de Stein contractible.

2) $f : X \setminus f^{-1}(0) \rightarrow D^* = D - \{0\}$ induit une fibration C^∞ localement triviale.

3) Soit $s_0 \in D - \{0\}$ un point base, la fibre type $X(s_0) = f^{-1}(s_0)$ (dite fibre de Milnor) vérifie : $\dim_{\mathbf{C}} H^p(X(s_0), \mathbf{C}) < +\infty, \forall p \geq 0$.

Notons par $X_{\mathbf{R}} = X \cap \mathbf{R}^{n+1}$ la boule de Milnor réelle, et notons $X_{\mathbf{R}}(t) = X_{\mathbf{R}} \cap X(t)$ pour tout $t \in \mathbf{R} \cap D$. Deux cas peuvent se présenter :

(I) $X_{\mathbf{R}}(0) = \{0\}$: la fonction f garde un signe constant sur $X_{\mathbf{R}}$. L'ouvert $X_{\mathbf{R}} \setminus X_{\mathbf{R}}(0)$ est connexe.

(II) $X_{\mathbf{R}}(0) \neq \{0\}$: la fonction f change de signe sur $X_{\mathbf{R}}$, et $X_{\mathbf{R}}(0)$ est un ensemble analytique (réel) singulier en 0 de dimension pure égale à n . L'ouvert $X_{\mathbf{R}} \setminus X_{\mathbf{R}}(0)$ possède un nombre fini de composantes connexes, puisqu'il est semi-analytique.

Nous fixons une composante connexe A sur laquelle f est supposée positive (si ce n'est pas le cas, on considérera $-f$). Notons par $X_{\mathbf{R}}^A(t)$ la trace de $X_{\mathbf{R}}(t)$ sur A ($t > 0$). Pour toute forme ω dans $C_c^\infty(X_{\mathbf{R}})$, de degré n , la fonction $F_\omega(t) = \int_{X_{\mathbf{R}}^A(t)} \omega$ admet le développement asymptotique :

$$(1) \quad F_\omega(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \tilde{F}_\omega(t) := \sum_{\substack{(r_i) \\ 0 \leq j \leq n}} T_p^{r_i, j}(\omega) t^p t^{r_i} (\text{Log } t)^j$$

où (r_i) est une suite finie dans $\mathbf{Q} \cap [0, 1[$ et les $T_p^{r_i, j}$ sont des 1-courants sur $X_{\mathbf{R}}$ à supports dans $X_{\mathbf{R}}(0)$ (voir les articles de P. Jeanquartier [9], H.M. Maire [10] et D. Barlet [1]). L'espace vectoriel \mathcal{M} formé par ces développements asymptotiques possède une structure naturelle de $\mathbf{C}[[t]]$ -module de type fini.

On désigne par \mathcal{F} le faisceau sur le disque $D : (f_* \Omega_{X/D}^n / df_* \Omega_{X/D}^{n-1}) / \text{Torsion}$, où $\Omega_{X/D}^p = \Omega_X^p / \Omega_X^{p-1} \wedge df$ est le faisceau sur X des p -formes holomorphes f -relatives. Ce faisceau est cohérent sur D d'après H. Hamm [7]. Il induit sur $D^* = D - \{0\}$ le fibré vectoriel $s \rightarrow H^n(X(s), \mathbf{C})$. Pour un

point base s_0 fixe dans D^* , T_n désignera l'opérateur de monodromie (qui est un isomorphisme) agissant sur $H^n(X(s_0), \mathbf{C})$.

Notre premier résultat est ceci :

THÉORÈME 1.1. — *Soient w_1, \dots, w_μ des n -formes holomorphes sur X donnant en 0 une base de \mathcal{F} .*

Alors, pour $\rho \in C_0^\infty(X_{\mathbf{R}})$ valant identiquement 1 près de 0 , les développements $\tilde{F}_{\rho w_j}$, $j \in [1, \mu]$ engendrent $\mathcal{M}/\mathbf{C}[[t]] \cap \mathcal{M}$ comme $\mathbf{C}[[t]]$ -module. \square

Ce résultat est l'analogie réel du résultat de D. Barlet (voir [5]) dans le cas complexe à singularité isolée. Il montre que pour une singularité isolée dans le réel, seule la cohomologie de degré n de la fibre de Milnor complexe peut contribuer aux exposants des développements asymptotiques (1); nous précisons cette assertion dans le corollaire ci-dessous. En effet, si on choisit une base de Jordan de la monodromie T_n et si on lui associe des n -formes $\omega_1, \dots, \omega_\mu$ holomorphes sur X par le lemme 3.1, elles vont engendrer un sous-faisceau \mathcal{Y} de \mathcal{F} qui sera méromorphiquement équivalent à \mathcal{F} (c'est-à-dire que pour $k \in \mathbf{N}$ assez grand, on aura $s^k \mathcal{F} \subset \mathcal{Y} \subset \mathcal{F}$). Comme les fonctions $F_{\rho \omega_j}$ ne font intervenir, dans leurs développements asymptotiques en 0 , que des termes de la forme $t^p t^u (\text{Log } t)^m$ tels que $e^{-2i\pi u}$ soit valeur propre de T_n (voir le début du §3), on obtiendra le corollaire suivant du théorème 1.1 :

COROLLAIRE 1.2. — *Si, dans cette même situation, un élément de \mathcal{M} admet un terme de la forme $at^p t^u (\text{Log } t)^v$, $a \in \mathbf{C}^*$, $p \in \mathbf{N}$ et $u \in]0, 1[\cap \mathbf{Q}$, alors $e^{-2i\pi u}$ est valeur propre de T_n avec un ordre de nilpotence $\geq v$.*

Pour $u = 0$, on obtient seulement que 1 est valeur propre de T_n avec un ordre de nilpotence $\geq v - 1$ (), sous la même hypothèse.* \square

Ce corollaire semble être en conflit avec le critère (théorème renforcé en appendice) de l'article de D. Barlet [1], pour $n \geq 2$, que nous donnons ci-dessous :

CRITÈRE (C). — *Soit $f : X \rightarrow D$ un représentant de Milnor d'un germe $f : (\mathbf{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbf{C}, 0)$, d'une fonction analytique à singularité quelconque, vérifiant $f(X_{\mathbf{R}}) \subset \mathbf{R}$.*

(*) Cette condition étant vide par convention pour $\nu = 0$

Soit un point base $t_0 \in D \cap \mathbf{R}_+$ fixé et soit T_p l'opérateur de monodromie agissant sur $H^p(X(t_0), \mathbf{C})$, $1 \leq p \leq n$. Supposons que T_p admette un bloc de Jordan de taille $(k, k)e_1(t_0), \dots, e_k(t_0)$ pour la valeur propre $e^{-2i\pi u}$, et supposons aussi qu'il existe $1 \leq h \leq k$ tel que $e_h(t_0) \notin (i_*(H_p(X_{\mathbf{R}}^A(t_0), \mathbf{C})))^\perp$ (i_* étant l'application de $H_p(X_{\mathbf{R}}^A(t_0), \mathbf{C})$ dans $H_p(X(t_0), \mathbf{C})$ qui est induite par l'injection canonique $i : X_{\mathbf{R}}^A(t_0) \rightarrow X(t_0)$ et l'orthogonalité ici est prise au sens de la dualité homologie-cohomologie).

Alors il existe une fonction g dans $C_c^\infty(X_{\mathbf{R}})$ telle que le prolongement méromorphe de $\int_A f^\lambda(x)g(x)dx$ admet un pôle d'ordre $\geq k-h+1$ en $-u-v$ pour $v \in \mathbf{N}$, v assez grand. \square

Le critère nous donne donc une condition suffisante pour avoir un élément de \mathcal{M} qui a terme de la forme $at^{u+p}(\text{Log } t)^m$, $a \in \mathbf{C}^*$. En effet, il suffit d'inverser la transformation de Mellin et d'utiliser l'identité (**) qui est établie dans la démonstration du 2) de la proposition 2.1.

En fait, ce conflit est "résolu" par le résultat suivant :

THÉORÈME 1.3. — *Si f est à singularité isolée dans le réel, alors pour tout $p \in [1, n-1]$, $n \geq 2$, l'application naturelle :*

$$i_* : H_p(X_{\mathbf{R}}^A(t_0), \mathbf{C}) \longrightarrow H_p(X(t_0), \mathbf{C})$$

a son image contenue dans le sous-espace formé par les vecteurs invariants par la monodromie T_p^ agissant sur $H_p(X(t_0), \mathbf{C})$.* \square

Compte tenu de la compatibilité de la monodromie avec la dualité homologie-cohomologie, ce théorème explique comment les groupes de cohomologie pour $1 \leq p \leq n-1$ "n'interviennent pas" dans la description du module des développements asymptotiques \mathcal{M} dans le cas d'une singularité isolée dans le réel. Autrement dit, l'hypothèse du critère (C) n'est jamais vérifiée pour p , $1 \leq p \leq n-1$, d'une manière significative, si la singularité est isolée dans le réel. Au mieux, si 1 est une valeur propre de T_p , le critère (C) nous donne l'existence d'un pôle simple en un entier négatif, or ceci est vrai pour toute fonction du cas (II) puisque $\mathbf{C}[[t]] \subset \mathcal{M}$ (d'après le 3) de la proposition 2.1).

**2. Quelques propriétés du module des développements asymptotiques.
Démonstration du théorème 1.1.**

Précisons tout d'abord la structure de $\mathbf{C}[[t]]$ -module de \mathcal{M} : la multiplication de \tilde{F}_ω par une série formelle $\tilde{\theta} \in \mathbf{C}[[t]]$ est donnée par : $\tilde{\theta}\tilde{F}_\omega = \tilde{F}_{f^*(\theta)_\omega}$ où θ est un germe en 0 de fonction C^∞ qui représente la série formelle $\tilde{\theta}$ par l'isomorphisme de E. Borel : $\mathbf{C}[[t]] \simeq C_0^\infty/I_0^\infty$ (I_0^∞ désigne l'idéal des germes plats).

PROPOSITION 2.1.

1) Pour toute forme ω dans $C_c^\infty(X_{\mathbf{R}})$ de degré n , la fonction $t \in [0, \eta[\rightarrow F_\omega(t)$, vérifie :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} F_\omega(t) = \int_{X_{\mathbf{R}}^A(0)} \omega \quad (= \langle T_0^{0,0}, \omega \rangle).$$

2) Dans le cas (I), $1 \notin \mathcal{M}$ et $\mathcal{M} \neq \{0\}$.

3) Dans le cas (II), $1 \in \mathcal{M}$. □

Démonstration.

1) Pour tout $t > 0$ on a :

$$F_\omega(t) - \int_{X_{\mathbf{R}}^A(0)} \omega = \int_{X_{\mathbf{R}}^A(t)} \omega - \int_{X_{\mathbf{R}}^A(0)} \omega = \int_{f^{-1}[0,t] \cap \bar{A}} d\omega,$$

d'après la formule de Stokes dans le cadre des ensembles semi-analytiques ; on pourra, à ce propos, consulter l'article de M. Herrera [8]. Cette quantité

tend vers $\int_{X_{\mathbf{R}}^A(0) \cap \bar{A}} d\omega = 0$, d'après Lebesgue.

2) $1 \notin \mathcal{M}$: découle de la continuité en 0 des fonctions F_ω .

Pour montrer que $\mathcal{M} \neq \{0\}$, nous avons besoin d'établir l'identité (**)
ci-dessous. En fait, elle est valable pour tout f à singularité isolée en $0 \in \mathbf{R}^{n+1}$ (sans hypothèse sur $X_{\mathbf{R}}(0)$).

On sait que pour toute forme φ dans $C_c^\infty(X_{\mathbf{R}})$ de degré $n+1$, on associe une forme (de Gelfand-Leray) $\frac{\varphi}{df}$ qui vérifie $df \wedge \frac{\varphi}{df} = \varphi$ sur

$X_{\mathbf{R}} \setminus X_{\mathbf{R}}(0)$. La restriction de $\frac{\varphi}{df}$ est intrinsèque et la fonction $\int_{X_{\mathbf{R}}^A(t)} \frac{\varphi}{df}$ admet le développement asymptotique :

$$(*) \quad \int_{X_{\mathbf{R}}^A(t)} \frac{\varphi}{df} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \sum_{\substack{(q \in \mathbf{Q}) \\ q > -1 \\ 0 \leq j \leq n}} a_{q,j}(\varphi) t^q (\text{Log } t)^j.$$

Comme la boule de Milnor réelle $X_{\mathbf{R}}$ est contractible (ce résultat est l'objet de la proposition 2.2), on a un isomorphisme naturel $L : H_c^{n+1}(X_{\mathbf{R}}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{C}$ donné par $L([\Psi]) = \int_{X_{\mathbf{R}}} \Psi$. Soit χ dans $C_c^\infty(X_{\mathbf{R}})$ de degré $n+1$ telle que $0 \notin \text{supp } \chi$ et $\int_{X_{\mathbf{R}}} \chi = 1$, on a donc pour tout φ dans $C_c^\infty(X_{\mathbf{R}})$ de degré $n+1$: $L([\varphi - L([\varphi])\chi]) = 0$, par conséquent il existe une forme ω dans $C_c^\infty(X_{\mathbf{R}})$ de degré n telle que $d\omega = \varphi - L([\varphi])\chi$. On sait d'autre part que l'on a l'égalité : $\frac{d}{dt} F_\omega(t) = \int_{X_{\mathbf{R}}^A(t)} \frac{d\omega}{df}$ pour tout $t > 0$.

Alors on a :

$$(**) \quad \frac{d}{dt} F_\omega(t) = \int_{X_{\mathbf{R}}^A(t)} \frac{\varphi}{df} - L([\varphi]) \int_{X_{\mathbf{R}}^A(t)} \frac{\chi}{df}.$$

Montrons maintenant que $\mathcal{M} \neq \{0\}$. On a $A = X_{\mathbf{R}} \setminus \{0\}$, et d'après le lemme (2.2), qui est dans l'article de H.M. Maire [10], il existe une forme φ telle que le développement asymptotique (*) ne soit pas nul (ne soit pas plat). Comme le développement asymptotique du second terme du membre de droite de (**) admet un développement asymptotique nul, on a forcément \tilde{F}_ω non nul.

3) $1 \in \mathcal{M}$: soit un point $a \in X_{\mathbf{R}}(0) - \{0\}$ sur la frontière de la composante connexe A . C'est un point lisse. Nous supposons que $a = (0, a_1, \dots, a_n)$ est dans un ouvert $] -\varepsilon, \varepsilon[\times V$ où V est un ouvert relativement compact de $X_{\mathbf{R}}(0) \setminus \{0\}$, tel que $f|_{]-\varepsilon, \varepsilon[\times V}(x_0, x_1, \dots, x_n) = x_0$. Soit $\Omega(x_1, \dots, x_n)$ une forme dans $C_c^\infty(V)$ de degré n telle que $\int_V \Omega = 1$ et soit σ une fonction dans $C_c^\infty(]-\varepsilon, \varepsilon[)$ valant identiquement 1 au voisinage de 0. On pose $\Omega' = f^*(\sigma)\pi^*(\Omega)$ où π est la projection sur (x_1, \dots, x_n) . C'est une forme dans $C_c^\infty(]-\varepsilon, \varepsilon[\times V)$ de degré n , vérifiant $d\Omega' = d\sigma \wedge \pi^*(\Omega) + \sigma\pi^*(d\Omega) = 0$ dans un ouvert $] -\varepsilon', \varepsilon'[\times V$, avec $0 < \varepsilon' < \varepsilon$. La fonction $F_{d\Omega'/df}$ est nulle sur $]0, \varepsilon'[$, par conséquent $F_{\Omega'}$ est constante sur cet intervalle et on a : $\tilde{F}_{\Omega'}(t) = \int_{X_{\mathbf{R}}^A(0)} \Omega' = \int_V \Omega = 1$. D'où $1 \in \mathcal{M}$ et donc $\mathbf{C}[[t]] \subset \mathcal{M}$. \square

Le résultat de la proposition ci-dessous est certainement connu par les spécialistes; nous l'établissons pour être tout à fait complets, puisque c'est un résultat clé de cet article.

PROPOSITION 2.2. — Soit $f : (\mathbf{R}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbf{R}, 0)$ un germe de fonction analytique réelle à singularité isolée en 0 (dans le réel).

Alors la boule de Milnor réelle $X_{\mathbf{R}}$ est contractible. \square

La démonstration de cette proposition découle des deux lemmes qui vont suivre.

LEMME 2.3. — Soit $f : (\mathbf{R}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbf{R}, 0)$ un germe de fonction analytique réelle à singularité quelconque.

Alors la fibre singulière $X_{\mathbf{R}}(0)$ est un rétracte par déformation de la boule de Milnor réelle $X_{\mathbf{R}}$. \square

Rappelons tout d'abord que $X_{\mathbf{R}}$ est la trace sur \mathbf{R}^{n+1} de la boule de Milnor complexe $X = f^{-1}(D(0, \eta)) \cap B(0, \varepsilon)$, où l'on a $1 \gg \varepsilon > 0$ et $\varepsilon \gg \eta > 0$. Nous supposons que la fonction f vérifie, sur $X_{\mathbf{R}}$, l'inégalité dite de S. Łojasiewicz :

$$(1) \quad \begin{aligned} \|\text{grad } f(x)\| &\geq C|f(x)|^r, \\ \text{grad } f &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_0}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right), \end{aligned}$$

où C et r sont deux constantes strictement positives, avec $0 < r < 1$ (la démonstration de cette inégalité est dans un cours (introuvable) donné à l'I.H.E.S., par S. Łojasiewicz, en 1964 [12]; nous renvoyons le lecteur intéressé par cette démonstration à l'article, récent, de E. Bierstone et P.D. Milman [6], proposition 6.8, p. 35). On peut supposer, en restreignant ε , que l'ensemble $S = \{z \in X \mid df(z) = 0\}$ est contenu dans $X(0)$ (parce que f est constant sur les composantes connexes de S); alors le lieu singulier de $X_{\mathbf{R}}(0)$ est $S_{\mathbf{R}} = S \cap \mathbf{R}^{n+1}$ (f est supposé réduit) et l'inégalité (1) sera stricte si et seulement si $x \in X_{\mathbf{R}} \setminus S_{\mathbf{R}}$.

Rappelons aussi que, d'après le lemme 4.3, p. 35, de J. Milnor [11], les vecteurs $x = (x_0, \dots, x_n)$ et $\text{grad}(\text{Log } f(x))$ sont linéairement indépendants sur $\tilde{X}_{\mathbf{R}} = X_{\mathbf{R}} \setminus \Omega_{\mathbf{R}}$ où $\Omega_{\mathbf{R}} = X_{\mathbf{R}}(0) \cup Z_{\mathbf{R}}$ et $Z_{\mathbf{R}}(*)$ est

(*) $Z_{\mathbf{R}} = \{x \in X_{\mathbf{R}} \setminus X_{\mathbf{R}}(0) \mid x_i \frac{\partial f}{\partial x_j} = x_j \frac{\partial f}{\partial x_i}, 0 \leq i < j \leq n\}$; il peut être égal à $X_{\mathbf{R}} \setminus X_{\mathbf{R}}(0)$, c'est le cas pour $f(x) = \|x\|^2$.

un sous-ensemble analytique (réel) fermé de $X_{\mathbf{R}} \setminus X_{\mathbf{R}}(0)$ sur lequel on a $\text{grad}(\text{Log } f(x)) = \lambda(x)x$ avec $\lambda(x) \in \mathbf{R}_+^*$.

Considérons les champs de vecteurs $U = x$ et $V = f \text{ grad } f (= f^2 \text{ grad}(\text{Log } f))$ et posons $W = \|U\|V + \|V\|U$. Alors le champ W est continu sur $X_{\mathbf{R}}$ et s'annule seulement sur la fibre singulière $X_{\mathbf{R}}(0)$. Il vérifie en plus $\langle W, U \rangle \geq 0$ (resp. $\langle W, V \rangle \geq 0$), ces inégalités étant strictes sur $X_{\mathbf{R}} \setminus X_{\mathbf{R}}(0)$. Montrons ceci, par exemple, pour U : on a $\langle W, U \rangle = \|U\|(\langle V, U \rangle + \|U\| \|V\|)$ et l'inégalité énoncée découle de l'inégalité de Cauchy-Schwarz $|\langle V, U \rangle| \leq \|U\| \|V\|$. Soit un point $x \in X_{\mathbf{R}} \setminus X_{\mathbf{R}}(0)$ et supposons qu'en x on a $\langle W, U \rangle = 0$. Ceci donne $\text{grad}(\text{Log } f(x)) = \alpha(x)U(x)$ avec $\alpha(x) < 0$. En vertu de ce qui précède, ceci est absurde. Le champ W peut être multiplié par une fonction $\chi : Y_{\mathbf{R}} \rightarrow \mathbf{R}_+$, C^∞ à support compact et valant identiquement 1 dans un voisinage de $\overline{X_{\mathbf{R}}}$, où $Y_{\mathbf{R}}$ est une boule de Milnor réelle contenant $\overline{X_{\mathbf{R}}}$ (quitte à restreindre $X_{\mathbf{R}}$). Le champ W est alors complet.

Nous introduisons également un deuxième champ de vecteurs $T = \frac{\text{grad } f}{\|\text{grad } f\|}$ qui est C^∞ sur $X_{\mathbf{R}} \setminus S_{\mathbf{R}}$.

Démonstration du lemme 2.3. — Les champs de vecteurs W et T vont nous permettre de construire la rétraction de $X_{\mathbf{R}}$ sur $X_{\mathbf{R}}(0)$. Nous rétractons tout d'abord $X_{\mathbf{R}}$ dans l'ouvert

$$M_{\mathbf{R}} = \left\{ x \in X_{\mathbf{R}} \mid \frac{1}{C(1-r)} |f(x)|^{1-r} + \|x\| < \varepsilon \right\}$$

(il contient $X_{\mathbf{R}}(0)$), à l'aide de W ; puis nous rétractons $M_{\mathbf{R}}$ sur $X_{\mathbf{R}}(0)$ (dans $X_{\mathbf{R}}$) à l'aide de T (voir figure ci-dessous, pour $n = 2$, cas (II)). Les raisons du choix de l'ouvert $M_{\mathbf{R}}$ apparaîtront dans les calculs qui vont être faits plus loin.

1ère étape. — $X_{\mathbf{R}}$ se rétracte sur $M_{\mathbf{R}}$.

Considérons, pour tout $x \in X_{\mathbf{R}}$, la courbe solution :

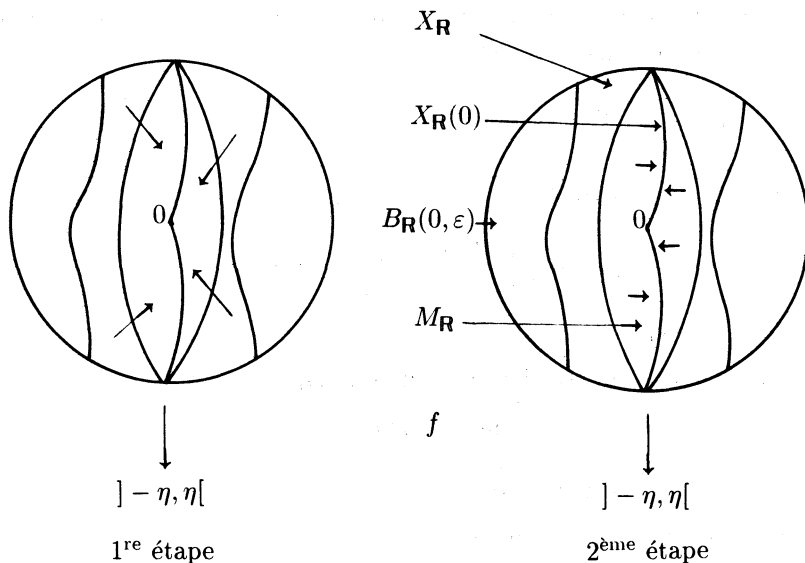
$$\begin{cases} \frac{dp_x}{dt}(t) = W(p_x(t)) \\ p_x(0) = x. \end{cases}$$

On a donc

$$\frac{d}{dt} \|p_x(t)\|^2 = 2\langle W(p_x(t)), U(p_x(t)) \rangle \geq 0, \quad \forall x \in X_{\mathbf{R}},$$

et

$$\frac{d}{dt} (\text{Log } |f(p_x(t))|) = \frac{1}{f^2(p_x(t))} \langle W(p_x(t)), V(p_x(t)) \rangle \geq 0, \quad \forall x \in X_{\mathbf{R}} \setminus X_{\mathbf{R}}(0).$$



On en déduit que les fonctions $t \rightarrow \|p_x(-t)\|$ et $t \rightarrow |f(p_x(-t))|$ sont strictement décroissantes sur \mathbf{R}_+ , si $x \in X_{\mathbf{R}} \setminus X_{\mathbf{R}}(0)$; si $x \in X_{\mathbf{R}}(0)$, on a évidemment $p_x(t) = x, \forall t \in \mathbf{R}$.

Montrons tout d'abord que $\lim_{t \rightarrow +\infty} |f(p_x(-t))| = 0$, pour tout $x \in X_{\mathbf{R}} \setminus X_{\mathbf{R}}(0)$. Considérons la fonction :

$$F = F_x : [0, +\infty[\rightarrow (\delta_x, \text{Log } |f(x)|], F(t) = \text{Log } |f(p_x(-t))| .$$

Elle est bien définie, puisque $p_x(-t)$ se prolonge sur \mathbf{R}_+ . Sa dérivée est strictement négative. Sa fonction réciproque $G = G_x$ est donnée par :

$$G(u) = - \int_{g(x)}^u \frac{ds}{F' \circ G(s)} ,$$

avec $g(x) = \text{Log } |f(x)|$.

Si $\delta_x \neq -\infty$, on aurait :

$$(2) \quad 0 \leq G(u) \leq L \cdot \eta^2 (\text{Log } |f(x)| - u) ,$$

où $L = \left(\inf_{y \in K} \langle W(y), V(y) \rangle \right)^{-1}$, K étant un compact de $X_{\mathbf{R}} \setminus X_{\mathbf{R}}(0)$ contenant la courbe allant de x à $z, z = \lim_{t \rightarrow +\infty} p_x(-t)$. L'inégalité (2) découle évidemment de l'expression F' . La limite de $G(u)$ quand u tend vers δ_x serait alors bornée, ce qui est absurde.

Montrons maintenant qu'il existe une fonction temps t , à valeurs dans \mathbf{R}_+ , continue sur $X_{\mathbf{R}}$, telle que :

$$(3) \quad \frac{1}{C(1-r)} |f(p_x(-t(x)))|^{1-r} + \|p_x(-t(x))\| < \varepsilon, \forall x \in X_{\mathbf{R}}.$$

Posons $h(x) = \text{Log} \left(\frac{1}{2}(\varepsilon - \|x\|)C(1-r) \right)^{1/1-r}$, et

$$t(x) = \begin{cases} G(h(x)) & \text{si } h(x) \leq g(x) \\ 0 & \text{si } h(x) > g(x) \end{cases},$$

pour tout $x \in X_{\mathbf{R}}$.

La fonction $t(x)$ est bien continue sur $X_{\mathbf{R}}$, puisque

$$\lim_{h(x)-g(x) \rightarrow 0^-} G(h(x)) = 0.$$

Il reste à vérifier l'inégalité (3) :

i) Pour $h(x) \leq g(x)$, on a :

$$\text{Log} |f(p_x(-t(x)))| = F \circ G(h(x)) = h(x),$$

ce qui est équivalent à l'égalité :

$$\frac{1}{C(1-r)} |f(p_x(-t(x)))|^{1-r} = \frac{1}{2}(\varepsilon - \|x\|).$$

ii) Pour $h(x) > g(x)$, on a donc :

$$\text{Log} |f(x)| < \text{Log} \left(\frac{1}{2}(\varepsilon - \|x\|)C(1-r) \right)^{1/1-r}$$

avec $\text{Log} |f(x)| = F(t(x))$, puisque $p_x(-t(x)) = x$, c'est justement l'inégalité :

$$\frac{1}{C(1-r)} |f(p_x(-t(x)))|^{1-r} < \frac{1}{2}(\varepsilon - \|x\|).$$

Nous avons finalement :

$$\frac{1}{C(1-r)} |f(p_x(-t(x)))|^{1-r} + \|x\| < \varepsilon, \forall x \in X_{\mathbf{R}}.$$

et l'inégalité (3) découle du fait que $\|p_x(-t(x))\| \leq \|x\|$.

Considérons l'application :

$$H_1 : \begin{array}{ll} [0, 1] \times X_{\mathbf{R}} & \longrightarrow X_{\mathbf{R}} \\ (u, x) & \longrightarrow p_x(-2ut(x)). \end{array}$$

Cette application est, tout d'abord, bien définie : $H_1(u, x) \in X_{\mathbf{R}}$, en effet : $|f(p_x(-2ut(x)))| < \eta$ et $\|p_x(-2ut(x))\| < \varepsilon$, puisque les fonctions

$|f(p_x(-t))|$ et $\|p_x(-t)\|$ sont décroissantes. Elle est évidemment continue, et vérifie en plus :

$$\begin{cases} H_1(0, x) = x, \forall x \in X_{\mathbf{R}} \\ H_1(u, x) \in M_{\mathbf{R}}, \forall x \in X_{\mathbf{R}}, \forall u \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

C'est la rétraction cherchée.

2ème étape. — L'ouvert $M_{\mathbf{R}}$ se rétracte (dans $X_{\mathbf{R}}$) sur $X_{\mathbf{R}}(0)$.

Pour tout $x \in M \setminus S_{\mathbf{R}}$, considérons la courbe solution :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} q_x(t) = T(q_x(t)) \\ q_x(0) = x. \end{cases}$$

Soit $|t| \leq \frac{1}{C(1-r)} |f(x)|^{1-r}$, alors on a $q_x(t) \in B_{\mathbf{R}}(0, \varepsilon)$, puisque

$$(4) \quad \|q_x(t)\| \leq \|x\| + |t| \|T\| \leq \|x\| + \frac{1}{C(1-r)} |f(x)|^{1-r} < \varepsilon,$$

car $x \in M_{\mathbf{R}}$ et $\|T\| = 1$.

La fonction $F(t) = f(q_x(t))$ est dérivable et sa dérivée est $F'(t) = \|\text{grad } f(q_x(t))\|$, elle est donc strictement croissante. Pour $x \in M_{\mathbf{R}} \setminus X_{\mathbf{R}}(0)$, nous allons suivre $q_x(t)$ de sorte que $f(q_x(t))$ décroît (resp. croît) si $f(x) > 0$ (resp. $f(x) < 0$), ce qui veut dire que l'on considère $t \leq 0$ (resp. $t \geq 0$). L'inégalité (4) entraîne que $q_x(t) \in X_{\mathbf{R}}$, puisque $|f(q_x(t))| \leq |f(x)|$.

Montrons que pour tout $x \in M_{\mathbf{R}} \setminus S_{\mathbf{R}}$, il existe un temps fini $t(x)$ qui dépend continûment de x , tel que $f(q_x(t(x))) = 0$ et qui vérifie en plus $|t(x)| \leq \frac{1}{C(1-r)} |f(x)|^{1-r}$. En effet, supposons par exemple que $f(x) > 0$, on a donc :

$$F = F_x : (t(x), 0] \longrightarrow (0, f(x)], F(t) = f(q_x(t))$$

(le temps $t(x)$ est a priori quelconque).

On a $F'(t) > 0$ et la dérivée de sa fonction réciproque,

$$G = G_x : (0, f(x)] \longrightarrow (t(x), 0],$$

est $G'(u) = \frac{1}{F'(G(u))}$. On en déduit que :

$$G(u) = \int_{f(x)}^u \frac{ds}{\|\text{grad } f(q_x(G(s)))\|}$$

puisque $G(f(x)) = 0$. Il vient que :

$$t(x) = \lim_{u \rightarrow 0} G(u) = - \int_0^{f(x)} \frac{ds}{\|\text{grad } f(q_x(G(s)))\|} ;$$

d'où :

$$|t(x)| \leq \frac{1}{C} \int_0^{f(x)} \frac{ds}{|f(q_x(G(s)))|^r} ,$$

d'après l'inégalité (1) de S. Lojasiewicz. Or $f(q_x(G(s))) = F \circ G(s) = s$, d'où :

$$|t(x)| \leq \frac{1}{C} \int_0^{f(x)} \frac{ds}{s^r} = \frac{1}{C(1-r)} f(x)^{1-r} .$$

Donc $|t(x)|$ est bien fini et vérifie l'inégalité désirée, on a alors : $\|q_x(t(x))\| < \varepsilon$ et $f(q_x(t(x))) = 0$. L'expression de $t(x)$, pour $f(x) < 0$, est analogue, et si $f(x) = 0$ avec $x \notin S_{\mathbf{R}}$, on a bien sûr $t(x) = 0$. Il est clair que la fonction temps $t : M_{\mathbf{R}} \setminus S_{\mathbf{R}} \rightarrow \mathbf{R}/x \rightarrow t(x)$ ainsi construite, est continue. Elle peut, même, être prolongée par continuité à $M_{\mathbf{R}}$, en posant $t(x) = 0$, si $x \in S_{\mathbf{R}}$.

Nous sommes en mesure de définir la rétraction de $M_{\mathbf{R}}$ sur $X_{\mathbf{R}}(0)$. Posons :

$$H_2 : [0, 1] \times M_{\mathbf{R}} \longrightarrow X_{\mathbf{R}} \\ (u, x) \longrightarrow \begin{cases} q_x(ut(x)) & \text{si } x \in M \setminus S_{\mathbf{R}} \\ x & \text{si } x \in S_{\mathbf{R}} \end{cases}$$

L'application H_2 est bien définie d'après ce qui précède, puisque $|ut(x)| \leq \frac{1}{C(1-r)} |f(x)|^{1-r}$; elle est évidemment continue sur $[0, 1] \times (M_{\mathbf{R}} \setminus S_{\mathbf{R}})$. Il reste donc à examiner la continuité aux points (u, x) si $x \in S_{\mathbf{R}}$. Remarquons que la longueur $L(y)$ de la courbe qui joint un point $y \in M_{\mathbf{R}} \setminus S_{\mathbf{R}}$ à $q_y(t(y))$ est égale à $|t(y)|$, puisque $\|\frac{d}{dt} q_x(t)\| = 1$. Si y tend vers x , alors la courbe "s'écrase" sur x , par conséquent :

$$\lim_{(v,y) \rightarrow (u,x)} q_y(ut(y)) = x = H_2(u, x) .$$

L'application H_2 vérifie :

$$\begin{cases} H_2(0, x) = x , & \forall x \in M_{\mathbf{R}} \\ H_2(u, x) = x , & \forall x \in X_{\mathbf{R}}(0), \forall u \in [0, 1] \\ H_2(1, x) \in X_{\mathbf{R}}(0) , & \forall x \in M_{\mathbf{R}} . \end{cases}$$

C'est bien une rétraction de $M_{\mathbf{R}}$ (dans $X_{\mathbf{R}}$) sur $X_{\mathbf{R}}(0)$.

La rétraction de $X_{\mathbf{R}}$ sur $X_{\mathbf{R}}(0)$ est alors donnée par l'application suivante :

$$H : [0, 1] \times X_{\mathbf{R}} \longrightarrow X_{\mathbf{R}}$$

$$(u, x) \longrightarrow \begin{cases} H_1(u, x) & \text{si } 0 \leq u \leq \frac{1}{2} \\ H_2(2u - 1, H_1(u, x)) & \text{si } \frac{1}{2} \leq u \leq 1 \end{cases} .$$

Vérifions que cela en est bien une :

- i) $u = 0, H(0, x) = x, \forall x \in X_{\mathbf{R}}$.
- ii) $u = \frac{1}{2}, H_1(\frac{1}{2}, x) = H_2(0, H_1(\frac{1}{2}, x)), \forall x \in X_{\mathbf{R}}$. Donc H se recolle en une application continue.
- iii) $u = 1, H(1, x) = H_2(1, H_1(1, x)) \in X_{\mathbf{R}}(0), \forall x \in X_{\mathbf{R}}$.
- iv) Pour tout $x \in X_{\mathbf{R}}(0)$ et tout $v \in [0, 1]$, on a $H_1(v, x) = x$ et $H_2(v, x) = x$, donc $H(v, x) = x$.

Nous avons ainsi terminé la démonstration du lemme 2.3. □

La proposition 2.2 n'est autre que le lemme précédent dans le cas (I), puisque $X_{\mathbf{R}}(0) = \{0\}$. Par contre, dans le cas (II), il faudra établir un deuxième lemme pour compléter la démonstration.

LEMME 2.4. — Soit $f : (\mathbf{R}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbf{R}, 0)$ un germe de fonction analytique à singularité isolée en 0 (dans le réel) telle que $X_{\mathbf{R}}(0) \neq \{0\}$. Alors 0 est un rétracte par déformation de $X_{\mathbf{R}}(0)$. □

Remarquons que le lemme demeure vrai si la singularité est non isolée, la démonstration utiliserait, dans ce cas, la théorie des stratifications.

Dans notre situation, nous en donnons une qui est analogue à celle du lemme 2.3 :

Démonstration. — On peut construire sur $X_{\mathbf{R}}^* = X_{\mathbf{R}} - \{0\}$, comme le fait J. Milnor dans la démonstration du théorème 2.10, [11], un champ de vecteurs v , qui est C^∞ vérifiant :

- i) $\langle v(x), x \rangle > 0, \forall x \in X_{\mathbf{R}}^*$.
- ii) v est tangent à l'hypersurface $X_{\mathbf{R}}^*(0) = X_{\mathbf{R}}(0) - \{0\}$.

Normalisons ce champ en posant $V(x) = \frac{v(x)}{\langle v(x), x \rangle}$ et notons, pour

tout $x \in X_{\mathbf{R}}^*$, σ_x la courbe solution :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\sigma_x(t) = V(\sigma_x(t)) \\ \sigma_x(0) = x . \end{cases}$$

Calculons $r(\sigma_x(t))$, où $r(y) = \|y\|^2$ pour $y \in X_{\mathbf{R}}$, on a :

$$\frac{d}{dt}r(\sigma_x(t)) = \sum_{i=0}^n \frac{\partial r}{\partial x_i} V_i(\sigma_x(t)) \text{ avec } V = (V_0, \dots, V_n) ,$$

donc

$$\frac{d}{dt}r(\sigma_x(t)) = \langle 2V(\sigma_x(t)), \sigma_x(t) \rangle = 1 .$$

Par conséquent, $r(\sigma_x(t)) = t + \|x\|^2$.

En fait, la courbe σ_x se prolonge par continuité sur $[-\|x\|^2, 0]$ en posant $\sigma_x(-\|x\|^2) = 0$; pour cette assertion, nous renvoyons encore le lecteur aux explications de J. Milnor, données dans la démonstration du théorème 2.10, [11]. Comme V est tangent à $X_{\mathbf{R}}^*(0)$, le point $\sigma_x(t)$ est dans $X_{\mathbf{R}}(0)$, pour tout $t \in [-\|x\|^2, 0]$, si $x \in X_{\mathbf{R}}^*(0)$.

Nous définissons la rétraction de $X_{\mathbf{R}}(0)$ sur 0, comme suit :

$$\begin{aligned} H : [0, 1] \times X_{\mathbf{R}}(0) &\longrightarrow X_{\mathbf{R}}(0) \\ (u, x) &\longrightarrow \begin{cases} \sigma_x(-u\|x\|^2) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} . \end{aligned}$$

Il est clair que H est continue sur $[0, 1] \times X_{\mathbf{R}}^*(0)$. Il reste à examiner la continuité en $(0, u)$. On a $\|\sigma_x(t)\| \leq \|x\|$ pour tout $t \in [-\|x\|^2, 0]$; par conséquent, quand x tend vers 0, toute la courbe qui joint x à 0 "s'écrase" sur 0. On déduit la continuité de H aux points $(0, u)$, $u \in [0, 1]$. Enfin, H vérifie :

$$\begin{cases} H(0, x) = x , & \forall x \in X_{\mathbf{R}}(0) \\ H(u, 0) = 0 , & \forall u \in [0, 1] \\ H(1, x) = 0 , & \forall x \in X_{\mathbf{R}}(0) . \end{cases}$$

Nous avons ainsi terminé la démonstration du lemme 2.4. □

La proposition 2.2 découle du fait qu'un espace topologique B qui se rétracte par déformation sur un sous-espace $A \subset B$, qui est contractible, est lui-même contractible.

Conséquence : tous les groupes d'homologie de $X_{\mathbf{R}}$, de degré $p \geq 1$, sont nuls et $H_0(X_{\mathbf{R}}, \mathbf{C}) = \mathbf{C}$.

Nous allons maintenant donner la preuve du théorème 1.1 : la démonstration suit celle du cas complexe et elle utilise le lemme de Nakayama. Elle

utilise aussi la proposition suivante, qui est l'analogue de la proposition 2 de [5].

PROPOSITION 2.5. — Soit ω dans $C_c^\infty(X_{\mathbf{R}})$ de degré n et soit $m \in \mathbf{N}^*$. Alors il existe des n -formes holomorphes w'_α sur X , en nombre fini, telles que $\tilde{F}_\omega - \sum_\alpha \tilde{F}_{\rho w'_\alpha}$ soit dans $t^m \mathcal{M} + \mathbf{C}[[t]] \cap \mathcal{M}$. \square

Cette proposition permet de faire le passage des formes $C_c^\infty(X_{\mathbf{R}})$ de degré n aux n -formes holomorphes sur X . Nous allons seulement esquisser la démonstration de cette proposition, en nous contentant de donner une indication sur la marche à suivre. On fait un développement de Taylor de ω à l'origine. Les formes w'_α sont les complexifiées des formes dont les coefficients sont donnés par les parties polynomiales du développement de Taylor des coefficients de ω . On utilise alors le fait que :

1) Les courants $T_p^{r_i, j}$ pour $(r_i, j) \neq (0, 0)$ sont à supports l'origine. Ils sont donc d'ordres finis.

2) Si γ est une n -forme holomorphe sur X qui est un élément de torsion, c'est-à-dire que $f^k \gamma = df \wedge \alpha + d\beta$ où α et β sont des $n-1$ -formes holomorphes sur X et k un entier naturel, alors $\tilde{F}_{\rho \gamma}$ est dans $\mathcal{M} \cap \mathbf{C}[[t]]$.

3) Dans le cas (I) on peut distinguer deux sous-cas :

(I-a) $\mathcal{M} \cap \mathbf{C}[[t]] = \{0\}$; exemple : $X^2 + Y^2 + Z^2$, $\mathcal{M} = \mathbf{C}[[t]]t^{(1/2)+1}$

(I-b) $\mathcal{M} \cap \mathbf{C}[[t]] = t^N \mathbf{C}[[t]]$, $N \in \mathbf{N}^*$; exemple : $X^2 + Y^2$, $\mathcal{M} = t^2 \mathbf{C}[[t]]$.

On peut aussi remplacer, dans le théorème 1.1, $F_{\rho w_j}$ par F_{w_j} (resp. proposition 2.5, $F_{\rho w'_\alpha}$ par $F_{w'_\alpha}$) puisque $X_{\mathbf{R}}(t)$ est compacte. En effet, si on pose $m(r) = \inf_{x \in S_r} f(x)$ où $S_r = \partial B_r$, $B_r = B(0, r) \subset X_{\mathbf{R}}$, on a $m(r) > 0$ et pour tout $t \in]0, m(r)[$ la fibre $X_{\mathbf{R}}(t)$ est contenue dans B_r , puisque $f(x) = t$ entraîne que $x \notin S_r$. La variété $X_{\mathbf{R}}(t)$ étant fermée, elle est donc compacte.

3. Démonstration du théorème 1.3.

Commençons tout d'abord par expliquer comment les termes singuliers des développements asymptotiques \mathcal{M} proviennent des valeurs propres de la monodromie T_n agissant sur la cohomologie de degré n de la fibre complexe de f . Nous rappelons tout d'abord le lemme :

LEMME 3.1 ([2], lemme A). — Dans la situation de Milnor $f : X \rightarrow D$, si la monodromie T_p agissant sur $H^p(X(s_0), \mathbf{C})$ pour $s_0 \in D^*$

et $p \in [1, n]$ admet un bloc de Jordan de taille (k, k) $e_1(s_0), \dots, e_k(s_0)$ relatif à la valeur propre $e^{-2i\pi u}$ ($u \in \mathbf{Q} \cap [0, 1[$), il existe des p -formes holomorphes $\omega_1, \dots, \omega_k$ sur X et un entier m , tels que l'on ait :

$$\omega_j|_X(s_0) = s_0^{m+u} e_j(s_0) ,$$

$$d\omega_j = (m + u) \frac{df}{f} \wedge \omega_j + \frac{df}{f} \wedge \omega_{j-1}$$

avec la convention $\omega_0 = 0$. □

Ecrivons ce lemme pour $p = n$. L'expression des $d\omega_j$ permet de voir que dans le cas (I) (resp. cas (II)), les fonctions F_{ω_j} (resp. $F_{\rho\omega_j}$) vérifient sur $]0, \eta[$ le système différentiel (E₁) (resp. (E₂)), donné ci-dessous :

$$(E_1) \quad \frac{d}{dt} F_{\omega_j} = \frac{m+u}{t} F_{\omega_j} + F_{\omega_{j-1}} ,$$

$$(E_2) \quad \frac{d}{dt} F_{\rho\omega_j} = \frac{m+u}{t} F_{\rho\omega_j} + \frac{F_{\rho\omega_{j-1}}}{t} + \int_{X_{\mathbf{R}}^A(t)} \frac{d\rho \wedge \omega_j}{df} .$$

Le système (E₁) (resp. (E₂)) montre que le développement asymptotique \tilde{F}_{ω_j} (resp. $\tilde{F}_{\rho\omega_j}$) ne comporte (éventuellement) comme termes singuliers que ceux de la forme $t^{p+u}(\text{Log } t)^h$. Le corollaire 2.1 du théorème 1.1 sur les termes singuliers de \mathcal{M} découle du fait que le sous-faisceau \mathcal{Y} de \mathcal{F} engendré par toutes les formes données par le lemme 3.1, pour les différents blocs de Jordan, de T_n , est méromorphiquement équivalent à \mathcal{F} .

En fait, on peut dire mieux sur les termes singuliers de \mathcal{M} dans le cas (I), en précisant le critère (C) dans ce cas :

PROPOSITION 3.2. *Dans le cas (I), on a :*

$$1) \ H_p(X_{\mathbf{R}}(t), \mathbf{C}) = \{0\}, \ 1 \leq p \leq n - 1.$$

2) *Le critère (C) est nécessaire pour avoir un terme singulier t^{p+u} : si $e^{-2i\pi u}$ est une valeur propre de T_n , alors un terme singulier t^{p+u} apparaît dans un développement asymptotique si et seulement si l'hypothèse du critère (C) est vérifiée pour au moins un bloc de Jordan de cette valeur propre.* □

Démonstration.

1) On sait que l'on a une fibration triviale :

$$\begin{array}{ccc} X_{\mathbf{R}} - \{0\} & \xrightarrow{\sim} & X_{\mathbf{R}}(t) \times]0, \eta[\\ f \searrow & & \swarrow p^2 \\ & &]0, \eta[\end{array}$$

Nous en déduisons que pour $1 \leq p \leq n$, on a :

$$H_p(X_{\mathbf{R}}(t), \mathbf{C}) \xrightarrow{\sim} H_p(X_{\mathbf{R}} - \{0\}, \mathbf{C}).$$

Mais le fait que $X_{\mathbf{R}}$ soit contractible (proposition 2.2), nous donne :

$$H_p(X_{\mathbf{R}} - \{0\}, \mathbf{C}) = \{0\} \text{ si } 1 \leq p \leq n - 1,$$

et

$$H_n(X_{\mathbf{R}} - \{0\}, \mathbf{C}) \simeq \mathbf{C}.$$

2) Le cycle compact $X_{\mathbf{R}}(t)$ engendre l'espace vectoriel $H_n(X_{\mathbf{R}}(t), \mathbf{C})$. A partir du système différentiel (E₁) on montre, à l'aide d'un calcul élémentaire, que si $\langle X_{\mathbf{R}}(t_0), e_h \rangle \neq 0$ et $\langle X_{\mathbf{R}}(t_0), e_{h'} \rangle = 0, \forall h' \in [1, h - 1]$, alors pour tout $\ell \in [0, k - h]$, on a :

$$(*) \quad F_{\omega_{\ell+h}}(t) = \sum_{j=0}^{\ell} K_{\ell}^j t^{m+u} (\text{Log } t)^j$$

où les constantes K_{ℓ}^j sont données par la formule de récurrence : $K_{\ell-1}^{j-1} = j K_{\ell}^j$ si $j \neq 0$ et $\ell \neq 0$, $K_{\ell}^0 \in \mathbf{C}$ et $K_0^0 = \frac{1}{t_0^{m+u}} F_{\omega_h}(t_0)$ ($= \frac{1}{t_0^{m+u}} \langle X_{\mathbf{R}}(t_0), e_h \rangle$).

La formule (*) montre que le critère (C) est nécessaire, pour avoir un terme singulier, dans le sens suivant : s'il existe un élément de \mathcal{M} ayant un terme singulier t^{p+u} , alors le cycle $X_{\mathbf{R}}(t_0)$ ne s'annule pas sur au moins un vecteur e_h associé à la valeur propre $e^{-2i\pi u}$. \square

Remarque.

1) La formule (*) montre qu'il n'y a pas, dans le cas (I), de contribution sur-effective de la valeur propre 1, comme dans le cas complexe (voir [3]).

2) Le théorème 1.3 est trivial dans les situations suivantes :

α) Cas (I), puisque $H_p(X_{\mathbf{R}}(t), \mathbf{C}) = \{0\}, 1 \leq p \leq n - 1$.

β) Cas (II) avec singularité isolée dans le complexe, puisque $H_p(X(t), \mathbf{C}) = \{0\}$, d'après J. Milnor [11].

Nous nous plaçons dorénavant dans le cas (II), $n \geq 2$, avec singularité non isolée dans le complexe. Le théorème 1.3 est équivalent à l'assertion suivante :

Pour tout bloc de Jordan de taille (k, k) e_1, \dots, e_k associé à la valeur propre $\zeta = e^{-2i\pi u}$, $0 \leq u < 1$, de la monodromie $T_p = H^p(X(t_0), \mathbf{C}) \rightarrow H^p(X(t_0), \mathbf{C})$, $1 \leq p \leq n-1$, on a : $e_h \in (i_* H_p(X_{\mathbf{R}}^A(t_0), \mathbf{C}))^\perp$ dans les cas suivants :

- 1) $\zeta \neq 1$, $1 \leq h \leq k$.
- 2) $\zeta = 1$, $k \geq 2$ et $1 \leq h \leq k-1$.

Nous allons faire la démonstration en deux étapes :

1ère étape. — $k = 1$, $\zeta \neq 1$.

Considérons une p -forme holomorphe ω sur X qui est associée par le lemme 3.1 au vecteur e_1 . Pour tout $t_0 \in \mathbf{R}_+^* \cap D$, elle vérifie :

$$d\omega = (m+u) \frac{df}{f} \wedge \omega, \quad m \in \mathbf{N} \text{ et } \omega|_{X(t_0)} = t_0^{m+u} e_1.$$

On définit sur $X_{\mathbf{R}}$ un courant U de degré p en posant :

$$\langle U, \theta \rangle = P_0(\lambda = -m-u, \int_A f^\lambda \omega \wedge \theta),$$

pour θ dans $C_c^\infty(X_{\mathbf{R}})$ de degré $n+1-p$, où P_0 désigne le terme constant dans le développement de Laurent en $\lambda = -m-u$, du prolongement méromorphe de $\int_A f^\lambda \omega \wedge \theta$.

LEMME 3.3. — Le courant U est exact sur $X_{\mathbf{R}} - \{0\}$. □

Démonstration. — Pour θ une forme dans $C_c^\infty(X_{\mathbf{R}})$ de degré $n-p$ et $\text{Re } \lambda \gg 0$, la relation :

$$d(f^\lambda \omega \wedge \theta) = \lambda f^{\lambda-1} df \wedge \omega \wedge \theta + f^\lambda d\omega \wedge \theta + (-1)^p f^\lambda \omega \wedge d\theta$$

et la formule de Stokes dans le cadre des ensembles semi-analytiques (d'après M. Herrera [8]) permettent d'avoir l'égalité des prolongements méromorphes sur \mathbf{C} :

$$(-1)^p \int_A f^\lambda \omega \wedge d\theta = -(\lambda + m + u) \int_A f^{\lambda-1} df \wedge \omega \wedge \theta.$$

Alors on a :

$$\begin{aligned} \langle dU, \theta \rangle &= (-1)^{p+1} \langle U, d\theta \rangle \\ &= P_0(\lambda = -m - u, (\lambda + m + u) \int_A f^{\lambda-1} df \wedge \omega \wedge \theta) \\ &= \text{Rés}(\lambda = -m - u, \int_A f^{\lambda-1} df \wedge \omega \wedge \theta) . \end{aligned}$$

Le support de dU est donc contenu dans $\{0\}$ (la singularité étant isolée en 0 et $\zeta \neq 1$). Ainsi le courant dU est nul sur $X_{\mathbf{R}} - \{0\}$ et donc $U = dV$ sur $X_{\mathbf{R}} - \{0\}$, puisque $H_p(X_{\mathbf{R}} - \{0\}, \mathbf{C}) = \{0\}$ (c'est une conséquence de la contractibilité de $X_{\mathbf{R}}$). \square

Supposons maintenant qu'il existe un cycle $\gamma \in H_p(X_{\mathbf{R}}^A(t_0), \mathbf{C})$ tel que $\int_{\gamma} e_1 \neq 0$.

Choisissons ξ dans $C_c^\infty(X_{\mathbf{R}}^A(t_0))$ de degré $n - p$, d -fermée qui représente γ dans $H_c^{n-p}(X_{\mathbf{R}}^A(t_0), \mathbf{C})$ (par dualité). Soit σ une fonction dans $C_c^\infty(]0, 2t_0[)$, $2t_0 < \eta$, telle que $\int_0^{2t_0} \sigma(t) dt = 1$. Alors la forme différentielle $\Gamma = \sigma(f(x)) F^*(\xi) \wedge df$ représente γ dans $H_c^{n-p+1}(X_{\mathbf{R}} \setminus X_{\mathbf{R}}(0), \mathbf{C})$ où $F = pr_1 \circ M$ et

$$\begin{array}{ccc} M : X_{\mathbf{R}}^+ & \xrightarrow{\sim} & X_{\mathbf{R}}(t_0) \times]0, 2t_0[\\ f \searrow & & \swarrow pr_2 \\ & &]0, 2t_0[\end{array}$$

est une trivialisaton C^∞ induite par la fibration de Milnor sur $X_{\mathbf{R}}^+ = \{x \in X_{\mathbf{R}} | f(x) > 0\}$. En effet pour θ dans $C_c^\infty(X_{\mathbf{R}} \setminus X_{\mathbf{R}}(0))$, de degré p et d -fermée, on aura

$$\begin{aligned} \int_{X_{\mathbf{R}} \setminus X_{\mathbf{R}}(0)} \Gamma \wedge \theta &= \int_{X_{\mathbf{R}}^+} \Gamma \wedge \theta \\ &= \int_0^{2t_0} \sigma(t) dt \int_{X_{\mathbf{R}}(t_0)} \xi \wedge \theta \\ &= \int_{X_{\mathbf{R}}^A(t_0)} \xi \wedge \theta = \int_{\gamma} \theta , \end{aligned}$$

par Fubini.

Il est clair que le support de Γ (resp. U) est dans A (resp. \bar{A}) et que $U|_{X_{\mathbf{R}} \setminus X_{\mathbf{R}}(0)} = \frac{\omega}{f^{m+u}}|_A$. Pour $\theta = \frac{\omega}{f^{m+u}}$, on obtient d'une part :

$$\int_{X_{\mathbf{R}}} \Gamma \wedge \frac{\omega}{f^{m+u}} = (-1)^{n-p+1} \langle U, \Gamma \rangle = (-1)^{n+1} \langle V, d\Gamma \rangle = 0 ,$$

puisque $dV = U$ et $d\Gamma = 0$; et on a d'autre part :

$$\int_{X_{\mathbf{R}}} \Gamma \wedge \frac{\omega}{f^{m+u}} = \int_{X_{\mathbf{R}}^A(t_0)} \xi \wedge \frac{\omega}{f^{m+u}} = \int_{\gamma} e_1 .$$

Nous obtenons ainsi une contradiction puisque $\int_{\gamma} e_1 \neq 0$ par hypothèse. Ceci termine la première étape.

2ème étape. — $k \geq 2$, $\zeta = e^{-2i\pi u}$ quelconque.

Notons $\omega_1, \dots, \omega_k$ les p -formes holomorphes sur X qui sont associées par le lemme 3.1 au bloc. Pour $j \in \mathbf{Z}$, on définit sur $X_{\mathbf{R}}$ le courant U^j de degré p , en posant :

$$\langle U^j, \theta \rangle = \sum_{a=0}^{k-1} (-1)^a P_{a+j}(\lambda = -m - u, \int_A f^\lambda \omega_{a+1} \wedge \theta)$$

pour θ dans $C_c^\infty(X_{\mathbf{R}})$ de degré $n + 1 - p$, où P_μ désigne le coefficient de $(\lambda + m + u)^{-\mu}$ dans le développement de Laurent en $\lambda = -m - u$ du prolongement méromorphe de $\int_A f^\lambda \square$. On a alors un lemme analogue à celui de la 1ère étape.

LEMME 3.4. — Pour $j \geq 1 - k$, on a :

a) Le courant U^j est exact sur $X_{\mathbf{R}} \setminus \{0\}$ si $u \neq 0$.

b) Le courant U^{j+1} est exact sur $X_{\mathbf{R}} \setminus \{0\}$ si $u = 0$. □

Démonstration. — Pour θ dans $C_c^\infty(X_{\mathbf{R}})$ de degré $n - p$, la formule :

$$d(f^\lambda \omega_{a+1} \wedge \theta) = (\lambda + m + u) f^{\lambda-1} df \wedge \omega_{a+1} \wedge \theta + f^{\lambda-1} df \wedge \omega_a \wedge \theta + (-1)^p f^\lambda \omega_{a+1} \wedge \theta ,$$

pour $\text{Re } \lambda \gg 0$ et la formule de Stokes dans le cadre des ensembles semi-analytiques permettent d'avoir l'égalité des prolongements méromorphes sur \mathbf{C} :

$$(-1)^{p-1} \int_A f^\lambda \omega_{a+1} \wedge d\theta = (\lambda + m + u) \int_A f^{\lambda-1} df \wedge \omega_{a+1} \wedge \theta + \int_A f^{\lambda-1} df \wedge \omega_a \wedge \theta ,$$

et donc l'égalité :

$$\begin{aligned} (-1)^{p-1} P_\mu(\lambda = -m - u, \int_A f^\lambda \omega_{a+1} \wedge d\theta) \\ &= P_{\mu+1}(\lambda = -m - u, \int_A f^{\lambda-1} df \wedge \omega_a \wedge \theta) \\ &\quad + P_\mu(\lambda = -m - u, \int_A f^{\lambda-1} df \wedge \omega_a \wedge \theta) . \end{aligned}$$

Ainsi on a :

$$(dU^j, \theta) = (-1)^{k-1} P_{k+j}(\lambda = -m - u, \int_A f^{\lambda-1} df \wedge \omega_k \wedge \theta) .$$

Pour $j \geq 1 - k$, $u \neq 0$ (resp. $u = 0$) le support de dU^j (resp. dU^{j+1}) est dans $\{0\}$ puisque $k + j \geq 1$ (resp. $k + j + 1 \geq 2$). La nullité du groupe $H_p(X_{\mathbf{R}} \setminus \{0\}, \mathbf{C})$ donne le résultat. \square

Supposons maintenant qu'il existe $\gamma \in H_p(X_{\mathbf{R}}^A(t_0), \mathbf{C})$ et $h \in [1, k]$ tels que :

$$\int_{\gamma} e_h \neq 0 \text{ et } e_{h'} \in (i_*(H_p(X_{\mathbf{R}}^A(t_0), \mathbf{C})))^{\perp}, \forall h' \in [1, h-1] .$$

Supposons que $u \neq 0$ et prenons $j = 1 - h$, on a $j \geq 1 - k$, donc $U^{1-h} = dV^{1-h}$ sur $X_{\mathbf{R}} \setminus \{0\}$ où V^{1-h} est un courant de degré $p - 1$, d'après le a) du lemme 3.4.

Nous avons :

$$U^{1-h} = \sum_{a=0}^{k-1} (-1)^a P_{a+1-h}(\lambda = -m - u, \int_A f^{\lambda} \omega_{a+1} \wedge \square)$$

où $P_{a+1-h}(\lambda = -m - u, \int_A f^{\lambda} \omega_{a+1} \wedge \square)$ désigne le courant de degré p , qui à φ dans $C_c^{\infty}(X_{\mathbf{R}})$ de degré $n + 1 - p$ associe le coefficient de $(\lambda + m + u)^{-a-1+h}$ dans le développement de Laurent en $\lambda = -m - u$ du prolongement méromorphe de $\int_A f^{\lambda} \omega_{a+1} \wedge \varphi$.

Et puisque pour $a \geq h$ le support de P_{a+1-h} est contenu dans $\{0\}$ (la singularité étant portée par l'origine), on obtient que sur $X_{\mathbf{R}} \setminus X_{\mathbf{R}}(0)$:

$$U^{1-h} = (-1)^{h-1} f^{-m-u} \omega_h|_A + \sum_{a=0}^{h-2} (-1)^a P_{a+1-h}(\lambda = -m - u, \int_A f^{\lambda} \omega_{a+1} \wedge \square).$$

Rappelons que pour $\tau \in \mathbf{Z}^-$ on a sur $X_{\mathbf{R}} \setminus X_{\mathbf{R}}(0)$, pour χ une forme C^{∞} sur $X_{\mathbf{R}}$:

$$P_{\tau}(\lambda = -m - u, \int_A f^{\lambda} \chi \wedge \square) = \frac{(\text{Log } f)^{-\tau}}{(-\tau)!} f^{-m-u} \chi|_A .$$

Ceci découle du fait que pour $f \neq 0$, on a $\frac{\partial}{\partial \lambda} f^{\lambda} = (\text{Log } f) f^{\lambda-1}$.

Nous obtenons que sur $X_{\mathbf{R}} \setminus X_{\mathbf{R}}(0)$:

$$U^{1-h} = (-1)^{h-1} f^{-m-u} \omega_h|_A + \sum_{a=0}^{h-2} \frac{(-1)^a}{(h-a-1)!} (\text{Log } f)^{h-1-a} f^{-m-u} \omega_{a+1}|_A .$$

Comme dans la première étape, nous considérons la forme $\Gamma = \sigma(f)F^*(\eta) \wedge df$ qui représente le cycle γ .

Montrons par récurrence que pour tout $1 \leq j \leq h-1$, il existe une forme α_j qui est C^∞ sur A de degré $p-1$ telle que $d(f^{-m-u}\omega_j - \frac{df}{f} \wedge \alpha_j) = 0$. L'hypothèse $\omega_j \in i_*(H_p(X_{\mathbf{R}}^A(t_0), \mathbf{C}))^\perp$ montre que $\omega_j|_{X_{\mathbf{R}}^A(t_0)} = 0$ dans $H^p(X_{\mathbf{R}}^A(t_0), \mathbf{C})$, ($H^p(A, \mathbf{C})$ est par restriction isomorphe à $H^p(X_{\mathbf{R}}^A(t_0), \mathbf{C})$).

Pour $j = 1$, on a $d(\frac{\omega_1}{f^{m+u}}) = 0$ et donc $\beta_1 = 0$ convient. Supposons que l'hypothèse de récurrence est vraie pour j . La forme d -fermée

$$f^{-m-u}\omega_j - \left(\frac{df}{f}\right) \wedge \alpha_j$$

induit $t_0^{-m-u}\omega_j$ dans $H^p(X_{\mathbf{R}}^A(t_0), \mathbf{C})$, donc sa classe de cohomologie. Il existe une forme $\beta \in C^\infty(A)$ de degré $p-1$ vérifiant : $d\beta = f^{-m-u}\omega_j - \frac{df}{f} \wedge \omega_j$. La relation $d\omega_{j+1} = (m+u)\frac{df}{f} \wedge \omega_{j+1} + \frac{df}{f} \wedge \omega_j$ donne $d(f^{-m-u}\omega_{j+1} - \frac{df}{f} \wedge \beta) = 0$ sur A . On prendra donc $\alpha_{j+1} = -\beta$. Ainsi on a une forme $\alpha_h \in C^\infty(A)$ de degré $p-1$ telle que $d(f^{-m-u}\omega_h - \frac{df}{f} \wedge \alpha_h) = 0$.

Ecrivons que :

$$\begin{aligned} U^{1-h} &= (-1)^{h-1} \left(f^{-m-u}\omega_h - \frac{df}{f} \wedge \omega \right) |_A \\ &+ \sum_{a=0}^{h-2} \frac{(-1)^a}{(h-a-1)!} (\text{Log } f)^{h-1-a} \left(f^{-m-u}\omega_{a+1} - \frac{df}{f} \wedge \alpha_{a+1} \right) |_A \\ &+ \frac{df}{f} \wedge \left((-1)^{h-1} \alpha_h + \sum_{a=0}^{h-2} \frac{(-1)^a}{(h-a-1)!} (\text{Log } f)^{h-1-a} \alpha_{a+1} \right) |_A \end{aligned}$$

et appliquons U^{1-h} à Γ :

$$\begin{aligned} \langle U^{1-h}, \Gamma \rangle &= (-1)^{h-1} \int_A \Gamma \wedge \left(f^{-m-u}\omega_h - \frac{df}{f} \wedge \alpha_h \right) \\ &+ \sum_{a=0}^{h-2} \frac{(-1)^a}{(h-a-1)!} \int_A (\text{Log } f)^{h-1-a} \Gamma \wedge \left(f^{-m-u}\omega_{a+1} - \frac{df}{f} \wedge \alpha_{a+1} \right). \end{aligned}$$

Il est clair que, par dualité, la forme $(\text{Log } f)^b \Gamma$ représente le cycle $(\text{Log } t_0)^b \gamma$ dans $H_c^{n-p+1}(A, \mathbf{C})$ via l'isomorphisme donné par restriction : $H_c^{n-p+1}(A, \mathbf{C}) \simeq H_c^{n-p+1}(X_{\mathbf{R}}^A(t_0), \mathbf{C})$. On a donc l'égalité :

$$(\text{Log } t_0)^{h-1-a} \int_{\gamma} f^{-m-u}\omega_{a+1} = \int_A (\text{Log } f)^{h-1-a} \Gamma \wedge \left(f^{-m-u}\omega_{a+1} - \frac{df}{f} \wedge \alpha_{a+1} \right).$$

Par hypothèse $\int_{\gamma} f^{-m-u} \omega_{a+1} = \int_{\gamma} e_{a+1} = 0$ pour $0 \leq a \leq h-2$, et $\int_{\gamma} e_h \neq 0$ où $e_j = f^{-m-u} \omega_j|_{X(t_0)}$.

Finalement on obtient :

$$\langle U^{1-h}, \Gamma \rangle = (-1)^{h-1} \int_{\gamma} e_h \neq 0.$$

D'autre part, on a :

$$\langle U^{1-h}, \Gamma \rangle = \langle dV^{1-h}, \Gamma \rangle = \pm \langle V^{1-h}, d\Gamma \rangle = 0,$$

puisque $d\Gamma = 0$.

Notre hypothèse mène à une contradiction, ceci finit la preuve de la 2ème étape pour le cas $u \neq 0$. Pour démontrer le résultat dans le cas où $u = 0$, on fait une démarche analogue en appliquant le b) du lemme 3.4 au courant U^{1+j} , $j = 1-h$, chose qu'on peut faire puisque $1-h \geq 1-k$.

Nous avons ainsi établi le théorème 1.3. Remarquons que ce théorème est l'analogue du résultat démontré par J. Milnor [11] : pour un germe de fonction analytique $f : (\mathbf{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbf{C}, 0)$ à singularité isolée, on a $H^p(X(s), \mathbf{C}) = \{0\}$ pour $1 \leq p \leq n-1$. Le théorème 1.3 nous assure, en particulier, que $i_*(H_p(X_{\mathbf{R}}^A(t_0), \mathbf{C})) = \{0\}$ si la monodromie T_p n'a pas de valeur propre 1.

4. Exemples.

Pour illustrer notre résultat, nous allons donner quelques exemples. Au lieu de calculer $\mathcal{M}/\mathbf{C}[[t]] \cap \mathcal{M}$, ce qui nécessite la connaissance des n -formes holomorphes $(\omega_j)_{1 \leq j \leq \mu}$ du théorème 1.1, nous allons calculer le $\mathbf{C}[[t]]$ -module $\mathcal{N}/\mathbf{C}[[t]] \cap \mathcal{N}$ qui est engendré par les développements asymptotiques de

$$\int_{X_{\mathbf{R}}^A(t)} \rho \omega_j, \quad 1 \leq j \leq \mu,$$

où $(\omega_j)_{1 \leq j \leq \mu}$ est la famille des n -formes holomorphes sur X , associées par le lemme 3.1 à la décomposition en blocs de Jordan de la monodromie T_n . Nous pouvons ainsi préciser, dans certains cas, les termes singuliers de \mathcal{M} (puisque l'on a $t^k(\mathcal{M}/\mathbf{C}[[t]] \cap \mathcal{M}) \subset \mathcal{N}/\mathbf{C}[[t]] \cap \mathcal{N} \subset \mathcal{M}/\mathbf{C}[[t]] \cap \mathcal{M}$, chose qui découle des inclusions $s^k \mathcal{F} \subset \mathcal{Y} \subset \mathcal{F}$), ou bien les pôles de $\int_A f^\lambda df \wedge \square$ à un entier naturel près, si l'on préfère.

Nous avons choisi trois exemples :

- (*) $(X^2 + Y^2)^2 \pm Z^4$: réductible, admettant une forme réelle positive.
- (**) $(X^2 + Y^2)^2 - Z^3$: irréductible, n'admettant pas de forme réelle positive.
- (***) $(X^2 + Y^2)^2 + U^2 + Z^2$: irréductible, positif.

Nous allons détailler les calculs essentiellement dans le cas (*). On aura besoin des deux résultats classiques suivants :

1) Pour toute variété analytique complexe V et toute hypersurface lisse $Y \subset V$, on a la longue suite exacte de Leray :

$$(1) \quad \dots \rightarrow H^p(V, \mathbf{C}) \rightarrow H^p(V - Y, \mathbf{C}) \rightarrow H^{p-1}(Y, \mathbf{C}) \rightarrow H^{p+1}(V, \mathbf{C}) \rightarrow \dots$$

2) Soit un germe de fonction analytique $f : (\mathbf{C}^3, 0) \rightarrow (\mathbf{C}, 0)$. On suppose que le lieu singulier S de $X(0)$ est une courbe singulière en 0. On note par \underline{H}^1 le faisceau constructible sur S , dont la fibre au pont $x \in S$ est le groupe H^1 de la fibre de Milnor de f en x . On a alors l'isomorphisme suivant : $H^1(X(s), \mathbf{C}) \simeq H^0(S, \underline{H}^1)$ pour s dans D^* (on trouvera la démonstration de ce résultat dans l'article de D. Barlet : Interaction de strates consécutives pour les cycles évanescents, à paraître aux Ann. Scient. ENS).

Exemple 4.1 : $(X^2 + Y^2)^2 \pm Z^4$.

Par un changement de variables complexes, on se ramène à $f(x, y, z) = x^2y^2 - z^4$. Notons par F la fibre type en 0. La monodromie $T_2 : H^2(F, \mathbf{C}) \rightarrow H^2(F, \mathbf{C})$ est induite par l'isomorphisme $(x, y, z) \rightarrow (ix, iy, iz)$. Elle vérifie donc $T_2^4 = \text{id}$, par conséquent elle est semi-simple et l'ensemble des valeurs propres est contenu dans $\{1, -1, i, -i\}$.

La fibre F (qui est connexe) est un revêtement ramifié de degré 4 sur \mathbf{C}^2 , par la projection $\pi : F \rightarrow \mathbf{C}^2 / \pi(x, y, z) = (x, y)$. Le lieu de ramification étant $R = \{x^2y^2 = 1\}$ qui a pour seuls groupes de cohomologie $H^0(R, \mathbf{C}) = \mathbf{C}^2$ et $H^1(R, \mathbf{C}) = \mathbf{C}^2$. En écrivant la suite exacte (1) pour l'inclusion $R \subset F$ (resp. $R \subset \mathbf{C}^2$), on obtient la suite exacte (I) (resp. (II)) :

$$(I) \quad 0 \rightarrow H^1(F, \mathbf{C}) \rightarrow H^1(F \setminus R, \mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{C}^2 \rightarrow H^2(F, \mathbf{C}) \\ \rightarrow H^2(F \setminus R, \mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{C}^2 \rightarrow 0$$

$$(II) \quad 0 \rightarrow H^1(\mathbf{C}^2 \setminus R, \mathbf{C}) \simeq \mathbf{C}^2 \rightarrow 0 \rightarrow H^2(\mathbf{C}^2 \setminus R, \mathbf{C}) \simeq \mathbf{C}^2 \rightarrow 0 .$$

La variété $F \setminus R$ (qui est connexe) est un revêtement de degré 4 sur $\mathbf{C}^2 \setminus R$, on a alors $\chi(F \setminus R) = 4\chi(\mathbf{C}^2 \setminus R)$ (χ désigne la caractéristique d'Euler-Poincaré). D'autre part les groupes de cohomologie $H^p(F \setminus R, \mathbf{C})$ et $H^p(\mathbf{C}^2 \setminus R, \mathbf{C})$ sont nuls pour $p \geq 3$. En utilisant alors la relation entre les dimensions que donne (I), on obtient que :

$$\dim_{\mathbf{C}} H^2(F, \mathbf{C}) = 3 + \dim_{\mathbf{C}} H^1(F, \mathbf{C}) .$$

La singularité transverse près d'un point de $S^* = S - \{0\}$ (ici $S = \{xy = 0, z = 0\}$ s'écrit $\tilde{f}(u, v) = u^2 - v^4$ où l'on a posé $u = xy, v = z$). Sur chacune des composantes de S^* , le système local \underline{H}^1 admet trois sections : $2udv - vdu, 2uvdv - v^2du$ et $uv^2du - v^3du$ qui se prolongent à S . Ainsi on a $\dim_{\mathbf{C}} H^0(S, \underline{H}^1) \geq 3$; en fait il y a égalité, qui peut être déduite d'un calcul topologique.

On désigne par ω la forme homogène : $xdy \wedge dz - ydx \wedge dz + zdx \wedge dy$; cherchons une base de $H^2(F, \mathbf{C})$, qui est de dimension 6, parmi les candidats que donne le tableau suivant :

vecteur		valeur propre associée
$e_1 = [f^{-3/4}\omega]$, $d\omega = \frac{3}{4} \frac{df}{f} \wedge \omega$	$\lambda_1 = i$
$e_2 = [f^{-1}z\omega]$, $d(z\omega) = \frac{df}{f} \wedge z\omega$	$\lambda_2 = 1$
$e_3 = [f^{-5/4}z^2\omega]$, $d(z^2\omega) = (1 + \frac{1}{4}) \frac{df}{f} \wedge z^2\omega$	$\lambda_3 = -i$
$e_4 = [f^{-5/4}xy\omega]$, $d(xy\omega) = (1 + \frac{1}{4}) \frac{df}{f} \wedge xy\omega$	$\lambda_4 = -i$
$e_5 = [f^{-3/2}xyz\omega]$, $d(xyz\omega) = (1 + \frac{1}{2}) \frac{df}{f} \wedge xyz\omega$	$\lambda_5 = -1$
$e_6 = [f^{-7/4}xyz^2\omega]$, $d(xyz^2\omega) = (1 + \frac{3}{4}) \frac{df}{f} \wedge xyz^2\omega$	$\lambda_6 = i$

Les vecteurs e_1, e_2, e_3 sont non nuls : en effet ils ne s'annulent pas sur la 2-chaîne suivante :

$$\Gamma : [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \longrightarrow F/\Gamma(\theta, \varphi) = (\cos \theta e^{i\varphi}, e^{-i\varphi}, (-1)^{1/4} \sqrt{\sin \theta})$$

où pour $x \in \mathbf{R}, \sqrt{x} = \sqrt{|x|}$ si $x \geq 0$ et $\sqrt{x} = i\sqrt{|x|}$ si $x \leq 0$.

En remarquant que $\omega|_F = -\frac{dx \wedge dy}{z^3}$, on a immédiatement :

$$\int_{\Gamma} e_1 = \frac{-2i\pi}{(-1)^{1/4}} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin \theta}} \neq 0 ,$$

$$\int_{\Gamma} e_2 = \frac{-2i\pi}{(-1)^{1/4}} \int_0^{2\pi} d\varphi \neq 0 ,$$

et

$$\int_{\Gamma} e_3 = \frac{-2i\pi}{(-1)^{1/4}} \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin \theta} d\theta \neq 0.$$

Les vecteurs e_3 et e_4 (resp. e_1 et e_6) sont linéairement indépendants puisque $\int_{\Gamma} e_4 = \int_{\Gamma} e_6 = 0$. En fait nous déduirons des calculs des développements asymptotiques qui suivent, que les vecteurs $(e_i)_{1 \leq i \leq 6}$ sont non nuls et par conséquent, ils forment une base horizontale multiforme du fibré $s \in D^* \rightarrow H^2(X(s), \mathbf{C})$. Il sera alors clair que les formes ω , $z\omega$, $z^2\omega$, $xy\omega$, $xyz\omega$ et $xyz^2\omega$ sont celles qu'on associe par le lemme 3.1 aux valeurs propres respectives : (i) , (-1) , $(-i)$, $(-i)$, (-1) et (i) .

Considérons le changement de variables $x = X + iY$, $y = X - iY$ et $z = Z$, alors la forme réelle est $(X^2 + Y^2)^2 - Z^4$ et on a $\omega|_{f=t} = -2it \frac{dX \wedge dY}{Z^3}$. Le complémentaire de $\{(X^2 + Y^2)^2 - Z^4 = 0\}$ possède trois composantes connexes :

$$A = \{(X^2 + Y^2)^2 - Z^4 < 0, Z > 0\},$$

$$B = \{(X^2 + Y^2)^2 - Z^4 < 0, Z < 0\},$$

et

$$C = \{(X^2 + Y^2)^2 - Z^4 > 0\}.$$

Soit le compact $K = \{X^2 + Y^2 \leq 2 \text{ et } |Z| \leq 1, (X, Y, Z) \in \mathbf{R}^3\}$.

I. — Sur A : pour $t < 0$ voisin de zéro, on pose $L(t) = K \cap X_{\mathbf{R}}^A(t)$, on a :

$$\begin{aligned} \text{a) } \int_{L(t)} \omega &= -2it \int_{X^2+Y^2 \leq 2} \frac{dX \wedge dY}{[(X^2 + Y^2)^2 - t]^{3/4}} \\ &= C_1(-t)^{3/4} + \sum_{n \geq 0} \frac{2i\pi a_n}{4n+1} \frac{(-t)^{n+1}}{4^n \sqrt{2}}, \end{aligned}$$

où

$$C_1 = 4i\pi \int_0^{+\infty} \frac{dv}{(1+v^4)^{3/4}}, \sum_{n \geq 0} a_n v^{4n} = (1+v^4)^{-3/4}.$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \int_{L(t)} Z\omega &= -2it \int_{X^2+Y^2 \leq 2} \frac{dX \wedge dY}{[(X^2 + Y^2)^2 - t]^{1/2}} \\ &= C_2(-t) \text{Log}(-t) + C'_2(-t) - \sum_{n \geq 1} \frac{2i\pi a_n (-t)^{n+1}}{n4^{n+1}}, \end{aligned}$$

où

$$C_2 = 2i\pi, C'_2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_0^{+\infty} \frac{dv}{v(1+v^4)^{1/2}} + \text{Log } \varepsilon \right), (1+v^4)^{-1/2} = \sum_{n \geq 0} a_n v^{4n}.$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \int_{L(t)} Z^2 \omega &= -2it \int_{X^2+Y^2 \leq 2} \frac{dX \wedge dY}{[(X^2+Y^2)^2 - t]^{1/4}} \\ &= C_3 (-t)^{5/4} - \sum_{n \geq 0} \frac{2i\pi a_n}{4n-1} \frac{(-t)^{n+1}}{4^n}, \end{aligned}$$

où

$$C_3 = 2i\pi \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{dv}{v^2(1+v^4)^{1/4}} - \varepsilon^{-1} \right), v^{-2}(1+v^4)^{-1/4} = \sum_{n \geq 0} a_n v^{4n-2}.$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \int_{L(t)} (X^2+Y^2)\omega &= -2it \int_{X^2+Y^2 \leq 2} (X^2+Y^2) \frac{dX \wedge dY}{[(X^2+Y^2)^2 - t]^{3/4}} \\ &= C_4 (-t)^{5/4} - \sum_{n \geq 0} \frac{2i\pi a_n}{(4n-1)} \frac{(-t)^{n+1}}{4^n \sqrt{2}}, \end{aligned}$$

où

$$C_4 = 2i\pi \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_0^{+\infty} \frac{dv}{v^2(1+v^2)^{1/4}} - \varepsilon^{-1} \right), v^{-2}(1+v^2)^{-1/4} = \sum_{n \geq 0} a_n v^{4n-2}.$$

$$\begin{aligned} \text{e) } \int_{L(t)} (X^2+Y^2)Z\omega &= -2it \int_{X^2+Y^2 \leq 2} (X^2+Y^2) \frac{dX \wedge dY}{Z^2} \\ &= C_5 (-t)^{3/2} - \sum_{n \geq 0} \frac{4i\pi a_n (-t)^{n+1}}{(4n-2)4^n}, \end{aligned}$$

où

$$C_5 = 2i\pi \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{dv}{v^3(1+v^4)^{1/2}} - \frac{\varepsilon^{-1}}{2} \right), v^{-3}(1+v^2)^{-1/2} = \sum_{n \geq 0} a_n v^{4n-3}.$$

$$\begin{aligned} \text{f) } \int_{L(t)} (X^2+Y^2)Z^2\omega &= -2it \int_{X^2+Y^2 \leq 2} (X^2+Y^2) \frac{dX \wedge dY}{Z} \\ &= C_6 (-t)^{7/4} - \sum_{n \geq 0} \frac{4\sqrt{2}\pi i a_n (-t)^{n+1}}{(4n-3)4^n}, \end{aligned}$$

où

$$C_6 = 2i\pi \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{dv}{v^4(1+v^4)^{1/4}} - \frac{\varepsilon^{-3}}{3} \right), v^{-4}(1+v^4)^{-1/4} = \sum_{n \geq 0} a_n v^{4n-4}.$$

Les constantes $(C_i)_{1 \leq i \leq 6}$ sont non nulles. Pour s'en convaincre dans le cas $i \geq 3$, il suffit de faire un calcul élémentaire. Faisons-le pour $i = 3$: posons

$$g(\varepsilon) = \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{dv}{v^2(1+v^4)^{1/4}} - \varepsilon^{-1} \text{ pour } \varepsilon \in]0, 1],$$

cette fonction est dérivable et $g'(\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon^2(1+\varepsilon^4)^{1/4}} + \frac{1}{\varepsilon^2} > 0$. Comme $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g(\varepsilon) \neq -\infty$, $g(\varepsilon) < g(1) = \int_1^{+\infty} \frac{dv}{v^2(1+v^4)^{1/4}} - 1 \leq 0$ et g étant croissante, on obtient $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g(\varepsilon) \neq 0$.

Les formes qui correspondent aux vecteurs $(e_i)_{1 \leq i \leq 6}$ sont sans torsion puisque chaque développement asymptotique possède un terme singulier (voir le 2), après la proposition 2.5 du §2). On en déduit que les vecteurs $(e_i)_{1 \leq i \leq 6}$ sont non nuls et donnent une base de Jordan de la monodromie T_2 . On en déduit, aussi, que $(-t)^{3/4}$, $(-t)^{5/4}$ et $(-t)^{3/2}$ et $(-t) \text{Log}(-t)$ sont les générateurs de $\mathcal{N}/\mathbf{C}[[t]] \cap \mathcal{N}$.

Ainsi sur la composante connexe A (et également sur B par symétrie), toutes les valeurs propres de la monodromie T_2 provoquent des termes singuliers dans le module des développements asymptotiques.

II. — Sur C : un calcul analogue montre que seules les valeurs propres 1 et -1 provoquent des termes singuliers, le module $\mathcal{N}/\mathbf{C}[[t]] \cap \mathcal{N}$ est engendré par $t \text{Log } t$ et $t^{3/2}$.

III. — Par le changement de variables $(X, Y, Z) \rightarrow (X, Y, (-1)^{1/4}Z)$, on a la forme réelle $(X^2 + Y^2)^2 + Z^4$. On obtient dans cette situation que $t^{3/2}$ comme générateur de $\mathcal{N}/\mathbf{C}[[t]] \cap \mathcal{N}$. Et seules les valeurs propres (simples) 1 et -1 contribuent aux développements asymptotiques. La contribution de 1 est simple (pas de $\text{Log } t$) car la fibre est compacte, en vertu de la formule (*) établie dans la démonstration du 2) de la proposition 3.2.

Exemple 4.2 : $(X^2 + Y^2)^2 - Z^3$.

Par un changement de variables, on se ramène à la fonction $x^2y^2 - z^3$. En utilisant la même démarche que l'exemple précédent, on obtient :

i) $\dim_{\mathbf{C}} H^2(x^2y^2 - z^3 = 1, \mathbf{C}) = 4$.

ii) Si ω désigne la forme homogène $3xdy \wedge dz - 3ydx \wedge dz + 4zdx \wedge dy$, la base est donnée par les vecteurs e_1, e_2, e_3 et e_4 ci-dessous :

vecteur	valeur propre associée
$e_1 = \left[\frac{\omega}{f^{5/6}} \right], d\omega = \frac{5}{6} \frac{df}{f} \wedge \omega$	$\lambda_1 = e^{-5i\pi/3}$
$e_2 = \left[\frac{\omega}{f^{7/6}} \right], d(z\omega) = \frac{7}{6} \frac{df}{f} \wedge z\omega$	$\lambda_2 = e^{-i\pi/3}$
$e_3 = \left[\frac{\omega}{f^{8/6}} \right], d(xy\omega) = \frac{8}{6} \frac{df}{f} \wedge xy\omega$	$\lambda_3 = e^{-2i\pi/3}$
$e_4 = \left[\frac{\omega}{f^{5/3}} \right], d(xyz\omega) = \frac{5}{3} \frac{df}{f} \wedge xyz\omega$	$\lambda_4 = e^{-4i\pi/3}$

Les calculs donnent aussi que sur la composante connexe $\{(X^2 + Y^2)^2 - Z^3 > 0\}$ (et $\{(X^2 + Y^2)^2 - Z^3 < 0\}$) le module des développements asymptotiques $\mathcal{N}/\mathbf{C}[[t]] \cap \mathcal{N}$ est engendré par $(\pm t)^{5/6}$, $(\pm t)^{7/6}$, $(\pm t)^{4/3}$ et $(\pm t)^{5/3}$. Il y a donc pour cet exemple une contribution de toutes les valeurs propres pour chacune des composantes connexes.

Exemple 4.3 : $(X^2 + Y^2)^2 + Z^2 + U^2$.

On se ramène à $x^2y^2 + z^2 + u^2$ et on procède de la même façon que dans l'exemple 4.1, ce qui donne $\dim_{\mathbf{C}} H^3(x^2y^2 + z^2 + u^2 = 1, \mathbf{C}) = 2$ et comme générateurs $[\omega]$ et $[xy\omega]$ où $\omega = xdy \wedge dz \wedge du - ydx \wedge dz \wedge du + 2zdx \wedge dy \wedge du - 2udx \wedge dy \wedge dz$. La monodromie est semi-simple et la valeur propre de $\frac{\omega}{f^{3/2}}$ (resp. $\frac{\omega}{f^2}$) est -1 (resp. 1). En effet dans les coordonnées (X, Y, Z, U) , on a :

$$\int_{(X^2+Y^2)^2+Y^2+U^2=t} \omega \neq 0, \text{ et } \int_{(X^2+Y^2)^2+Y^2+U^2=t} (X^2 + Y^2)\omega \neq 0.$$

Le générateur de $\mathcal{N}/\mathbf{C}[[t]] \cap \mathcal{N}$ est $t^{3/2}$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] D. BARLET, Contribution effective dans le réel, *Compositio Mathematica*, 56 (1985), 351-359.
- [2] D. BARLET, Contribution effective de la monodromie aux développements asymptotiques, *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.*, 4ème série, 17 (1984), 293-315.
- [3] D. BARLET, Contribution du cup-produit de la fibre de Milnor aux pôles de $|f|^{2\lambda}$, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, 34-4 (1984), 75-107.
- [4] D. BARLET, Monodromie et pôles du prolongement méromorphe de $\int_X |f|^{2\lambda}$, *Bull. Soc. Math. France*, 114 (1986), 247-269.

- [5] D. BARLET, Forme hermitienne canonique sur la cohomologie de la fibre de Milnor d'une hypersurface à singularité isolée, *Invent. Math.*, 81 (1985), 115–153.
- [6] E. BIERSTONE et P.D. MILMAN, Semi-analytic and subanalytic sets, I.H.E.S., *Publications Mathématiques*, 67 (1988), 5–42.
- [7] H. HAMM, Zür analytischen und algebraischen Beschreibung der Picard-Lefschetz Monodromie, *Habilitationsschrift*, Göttingen, 1974.
- [8] M. HERRERA, Integration on a semi-analytic set, *Bull. Soc. Math. France*, 94 (1966), 141–180.
- [9] P. JEANQUARTIER, Développement asymptotique de la distribution de Dirac attachée à une fonction analytique, *C. R. Acad. Paris*, 271 (1970), 1159–1161.
- [10] H.M. MAIRE, Sur les distributions images réciproques par une fonction analytique, *Commentarii Math. Helveticii*, 51 (1976), 395–410.
- [11] J. MILNOR, Singular points of complex hypersurfaces, *Ann. of Math. Studies*, Princeton, 1968.
- [12] S. LOJASIEWICZ, Ensembles semi-analytiques, *Inst. Hautes Etudes Sci., Bures-sur-Yvette*, 1964.

Manuscrit reçu le 20 décembre 1990,
révisé le 22 février 1991.

Ahmed JEDDI,
Université de Nancy I
Département de Mathématiques
BP 239
Vandœuvre-les-Nancy Cedex (France).