ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

HUBERT DELANGE

Sur les zéros réels des polynômes de Bernoulli

Annales de l'institut Fourier, tome 41, nº 2 (1991), p. 267-309

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1991__41_2_267_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
41, 2 (1991), 267-309.

SUR LES ZÉROS RÉELS DES POLYNÔMES DE BERNOULLI

par Hubert DELANGE

1. Introduction.

Nous nous proposons ici de donner des démonstrations détaillées de résultats que nous avons énoncés précédemment dans une note de même titre [2].

1.1. Il nous faut commencer par quelques rappels.

1.1.1. Les polynômes de Bernoulli peuvent être définis de différentes façons. On peut, par exemple, les définir par récurrence de la façon suivante :

$B_0(x) = 1$ et, pour $n \geqslant 1$, B_n est déterminé par les conditions $B'_n(x) = nB_{n-1}(x)$ et $\displaystyle\int_0^1 B_n(x)\,dx = 0$.

On voit alors immédiatement que B_n est de degré n, le coefficient de x^n dans $B_n(x)$ étant 1. De plus, on établit facilement par récurrence pour $n \geqslant 1$ les identités

$$B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1} \tag{1}$$

et

$$B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x). \tag{2}$$

L'identité (2) montre que les zéros de B_n sont symétriques par rapport au point $1/2$.

Mots-clés : Zéros - Bornes supérieure et inférieure - Formule asymptotique.
Classification A.M.S. : 11B68 - 33A70.

On montre que l'on a pour $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $n > 1$

$$B_n(x) = (-1)^{n/2+1} \frac{2 \cdot n!}{(2\pi)^n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2k\pi x}{k^n} \quad \text{si } n \text{ est pair}$$

et

$$B_n(x) = (-1)^{(n+1)/2} \frac{2 \cdot n!}{(2\pi)^n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2k\pi x}{k^n} \quad \text{si } n \text{ est impair.}$$

On voit facilement que, pour $k \geqslant 1$, le polynôme B_{2k+1} a sur l'intervalle $[0,1]$ trois zéros simples, à savoir 0, $1/2$ et 1, et le polynôme B_{2k} a sur cet intervalle deux zéros simples, soit α_k et $1-\alpha_k$, où $0 < \alpha_k < 1/2$. On voit que $B_{2k+1}(x)$ est du signe de $(-1)^{k-1}$ sur $]0,1/2[$ et du signe de $(-1)^k$ sur $]1/2,1[$, et que $B_{2k}(x)$ est du signe de $(-1)^k$ sur $]\alpha_k, 1-\alpha_k[$ et du signe de $(-1)^{k-1}$ sur $[0,\alpha_k[$ et sur $]1-\alpha_k, 1]$.

J. Lense [5] a montré que la suite $\{\alpha_k\}$ est strictement croissante et tend vers $1/4$. Ce résultat a été obtenu aussi par D. H. Lehmer [4], qui a montré en outre que

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{2^{2k+1}\pi} < \alpha_k < \frac{1}{4}$$

et établi la formule asymptotique

$$\alpha_k = \frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi}(4^{-k} - 16^{-k} + 4.36^{-k}) + O(64^{-k}). \tag{3}$$

K. Inkeri [3] a montré que B_n n'a pas d'autre zéro rationnel que 0, $1/2$ et 1 si n est impair et n'a aucun zéro rationnel si n est pair.

J. Brillhart [1] a montré que, pour n impair, B_n n'a que des zéros simples, ce qui implique que, pour n pair, B_n n'a pas de zéros d'ordre > 2. On ne sait d'ailleurs pas s'il peut y avoir effectivement des zéros doubles.

1.1.2. Dans [3] Inkeri a étudié les zéros réels > 1 de B_n. (Il y en a pour $n=4$, $n=5$ et pour $n \geqslant 8$.)

Nous désignerons ici par $N = N(n)$ le nombre des zéros réels > 0 de B_n, et par $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_N^{(n)}$ ces zéros rangés par ordre croissant. Ainsi, pour n impair > 1, $x_1^{(n)} = 1/2$ et $x_2^{(n)} = 1$; pour n pair > 1, $x_1^{(n)} = \alpha_k$ et $x_2^{(n)} = 1 - \alpha_k$, où $k = n/2$.

Compte tenu de la symétrie par rapport au point $1/2$, le nombre total des zéros réels de B_n est $2N-2$ si n est pair >1 et $2N-1$ si n est impair.

Nous désignerons par $M = M(n)$ le plus grand entier $< x_N^{(n)}$.

Il est à noter que l'on a évidemment $B_n(x) > 0$ pour $x > x_N^{(n)}$. En particulier $B_n(M+1) > 0$ si $M \geqslant 1$.

Inkeri a établi les résultats suivants :

(a) Si $n \equiv 1 \pmod 4$ et $n \geqslant 5$ (de sorte que $M \geqslant 1$), tous les zéros réels > 1 de B_n sont contenus dans les intervalles $]m, m+1/2[$ où $1 \leqslant m \leqslant M$, à raison de un dans le premier et deux dans chacun des suivants (on a donc $N = 2M+1$).

Si $n \equiv 3 \pmod 4$ et $n \geqslant 11$, ils sont contenus dans les intervalles $]m+1/2, m+1[$ où $1 \leqslant m \leqslant M$, à raison de deux dans chaque (on a donc $N = 2M+2$).

Si n est pair $\geqslant 8$, soit $n = 2k$ avec $k \geqslant 4$, lorsque $M \geqslant 2$ chaque intervalle $]m, m+1[$ où $1 \leqslant m \leqslant M-1$ contient deux zéros simples.

Lorsque $n \equiv 2 \pmod 4$ et $n \geqslant 10$, c'est-à-dire lorsque k est impair $\geqslant 5$, l'intervalle $]M, M+1[$ contient deux zéros simples ou un zéro double (de sorte que $N = 2M+2$ ou $2M+1$). Les zéros contenus dans $]m, m+1[$ où $1 \leqslant m \leqslant M$ sont toujours dans $]m+\alpha_k, m+1-\alpha_k[$.

Lorsque $n \equiv 0 \pmod 4$, c'est-à-dire lorsque k est pair, l'intervalle $]M, M+1[$ contient un zéro simple situé dans $]M, M+\alpha_k[$ et éventuellement deux zéros simples ou un zéro double dans $]M+1-\alpha_k, M+1[$ (on a donc $N = 2M+1$ ou $2M+3$ s'il n'y a que des zéros simples, $N = 2M+2$ s'il y a un zéro double). Pour $1 \leqslant m \leqslant M-1$ (si $M \geqslant 2$), les zéros de B_n dans l'intervalle $]m, m+1[$ sont situés l'un dans l'intervalle $]m, m+\alpha_k[$, l'autre dans l'intervalle $]m+1-\alpha_k, m+1[$.

(b) On a quand n tend vers l'infini $M \sim n/2\pi e$ et par suite $N \sim n/\pi e$, et le nombre total des zéros réels de B_n est équivalent à $2n/\pi e$.

(c) Pour r fixé > 2, quand n tend vers l'infini par valeurs paires, $x_r^{(n)}$ tend vers $\dfrac{r}{2} - \dfrac{1}{4}$ et $x_r^{(n)} - \dfrac{r}{2} + \dfrac{1}{4} \sim (-1)^r/2^{n+1}\pi$.

Quand n tend vers l'infini par valeurs impaires, $x_r^{(n)}$ tend vers $\dfrac{r}{2}$ et

$$x_r^{(n)} - \frac{r}{2} \sim (-1)^{r+[n/2]} \frac{((r-2)\pi)^{n-1}}{2\cdot(n-1)\,!}.$$

1.2. Nous donnerons d'abord, dans la section 2, une formule asymptotique pour α_k plus poussée que la formule (3) de Lehmer, puis nous établirons dans les sections 4 et 5 des résultats qui améliorent substantiellement ceux d'Inkeri rappelés ci-dessus. Auparavant, nous aurons établi dans la section 3 un théorème qui joue un rôle fondamental dans toute la suite.

2. Expression asymptotique de α_k.

THÉORÈME 1. — *Il existe une suite de nombres rationnels λ_1, $\lambda_2, \ldots, \lambda_\nu, \ldots$, dont on peut calculer effectivement autant de termes qu'on le désire, telle que, pour tout $q \in \mathbb{N}^*$,*

$$\alpha_k = \frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=1}^{q} \frac{\lambda_\nu}{(2\nu)^{2k}} + O\left(\frac{1}{(2q+2)^{2k}}\right).$$

On a $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 4$, $\lambda_4 = \frac{-17}{6}$, $\lambda_5 = -4$, $\lambda_6 = -4$, $\lambda_7 = -8 \ldots$

La formule (3) de Lehmer correspond à $q = 3$.

Démonstration. — Posons $\alpha_k = \frac{1}{4} - \frac{\beta_k}{2\pi}$.

On doit alors montrer qu'il existe une suite $\{\lambda_\nu\}$ de nombres rationnels, dont on peut calculer effectivement autant de termes que l'on veut, telle que, pour tout $q \in \mathbb{N}^*$,

$$\beta_k = \sum_{\nu=1}^{q} \frac{\lambda_\nu}{(2\nu)^{2k}} + O\left(\frac{1}{(2q+2)^{2k}}\right). \tag{4}$$

Comme $0 < \alpha_k < \frac{1}{2}$, on a $|\beta_k| < \frac{\pi}{2}$.

On voit qu'il suffit de montrer qu'il existe une suite $\{\mu_\nu\}$ de nombres rationnels, que l'on peut calculer de proche en proche, telle que, pour tout $q \in \mathbb{N}^*$,

$$\sin \beta_k = \sum_{\nu=1}^{q} \frac{\mu_\nu}{(2\nu)^{2k}} + O\left(\frac{1}{(2q+2)^{2k}}\right). \tag{5}$$

Cela résulte de ce que, si $\gamma_k = \sin \beta_k$, on a pour tout $m \in \mathbb{N}$

$$\beta_k = \sum_{j=0}^{m} \frac{(2j)!}{2^{2j}(j!)^2} \cdot \frac{\gamma_k^{2j+1}}{2j+1} + O(\gamma_k^{2m+3}).$$

En fait, nous montrerons qu'il existe une suite d'*entiers* ayant la propriété indiquée, et notre démonstration indiquera comment on peut les calculer.

Notons d'abord que $\sin \beta_k = \cos 2\pi\alpha_k$.

Comme, pour $0 \leqslant x \leqslant 1$,

$$B_{2k}(x) = \frac{2(2k)!}{(2\pi)^{2k}}(-1)^{k+1}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\cos 2r\pi x}{r^{2k}},$$

on a

$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\cos 2r\pi\alpha_k}{r^{2k}} = 0.$$

Ceci donne d'abord $\cos 2\pi\alpha_k = -\sum_{r=2}^{\infty}\frac{\cos 2r\pi\alpha_k}{r^{2k}}$, d'où

$$(6) \qquad |\cos 2\pi\alpha_k| \leqslant \sum_{r=2}^{\infty}\frac{1}{r^{2k}} = O\left(\frac{1}{2^{2k}}\right).$$

Ensuite, on a pour tout $m \geqslant 2$

$$\cos 2\pi\alpha_k = -\sum_{r=2}^{m}\frac{\cos 2r\pi\alpha_k}{r^{2k}} - \sum_{r=m+1}^{\infty}\frac{\cos 2r\pi\alpha_k}{r^{2k}},$$

d'où

$$(7) \qquad \cos 2\pi\alpha_k = -\sum_{r=2}^{m}\frac{\cos 2r\pi\alpha_k}{r^{2k}} + O\left(\frac{1}{(m+1)^{2k}}\right).$$

On sait que, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on a $\cos nx = P_n(\cos x)$ où P_n est un polynôme de même parité que n, à coefficients entiers. Les polynômes P_n peuvent être déterminés par récurrence par

$$P_0(u) = 1, \qquad P_1(u) = u,$$

et, pour $n \geqslant 1$, $P_{n+1}(u) = 2uP_n(u) - P_{n-1}(u)$.

On a $P_2(u) = 2u^2 - 1$, $P_3(u) = 4u^3 - 3u$.

En prenant $m = 3$ dans (7) on obtient

$$\begin{aligned}\cos 2\pi\alpha_k &= \frac{1}{2^{2k}} - \frac{2\cos^2 2\pi\alpha_k}{2^{2k}} - \frac{1}{3^{2k}}(4\cos^3 2\pi\alpha_k - 3\cos 2\pi\alpha_k) + O\left(\frac{1}{4^{2k}}\right)\\ &= \frac{1}{2^{2k}} + O\left(\frac{1}{4^{2k}}\right) \text{ compte tenu de (6).}\end{aligned}$$

On voit ensuite que l'hypothèse que l'on a pour un $q \in \mathbb{N}^*$

$$\cos 2\pi\alpha_k = \sum_{\nu=1}^{q} \frac{\mu_\nu}{(2\nu)^{2k}} + O\left(\frac{1}{(2q+2)^{2k}}\right),$$

où les $\mu_\nu \in \mathbb{Z}$, entraîne que

$$\cos 2\pi\alpha_k = \sum_{\nu=1}^{2q+1} \frac{\mu'_\nu}{(2\nu)^{2k}} + O\left(\frac{1}{(4q+4)^{2k}}\right), \tag{8}$$

où les $\mu'_\nu \in \mathbb{Z}$, avec évidemment $\mu'_\nu = \mu_\nu$ pour $1 \leqslant \nu \leqslant q$. Ceci entraîne l'existence de la suite d'entiers $\{\mu_\nu\}$ telle que (5) ait lieu pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, puisque $\sin \beta_k = \cos 2\pi\alpha_k$.

On voit d'abord que, pour tout $s \geqslant 2$,

$$\begin{aligned}(\cos 2\pi\alpha_k)^s &= \left(\sum_{\nu=1}^{q} \frac{\mu_\nu}{(2\nu)^{2k}}\right)^s + O\left(\frac{1}{2^{2k}} \cdot \frac{1}{(2q+2)^{2k}}\right)\\ &= \sum_{\nu=2^{s-1}}^{2^{s-1}q^s} \frac{\sigma_\nu^{(s)}}{(2\nu)^{2k}} + O\left(\frac{1}{(4q+4)^{2k}}\right), \quad \text{où les } \sigma_\nu^{(s)} \in \mathbb{Z},\\ &= \sum_{\nu=1}^{2q+1} \frac{\mu_\nu^{(s)}}{(2\nu)^{2k}} + O\left(\frac{1}{(4q+4)^{2k}}\right),\end{aligned}$$

où $\mu_\nu^{(s)} = 0$ pour $\nu < 2^{s-1}$ et $\mu_\nu^{(s)} = \sigma_\nu^{(s)}$ pour $2^{s-1} \leqslant \nu \leqslant 2q+1$, en posant $\sigma_3^{(2)} = 0$.

(8) s'obtient alors en prenant $m = 4q+3$ dans (7) et tenant compte de ce que $\cos 2r\pi\alpha_k = P_r(\cos 2\pi\alpha_k)$.

3. Théorème fondamental.

Les résultats que nous démontrerons dans les sections suivantes sont basés sur une évaluation précise pour $x > 1$ de la différence $B_n(x) - B_n(\{x\})$, que nous désignerons par $R_n(x)$ (nous désignons par $\{x\}$ la partie fractionnaire $x - [x]$ de x).

Il résulte immédiatement de l'identité (1) que pour $n \geqslant 1$ et $x > 1$

$$R_n(x) = n \sum_{1 \leqslant k < x} (x-k)^{n-1}.$$

3.1. Théorème 2. — *On a pour $x > 1$ et $n > 2$*

$$R_n(x) = n(x-1)^{n-1}(1-e^{-n/(x-1)})^{-1}(1+\rho_n(x)), \tag{9}$$

où

$$(10) \qquad |\rho_n(x)| < \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{n}}{n-2} e^{1/12n} \frac{n/(x-1)}{e^{n/(x-1)} - 1}.$$

Dans la suite il sera commode d'utiliser la formule (9) sous les formes équivalentes suivantes :

$$(11) \quad \frac{(2\pi)^n}{2 \cdot n!} R_n(x) = \frac{\pi}{1 - e^{-n/(x-1)}} \cdot \frac{(2\pi(x-1))^{n-1}}{(n-1)!} (1 + \rho_n(x))$$

$$(12) \quad \frac{(2\pi)^n}{2 \cdot n!} R_n(x) = \frac{1}{2(1 - e^{-n/(x-1)})} \cdot \left(\frac{2\pi e(x-1)}{n}\right)^n \cdot \frac{n}{x-1} \cdot \frac{n^n e^{-n}}{n!} (1 + \rho_n(x)).$$

Démonstration. — Il est connu que, pour $n > 1$, $c > 0$ et a réel,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{az}}{z^n} dz = \begin{cases} \dfrac{a^{n-1}}{(n-1)!} & \text{si} \quad a \geqslant 0, \\ 0 & \text{si} \quad a < 0. \end{cases}$$

(Cette formule s'obtient en intégrant $\frac{e^{az}}{z^n}$ sur la courbe fermée constituée par le segment $[c - iT, c + iT]$ et un arc de cercle de centre 0 situé dans le demi-plan $\operatorname{Re} s \geqslant c$ si $a < 0$, dans le demi-plan $\operatorname{Re} s \leqslant c$ si $a \geqslant 0$, et faisant tendre T vers $+\infty$.)

On déduit de là que, pour $n > 1$, $x > 1$ et $c > 0$ quelconque,

$$\frac{1}{n!} R_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{(x-k)z}}{z^n} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{1}{z^n} \left(\sum_{k=1}^{\infty} e^{(x-k)z} \right) dz$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{xz}}{(e^z - 1) z^n} dz.$$

L'égalité $\dfrac{e^{xz}}{e^z - 1} = \dfrac{e^{(x-1)z}}{1 - e^{-c}} \left(1 + \dfrac{1 - e^{z-c}}{e^z - 1} \right)$ montre que

$$\frac{1}{n!} R_n(x) = \frac{1}{1 - e^{-c}} \left(\frac{(x-1)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{(x-1)z}(1 - e^{z-c})}{(e^z - 1) z^n} dz \right)$$
$$= \frac{1}{1 - e^{-c}} \cdot \frac{(x-1)^{n-1}}{(n-1)!} \left(1 + \frac{(n-1)!}{(x-1)^{n-1}} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{(x-1)z}(1 - e^{z-c})}{(e^z - 1) z^n} dz \right).$$

On remarque que, pour $z = c + it$ avec t réel,

$$\left|\frac{e^{(x-1)z}(1-e^{z-c})}{(e^z-1)z^n}\right| \leqslant \frac{e^{(x-1)c}\,|t|}{(e^c-1)(c^2+t^2)^{n/2}},$$

d'où il résulte que, si $n > 2$,

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{e^{(x-1)z}(1-e^{z-c})}{(e^z-1)z^n}dz\right| \leqslant \frac{e^{(x-1)c}}{\pi(e^c-1)}\int_0^\infty \frac{t\,dt}{(c^2+t^2)^{n/2}}$$

$$= \frac{e^{(x-1)c}}{\pi(e^c-1)(n-2)c^{n-2}}.$$

En prenant $c = \dfrac{n}{x-1}$, on trouve que, pour $x > 1$ et $n > 2$,

$$R_n(x) = n(x-1)^{n-1}(1-e^{-n/(x-1)})^{-1}(1+\rho_n(x)),$$

avec

$$|\rho_n(x)| \leqslant \frac{1}{\pi}\cdot\frac{n!\,e^n}{(n-2)n^n}\cdot\frac{n/(x-1)}{e^{n/(x-1)}-1}.$$

On majore ensuite cette dernière expression en utilisant l'inégalité

$$n! < n^{n+1/2}e^{-n}\sqrt{2\pi}\,e^{1/12n}.$$

3.2. *Remarque.* – Dans la suite, la remarque suivante nous sera utile :

Si $x \leqslant 1 + \dfrac{1}{2\pi e}\left(n+\dfrac{1}{2}\log n\right)$, on a

$$\frac{n}{x-1} > \frac{4\pi e^2}{2e+1}, \tag{13}$$

et

$$|\rho_n(x)| < \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{4\pi e^2/(2e+1)}{e^{4\pi e^2/(2e+1)}-1}\cdot\frac{\sqrt{n}}{n-2}e^{1/12n}. \tag{14}$$

(13) résulte de ce que $\dfrac{n}{x-1} \geqslant \dfrac{2\pi e}{1+\dfrac{1}{2}\dfrac{\log n}{n}}$ et $\dfrac{\log t}{t} < \dfrac{1}{e}$ pour $t \geqslant 1$ et $t \neq e$.

D'autre part, (13) entraîne $\dfrac{n/(x-1)}{e^{n/(x-1)}-1} < \dfrac{4\pi e^2/(2e+1)}{e^{4\pi e^2/(2e+1)}-1}$ parce que la fonction $u \to \dfrac{u}{e^u-1}$ est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$, et par suite (10) donne (14).

4. Résultats concernant $x_N^{(n)}$ et M.

4.1. THÉORÈME 3. — *On a pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$

$$(15)\quad \left[1-\left\{\frac{n}{4}\right\}+\frac{1}{2\pi e}\left(n+\frac{1}{2}\log n-1{,}226\right)\right] + \left\{\frac{n}{4}\right\} < x_N^{(n)} < 1+\frac{1}{2\pi e}\left(n+\frac{1}{2}\log n-1{,}202\right)$$

et par suite

$$(16)\quad \left[1-\left\{\frac{n}{4}\right\}+\frac{1}{2\pi e}\left(n+\frac{1}{2}\log n-1{,}226\right)\right] \leqslant M \leqslant \left[1+\frac{1}{2\pi e}\left(n+\frac{1}{2}\log n-1{,}202\right)\right].$$

Notons que, d'après ce qui a été dit au § 1.1.2, les inégalités (16) montrent que l'on a pour $n \geqslant 8$

$$(17)\quad \frac{1}{\pi e}\left(n+\frac{1}{2}\log n\right)-0{,}14357 < N < \frac{1}{\pi e}\left(n+\frac{1}{2}\log n\right)+4{,}85925.$$

4.2. *Démonstration.*

4.2.1. Tout d'abord, il est facile de voir que les inégalités (15) sont satisfaites pour $n \leqslant 12$.

Elles sont triviales pour $n = 1, 2, 3$. La première l'est également pour $n = 4, 6, 7, 8$ et 12. Pour les autres cas, on les obtient en utilisant le développement en série de Fourier de $B_n(x)$ pour $0 \leqslant x \leqslant 1$ et le fait évident que, pour $x > 1$, $R_n(x) \geqslant n(x-1)^{n-1}$, avec égalité pour $1 < x \leqslant 2$. On voit que $B_n(x) < 0$ pour x égal au membre de gauche des inégalités (15) et $B_n(x) > 0$ pour x au moins égal au membre de droite.

Il suffit donc maintenant de traiter le cas où $n \geqslant 13$.

4.2.2. En supposant seulement pour le moment que $n > 1$, nous remarquons qu'il résulte du développement en série de Fourier de $B_n(x)$ pour $0 \leqslant x \leqslant 1$ que

$$|B_n(x)| \leqslant (2\cdot n\,!/(2\pi)^n)\,\zeta(n) \quad \text{pour } x \in [0, 1]$$

et que l'on a toujours

$$((2\pi)^n/2\cdot n\,!)\,B_n\left(\left\{\frac{n}{4}\right\}\right) < -\,1 + 1/2^n .$$

D'autre part, R_n est une fonction non décroissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

Il résulte de là d'abord que, si pour un $u > 1$

$$((2\pi)^n/2\cdot n\,!)\,R_n(u) > \zeta(n),$$

on a $x_N^{(n)} < u$ car $B_n(x) > 0$ pour $x \geqslant u$.

D'autre part, si pour un $u > 1$

$$((2\pi)^n/2\cdot n\,!)\,R_n(u) < 1 - 1/2^n,$$

on a $x_N^{(n)} > \left[u - \left\{\frac{n}{4}\right\}\right] + \left\{\frac{n}{4}\right\}$ car $B_n(x) < 0$ pour $x = \left[u - \left\{\frac{n}{4}\right\}\right] + \left\{\frac{n}{4}\right\}$, puisque $\{x\} = \left\{\frac{n}{4}\right\}$, d'où $((2\pi)^n/2\cdot n\,!)\,B_n(\{x\}) < -\,1 + 1/2^n$, et $x \leqslant u$, d'où $R_n(x) \leqslant R_n(u)$ et $((2\pi)^n/2\cdot n\,!)\,R_n(x) < 1 - 1/2^n$.

On voit ainsi que, pour établir la première des inégalités (15), il suffit de montrer que l'on a

$$\frac{(2\pi)^n}{2\cdot n\,!}\,R_n\left(1 + \frac{1}{2\pi e}\left(n + \frac{1}{2}\log n - 1{,}226\right)\right) < 1 - 1/2^n,$$

et, pour établir la deuxième, il suffit de montrer que l'on a

$$\frac{(2\pi)^n}{2\cdot n\,!}\,R_n\left(1 + \frac{1}{2\pi e}\left(n + \frac{1}{2}\log n - 1{,}202\right)\right) \geqslant 1 + \frac{1}{2^n}\cdot\frac{n+1}{n-1}$$

$$\left(\text{car } \zeta(n) < 1 + \frac{1}{2^n} + \int_2^\infty \frac{dt}{t^n} = 1 + \frac{1}{2^n}\cdot\frac{n+1}{n-1}\right).$$

4.2.3. Dans ce qui suit, nous supposons $n \geqslant 13$.

Nous prenons $x = 1 + \frac{1}{2\pi e}\left(n + \frac{1}{2}\log n - a\right)$, où il est supposé que $0 \leqslant a < \frac{1}{2}\log 13\ (= 1{,}2824\ldots)$.

Nous montrerons que $\frac{(2\pi)^n}{2 \cdot n!} R_n(x) < 1 - 1/2^n$ si $a = 1{,}226$ et $\frac{(2\pi)^n}{2 \cdot n!} R_n(x) \geqslant 1 + \frac{1}{2^n} \cdot \frac{n+1}{n-1}$ si $a = 1{,}202$.

On voit d'abord que $x \leqslant 1 + \frac{1}{2\pi e}\left(n + \frac{1}{2}\log n\right)$ et par suite, d'après la remarque du § 3.2, on a (13) et (14).

(14) donne $|\rho_n(x)| < \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{4\pi e^2/(2e+1)}{e^{4\pi e^2/(2e+1)} - 1} \frac{\sqrt{13}}{11} e^{1/156} = \rho$

$(= 0{,}000002062\ldots)$.

(13) entraîne $1 - e^{-n/(x-1)} > 1 - e^{-4\pi e^2/(2e+1)}$.

On a par ailleurs $x - 1 > \frac{n}{2\pi e}$, d'où $\frac{n}{x-1} < 2\pi e$.

Comme $\frac{2\pi e(x-1)}{n} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\log n}{n} - \frac{a}{n} < \exp\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\log n}{n} - \frac{a}{n}\right)$, d'où $\left(\frac{2\pi e(x-1)}{n}\right)^n < \sqrt{n} e^{-a}$, et comme $n! > n^n e^{-n} \sqrt{2n\pi}$, la formule (12) montre que

$$\frac{(2\pi)^n}{2 \cdot n!} R_n(x) < \frac{1 + \rho}{1 - e^{-4\pi e^2/(2e+1)}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{1-a}.$$

On a donc certainement $\frac{(2\pi)^n}{2 \cdot n!} R_n(x) < 1 - \frac{1}{2^n}$ quel que soit $n (\geqslant 13)$ si $\frac{1 + \rho}{1 - e^{-4\pi e^2/(2e+1)}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{1-a} < 1 - \frac{1}{2^{13}}$, c'est-à-dire

$$a > 1 + \frac{1}{2}\log\frac{\pi}{2} + \log\frac{1+\rho}{(1 - e^{-4\pi e^2/(2e+1)})\left(1 - \frac{1}{2^{13}}\right)} = 1{,}225916\ldots,$$

en particulier pour $a = 1{,}226$.

Il est à noter que, si au lieu des $n \geqslant 13$, on ne considérait que les n au moins égaux à un $n_0 > 13$, si grand soit-il on aboutirait nécessairement, comme il est facile de le voir, à une constante supérieure à $1 + \frac{1}{2}\log\frac{\pi}{2} - \log(1 - e^{-2\pi e}) = 1{,}225791\ldots$.

Notons maintenant que, comme $\dfrac{n}{x-1} < 2\pi e$, la formule (11) montre que

$$\frac{(2\pi)^n}{2\cdot n!} R_n(x) > \frac{\pi(1-\rho)}{1-e^{-2\pi e}} \cdot \frac{(2\pi(x-1))^{n-1}}{(n-1)!}.$$

On a donc certainement $\dfrac{(2\pi)^n}{2\cdot n!} R_n(x) \geqslant 1 + \dfrac{1}{2^n} \cdot \dfrac{n+1}{n-1}$ si

$$\frac{(2\pi(x-1))^{n-1}}{(n-1)!} \geqslant \frac{(1-e^{-2\pi e})\left(1+\dfrac{1}{2^{13}}\cdot\dfrac{14}{12}\right)}{\pi(1-\rho)} = \sigma(= 0{,}318355\ldots).$$

Ceci est équivalent à $a \leqslant n + \frac{1}{2}\log n - e(\sigma(n-1)!)^{1/(n-1)}$, c'est-à-dire $a \leqslant f(n-1)$, où f est la fonction définie sur $\mathbb{N}^*$ par

$$f(n) = n + 1 + \frac{1}{2}\log(n+1) - e(\sigma\cdot n!)^{1/n}.$$

Pour établir le résultat voulu, il suffit donc de montrer que $f(n \geqslant 1{,}202$ pour $n \geqslant 12$.

Comme $n! < n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n} e^{1/12n}$, on a

$$e(\sigma\cdot n!)^{1/n} < n \exp\left(\frac{1}{2n}\log(2\pi\sigma^2 n) + \frac{1}{12n^2}\right),$$

et par suite $f(n) > g(n)$, où g est la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par

$$g(t) = t + 1 + \frac{1}{2}\log(t+1) - t\exp\left(\frac{1}{2t}X(t)\right),$$

où $X(t) = \log(2\pi\sigma^2 t) + \dfrac{1}{6t}\cdot$

On a

$$g(t) = t + 1 + \frac{1}{2}\log(t+1) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X(t)^k}{2^k k!\, t^{k-1}}$$

$$= G(t) - \sum_{k=3}^{\infty} \frac{X(t)^k}{2^k k!\, t^{k-1}},$$

où $G(t) = 1 + \dfrac{1}{2}\log(t+1) - \dfrac{X(t)}{2} - \dfrac{X(t)^2}{8t}.$

On a pour chaque $k \geqslant 3$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{X(t)^k}{t^{k-1}}\right) = \frac{-(k-1)X(t)^k}{t^k} + \frac{kX(t)^{k-1}X'(t)}{t^{k-1}}$$
$$= \frac{-(k-1)X(t)^k}{t^k} + \frac{kX(t)^{k-1}}{t^k}\left(1-\frac{1}{6t}\right)$$
$$= \frac{X(t)^{k-1}}{t^k}\left(k\left(1-\frac{1}{6t}\right)-(k-1)X(t)\right).$$

Ceci est certainement < 0 si $X(t) > \dfrac{k}{k-1}$, en particulier si $\log(2\pi\sigma^2 t) > \dfrac{k}{k-1}$, c'est-à-dire $t > \dfrac{e^{k/(k-1)}}{2\pi\sigma^2}$.

Comme, pour $k \geqslant 3$, $\dfrac{k}{k-1} \leqslant \dfrac{3}{2}$, tous les termes de la série $\sum_{k=3}^{\infty} \dfrac{X(t)^k}{2^k k!\, t^{k-1}}$ sont des fonctions de t décroissantes pour

$$t > \frac{e^{3/2}}{2\pi\sigma^2} = 7{,}03778\ldots.$$

Par ailleurs, on a quand $X(t) > 0$

$$G'(t) = \frac{1}{2(t+1)} - \frac{1}{2}X'(t) - \frac{X(t)X'(t)}{4t} + \frac{X(t)^2}{8t^2}$$
$$= \frac{-1}{2t(t+1)} + \frac{1}{12t^2} - \frac{1}{4t^2}\left(1-\frac{1}{6t}\right)X(t) + \frac{X(t)^2}{8t^2}$$
$$> -\frac{5}{12t^2} - \frac{X(t)}{4t^2} + \frac{X(t)^2}{8t^2} = \frac{1}{8t^2}\left((X(t)-1)^2 - \frac{13}{3}\right).$$

Pour $t \geqslant 35$, on a $X(t) > \log(70\pi\sigma^2) > 1$, d'où

$$(X(t)-1)^2 - \frac{13}{3} > (\log(70\pi\sigma^2)-1)^2 - \frac{13}{3} = 0{,}093688\ldots.$$

On voit ainsi que la fonction g est croissante pour $t \geqslant 35$. Par suite, pour $n \geqslant 35$, $g(n) \geqslant g(35) = 1{,}202317\ldots$.

D'autre part, en calculant les valeurs de $g(n)$ pour $12 \leqslant n \leqslant 34$, on trouve que le minimum est $g(32) = 1{,}202243\ldots$.

Donc, pour $n \geqslant 12$, $f(n) \geqslant g(n) \geqslant 1{,}202243$.

4.3. *Remarques.*

4.3.1. Désignons par $M_1 = M_1(n)$ et $M_2 = M_2(n)$ les membres extrêmes de (16), et par $F = F(n)$ la partie fractionnaire du membre de droite de (15), de sorte que celui-ci est égal à $M_2 + F$.

On a toujours $M_1 \leqslant M_2 \leqslant M_1 + 1$. Les inégalités (16) déterminent donc M à une unité près. Elles le déterminent complètement lorsque $M_1 = M_2$.

On peut observer que, lorsque $M_2 = M_1 + 1$, on a certainement $M = M_1$ si on se trouve dans l'un des cas suivants :

(a) $\quad n \equiv 2 \pmod 4$ et $F \leqslant \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2^{n+1}\pi}$;

(b) $\quad n \equiv 3 \pmod 4$ et $F \leqslant \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2\pi e} = 0{,}558549\ldots.$

C'est une conséquence des résultats d'Inkeri cités au § 1.1.2. Dans le cas (a) c'est une conséquence immédiate car l'hypothèse que $M = M_2$ impliquerait que $x_N^{(n)} \in \left]M, M+\alpha_k\right[$, où $k = \dfrac{n}{2}$, puisque $\alpha_k > \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2^{n+1}\pi}$, alors que l'on sait que B_n n'a pas de zéro dans cet intervalle.

Pour le cas (b), on voit que, si $n \equiv 3 \pmod 4$, l'hypothèse que $M = M_2$ implique que B_n a deux zéros dans l'intervalle $\left]M_2 + \dfrac{1}{2}, M_2 + 1\right[$ et, puisque $B_{n-1} = \dfrac{1}{n} B'_n$, que B_{n-1} a un zéro dans cet intervalle.

Ceci implique que $M_2(n-1) + F(n-1) > M_2(n) + \dfrac{1}{2}$ et, puisque

$$M_2(n) + F(n) = M_2(n-1) + F(n-1) + \frac{1}{2\pi e}\left(1 + \log\frac{n}{n-1}\right)$$
$$> M_2(n-1) + F(n-1) + \frac{1}{2\pi e},$$

que $M_2(n) + F(n) > M_2(n) + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2\pi e}$, d'où $F(n) > \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2\pi e}$.

Notons que, dans le cas (a), on ne sait pas *a priori* si l'intervalle $]M, M+1[$ contient deux zéros simples ou un zéro double.

De même, dans le cas où $n \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 4)$ et $M_1 = M_2$, de sorte que $M = M_1 = M_2$, on ne sait pas *a priori* combien B_n a de zéros dans l'intervalle $]M, M+1[$. Mais, si $F \leqslant \frac{3}{4} + \frac{1}{2\pi e} = 0{,}808549\ldots$, on peut affirmer que cet intervalle contient seulement un zéro simple, situé dans $]M, M+\alpha_k[$ où $k = n/2$.

En effet, dans le cas contraire, B_n devrait avoir deux zéros simples ou un zéro double dans l'intervalle

$$]M+1-\alpha_k, M+1[=]M_2+1-\alpha_k, M_2+1[,$$

où $k = \frac{n}{2}$, donc dans l'intervalle $\left]M_2+\frac{3}{4}, M_2+1\right[$ puisque $\alpha_k < \frac{1}{4}$. Par suite B_{n-1} devrait avoir un zéro dans cet intervalle, ce qui impliquerait $M_2(n-1)+F(n-1) > M_2(n)+\frac{3}{4}$ et, puisque, comme on l'a vu plus haut $M_2(n)+F(n) > M_2(n-1)+F(n-1) + \frac{1}{2\pi e}$, $F(n) > \frac{3}{4} + \frac{1}{2\pi e}$.

4.3.2. Remarquons encore que, lorsque n est grand, on peut, sans beaucoup de travail, avec une simple calculatrice électronique, calculer avec une bonne précision les valeurs de $\frac{(2\pi)^n}{2\cdot n!} B_n(x)$ pour les $x \in]M, M+1[$, ou pas trop éloignés de M, en calculant $\frac{(2\pi)^n}{2\cdot n!} B_n(\{x\})$ à l'aide du développement en série de Fourier, et $\frac{(2\pi)^n}{2\cdot n!} R_n(x)$ par la formule (12).

$\rho_n(x)$ est très petit. D'autre part, $\frac{2\pi e(x-1)}{n}$ est voisin de 1 et on obtient une bonne approximation de $\left(\frac{2\pi e(x-1)}{n}\right)^n$ en le mettant sous la forme $\exp(n \log(1+u))$, où $u = \frac{2\pi e(x-1)}{n} - 1$, et utilisant l'expression de $\log(1+u)$ par la formule de Mac Laurin. On évalue $\log \frac{n^n e^{-n}}{n!}$ par la formule de Stirling.

4.4. *Exemples.*

(1) $n = 999$. Ici $n \equiv 3 \pmod 4$, $M_1 = 58$, $M_2 = 59$, $F = 0{,}623099\ldots$. *A priori*, on sait seulement que $M = 58$ ou 59 et $N = 2M + 2 = 118$ ou 120.

En fait, $M = 59$ car, en calculant comme on vient de l'indiquer, on trouve que $B_n(59{,}57) < 0$, de sorte que $x_N^{(n)} > 59{,}57$.

On a donc $N = 120$ et le nombre total des zéros réels de B_n est $2N - 1 = 239$. Il y a deux zéros entre 59,5 et 60.

(2) $n = 974$. Ici $n \equiv 2 \pmod 4)$, $M_1 = 57$, $M_2 = 58$, $F = 0{,}158611\ldots < \frac{1}{4} - \frac{1}{2^{n+1}\pi}$. Donc $M = 57$.

$N = 116$ s'il y a deux zéros simples sur $]57, 58[$, 115 s'il y a un zéro double sur cet intervalle.

En fait, il y a deux zéros simples car $B_n(57{,}5) < 0$ (s'il y avait un zéro double, on devrait avoir $B_n(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in [57, 58]$.)

On a $N = 116$ et le nombre total des zéros réels de B_n est $2N - 2 = 230$.

(3) $n = 1.000.000$. Ici $n \equiv 0 \pmod 4$, $M_1 = M_2 = 58.551$ et $F = 0{,}165\ldots < \frac{3}{4} + \frac{1}{2\pi e}$. Donc $M = 58.551$, l'intervalle $]58.551, 58.552[$ contient un seul zéro de B_n, qui est simple (et $< 58.551{,}166$).

On a $N = 2M + 1 = 173.103$ et le nombre total des zéros réels de B_n, qui sont tous simples, est $2N - 2 = 234.204$.

En calculant $\frac{(2\pi)^n}{2 \cdot n!} B_n(x)$ pour des valeurs de x comprises entre 58.551 et 58.551,166 on trouve que $x_N^{(n)} = 58.551,\ 138509\ldots$ (on trouve que $B_n(58.551{,}138509) < 0$ et $B_n(58.551{,}138510) > 0$).

(4) $n = 1.005.548$. Ici $n \equiv 0 \pmod 4$, $M_1 = 58.875$, $M_2 = 58.876$, $F = 0{,}0002\ldots$. *A priori*, $M = M_1$ ou M_2.

En fait, $M = M_1 = 58.875$, car, en calculant $\frac{(2\pi)^n}{2 \cdot n!} R_n(M_2)$ par la formule (12), on trouve que $\frac{(2\pi)^n}{2 \cdot n!} R_n(M_2) > \zeta(n)$, de sorte que $x_N^{(n)} < M_2$.

On ne sait pas *a priori* combien B_n a de zéros sur $]M, M+1[$. En calculant $\frac{(2\pi)^n}{2 \cdot n!} B_n(x)$ pour diverses valeurs de x, on trouve qu'il y a trois zéros simples, de sorte que $N = 2M + 3 = 117.153$ et le nombre total des zéros réels de B_n, tous simples, est $2N - 2 = 234.304$. On trouve d'ailleurs que

$$x_{N-2}^{(n)} = 58.875{,}2499 \ldots, \quad x_{N-1}^{(n)} = 58.875{,}7523 \ldots$$

et

$$x_N^{(n)} = 58.875{,}9988 \ldots .$$

5. Résultats concernant $x_r^{(n)}$ où $r < N$.

5.1. *Remarques préliminaires.*

La démonstration de la première des inégalités (15) pour $n \geqslant 13$ a consisté essentiellement à montrer que l'on a

$$B_n\left(M_1 + \left\{\frac{n}{4}\right\}\right) < 0 .$$

On déduit facilement de là que, si $n \geqslant 13$ et $M \geqslant 2$, on a

$$(18) \qquad B_n\left(m + \left\{\frac{n}{4}\right\}\right) < 0 \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant m \leqslant M - 1 .$$

On a en effet

$$B_n\left(m + \left\{\frac{n}{4}\right\}\right) = B_n\left(\left\{\frac{n}{4}\right\}\right) + R_n\left(m + \left\{\frac{n}{4}\right\}\right) \leqslant B_n\left(\left\{\frac{n}{4}\right\}\right) + R_n\left(M_1 + \left\{\frac{n}{4}\right\}\right),$$

puisque $m \leqslant M_2 - 1 \leqslant M_1$ et R_n est une fonction croissante, et

$$B_n\left(\left\{\frac{n}{4}\right\}\right) + R_n\left(M_1 + \left\{\frac{n}{4}\right\}\right) = B_n\left(M_1 + \left\{\frac{n}{4}\right\}\right).$$

Ceci permet déjà d'apporter des précisions aux résultats d'Inkeri sur la situation des zéros de B_n que nous avons rappelés au § 1.1.2.

Pour ne pas alourdir l'écriture, nous écrirons ici simplement x_r au lieu de $x_r^{(n)}$.

5.1.1. D'après les résultats d'Inkeri, si $n \equiv 1 \pmod 4$ et $n \geqslant 5$ (de sorte que $M \geqslant 1$), l'intervalle $]1,2[$ contient le seul zéro x_3 et on a $1 < x_3 < \frac{3}{2}$, et, si $M \geqslant 2$, pour $2 \leqslant m \leqslant M$, l'intervalle $]m,m+1[$ contient les zéros x_{2m} et x_{2m+1} et on a $m < x_{2m} < x_{2m+1} < m + \frac{1}{2}$.

De plus, on voit que $B_n(x) < 0$ pour $1 < x < x_3$ et $B_n(x) > 0$ pour $x_3 < x \leqslant 2$, et que, si $M \geqslant 2$, on a pour $2 \leqslant m \leqslant M$:

$$B_n(x) < 0 \quad \text{pour} \quad x_{2m} < x < x_{2m+1}$$

et

$$B_n(x) > 0 \quad \text{pour} \quad m \leqslant x < x_{2m} \quad \text{ou} \quad x_{2m+1} < x \leqslant m+1 .$$

Il résulte de (18) que, si $n \geqslant 13$ et $M \geqslant 2$, on a

$$\frac{5}{4} < x_3 < \frac{3}{2}$$

puisque $B_n\left(\frac{5}{4}\right) < 0$, et, si en outre $M \geqslant 3$, on a pour $2 \leqslant m \leqslant M - 1$

$$m < x_{2m} < m + \frac{1}{4} < x_{2m+1} < m + \frac{1}{2}$$

puisque $B_n\left(m+\frac{1}{4}\right) < 0$.

5.1.2. Si $n \equiv 2 \pmod 4$, $n \geqslant 10$ et $M \geqslant 2$, pour $1 \leqslant m \leqslant M - 1$ l'intervalle $]m,m+1[$ contient les zéros x_{2m+1} et x_{2m+2} et on a

$$m + \alpha_k < x_{2m+1} < x_{2m+2} < m + 1 - \alpha_k, \quad \text{où} \quad k = n/2 .$$

De plus on a $B_n(x) < 0$ pour $x_{2m+1} < x < x_{2m+2}$ et $B_n(x) > 0$ pour $m \leqslant x < x_{2m+1}$ ou $x_{2m+2} < x \leqslant m + 1$.

Il résulte de (18) que, si $n \geqslant 14$ et $M \geqslant 2$, on a pour $1 \leqslant m \leqslant M - 1$

$$m + \alpha_k < x_{2m+1} < m + \frac{1}{2} < x_{2m+2} < m + 1 - \alpha_k$$

puisque $B_n\left(m+\frac{1}{2}\right) < 0$.

5.1.3. Enfin si $n \equiv 3 (\mathrm{mod}\, 4)$ et $n \geqslant 11$, pour $1 \leqslant m \leqslant M$ l'intervalle $]m, m+1[$ contient les zéros x_{2m+1} et x_{2m+2} et on a $m + \frac{1}{2} < x_{2m+1} < x_{2m+2} < m + 1$. De plus, $B_n(x) < 0$ pour $x_{2m+1} < x < x_{2m+2}$ et $B_n(x) > 0$ pour $m \leqslant x < x_{2m+1}$ ou $x_{2m+2} < x \leqslant m + 1$.

Ici il résulte de (18) que, si $n \geqslant 15$ et $M \geqslant 2$, on a pour $1 \leqslant m \leqslant M - 1$

$$m + \frac{1}{2} < x_{2m+1} < m + \frac{3}{4} < x_{2m+2} < m + 1$$

puisque $B_n\left(m + \frac{3}{4}\right) < 0$.

5.2. *Principe général des démonstrations.*

Dans toutes nos démonstrations nous continuerons à écrire x_r au lieu de $x_r^{(n)}$.

La plupart seront basées sur le fait que l'égalité $B_n(x_r) = 0$ est équivalente à

$$B_n(\{x_r\}) + R_n(x_r) = 0.$$

$B_n(\{x_r\})$ s'exprime à l'aide du développement en série de Fourier de $B_n(x)$ pour $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Il est commode de multiplier par $\frac{(2\pi)^n}{2 \cdot n!}$ et d'exprimer l'égalité $B_n(x_r) = 0$ par

$$\text{(19)} \qquad \frac{(2\pi)^n}{2 \cdot n!} B_n(\{x_r\}) + \frac{(2\pi)^n}{2 \cdot n!} R_n(x_r) = 0.$$

Notons que, pour $r \geqslant 3$, la remarque du § 3.2 s'applique à $x = x_r$. En effet, $x_r > 1$ et, d'autre part, d'après le théorème 3,

$$x_r \leqslant x_N < 1 + \frac{1}{2\pi e}\left(n + \frac{1}{2} \log n\right).$$

On a donc pour $r \geqslant 3$

$$\frac{n}{x_r - 1} > \frac{4\pi e^2}{2e + 1} \quad \text{et} \quad |\rho_n(x_r)| < \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{4\pi e^2/(2e+1)}{e^{4\pi e^2/(2e+1)} - 1} \cdot \frac{\sqrt{n}}{n - 2} e^{1/12n}.$$

5.3. *Résultats s'exprimant par des inégalités.*

Théorème 4. — *Supposons* $n \geqslant 28$.

1. *Si* n *est impair, on a pour* $3 \leqslant r \leqslant N-2$

$$(20) \quad 0 < (-1)^{r+[n/2]}\left(x_r^{(n)} - \frac{r}{2}\right) < 0{,}85172 \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{\pi e r_1}{n}\right)^{n-1},$$

où

$$r_1 = \begin{cases} r - 3/2 & \textit{si} \quad r + [n/2] \ \textit{est pair}, \\ r - 2 & \textit{si} \quad r + [n/2] \ \textit{est impair}. \end{cases}$$

2. *Si* n *est pair, on a pour* $3 \leqslant r \leqslant N-2$

$$(21) \quad \left| x_r^{(n)} - \left(\frac{r}{2} - \frac{1}{4}\right)\right| < 0{,}85172 \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{\pi e(r-2)}{n}\right)^{n-1} + \frac{1}{2^{n+2}} \cdot \frac{n+1}{n-1}.$$

Si $n \equiv 0 \pmod 4$, $x_r^{(n)} - \left(\frac{r}{2} - \frac{1}{4}\right)$ *est du signe de* $(-1)^r$.

Si $n \equiv 2 \pmod 4$, $x_r^{(n)} - \left(\frac{r}{2} - \frac{1}{4}\right)$ *est du signe de* $(-1)^r$ *quand* $r \leqslant \frac{N}{2}$ *et du signe de* $(-1)^{r-1}$ *quand* $r \geqslant \frac{N}{2} + 2$.

Remarque. — Nous supposons $n \geqslant 28$ pour que $N \geqslant 5$.

Les n pour lesquels $N \geqslant 5$ sont 16, 20, 21, 24, 25, 26 et les $n \geqslant 28$. Pour $n \geqslant 28$, le théorème 3 montre que $M \geqslant 2$, et celà entraîne que $N \geqslant 5$.

Démonstration. — Nous supposons toujours que $n \geqslant 28$ et que $3 \leqslant r \leqslant N-2$.

Nous partirons de la relation (19).

5.3.1. Nous aurons besoin d'une majoration de $\frac{(2\pi)^n}{2 \cdot n!} R_n(x_r)$, que nous obtiendrons à partir de la formule (11).

D'après ce qu'on a dit à la fin du § 5.2, on a d'une part

$$|\rho_n(x_r)| < \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{4\pi e^2/(2e+1)}{e^{4\pi e^2/(2e+1)} - 1} \cdot \frac{\sqrt{28}}{26} \cdot e^{1/336} = \rho'$$

(puisque $n \geqslant 28$), et, d'autre part,

$$1 - e^{-n/(x_r - 1)} > 1 - e^{-4\pi e^2/(2e+1)}.$$

Alors la formule (11) donne

$$\frac{(2\pi)^n}{2 \cdot n!} R_n(x_r) < \frac{\pi}{1 - e^{-4\pi e^2/(2e+1)}} (1 + \rho') \frac{(2\pi(x_r - 1))^{n-1}}{(n-1)!}$$

et, en tenant compte de ce que $(n-1)! = \dfrac{n!}{n} > n^{n-1} e^{-n} \sqrt{2\pi n}$, on obtient

$$(22) \quad \frac{(2\pi)^n}{2 \cdot n!} R_n(x_r) < e \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1 + \rho'}{1 - e^{-4\pi e^2/(2e+1)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{2\pi e(x_r - 1)}{n} \right)^{n-1}.$$

5.3.2. *Cas où n est impair.*

Nous posons $x_r = \dfrac{r}{2} + (-1)^{r + [n/2]} \varepsilon_r$, c'est-à-dire

$$\varepsilon_r = (-1)^{r + [n/2]} \left(x_r - \frac{r}{2} \right).$$

(*a*) On voit d'abord que $0 < \varepsilon_r < \dfrac{1}{4}$.

Dans le cas où $n \equiv 1 \pmod 4$, $(-1)^{r + [n/2]}$ est > 0 si r est pair et < 0 si r est impair. Si r est impair, comme $N = 2M + 1$, on a $r = 2m + 1$ où $1 \leqslant m \leqslant M - 1$.

Alors $\dfrac{r}{2} = m + \dfrac{1}{2}$ et on sait, d'après ce qui a été dit au § 5.1.1, que $m + \dfrac{1}{4} < x_{2m+1} < m + \dfrac{1}{2}$.

On a donc $-\dfrac{1}{4} < x_r - \dfrac{r}{2} < 0$ et $(-1)^{r + [n/2]} < 0$.

r ne peut être pair que si $N \geqslant 6$ et donc $M \geqslant 3$. On a alors $r = 2m$ où $2 \leqslant m \leqslant M - 1$.

Alors $\dfrac{r}{2} = m$ et on sait, toujours d'après ce qui a été dit au § 5.1.1, que $m < x_{2m} < m + \dfrac{1}{4}$.

On a donc $0 < x_r - \frac{r}{2} < \frac{1}{4}$ et $(-1)^{r+[n/2]} > 0$.

Dans le cas où $n \equiv 3 \pmod 4$, $(-1)^{r+[n/2]}$ est > 0 si r est impair et < 0 si r est pair. Ici $N = 2M + 2$.

Si r est impair, on a $r = 2m + 1$ où $1 \leqslant m \leqslant M - 1$.

$\frac{r}{2} = m + \frac{1}{2}$ et on sait, d'après ce qui a été dit au § 5.1.3, que

$$m + \frac{1}{2} < x_{2m+1} < m + \frac{3}{4}.$$

On a donc $0 < x_r - \frac{r}{2} < \frac{1}{4}$ et $(-1)^{r+[n/2]} > 0$.

Si r est pair, on a $r = 2m + 2$ où $1 \leqslant m \leqslant M - 1$.

$\frac{r}{2} = m + 1$ et on sait que $m + \frac{3}{4} < x_{2m+2} < m + 1$.

On a donc $-\frac{1}{4} < x_r - \frac{r}{2} < 0$ et $(-1)^{r+[n/2]} < 0$.

(*b*) Maintenant, nous remarquons que la relation (19) s'écrit

$$(23) \qquad (-1)^{(n+1)/2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2k\pi x_r}{k^n} + \frac{(2\pi)^n}{2 \cdot n\,!} R_n(x_r) = 0.$$

On a $2k\pi x_r = k\pi r + (-1)^{r+[n/2]} 2k\pi\varepsilon_r$, d'où

$$\sin 2k\pi x_r = (-1)^{(k-1)r+[n/2]} \sin 2k\pi\varepsilon_r.$$

La relation (23) donne donc, puisque $\frac{n+1}{2} + \left[\frac{n}{2}\right]$ est impair,

$$(24) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{(k-1)r} \frac{\sin 2k\pi\varepsilon_r}{k^n} = \frac{(2\pi)^n}{2 \cdot n\,!} R_n(x_r).$$

Comme $0 < \varepsilon_r < \frac{1}{4}$, d'où $0 < 2\pi\varepsilon_r < \frac{\pi}{2}$, on a

$$\sin 2\pi\varepsilon_r > \frac{2}{\pi} \cdot 2\pi\varepsilon_r = 4\varepsilon_r.$$

D'autre part, pour chaque $k \geqslant 2$, $|\sin 2k\pi\varepsilon_r| < k \sin 2\pi\varepsilon_r$. Par suite,

$$\left|\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{(k-1)r} \frac{\sin 2k\pi\varepsilon_r}{k^n}\right| \leqslant (\sin 2\pi\varepsilon_r) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^{n-1}}$$
$$\leqslant \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \frac{n}{n-2} \sin 2\pi\varepsilon_r \leqslant \frac{1}{2^{27}} \cdot \frac{14}{13} \sin 2\pi\varepsilon_r$$

car $\sum_{2}^{\infty} \frac{1}{k^{n-1}} < \frac{1}{2^{n-1}} + \int_2^{\infty} \frac{dt}{t^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \frac{n}{n-2}$ et $n \geqslant 28$.

On voit ainsi que le premier membre de (24) est

$$> \left(1 - \frac{1}{2^{27}} \cdot \frac{14}{13}\right) \sin 2\pi\varepsilon_r > 4\left(1 - \frac{1}{2^{27}} \cdot \frac{14}{13}\right) \varepsilon_r .$$

On a donc $\varepsilon_r < \frac{1}{4\left(1 - \frac{1}{2^{27}} \cdot \frac{14}{13}\right)} \cdot \frac{(2\pi)^n}{2 \cdot n!} R_n(x_r)$, et, avec (22), ceci donne

$$\varepsilon_r < \frac{C}{\sqrt{n}} \cdot \left(\frac{2\pi e(x_r - 1)}{n}\right)^{n-1},$$

où
$$C = \frac{e}{4}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1 + \rho'}{\left(1 - \frac{1}{2^{27}} \cdot \frac{14}{13}\right)\left(1 - e^{-4\pi e^2/(2e+1)}\right)}.$$

Le calcul montre que $C < 0{,}85172$.

D'autre part, si $r + [n/2]$ est pair, $x_r = \frac{r}{2} + \varepsilon_r < \frac{r}{2} + \frac{1}{4}$, d'où $2\pi e(x_r - 1) < \pi e\left(r - \frac{3}{2}\right)$; si $r + [n/2]$ est impair, $x_r = \frac{r}{2} - \varepsilon_r < \frac{r}{2}$, d'où $2\pi e(x_r - 1) < \pi e(r - 2)$.

On obtient bien l'inégalité (20).

5.3.3. *Cas où n est pair.*

Nous posons cette fois $x_r = \frac{r}{2} - \frac{1}{4} + \varepsilon_r$, c'est-à-dire

$$\varepsilon_r = x_r - \left(\frac{r}{2} - \frac{1}{4}\right),$$

(*a*) On voit ici que $0 < |\varepsilon_r| < \frac{1}{4}\cdot$

Supposons d'abord $n \equiv 0 \pmod 4$.

Alors, d'après les résultats d'Inkeri que nous avons rappelés au § 1.1.2, pour $1 \leqslant m \leqslant M - 1$, l'intervalle $]m, m+1[$ contient les zéros x_{2m+1} et x_{2m+2} de B_n et on a $m < x_{2m+1} < m + \alpha_k$ et $m + 1 - \alpha_k < x_{2m+2} < m + 1$, où $k = \frac{n}{2}$, ce qui entraîne $m < x_{2m+1} < m + \frac{1}{4}$ et $m + \frac{3}{4} < x_{2m+2} < m + 1$, puisque $\alpha_k < \frac{1}{4}$.

On sait que $N = 2M + 1$, ou $2M + 2$, ou $2M + 3$ suivant le nombre des zéros appartenant à l'intervalle $]M, M+1[$.

Si r est impair, on a $r = 2m + 1$ avec $m \leqslant M$.

Si $m \leqslant M - 1$, on a $m < x_r < m + \frac{1}{4}$ d'après ce qu'on vient de voir. C'est encore vrai si $m = M$ car ceci ne peut avoir lieu que si l'intervalle $]M, M+1[$ contient trois zéros simples de B_n et, dans ce cas, le plus petit, x_{2M+1}, est $< M + \alpha_k < m + \frac{1}{4}$.

Comme $\frac{r}{2} - \frac{1}{4} = m + \frac{1}{4}$, on a bien le résultat voulu.

Si r est pair, on a $r = 2m + 2$, avec $1 \leqslant m \leqslant M - 1$, et $m + \frac{3}{4} < x_r < m + 1$, d'où le résultat voulu puisque $\frac{r}{2} - \frac{1}{4} = m + \frac{3}{4}$.

Notons que ε_r *est toujours du signe de* $(-1)^r$.

Supposons maintenant $n \equiv 2 \pmod 4$.

D'après ce qu'on a vu au § 5.1.2, pour $1 \leqslant m \leqslant M - 1$, l'intervalle $]m,m+1[$ contient les zéros x_{2m+1} et x_{2m+2} de B_n et on a

$$m + \alpha_k < x_{2m+1} < m + \frac{1}{2} < x_{2m+2} < m + 1 - \alpha_k, \quad \text{où} \quad k = \frac{n}{2}.$$

Comme $N = 2M + 2$ ou $2M + 1$, si r est impair on a $r = 2m + 1$ avec $1 \leqslant m \leqslant M - 1$, et par suite

$$m < m + \alpha_k < x_r < m + \frac{1}{2},$$

d'où le résultat voulu puisque $\frac{r}{2} - \frac{1}{4} = m + \frac{1}{4}$.

Si r est pair, on a $r = 2m + 2$ avec $1 \leqslant m \leqslant M - 1$, et par suite

$$m + \frac{1}{2} < x_r < m + 1 - \alpha_k < m + 1,$$

d'où encore le résultat voulu puisque $\frac{r}{2} - \frac{1}{4} = m + \frac{3}{4}$.

(b) Maintenant, nous remarquons que la relation (19) s'écrit

$$(-1)^{n/2+1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2k\pi x_r}{k^n} + \frac{(2\pi)^n}{2 \cdot n\,!} R_n(x_r) = 0$$

ou

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2k\pi x_r}{k^n} = (-1)^{n/2} \frac{(2\pi)^n}{2 \cdot n\,!} R_n(x_r),$$

d'où

$$|\cos 2\pi x_r| \leqslant \frac{(2\pi)^n}{2 \cdot n\,!} R_n(x_r) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^n}.$$

Comme $\cos 2\pi x_r = (-1)^r \sin 2\pi\varepsilon_r$ et $0 < |\varepsilon_r| < \frac{1}{4}$, on a

$$|\cos 2\pi x_r| = \sin 2\pi |\varepsilon_r| \geqslant 4 |\varepsilon_r|.$$

D'autre part, $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^n} < \frac{1}{2^n} + \int_2^{\infty} \frac{dt}{t^n} = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{n+1}{n-1}$.

On obtient donc

$$|\varepsilon_r| < \frac{1}{4} \cdot \frac{(2\pi)^n}{2 \cdot n\,!} R_n(x_r) + \frac{1}{2^{n+2}} \cdot \frac{n+1}{n-1},$$

d'où, en tenant compte de (22),

$$|\varepsilon_r| < C' \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{2\pi e(x_r - 1)}{n} \right)^{n-1} + \frac{1}{2^{n+2}} \cdot \frac{n+1}{n-1},$$

avec

$$C' = \frac{e}{4} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \rho'}{1 - e^{-4\pi e^2/(2e+1)}} < C.$$

De plus, $x_r = \frac{r}{2} - \frac{1}{4} + \varepsilon_r < \frac{r}{2}$, d'où $2\pi e(x_r - 1) < \pi e(r-2)$.

On obtient donc bien l'inégalité (21).

5.3.4. Pour achever la démonstration du théorème, il reste à montrer que, quand $n \equiv 2 \pmod 4$, le signe de ε_r est bien celui qui est indiqué.

Nous supposons dans tout ce paragraphe que $n \equiv 2 \pmod 4$. Rappelons que $N = 2M + 2$ ou $2M + 1$.

On voit d'abord que ε_r est du signe de $(-1)^r$ si $B_n\left(\frac{r}{2}-\frac{1}{4}\right) < 0$ et du signe de $(-1)^{r-1}$ si $B_n\left(\frac{r}{2}-\frac{1}{4}\right) > 0$.

En effet, on a vu au § 5.1.2 que, pour $1 \leqslant m \leqslant M-1$, l'intervalle $]m, m+1[$ contient x_{2m+1} et x_{2m+2} et on a $x_{2m+1} < m + \frac{1}{2} < x_{2m+2}$ et

$$B_n(x) < 0 \quad \text{pour} \quad x_{2m+1} < x < x_{2m+2},$$
$$B_n(x) > 0 \quad \text{pour} \quad m \leqslant x < x_{2m+1} \quad \text{ou} \quad x_{2m+2} < x \leqslant m+1.$$

Si r est impair, on a $r = 2m+1$, avec $1 \leqslant m \leqslant M-1$, et $\frac{r}{2}-\frac{1}{4} = m + \frac{1}{4}$. On voit que $\varepsilon_r < 0$, c'est-à-dire $\frac{r}{2}-\frac{1}{4} > x_r$, si $B_n\left(\frac{r}{2}-\frac{1}{4}\right) < 0$, et $\varepsilon_r > 0$, c'est-à-dire $\frac{r}{2}-\frac{1}{4} < x_r$, si $B_n\left(\frac{r}{2}-\frac{1}{4}\right) > 0$.

Si r est pair, on a $r = 2m+2$, avec $1 \leqslant m \leqslant M-1$, et $\frac{r}{2} - \frac{1}{4} = m + \frac{3}{4}$. On voit que $\varepsilon_r > 0$, c'est-à-dire $\frac{r}{2} - \frac{1}{4} < x_r$, si $B_n\left(\frac{r}{2}-\frac{1}{4}\right) < 0$, et $\varepsilon_r < 0$, c'est-à-dire $\frac{r}{2} - \frac{1}{4} > x_r$, si $B_n\left(\frac{r}{2}-\frac{1}{4}\right) > 0$.

Remarquons maintenant que, comme $\left\{\frac{r}{2}-\frac{1}{4}\right\} = \frac{1}{4}$ ou $\frac{3}{4}$, on a

$$B_n\left(\left\{\frac{r}{2}-\frac{1}{4}\right\}\right) = \frac{2 \cdot n!}{(2\pi)^n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k(\pi/2)}{k^n} = \frac{2 \cdot n!}{(2\pi)^n} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{(-1)^h}{(2h)^n}.$$

Comme $-\frac{1}{2^n} < \sum_{h=1}^{\infty} \frac{(-1)^h}{(2h)^n} < -\frac{1}{2^n} + \frac{1}{4^n}$, ceci donne

$$-1 < \frac{(4\pi)^n}{2 \cdot n!} B_n\left(\left\{\frac{r}{2}-\frac{1}{4}\right\}\right) < -1 + \frac{1}{2^n},$$

d'où

$$-1+\frac{(4\pi)^n}{2\cdot n!}R_n\left(\frac{r}{2}-\frac{1}{4}\right)<\frac{(4\pi)^n}{2\cdot n!}B_n\left(\frac{r}{2}-\frac{1}{4}\right)<-1+\frac{1}{2^n}+\frac{(4\pi)^n}{2\cdot n!}R_n\left(\frac{r}{2}-\frac{1}{4}\right).$$

On voit ainsi que ε_r est du signe de $(-1)^r$ si

$$\frac{(4\pi)^n}{2\cdot n!}R_n\left(\frac{r}{2}-\frac{1}{4}\right) < 1 - \frac{1}{2^n}$$

et est du signe $(-1)^{r-1}$ si

$$\frac{(4\pi)^n}{2\cdot n!}R_n\left(\frac{r}{2}-\frac{1}{4}\right) > 1 .$$

Pour établir le résultat voulu, il suffira donc de montrer que

$$\frac{(4\pi)^n}{2\cdot n!}R_n\left(\frac{r}{2}-\frac{1}{4}\right) < 1 - \frac{1}{2^{28}} \quad \text{si} \quad r \leqslant \frac{N}{2}$$

et

$$\frac{(4\pi)^n}{2\cdot n!}R_n\left(\frac{r}{2}-\frac{1}{4}\right) > 1 \quad \text{si} \quad r \geqslant \frac{N}{2} + 2 .$$

La formule (12) donne pour $x > 1$

$$(25)\quad \frac{(4\pi)^n}{2\cdot n!}R_n(x) = \frac{1}{2(1-e^{-n/(x-1)})}\left(\frac{4\pi e(x-1)}{n}\right)^n \frac{n}{x-1} \cdot\frac{n^n e^{-n}}{n!}(1+\rho_n(x)) .$$

D'après la remarque du § 3.2, si $x \leqslant 1 + \dfrac{1}{2\pi e}\left(n+\dfrac{1}{2}\log n\right)$, on a $1 - e^{-n/(x-1)} > 1 - e^{-4\pi e^2/(2e+1)}$ et

$$|\rho_n(x)| < \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{4\pi e^2/(2e+1)}{e^{4\pi e^2/(2e+1)}-1}\cdot\frac{\sqrt{28}}{26}e^{1/336} = \rho' \text{ (déjà introduit au § 5.3.1).}$$

Compte tenu de ce que $n^n e^{-n}\sqrt{2n\pi} < n! < n^n e^{-n}\sqrt{2n\pi e^{1/12n}}$, la formule (25) montre que, pour $1 < x \leqslant 1 + \dfrac{1}{2\pi e}\left(n+\dfrac{1}{2}\log n\right)$, on a

$$(26)\quad \frac{(4\pi)^n}{2\cdot n!}R_n(x) < \frac{1+\rho'}{2\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{1-e^{-4\pi e^2/(2e+1)}}\cdot\frac{n}{x-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{4\pi e(x-1)}{n}\right)^n$$

et

$$(27)\quad \frac{(4\pi)^n}{2\cdot n!} R_n(x) > \frac{1-\rho'}{2\sqrt{2\pi}} e^{-1/336} \cdot \frac{n}{x-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{4\pi e(x-1)}{n} \right)^n .$$

Ceci dit, supposons d'abord que $r \leqslant \frac{N}{2}$.

Comme $N = 2M + 2$ ou $2M + 1$, on a $r \leqslant M + 1$, d'où $\frac{r}{2} - \frac{1}{4} \leqslant \frac{M}{2} + \frac{1}{4} \leqslant \frac{3}{4} + \frac{1}{4\pi e}\left(n + \frac{1}{2}\log n - 1{,}202\right)$ d'après (16) (théorème 3).

Comme R_n est une fonction croissante, pour montrer que $\frac{(4\pi)^n}{2\cdot n!} R_n\left(\frac{r}{2} - \frac{1}{4}\right) < 1 - \frac{1}{2^{28}}$, il suffit de montrer que $\frac{(4\pi)^n}{2\cdot n!} R_n(x) < 1 - \frac{1}{2^{28}}$ pour $x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4\pi e}\left(n + \frac{1}{2}\log n - 1{,}202\right)$. Cette valeur étant $< 1 + \frac{1}{2\pi e}\left(n + \frac{1}{2}\log n\right)$, on a (26).

On a $\frac{x-1}{n} = \frac{1}{4\pi e}\left(1 + \frac{\log n}{2n} - \frac{\pi e + 1{,}202}{n}\right)$.

Le minimum de $\frac{\log t}{2t} - \frac{\pi e + 1{,}202}{t}$ pour $t \geqslant 28$ est sa valeur pour $t = 28$. On a donc $\frac{x-1}{n} \geqslant \frac{1}{4\pi e}\left(1 + \frac{\log 28}{56} - \frac{\pi e + 1{,}202}{28}\right) = 0{,}02083\ldots$ et $\frac{n}{x-1} \leqslant \dfrac{4\pi e}{1 + \frac{\log 28}{56} - \frac{\pi e + 1{,}202}{28}}$.

Maintenant

$$\frac{4\pi e(x-1)}{n} = 1 + \frac{\log n}{2n} - \frac{\pi e + 1{,}202}{n} < \exp\left(\frac{\log n}{2n} - \frac{\pi e + 1{,}202}{n}\right)$$

et par suite $\left(\frac{4\pi e(x-1)}{n}\right)^n < \sqrt{n}\exp(-\pi e - 1{,}202)$.

Finalement (26) donne

$$\frac{(4\pi)^n}{2\cdot n!} R_n(x) < \frac{\sqrt{2\pi}(1+\rho')}{(1 - e^{-4\pi e^2/(2e+1)})\left(1 + \frac{\log 28}{56} - \frac{\pi e + 1{,}202}{28}\right)} \exp(-\pi e - 0{,}202).$$

Ceci est égal à $0{,}000562\ldots$, donc $< 1 - \frac{1}{2^{28}}$.

Supposons maintenant que $r \geqslant \frac{N}{2} + 2$.

On a alors $r \geqslant M + 3$, d'où

$$\frac{r}{2} - \frac{1}{4} \geqslant \frac{M}{2} + \frac{5}{4} > 1 + \frac{1}{4\pi e}\left(n + \frac{1}{2}\log n - 1{,}226\right) \qquad \text{d'après (16).}$$

Pour montrer que $\frac{(4\pi)^n}{2 \cdot n!} R_n\left(\frac{r}{2} - \frac{1}{4}\right) > 1$, il suffit de montrer que $\frac{(4\pi)^n}{2 \cdot n!} R_n(x) > 1$ pour $x = 1 + \frac{1}{4\pi e}\left(n + \frac{1}{2}\log n - 1{,}226\right)$.

On a encore $x < 1 + \frac{1}{2\pi e}\left(n + \frac{1}{2}\log n\right)$ et par suite on a (27).

Ici $\frac{x-1}{n} = \frac{1}{4\pi e}\left(1 + \frac{\log n}{2n} - \frac{1{,}226}{n}\right)$.

Le maximum de $\frac{\log t}{2t} - \frac{1{,}226}{t}$ pour $t \geqslant 28$ est atteint pour $t = e^{3{,}452}$ et égal à $\frac{e^{-3{,}452}}{2}$.

On a donc $\frac{x - 1}{n} \leqslant \frac{1}{4\pi e}\left(1 + \frac{e^{-3{,}452}}{2}\right)$, d'où

$$\frac{n}{x - 1} \geqslant \frac{4\pi e}{1 + \frac{1}{2}e^{-3{,}452}}.$$

D'autre part, l'égalité

$$\frac{4\pi e(x-1)}{n} = 1 + \frac{\log n}{2n} - \frac{1{,}226}{n}$$

donne

$$\log \frac{4\pi e(x-1)}{n} \geqslant \frac{\log n}{2n} - \frac{1{,}226}{n} - \frac{1}{2}\left(\frac{\log n}{2n} - \frac{1{,}226}{n}\right)^2$$

car $\frac{\log n}{2n} - \frac{1{,}226}{n} > 0$.

Par suite

$$\left(\frac{4\pi e(x-1)}{n}\right)^n \geqslant \exp\left(\frac{\log n}{2} - 1{,}226 - \frac{1}{8n}(\log n - 2{,}452)^2\right).$$

Le maximum de $\frac{1}{8t}(\log t - 2{,}452)^2$ pour $t \geqslant 28$ est atteint pour $t = e^{4{,}452}$ et égal à $\frac{1}{2}e^{-4{,}452}$.

On a donc $\left(\frac{4\pi e(x-1)}{n}\right)^n \geqslant \sqrt{n}\exp\left(-1{,}226 - \frac{1}{2}e^{-4{,}452}\right)$.

Finalement (27) donne

$$\frac{(4\pi)^n}{2 \cdot n\,!} R_n(x) > \sqrt{2\pi}e^{-1/336} \frac{1-\rho'}{1+\frac{1}{2}e^{-3{,}452}} \exp\left(-0{,}226 - \frac{1}{2}e^{-4{,}452}\right)$$

et ceci est égal à 1,95114 ..., donc > 1.

5.4. *Formules asymptotiques.*

5.4.1. Théorème 5. — *Quand n tend vers l'infini par valeurs impaires,*

1° *Étant donné $A \geqslant 0$ quelconque, on a uniformément pour* $3 \leqslant r \leqslant \frac{n}{\pi e} + A$

$$(28) \quad x_r^{(n)} = \frac{r}{2} + (-1)^{r+[n/2]}\frac{1}{2}(1 - e^{-2n/(r-2)})^{-1} \times \frac{(\pi(r-2))^{n-1}}{(n-1)\,!}\left(1 + O\left(\frac{\sqrt{n}}{r}e^{-2n/(r-2)}\right)\right);$$

2° *Étant donné $\lambda \in \left]0, \frac{1}{\pi e}\right[$, on a uniformément pour $3 \leqslant r \leqslant \lambda n$*

$$(29) \quad x_r^{(n)} = \frac{r}{2} + (-1)^{r+[n/2]} g_r(n) \frac{\pi^{n-1}}{(n-1)\,!}\left(\sum_{1 \leqslant k < \frac{r}{2}} (r-2k)^{n-1}\right) \times \left(1 + O\left(\left(\frac{\pi e(r-2)}{n}\right)^n \sqrt{n}\right)\right),$$

où

$$g_r(n) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\zeta(n-1)^{-1} & \textit{si } \ r \textit{ est pair,} \\[2ex] \dfrac{1}{2}\left(\left(1-\dfrac{1}{2^{n-2}}\right)\zeta(n-1)\right)^{-1} & \textit{si } \ r \textit{ est impair.} \end{cases}$$

Démonstration. – Comme dans la démonstration de la première partie du théorème 4, nous posons

$$x_r = \frac{r}{2} + (-1)^{r+[n/2]}\varepsilon_r$$

et nous utilisons l'égalité (24). Mais nous faisons maintenant une étude plus fine du premier membre de cette égalité.

On voit que l'on a uniformément par rapport à r, assujetti à aucune condition,

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{(k-1)r}\frac{\sin 2k\pi\varepsilon_r}{k^n} = 2\pi h_r(n)\varepsilon_r(1+O(\varepsilon_r^2)), \tag{30}$$

où

$$h_r(n) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{(k-1)r}}{k^{n-1}} = \begin{cases} \zeta(n-1) & \text{si } \ r \text{ est pair,} \\ \left(1-\dfrac{1}{2^{n-2}}\right)\zeta(n-1) & \text{si } \ r \text{ est impair.} \end{cases}$$

En effet, on a pour θ réel quelconque

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{6}\varphi(\theta), \qquad \text{avec} \qquad 0 \leqslant \varphi(\theta) \leqslant 1\,.$$

Ainsi $\sin 2k\pi\varepsilon_r = 2k\pi\varepsilon_r - \dfrac{4}{3}k^3\pi^3\varepsilon_r^3\varphi(2k\pi\varepsilon_r)$, ce qui donne pour $n \geqslant 5$

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{(k-1)r}\frac{\sin 2k\pi\varepsilon_r}{k^n} \\ &\qquad = 2\pi\varepsilon_r\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{(k-1)r}}{k^{n-1}} - \frac{4}{3}\pi^3\varepsilon_r^3\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{(k-1)r}}{k^{n-3}}\varphi(2k\pi\varepsilon_r) \\ &\qquad = 2\pi\varepsilon_r\left(h_r(n) - \frac{2}{3}\pi^2\varepsilon_r^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{(k-1)r}}{k^{n-3}}\varphi(2k\pi\varepsilon_r)\right). \end{aligned}$$

(30) résulte de ce que

$$h_r(n) > 1 - \frac{1}{2^{n-1}} \quad \text{et} \quad \left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{(k-1)r}}{k^{n-3}}\varphi(2k\pi\varepsilon_r)\right| \leqslant \zeta(n-3) = O(1)\,.$$

Dans la suite, toutes les estimations que nous donnerons vaudront pour n, supposé impair, tendant vers l'infini, et seront uniformes par rapport à r assujetti aux conditions indiquées.

Remarquons que, comme il est facile de le voir, le 2° implique que (28) a lieu pour $r = 3$ et pour $r = 4$. Donc nous pourrons réduire la démonstration du 1° à celle du fait que (28) a lieu uniformément pour $5 \leqslant r \leqslant \dfrac{n}{\pi e} + A$.

Supposons donc d'abord que $5 \leqslant r \leqslant \dfrac{n}{\pi e} + A$, avec A fixé $\geqslant 0$.

Notons que, en raison de (17), quand n est $\geqslant 28$ et assez grand, on a $r \leqslant N - 2$ et le théorème 4 s'applique. Ce théorème montre que l'on a

$$(31) \quad \varepsilon_r = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}} e^{-2n/(r-2)}\right) \text{ (ce qui est évidemment } o(1)).$$

En effet, l'inégalité (20) donne, puisque $r_1 < r$,

$$0 < \varepsilon_r \sqrt{n} e^{2n/(r-2)} < K\left(\frac{\pi e r}{n}\right)^{n-1} e^{2n/(r-2)} < K e^{2/3}\left(\frac{\pi e r}{n} e^{2/(r-2)}\right)^{n-1},$$

où $K = 0{,}85172$.

On voit que la fonction $t \mapsto \dfrac{\pi e t}{n} e^{2/(t-2)}$ est décroissante sur l'intervalle $[5, 3+\sqrt{5}]$ et croissante sur $[3+\sqrt{5}, +\infty[$.

Sa valeur pour $t = 5$ étant $\dfrac{5\pi e^{5/3}}{n}$, qui est $\leqslant 1$ pour $n \geqslant 5\pi e^{5/3}$, on voit que, pour $n \geqslant 5\pi e^{5/3}$, son maximum sur l'intervalle $\left[5, \dfrac{n}{\pi e} + A\right]$ est sa valeur pour $t = \dfrac{n}{\pi e} + A$, soit $\left(1 + \dfrac{\pi e A}{n}\right) \exp\left(\dfrac{2\pi e}{n + \pi e(A-2)}\right)$, puisque celle-ci est > 1.

On a donc

$$\varepsilon_r \sqrt{n} e^{2n/(r-2)} < K e^{2/3}\left(1 + \frac{\pi e A}{n}\right)^{n-1} \exp\left(\frac{2\pi e(n-1)}{n + \pi e(A-2)}\right).$$

Quand n tend vers l'infini, cette dernière expression tend vers $K\exp\left(\frac{2}{3}+\pi e(A+2)\right)\cdot$

(31) donne

$$\varepsilon_r^2 = O\left(\frac{1}{n}e^{-4n/(r-2)}\right) = O\left(\frac{\sqrt{n}}{r}e^{-2n/(r-2)}\right)$$

car $\frac{1}{n} = \frac{\sqrt{n}}{r} \times \frac{r}{n^{3/2}}$ et $r = O(n)$.

D'autre part, $h_r(n) = 1 + O\left(\frac{1}{2^n}\right) = 1 + O\left(\frac{\sqrt{n}}{r}e^{-2n/(r-2)}\right)$ car $\frac{\sqrt{n}}{r}e^{-2n/(r-2)} \geqslant \frac{\pi e}{1+\pi e A/n} \times \frac{1}{\sqrt{n}}(e^{-2/(r-2)})^n$ et $e^{-2/(r-2)} \geqslant e^{-2/3} > \frac{1}{2}\cdot$

(30) donne donc

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{(k-1)r}\frac{\sin 2k\pi\varepsilon_r}{k^n} = 2\pi\varepsilon_r\left(1+O\left(\frac{\sqrt{n}}{r}e^{-2n/(r-2)}\right)\right)\cdot$$

Alors, comme $\frac{\sqrt{n}}{r}e^{-2n/(r-2)} = o(1)$, (24) donne

$$\varepsilon_r = \frac{1}{2\pi}\left(1+O\left(\frac{\sqrt{n}}{r}e^{-2n/(r-2)}\right)\right)\frac{(2\pi)^n}{2\cdot n\,!}R_n(x_r). \tag{32}$$

Maintenant, la formule (11) donne

$$\frac{(2\pi)^n}{2\cdot n\,!}R_n(x_r) = \frac{\pi}{1-e^{-n/(x_r-1)}}\cdot\frac{(2\pi(x_r-1))^{n-1}}{(n-1)\,!}(1+\rho_n(x_r))\,. \tag{33}$$

D'après ce qu'on a dit à la fin du § 5.2, on a $\frac{n}{x_r-1} > \frac{4\pi e^2}{(2e+1)}\cdot$ Par suite, l'inégalité (10) donne

$$\rho_n(x_r) = O\left(\frac{\sqrt{n}}{x_r-1}e^{-n/(x_r-1)}\right) \tag{34}$$

car $e^{n/(x_r-1)} - 1 = e^{n/(x_r-1)}(1-e^{-n/(x_r-1)}) > (1-e^{-4\pi e^2/(2e+1)})e^{n/(x_r-1)}$.

Il résulte immédiatement de (31) que $\frac{1}{x_r-1} = O\left(\frac{1}{r}\right)\cdot$

D'autre part, on a

$$\frac{2}{r-2} - \frac{1}{x_r - 1} = (-1)^{r+[n/2]} \frac{2\varepsilon_r}{(r-2)(x_r-1)}$$
$$= O\left(\frac{\varepsilon_r}{r^2}\right) = O\left(\frac{1}{r^2\sqrt{n}} e^{-2n/(r-2)}\right)$$

et par suite, comme

$$e^{-n/(x_r-1)} = e^{-2n/(r-2)} \exp\left(n\left(\frac{2}{r-2} - \frac{1}{x_r-1}\right)\right),$$

$$(35) \qquad e^{-n/(x_r-1)} = e^{-2n/(r-2)}\left(1 + O\left(\frac{\sqrt{n}}{r^2} e^{-2n/(r-2)}\right)\right).$$

Ainsi (34) donne

$$(36) \qquad \rho_n(x_r) = O\left(\frac{\sqrt{n}}{r} e^{-2n/(r-2)}\right).$$

D'autre part, comme $\dfrac{2n}{r-2} \geqslant \dfrac{2\pi e}{1+\pi e(A-2)/n}$, et par suite $\exp\left(-\dfrac{2n}{r-2}\right) \leqslant \exp\left(-\dfrac{2\pi e}{1+\pi e(A-2)/n}\right)$, qui tend vers $e^{-2\pi e}$ quand n tend vers l'infini, (35) montre que l'on a

$$(37) \quad 1 - e^{-n/(x_r-1)} = (1 - e^{-2n/(r-2)})\left(1 + O\left(\frac{\sqrt{n}}{r} e^{-2n/(r-2)}\right)\right).$$

Maintenant on a

$$\frac{(2\pi(x_r-1))^{n-1}}{(n-1)\,!} = \frac{(\pi(r-2))^{n-1}}{(n-1)\,!} \cdot \left(\frac{2(x_r-1)}{r-2}\right)^{n-1}.$$

Comme

$$\frac{2(x_r-1)}{r-2} = 1 + (-1)^{r+[n/2]} \frac{2\varepsilon_r}{r-2} = 1 + O\left(\frac{1}{r\sqrt{n}} e^{-2n/(r-2)}\right) \text{ d'après (31),}$$

on a $\log \dfrac{2(x_r-1)}{r-2} = O\left(\dfrac{1}{r\sqrt{n}} e^{-2n/(r-2)}\right)$, d'où il résulte que

$$\left(\frac{2(x_r-1)}{r-2}\right)^{n-1} = 1 + O\left(\frac{\sqrt{n}}{r} e^{-2n/(r-2)}\right).$$

On a donc

$$(38)\quad \frac{(2\pi(x_r-1))^{n-1}}{(n-1)\,!} = \frac{(\pi(r-2))^{n-1}}{(n-1)\,!}\left(1+O\left(\frac{\sqrt{n}}{r}e^{-2n/(r-2)}\right)\right).$$

(33), avec (36), (37) et (38), donne

$$\frac{(2\pi)^n}{2\cdot n\,!}R_n(x_r) = \frac{\pi}{(1-e^{-2n/(r-2)})}\cdot\frac{(\pi(r-2))^{n-1}}{(n-1)\,!}\left(1+O\left(\frac{\sqrt{n}}{r}e^{-2n/(r-2)}\right)\right).$$

Alors (32) donne

$$\varepsilon_r = \frac{1}{2}(1-e^{-2n/(r-2)})^{-1}\frac{(\pi(r-2))^{n-1}}{(n-1)\,!}\left(1+O\left(\frac{\sqrt{n}}{r}e^{-2n/(r-2)}\right)\right),$$

ce qui est équivalent à (28) puisque $x_r = \frac{r}{2} + (-1)^{r+[n/2]}\varepsilon_r$.

Il reste maintenant à démontrer la deuxième partie du théorème. Supposons donc que $3 \leqslant r \leqslant \lambda n$, où $o < \lambda < \frac{1}{\pi e}$.

Ici, il est évident que $\sqrt{n}\left(\frac{\pi e(r-2)}{n}\right)^n = o(1)$ car ceci est $< \sqrt{n}(\lambda\pi e)^{n-1}$ et $\lambda\pi e < 1$.

Il est clair que, quand n est $\geqslant 28$ et assez grand, $r \leqslant N-2$ et le théorème 4 s'applique.

(20) donne $\varepsilon_r = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}(\lambda\pi e)^n\right)$, puisque $r_1 < r \leqslant \lambda n$.

Mais pour établir (20) on a montré en fait que

$$\varepsilon_r < \frac{C}{\sqrt{n}}\left(\frac{2\pi e(x_r-1)}{n}\right)^{n-1}, \quad \text{où} \quad C < 0{,}85172.$$

On a $\left(\frac{2\pi e(x_r-1)}{n}\right)^{n-1} = \left(\frac{\pi e(r-2)}{n}\right)^{n-1}\cdot\left(\frac{2(x_r-1)}{r-2}\right)^{n-1}$.

Comme $\frac{2(x_r-1)}{r-2} = 1 + \frac{2(-1)^{r+[n/2]}\varepsilon_r}{r-2} = 1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}(\lambda\pi e)^n\right)$ et $\lambda\pi e < 1$, on a $\left(\frac{2(x_r-1)}{r-2}\right)^{n-1} = O(1)$.

On voit ainsi que

$$\varepsilon_r = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{\pi e(r-2)}{n}\right)^{n-1}\right). \tag{39}$$

Il en résulte que

$$\varepsilon_r^2 = O\left(\frac{1}{n}\left(\frac{\pi e(r-2)}{n}\right)^{2n-2}\right) = o\left(\sqrt{n}\left(\frac{\pi e(r-2)}{n}\right)^{n-1}\right)$$

puisque $\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{\pi e(r-2)}{n}\right)^{2n-2} = \sqrt{n}\left(\dfrac{\pi e(r-2)}{n}\right)^{n-1} \cdot \dfrac{1}{n^{3/2}}\left(\dfrac{\pi e(r-2)}{n}\right)^{n-1}$ et $\left(\dfrac{\pi e(r-2)}{n}\right)^{n-1} < (\lambda \pi e)^{n-1}$.

(30) donne donc

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{(k-1)r} \frac{\sin 2k\pi\varepsilon_r}{k^n} = 2\pi h_r(n)\varepsilon_r\left(1 + O\left(\sqrt{n}\left(\frac{\pi e(r-2)}{n}\right)^{n-1}\right)\right),$$

d'où, puisque $\sqrt{n}\left(\dfrac{\pi e(r-2)}{n}\right)^{n-1} = o(1)$ et $\dfrac{1}{2h_r(n)} = g_r(n)$,

$$\varepsilon_r = \left(1 + O\left(\sqrt{n}\left(\frac{\pi e(r-2)}{n}\right)^{n-1}\right)\right)\frac{1}{\pi} g_r(n) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{(k-1)r} \frac{\sin 2k\pi\varepsilon_r}{k^n}. \tag{40}$$

Maintenant, on va voir que l'on a

$$R_n(x_r) = \frac{n}{2^{n-1}}\left(\sum_{1 \leqslant k < \frac{r}{2}} (r-2k)^{n-1}\right)\left(1 + O\left(\sqrt{n}\left(\frac{\pi e(r-2)}{n}\right)^{n-1}\right)\right). \tag{41}$$

On sait que $R_n(x_r) = n \sum\limits_{1 \leqslant k < x_r} (x_r - k)^{n-1}$.

Comme $x_r = \dfrac{r}{2} + (-1)^{r+[n/2]}\varepsilon_r$ et $0 < \varepsilon_r < \dfrac{1}{4}$, on voit que, si r est impair, on a

$$R_n(x_r) = n \sum_{1 \leqslant k < \frac{r}{2}} (x_r - k)^{n-1} = \frac{n}{2^{n-1}} \sum_{1 \leqslant k < \frac{r}{2}} (2x_r - 2k)^{n-1}.$$

Pour $k < \frac{r}{2}$, on a

$$2x_r - 2k = r + 2(-1)^{[n/2]+1}\varepsilon_r - 2k = (r-2k)\left(1 + \frac{2(-1)^{[n/2]+1}\varepsilon_r}{r-2k}\right)$$
$$= (r-2k)\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{\pi e(r-2)}{n}\right)^{n-1}\right)\right)$$

d'après (39), et par suite

$$(2x_r - 2k)^{n-1} = (r-2k)^{n-1}\left(1 + O\left(\sqrt{n}\left(\frac{\pi e(r-2)}{n}\right)^{n-1}\right)\right)$$

(le O étant uniforme par rapport à k). Ceci donne bien (41).

Si r est pair, on a $\sum_{1 \leqslant k < \frac{r}{2}} (r-2k)^{n-1} = \sum_{k=1}^{r/2-1} (r-2k)^{n-1}$ et

$$R_n(x_r) = \begin{cases} n \sum_{k=1}^{r/2-1} (x_r - k)^{n-1} & \text{dans le cas où} \quad n \equiv 2 \pmod 4, \\ n \sum_{k=1}^{r/2} (x_r - k)^{n-1} & \text{dans le cas où} \quad n \equiv 0 \pmod 4. \end{cases}$$

Pour $k \leqslant \frac{r}{2} - 1$, on a comme plus haut

$$(2x_r - 2k)^{n-1} = (r-2k)^{n-1}\left(1 + O\left(\sqrt{n}\left(\frac{\pi e(r-2)}{n}\right)^{n-1}\right)\right),$$

le O étant uniforme par rapport à k.

Ceci donne immédiatement (41) dans le cas où $n \equiv 2 \pmod 4$. Dans le cas où $n \equiv 0 \pmod 4$, comme $2x_r - r = 2\varepsilon_r$, on obtient

$$R_n(x_r) = n\left(\left(\sum_{k=1}^{r/2-1} (r-2k)^{n-1}\right)\left(1 + O\left(\sqrt{n}\left(\frac{\pi e(r-2)}{n}\right)^{n-1}\right)\right) + (2\varepsilon_r)^{n-1}\right),$$

ce qui donne encore (41) en raison de (39) et de ce que

$$\sum_{k=1}^{r/2-1} (r-2k)^{n-1} \geqslant 2^{n-1}.$$

Finalement, (40), (24) et (41) donnent

$$\varepsilon_r = \frac{\pi^{n-1}}{(n-1)!} g_r(n) \Big(\sum_{1 \leqslant k < \frac{r}{2}} (r-2k)^{n-1} \Big) \Big(1 + O\Big(\sqrt{n} \Big(\frac{\pi e(r-2)}{n} \Big)^{n-1} \Big) \Big),$$

ce qui est équivalent à (29).

5.4.2. Théorème 6. — *Quand n tend vers l'infini par valeurs paires,*

1° *Étant donné A et $B > 0$ on a uniformément pour*

$$\frac{1}{2\pi e}(n + \log n - A) \leqslant r \leqslant \frac{n+B}{\pi e}$$

$$(42) \quad x_r^{(n)} = \frac{r}{2} - \frac{1}{4} + (-1)^{r+n/2} \cdot \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \cdot \frac{e^{-5n/2r}}{1 - e^{-2n/r}} \cdot \frac{\sqrt{n}}{r} \Big(\frac{\pi e r}{n} \Big)^n \Big(1 + O\Big(\frac{1}{\sqrt{n}} \Big) \Big);$$

2° *Étant donné $\lambda \in \left]0, \frac{1}{2\pi e}\right]$ et $A > 0$ on a uniformément pour* $3 \leqslant r \leqslant \lambda n + A$

$$(43) \qquad x_r^{(n)} = \frac{r}{2} - \frac{1}{4} + \frac{(-1)^r}{2\pi} \sum_{\nu=1}^{q} \frac{\lambda_\nu}{(2\nu)^n} + O\Big(\frac{(\pi e \lambda)^n}{\sqrt{n}} \Big),$$

où les λ_ν sont ceux du théorème 1 et $q = [1/2\lambda\pi e]$.

En particulier, pour $3 \leqslant r \leqslant \frac{n}{2\pi e} + A$, avec $A > 0$,

$$(44) \qquad x_r^{(n)} = \frac{r}{2} - \frac{1}{4} + \frac{(-1)^r}{2^{n+1}\pi} \Big(1 + O\Big(\frac{1}{\sqrt{n}} \Big) \Big),$$

Démonstration. — Ici, comme dans la démonstration du théorème 5, toutes les estimations que nous donnerons vaudront pour n, supposé maintenant pair, tendant vers l'infini, et seront uniformes par rapport à r assujetti aux conditions indiquées.

Démonstration du 1°. — Nous posons

$$x_r = \frac{r}{2} - \frac{1}{4} + (-1)^{r+n/2} \varepsilon_r$$

(cet ε_r n'est donc pas le même que dans la démonstration de la deuxième partie du théorème 4, mais il a la même valeur absolue).

Nous remarquons ici encore que l'égalité (19) s'écrit

$$(-1)^{n/2+1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2k\pi x_r}{k^n} + \frac{(2\pi)^n}{2 \cdot n!} R_n(x_r) = 0.$$

Comme $\cos 2\pi x_r = (-1)^{n/2} \sin 2\pi\varepsilon_r$, ceci donne

$$\sin 2\pi\varepsilon_r = \frac{(2\pi)^n}{2 \cdot n!} R_n(x_r) + (-1)^{1+n/2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos 2k\pi x_r}{k^n}. \tag{45}$$

Maintenant nous observons ici encore que, quand n est $\geqslant 28$ et assez grand, le théorème 4 s'applique.

L'inégalité (21) montre que $\varepsilon_r = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ car

$$\left(\frac{\pi e(r-2)}{n}\right)^{n-1} < \left(\frac{\pi e r}{n}\right)^{n-1} \leqslant \left(1+\frac{B}{n}\right)^{n-1} < e^B.$$

Il en résulte d'abord que $\sin 2\pi\varepsilon_r = 2\pi\varepsilon_r\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$, d'où

$$\varepsilon_r = \left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\frac{1}{2\pi}\sin 2\pi\varepsilon_r.$$

(45) donne donc

$$\varepsilon_r = \left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\frac{1}{2\pi}\left(\frac{(2\pi)^n}{2 \cdot n!} R_n(x_r) + (-1)^{1+n/2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos 2k\pi x_r}{k^n}\right). \tag{46}$$

Maintenant, la formule (12) donne

$$\frac{(2\pi)^n}{2 \cdot n!} R_n(x_r) = \frac{1}{2(1-e^{-n/(x_r-1)})} \cdot \left(\frac{2\pi e(x_r-1)}{n}\right)^n \cdot \frac{\sqrt{n}}{x_r - 1} \cdot \frac{1 + \rho_n(x_r)}{\sqrt{2\pi}}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

car $n! = n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$.

Il résulte de ce qui a été dit à la fin du § 5.2 que $\rho_n(x_r) = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. D'autre part, on a

$$x_r - 1 = \frac{r}{2} - \frac{5}{4} + (-1)^{r+n/2}\varepsilon_r = \frac{r}{2}\left(1-\frac{5}{2r}+\frac{2(-1)^{r+n/2}\varepsilon_r}{r}\right).$$

Comme $r \geqslant \dfrac{n}{2\varepsilon e}$ pour $n \geqslant e^A$, ceci donne

$$x_r - 1 = \frac{r}{2}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

d'où $\dfrac{\sqrt{n}}{x_r - 1} = \dfrac{2\sqrt{n}}{r}\left(1 + O\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$, et

$$\frac{n}{x_r - 1} = \frac{2n}{r}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{2n}{r} + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Cette dernière relation donne $e^{-n/(x_r - 1)} = e^{-2n/r}\left(1 + O\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$ et, puisque $\dfrac{n}{r} \geqslant \dfrac{\pi e}{1 + B/n}$, $1 - e^{-n/(x_r-1)} = (1 - e^{-2n/r})\left(1 + O\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$.

On voit ensuite que

$$\frac{2\pi e(x_r - 1)}{n} = \frac{\pi e r}{n}\left(1 - \frac{5}{2r} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\right),$$

d'où

$$\left(\frac{2\pi e(x_r - 1)}{n}\right)^n = \left(\frac{\pi e r}{n}\right)^n e^{-5n/2r}\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$$

$\left(\text{car } \log\left(1 - \dfrac{5}{2r} + O\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)\right) = -\dfrac{5}{2r} + O\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)\right)$.

Finalement, on voit que l'on a

$$(47) \quad \frac{(2\pi)^n}{2 \cdot n!} R_n(x_r) = \frac{1}{1 - e^{-2n/r}} \cdot \frac{e^{-5n/2r}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left(\frac{\pi e r}{n}\right)^n \frac{\sqrt{n}}{r}\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right).$$

Comme $r \geqslant \dfrac{1}{2\pi e}(n + \log n - A)$, on a pour $n \geqslant e^A$

$$\frac{1}{1 - e^{-2n/r}} e^{-5n/2r}\left(\frac{\pi e r}{n}\right)^n \frac{\sqrt{n}}{r} > \frac{2\pi e^{1-5\pi e}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{2^n}\left(1 + \frac{\log n - A}{n}\right)^n.$$

Ceci $= \dfrac{2\pi e^{1-5\pi e - A}}{2^n}\sqrt{n}\left(1 + O\left(\dfrac{\log^2 n}{n}\right)\right)$.

Par ailleurs,

$$\left|\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos 2k\pi x_r}{k^n}\right| \leqslant \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^n} = O\left(\frac{1}{2^n}\right).$$

On voit ainsi que l'on a

$$\frac{(2\pi)^n}{2\cdot n!} R_n(x_r) + (-1)^{1+n/2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos 2k\pi x_r}{k^n} = \frac{(2\pi)^n}{2\cdot n!} R_n(x_r)\left(1+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right).$$

(46) donne donc

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{(2\pi)^{n-1}}{2\cdot n!} R_n(x_r)\left(1+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)\\ &= \frac{1}{1-e^{-2n/r}}\cdot\frac{e^{-5n/2r}}{(2\pi)^{3/2}}\cdot\frac{\sqrt{n}}{r}\left(\frac{\pi e r}{n}\right)^n\left(1+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \quad \text{d'après (47)}\end{aligned}$$

et ceci est équivalent à (42).

Démonstration du 2°. — Nous supposons maintenant que $n \geqslant \dfrac{3}{\lambda}$ et $3 \leqslant r \leqslant \lambda n + A$, où $0 < \lambda \leqslant 1/2\pi e$ et $A > 0$.

Nous posons $x_r = \dfrac{r}{2} - \dfrac{1}{4} + (-1)^r\left(\dfrac{1}{4} - \alpha_k - \beta_r\right)$, où $k = \dfrac{n}{2}$.

Les résultats d'Inkeri rappelés au § 1.1.2 montrent que, quand $N \geqslant 5$ et $r \leqslant N-2$, on a

$$\left[\frac{r}{2}\right] = \begin{cases} \dfrac{r}{2} - \dfrac{1}{2} & \text{si } r \text{ est impair,}\\[2ex] \dfrac{r}{2} - 1 & \text{si } r \text{ est pair.}\end{cases}$$

On a alors

$$\{x_r\} = \begin{cases}\alpha_k + \beta_r & \text{si } r \text{ est impair,}\\ 1 - (\alpha_k + \beta_r) & \text{si } r \text{ est pair.}\end{cases}$$

Si n est $\geqslant$ à un $n_0 \geqslant 28$ et assez grand, ceci a lieu et le théorème 4 s'applique.

Comme $B_n(1-(\alpha_k+\beta_r)) = B_n(\alpha_k+\beta_r)$, l'égalité (19) donne

$$(48) \qquad \frac{(2\pi)^n}{2\cdot n!} B_n(\alpha_k+\beta_r) + \frac{(2\pi)^n}{2\cdot n!} R_n(x_r) = 0.$$

La deuxième partie du théorème 4 montre qu'il existe une constante $C_1 > 0$ telle que, si $n \geqslant n_0$,

$$\left|\frac{1}{4} - \alpha_k - \beta_r\right| \leqslant \frac{C_1}{2^n}.$$

On sait par ailleurs (d'après Lehmer) que $0 < \frac{1}{4} - \alpha_k < \frac{1}{2^{n+1}\pi}$.

α_k et $\alpha_k + \beta_r$ sont donc dans l'intervalle

$$\left[\frac{1}{4} - \frac{C_2}{2^n}, \frac{1}{4} + \frac{C_2}{2^n}\right],$$

où

$$C_2 = \operatorname{Max}\left(C_1, \frac{1}{2\pi}\right).$$

On a pour $0 < x < 1$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{(2\pi)^n}{2 \cdot n!} B_n(x)\right) = (-1)^k 2\pi \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\sin 2h\pi x}{h^{n-1}}$$
$$= (-1)^k 2\pi \sin 2\pi x + O\left(\frac{1}{2^n}\right).$$

Pour $x \in \left[\frac{1}{4} - \frac{C_2}{2^n}, \frac{1}{4} + \frac{C_2}{2^n}\right]$, ceci $= (-1)^k 2\pi + O\left(\frac{1}{2^n}\right)$. Donc, si n est $\geqslant$ un n_1 convenable $\geqslant n_0$, on a pour $x \in \left[\frac{1}{4} - \frac{C_2}{2^n}, \frac{1}{4} + \frac{C_2}{2^n}\right]$

$$(-1)^k \frac{d}{dx}\left(\frac{(2\pi)^n}{2 \cdot n!} B_n(x)\right) \geqslant C_3 \qquad \text{où} \qquad C_3 > 0.$$

Comme $B_n(\alpha_k) = 0$, il en résulte que, si $n \geqslant n_1$,

$$(-1)^k \frac{(2\pi)^n}{2 \cdot n!} B_n(\alpha_k + \beta_r) \geqslant C_3 |\beta_r|.$$

(48) donne alors $|\beta_r| \leqslant \frac{1}{C_3} \cdot \frac{(2\pi)^n}{2 \cdot n!} R_n(x_r)$.

Compte tenu de ce que $x_r < \frac{r}{2} \leqslant \frac{\lambda n + A}{2}$, la formule (22), établie dans la démonstration du théorème 4, montre que

$$\frac{(2\pi)^n}{2 \cdot n!} R_n(x_r) = O\left(\frac{(\pi e \lambda)^n}{\sqrt{n}}\right).$$

Il résulte de là que $\beta_r = O\left(\frac{(\pi e \lambda)^n}{\sqrt{n}}\right)$ et par suite

$$x_r = \frac{r}{2} - \frac{1}{4} + (-1)^r\left(\frac{1}{4} - \alpha_k\right) + O\left(\frac{(\pi e \lambda)^n}{\sqrt{n}}\right).$$

Si $q = [1/2\lambda\pi e]$, on a d'après le théorème 1

$$\frac{1}{4} - \alpha_k = \frac{1}{2\pi} \sum_{v=1}^{q} \frac{\lambda_v}{(2v)^n} + O\left(\frac{1}{(2q+2)^n}\right)$$
$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{v=1}^{q} \frac{\lambda_v}{(2v)^n} + O\left(\frac{(\pi \varepsilon \lambda)^n}{\sqrt{n}}\right) \text{ puisque } \frac{1}{2q+2} < \pi e \lambda.$$

Ceci donne le résultat annoncé.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. Brillhart, On the Euler and Bernoulli polynomials, J. Reine Angew. Math., 234 (1969), 45-64.

[2] H. Delange, Sur les zéros réels des polynômes de Bernoulli, C.R. Acad. Sc. Paris, série I, 303 (1986), 539-542.

[3] K. Inkeri, The real roots of Bernoulli polynomials, Ann. Univ. Turk., Ser. AI, 37 (1959), 3-19.

[4] D. H. Lehmer, On the maxima and minima of Bernoulli polynomials, Amer. Math. Monthly, 47 (1940), 533-538.

[5] J. Lense, Über die Nullstellen der Bernoullischen Polynome, Monatsh. Math., 41 (1934), 188-190.

Manuscrit reçu le 5 février 1991.

Hubert Delange,
Université Paris-Sud
Mathématiques
Bâtiment 425
91405 Orsay Cedex.