ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

P. JOLISSAINT
A. VALETTE

Normes de Sobolev et convoluteurs bornés sur $L^2(G)$

Annales de l'institut Fourier, tome 41, nº 4 (1991), p. 797-822
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1991__41_4_797_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
41, 4 (1991), 797-822.

NORMES DE SOBOLEV ET CONVOLUTEURS BORNÉS SUR $L^2(G)$

par P. JOLISSAINT (*) et A. VALETTE

0. Introduction.

Soit G un groupe localement compact. Une *fonction-longueur* sur G est une fonction continue propre $L: G \to \mathbb{R}^+$ telle que, pour tous g, $h \in G$:

i) $L(g) = L(g^{-1})$

ii) $L(gh) \leqslant L(g) + L(h)$

iii) $L(1) = 0$.

Toute action continue, propre et isométrique de G sur un espace métrique X où l'on a choisi une origine x_0, fournit une fonction-longueur : si $|x-y|$ désigne la distance de x à y dans X, alors

$$L(g) = |gx_0 - x_0| \quad (g \in G)$$

définit sur G une fonction-longueur (1).

Rappelons la définition 1.1.6 de [Jo1] : soit $s \in \mathbb{R}$; si $f : G \to \mathbb{C}$ est une fonction sur G, la *norme de Sobolev* $\|f\|_{2,s,L}$ de f est définie comme la norme-L^2 de la fonction $f(1+L)^s$; l'espace $H_L^\infty(G)$ des *fonctions à décroissance rapide* sur G est l'espace des (classes de) fonctions f telles

(*) Le premier auteur a bénéficié du soutien du Fonds National Suisse de la Recherche Scientifique, Requête n° 21-26162.89.

(1) Cet exemple est en fait universel : si L est une fonction-longueur sur G, alors $K = \{g \in G : L(g) = 0\}$ est un sous-groupe compact de G ; l'action de G sur G/K est propre et G/K est muni de la métrique G-invariante $|gK - hK| = L(h^{-1}g)$.

Mots-clés : Locally compact group - Length function - Positive definite function - Fourier algebra - Reduced C^*-algebra.

Classification A.M.S. : 22D25 - 20F32 - 43A30 - 46L05.

que $\|f\|_{2,s,L} < \infty$ pour tout $s \in \mathbb{R}$. Nous disons que G a la *propriété* (DR) *par rapport à* L si toute fonction de $H_L^\infty(G)$ définit un convoluteur borné sur $L^2(G)$.

Dans la première partie de cet article, nous donnons une condition suffisante assez générale pour qu'un groupe ait la propriété (DR) ; ce critère nous permet d'établir que les groupes suivants ont la propriété (DR) :

a) le groupe des isométries d'un espace riemannien symétrique de rang 1 du type non compact ;

b) les groupes discrets agissant proprement discontinûment avec quotient compact sur les espaces métriques géodésiques qui sont hyperboliques au sens de Gromov ;

c) les groupes localement compacts unimodulaires agissant proprement sur un arbre localement fini, avec graphe quotient fini.

La classe de groupes qui apparaît en *b*) n'est autre que la classe des groupes hyperboliques au sens de Gromov [G], pour lesquels la propriété (DR) avait déjà été établie par de la Harpe [dHarp2]. Notons à ce propos que le premier auteur a montré que, si le groupe discret Γ a la propriété (DR) par rapport à L, alors $H_L^\infty(\Gamma)$ est une sous-algèbre dense de la C^*-algèbre réduite $C_r^*(\Gamma)$, et l'inclusion $H_L^\infty(\Gamma) \subset C_r^*(\Gamma)$ induit des isomorphismes en K-théorie topologique (voir [Jo2], Cor. 1.5). Ce fait a joué un rôle crucial dans la preuve de la conjecture de Novikov pour les groupes hyperboliques de Gromov, par Connes et Moscovici ([CoMos], voir aussi [Sk]).

Dans la seconde partie de l'article, nous donnons quelques applications de la propriété (DR) à l'analyse harmonique sur le groupe localement compact G.

Nous commençons par caractériser les fonctions ϕ de type positif sur G associées aux représentations faiblement contenues dans la représentation régulière gauche de G : si G a la propriété (DR), il faut et il suffit qu'il existe $s \geqslant 0$ tel que $\|\phi\|_{2,-s,L} < \infty$. Si L est conditionnellement de type négatif, ceci est encore équivalent à $\phi e^{-\lambda L} \in L^2(G)$ pour tout $\lambda > 0$. Puis, dans le cas d'un groupe discret Γ, nous considérons les propriétés d'approximation de l'algèbre de Fourier $A(\Gamma)$; nous montrons que, si Γ a la propriété (DR) par rapport à une fonction-longueur conditionnellement de type négatif, alors, pour tout $n \geqslant 1$, l'algèbre $A(\Gamma)$ possède une unité approchée formée de multiplicateurs n-positifs. Considérons enfin un groupe Γ qui de plus est résiduellement fini et contient un groupe libre non abélien. Alors pour tout $n \geqslant 1$ il existe une application n-positive de $C_r^*(\Gamma)$ dans l'algèbre $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ des opérateurs bornés sur l'espace de Hilbert $\mathscr{H}$, qui n'admet aucune extension positive à $\mathscr{B}(\ell^2(\Gamma))$.

Les résultats de la seconde partie doivent être vus comme des extensions de résultats précédemment obtenus pour les groupes libres non abéliens par Haagerup [Haa], de Cannière-Haagerup [dCaHaa], et Robertson-Smith [RoSm].

1. La propriété (DR) pour les groupes unimodulaires.

1.1. *Une condition suffisante pour la propriété* (DR).

Fixons une mesure de Haar à gauche μ sur le groupe localement compact G. Pour $p \geqslant 1$, nous noterons comme à l'ordinaire $L^p(G)$ pour $L^p(G,\mu)$. Nous désignerons par $C_c(G)$ l'algèbre de convolution des fonctions continues à supports compacts sur G. Le support de la fonction f sera noté $\operatorname{supp}(f)$; le produit de convolution sera noté $*$.

Pour $f \in C_c(G)$, nous noterons $\lambda_G(f)$ l'opérateur de convolution à gauche par f sur $L^2(G)$. La C^*-algèbre réduite de G, notée $C_r^*(G)$, est la fermeture de $\lambda_G(C_c(G))$ pour la norme de $\mathscr{B}(L^2(G))$.

Soit L une fonction-longueur sur G. L'espace $H_L^\infty(G)$ des fonctions à décroissance rapide sur G est un espace de Fréchet pour la famille des normes de Sobolev $\|\cdot\|_{2,s,L}(s \in \mathbb{R})$, et contient $C_c(G)$ comme sous-espace dense. Nous rappelons la définition 1.2.1 de [Jo1] :

DÉFINITION 1. — *Le groupe G a* la propriété (DR) par rapport à L *si l'inclusion de $C_c(G)$ dans $C_r^*(G)$ s'étend en une inclusion continue de $H_L^\infty(G)$ dans $C_r^*(G)$.*

Si G a la propriété (DR), les éléments de $H_L^\infty(G)$ définissent des convoluteurs bornés sur $L^2(G)$. En invoquant le théorème du graphe fermé, on voit ([Jo1], remarque 1.2.2) que G a la propriété (DR) si et seulement s'il existe $c > 0$ et $s \geqslant 0$ tels que

$$\|\lambda_G(f)\| \leqslant c\|f\|_{2,s,L}$$

pour tout $f \in C_c(G)$ (la norme de f comme convoluteur sur $L^2(G)$ est dominée par une norme de Sobolev). C'est ce critère plus maniable que nous utiliserons ci-dessous.

Nous allons maintenant présenter des conditions suffisantes sur la paire (G,L) pour que G ait la propriété (DR) ; elles généralisent le cas des groupes discrets co-compacts d'isométries hyperboliques (cf. théorème 3.2.1 de [Jo1]).

Nous adoptons les notations suivantes : si L est une fonction-longueur sur G, si r et a sont des nombres positifs, on note :

$$C_{r,a} = \{g \in G : r-a \leqslant L(g) \leqslant r+a\},$$
$$C_r = \{g \in G : r-1 < L(g) \leqslant r\} ;$$

$\chi_{r,a}$ et χ_r désignent les fonctions caractéristiques de $C_{r,a}$ et de C_r respectivement. Enfin, si k, ℓ, a et b sont des nombres positifs, et si $g \in G$, on pose :

$$E_{k,\ell}^{a,b}(g) = C_{k,a} \cap g \cdot C_{\ell,b}^{-1} = C_{k,a} \cap g \cdot C_{\ell,b} = \{h \in C_{k,a} : h^{-1}g \in C_{\ell,b}\}$$
$$E_{k,\ell}(g) = C_k \cap g \cdot C_\ell .$$

Le lemme qui suit est dû à Haagerup ([Haa], lemmes 1.4 et 1.5) dans le cas des groupes libres non abéliens. Nous renvoyons à la proposition 1.2.6 de [Jo1] pour une démonstration.

LEMME 1. — *On suppose qu'il existe une constante $K > 0$ telle que pour tous k, ℓ, $m \in \mathbb{N}$ vérifiant $|k-\ell| \leqslant m \leqslant k + \ell$, et pour tous φ, $\psi \in L^2(G)$ avec* $\operatorname{supp}(\varphi) \subset C_k$ *et* $\operatorname{supp}(\psi) \subset C_\ell$, *on a :*

$$\|(\varphi * \psi)\chi_m\|_2 \leqslant K \|\varphi\|_2 \|\psi\|_2 .$$

Alors il existe $C > 0$ tel que

$$\|\lambda_G(f)\| \leqslant C \cdot \|f\|_{2,2,L}$$

pour tout $f \in H_L^\infty(G)$; en particulier, G possède la propriété (DR).

Introduisons la première hypothèse :

HYPOTHÈSE 1. — *Pour tous a, b, $c > 0$, il existe $N(a,b,c) > 0$ tel que pour tous k, $\ell > 0$ et $g \in C_{k+\ell,a}$, on a :*

$$\mu(E_{k,\ell}^{b,c}(g)) \leqslant N(a,b,c) .$$

Si L provient d'une action propre et isométrique de G comme au § 0, l'hypothèse 1 s'interprète comme suit : quels que soient k, $\ell \in \mathbb{N}$ et $g \in G$ tels que $|gx_0 - x_0|$ soit voisin de $k + \ell$, la mesure de l'ensemble des $h \in G$ tels que $|hx_0 - x_0|$ est voisin de k et $|hx_0 - gx_0|$ voisin de ℓ, est bornée indépendamment de k, ℓ et g.

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on en déduit, comme à l'assertion (A) de la proposition 3.2.4 de [Jo1] :

LEMME 2. — *Si la paire* (G,L) *satisfait l'hypothèse* 1, *alors pour tous* $a, b, c > 0$, *pour tous* $k, \ell \in \mathbb{N}$ *et pour tous* $\varphi, \psi \in L^2(G)$ *avec* $\operatorname{supp}(\varphi) \subset C_{k,b}$ *et* $\operatorname{supp}(\psi) \subset C_{\ell,c}$, *on a :*

$$\|(\varphi*\psi)\chi_{k+\lambda,a}\|_2^2 \leqslant N(a,b,c)\|\varphi\|_2^2\|\psi\|_2^2.$$

Nous verrons à la section 2.2 ci-dessous que l'hypothèse d'unimodularité dans l'énoncé du lemme suivant ne peut être supprimée.

LEMME 3. — *Si* G *est unimodulaire et si la paire* (G,L) *satisfait l'hypothèse* 1, *alors pour tous* $\ell \geqslant 0$ *et* $p \in [0,\ell]$, *et pour tous* $b, c > 0$ *et* $\psi \in L^2(G)$, *on a :*

$$\int_{C_{\ell-p,b}}\left(\int_{C_{p,c}} |(\psi\chi_\ell)(h^{-1}v)|^2 dh\right) dv \leqslant N(c,b,1)\|\psi\chi_\ell\|_2^2.$$

Preuve. — En remarquant que $\mu(E^{c,b}_{p,\ell-p}(g)) = \chi_{p,c} * \chi_{\ell-p,b}(g)$, on a, puisque G est unimodulaire :

$$\begin{aligned}
\int_{C_{\ell-p,b}}\left(\int_{C_{p,c}} |(\psi\chi_\ell)(h^{-1}v)|^2 dh\right) dv &= \int_{C_{p,c}}\left(\int_{C_{\ell-p,b}} (\psi\chi_\ell)(hv)|^2 dv\right) dh \\
&= \chi_{p,c} * (\chi_{\ell-p,b} * |(\psi\chi_\ell)^{\vee}|^2)(1) \\
&= (\chi_{p,c} * \chi_{\ell-p,b}) * |(\psi\chi_\ell)^{\vee}|^2(1) \\
&= \int_{C_\ell} \mu(E^{c,b}_{p,\ell-p}(g)) \cdot |\psi\chi_\ell(g)|^2\, dg \\
&\leqslant N(c,b,1) \int_G |\psi\chi_\ell(g)|^2\, dg = N(c,b,1)\|\psi\chi_\ell\|_2^2.
\end{aligned}$$

Ceci termine la preuve du lemme 3.

Introduisons la seconde hypothèse :

HYPOTHÈSE 2. — *Il existe* a, b, c *et* $M > 0$ *tels que pour tous* $k, \ell, m \in \mathbb{N}$ *satisfaisant* $|k-\ell| \leqslant m \leqslant k + \ell$, *et pour tout* $g \in C_m$ *:*

i) $\mu(E^{a,b}_{k-p,\ell-p}(g)) \geqslant \dfrac{1}{M}$, où $p = \dfrac{1}{2}(k+\ell-m)$;

ii) si $u \in E^{a,b}_{k-p,\ell-p}(g)$ et $h \in E_{k,\ell}(g)$, alors $u^{-1}h \in C_{p,c}$.

Géométriquement, la première partie signifie que si $|gx_0 - x_0|$ est proche de $m = (k-p) + (\ell - p)$, on trouve suffisamment d'éléments $h \in G$ tels que $|hx_0 - x_0|$ soit proche de $k - p$ et que $|hx_0 - gx_0|$ soit proche de $\ell - p$. La seconde partie signifie que, chaque fois que le triangle (x_0, ux_0, gx_0) est très plat, il en est de même des triangles (x_0, ux_0, hx_0) et (hx_0, gx_0, ux_0) — voir la figure 1.

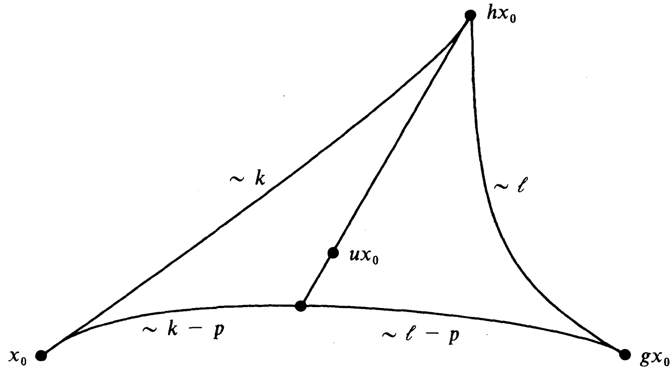

Figure 1

THÉORÈME 1. — *Si G est unimodulaire et si la paire (G,L) satisfait les hypothèses 1 et 2, alors il existe $c > 0$ tel que $\|\lambda_G(f)\| \leqslant c\|f\|_{2,2,L}$ pour tout $f \in H_L^\infty(G)$. En particulier G a la propriété (DR).*

Preuve. — On va montrer que les hypothèses du lemme 1 sont vérifiées. Soient k, ℓ, $m \in \mathbb{N}$ tels que $|k-\ell| \leqslant m \leqslant k + \ell$; soient φ, $\psi \in L^2(G)$ à support dans C_k et dans C_ℓ respectivement. Posons $p = \dfrac{1}{2}(k+\ell-m)$; soient a, b, c et M comme dans l'hypothèse 2. Si $g \in C_m$, on a, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$
\begin{aligned}
&\int_{C_k} |\varphi(h)\psi(h^{-1}g)|\, dh \\
&= \mu(E^{a,b}_{k-p,\ell-p}(g))^{-1} \cdot \int_{E^{a,b}_{k-p,\ell-p}(g)} \left(\int_{C_k} |\varphi(uu^{-1}h)| \cdot |\psi((u^{-1}h)^{-1}u^{-1}g)|\, dh \right) du \\
&\leqslant M \cdot \int_{E^{a,b}_{k-p,\ell-p}(g)} \left(\int_{E_{k,\ell}(g)} |\varphi(uu^{-1}h)| \cdot |\psi((u^{-1}h)^{-1}u^{-1}g)|\, dh \right) du \\
&\leqslant M \cdot \int_{E^{a,b}_{k-p,\ell-p}(g)} \left(\int_{C_{p,c}} |\varphi(uh)| \cdot |\psi(h^{-1}u^{-1}g)|\, dh \right) du \\
&\leqslant M \cdot \varphi' * \psi'(g)
\end{aligned}
$$

où

$$\varphi'(u) = \begin{cases} \left(\int_{C_{p,c}} |\varphi(uh)|^2 dh\right)^{\frac{1}{2}} & \text{si} \quad u \in C_{k-p,a} \\ 0 \quad \text{sinon} \end{cases}$$

$$\psi'(v) = \begin{cases} \left(\int_{C_{p,c}} |\psi(h^{-1}v)|^2 dh\right)^{\frac{1}{2}} & \text{si} \quad v \in C_{\ell-p,b}. \\ 0 \quad \text{sinon.} \end{cases}$$

On termine comme dans la preuve de la proposition 3.2.4 de [Jo1] : de ce qui précède, on tire :

$$\|(\varphi*\psi)\chi_m\|_2^2 \leqslant M^2 \cdot \|(\varphi'*\psi')\chi_m\|_2^2.$$

Le lemme 2, appliqué à φ' et ψ', fournit :

$$\|(\varphi'*\psi')\chi_m\|_2^2 \leqslant N(1,a,b)\|\varphi'\|_2^2\|\psi'\|_2^2.$$

En remarquant que $\|\varphi'\|_2^2 = (|\varphi|^2 * \chi_{p,c}) * \chi_{k-p,a}(1)$, on tire du lemme 3 : $\|\varphi'\|_2^2 \leqslant N(c,a,1)\|\varphi\|_2^2$ et $\|\psi'\|_2^2 \leqslant N(c,b,1)\|\psi\|_2^2$. On a donc

$$\|(\varphi*\psi)\chi_m\|_2^2 \leqslant M^2 N(1,a,b)N(c,a,1)N(c,b,1)\|\varphi\|_2^2\|\psi\|_2^2$$

ce qui termine la preuve.

1.2. *Exemples.*

Cette section est consacrée à la démonstration du théorème suivant :

THÉORÈME 2. — *Pour qu'un groupe localement compact unimodulaire G possède la propriété (DR), il suffit qu'il soit un des groupes suivants :*

(1) *le groupe des isométries d'un espace riemannien symétrique de rang 1 du type non compact ;*

(2) *un groupe discret agissant proprement discontinûment avec quotient compact sur un espace métrique géodésique qui est hyperbolique au sens de Gromov ;*

(3) *un groupe opérant proprement sur un arbre localement fini avec graphe quotient fini.*

Remarques. — 1) Au corollaire A.4 de [Jo1], on démontre que le groupe des isométries d'un espace riemannien symétrique de rang 1 possède la propriété (DR) en utilisant l'existence de réseaux co-compacts dans un tel groupe ([Bor], Théorème B). La preuve présentée ici n'utilise pas ce résultat.

2) Soit G un groupe discret agissant proprement discontinûment avec quotient compact sur un espace métrique géodésique hyperbolique X, comme au point (2) du théorème 2. Il est facile de voir que G est alors un groupe de génération finie, quasi-isométrique à X ([GhHarp], Proposition 19 du Chapitre 3). Il en résulte que G est lui-même un groupe hyperbolique au sens de Gromov, puisque l'hyperbolicité est préservée par quasi-isométrie ([GhHarp], Théorème 12 du Chapitre 5). Pour l'action d'un groupe hyperbolique sur le graphe de Cayley associé à un système fini de générateurs, le Théorème 2 a été établi dans [dHarp2].

Dans les trois cas du théorème 2, on choisit comme au § 0 une fonction-longueur géométrique L associée naturellement à l'action de G. Il suffit donc de montrer que la paire (G,L) satisfait les hypothèses 1 et 2 de la section 1.1.

a) (G,L) *satisfait l'hypothèse* 1 :

*a*1) Supposons que G soit le groupe des isométries d'un espace X riemannien symétrique de rang 1 du type non compact. Si κ désigne la courbure sectionnelle de X, il existe des constantes κ_1, κ_2 telles que $\kappa_1 \leqslant \kappa \leqslant \kappa_2 < 0$. Si a, b, $c > 0$ sont fixés, si k, $\ell > 0$ et $g \in C_{k+\ell,a}$, notons $x(g)$ l'unique point du segment géodésique $[x_0, gx_0]$ tel que $|x_0 - x(g)| = k$. D'après le lemme 3.2.2 de [Jo1], il existe $d > 0$ tel que $E^{b,c}_{k,\ell}(g) \cdot x_0$ soit contenu dans la boule de centre $x(g)$ et de rayon d. La courbure sectionnelle étant bornée, $\mu(E^{b,c}_{k,\ell}(g))$ est bornée indépendamment de k, ℓ et g.

*a*2) Pour un groupe discret agissant sur un espace hyperbolique, l'assertion se démontre comme la seconde partie du lemme 1 de [dHarp2].

*a*3) Supposons que G opère proprement sur un arbre localement fini X avec graphe quotient fini. L'arbre X est uniformément localement fini, et nous notons N le maximum des degrés des sommets de X. Fixons a, b, $c > 0$. Pour k, $\ell \in \mathbb{N}$, soient y_0 et y'_0 des sommets de X à distance $k + \ell - 2p$, où $2|p| \leqslant a$. Notons $C_{k,b}(y_0)$ la couronne de centre y_0 et de rayons $k - b$ et $k + b$. La couronne $C_{\ell,c}(y'_0)$ étant définie de manière analogue, nous devons borner $|C_{k,b}(y_0) \cap C_{\ell,c}(y'_0)|$ indépendamment de k et ℓ. Pour ce faire, notons z le sommet sur le segment $[y_0, y'_0]$ tel que $|z - y_0| = k - p$ et $|z - y'_0| = \ell - p$. Pour $x \in C_{k,b}(y_0) \cap C_{\ell,c}(y'_0)$, notons $p(x)$ le point de $[y_0, y'_0]$ le plus proche de x. Alors $|x - z| \leqslant |p| + c$ ou $|x - z| \leqslant |p| + b$ selon que $p(x)$ appartient à $[y_0, z]$ ou à $[z, y'_0]$. Donc $C_{k,b}(y_0) \cap C_{\ell,c}(y'_0)$ est certainement contenu dans la boule de centre z et rayon $a + b + c$, et par suite

$$|C_{k,b}(y_0) \cap C_{\ell,c}(y'_0)| \leqslant 1 + N \cdot \frac{(N-1)^{a+b+c} - 1}{N - 2}.$$

Dès lors

$$\mu(E^{b,c}_{k,\ell}(g)) \leqslant \mu(G_{x_0})\left(1 + N \cdot \frac{(N-1)^{a+b+c} - 1}{N-2}\right)$$

où G_{x_0} désigne le stabilisateur de x_0 dans G, qui est un sous-groupe compact ouvert de G.

b) *(G,L) satisfait l'hypothèse 2 :*

Cela va résulter d'une proposition plus générale. Comme en *a*3) ci-dessus, $C_{k,b}(x_0)$ désignera une couronne dans l'espace métrique X.

PROPOSITION 1. — *Soit $L: G \to \mathbb{R}^+ : g \to L(g) = |gx_0 - x_0|$ une fonction-longueur provenant d'une action propre et isométrique de G sur l'espace X. Pour que la paire (G,L) vérifie l'hypothèse 2, il suffit que les quatre conditions suivantes soient satisfaites :*

(i) $\mu\left\{g \in G : L(g) \leqslant \frac{1}{2}\right\} > 0$;

(ii) *(« co-compacité »). Il existe $r > 0$ tel que pour tout $x \in X$, il existe $u \in G$ tel que $|x - ux_0| \leqslant r$;*

(iii) *(« existence de quasi-géodésiques »). Pour tout $a > 0$, il existe b, $c > 0$ tels que, pour tous k, $\ell \in \mathbb{N}$ et $g \in C_{k+\ell,a}$, on ait $C_{k,b}(x_0) \cap C_{\ell,c}(gx_0) \neq \varnothing$;*

(iv) *(« hyperbolicité »). Pour tous a, b, c, $d > 0$, il existe $e > 0$ avec la propriété suivante : pour tous k, ℓ, $m \in \mathbb{N}$ avec $|k - \ell| \leqslant m \leqslant k + \ell$ et pour tous x, y, z, $t \in X$ avec :*

$$\begin{aligned}
k - a &\leqslant |x-y| \leqslant k + a \\
\ell - b &\leqslant |y-z| \leqslant \ell + b \\
m - c &\leqslant |x-z| \leqslant m + c \\
k - p - d &\leqslant |x-t| \leqslant k - p + d \\
\ell - p - d &\leqslant |z-t| \leqslant \ell - p + d \qquad \text{où} \qquad p = \frac{1}{2}(k+\ell-m),
\end{aligned}$$

on a : $p - e \leqslant |y-t| \leqslant p + e$.

Preuve. – Les conditions (i) à (iii) montrent que la première partie de l'hypothèse 2 est satisfaite. Ensuite, on utilise la condition (iv) et les mêmes arguments que dans la preuve de la proposition 3.2.4 de [Jo1] pour établir la seconde partie de l'hypothèse 2.

Notons que la condition (iv) de la proposition 1 ne porte que sur l'espace métrique X, et pas sur l'action de G.

Si G est le groupe des isométries d'un espace X riemannien symétrique de rang 1 du type non compact, la condition (i) de la proposition 1 est vérifiée car G agit transitivement sur toute boule de rayon 1/2 dans X. Les points (ii) à (iv) proviennent de la transitivité de l'action de G sur X et de l'hyperbolicité de X.

Lorsque G est un groupe discret opérant proprement discontinûment avec quotient compact sur un espace métrique géodésique qui est hyperbolique au sens de Gromov, on utilise les mêmes arguments que dans la preuve du lemme 1 de [dHarp2] pour montrer que la paire (G,L) vérifie les 4 conditions de la proposition 1.

Enfin, si G agit proprement sur un arbre localement fini avec graphe quotient fini, les 4 conditions de la proposition 1 sont clairement vérifiées.

2. Applications à l'analyse harmonique.

2.1. *Fonctions de type positif faiblement associées à la représentation régulière.*

Pour un groupe localement compact G, nous notons λ_G la représentation régulière gauche de G sur $L^2(G)$. Une fonction ϕ de type positif sur G est *faiblement associée à* λ_G si ϕ est limite uniforme sur tout compact de G de fonctions de type positif appartenant à $L^2(G)$. Si ψ est une fonction sur G, nous définissons ψ^* par $\psi^*(g) = \overline{\psi(g^{-1})}$ pour $g \in G$. Une fonction continue ψ sur G est *conditionnellement de type négatif* si $\psi^* = \psi$ et, pour tout choix d'un entier $n \geqslant 2$, d'éléments $x_1, \ldots, x_n$ de G, et de nombres complexes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de somme nulle, on a

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \overline{\lambda_i}\lambda_j\psi(x_i^{-1}x_j) \leqslant 0 .$$

Dans cette section, nous montrons que la propriété (DR) permet d'obtenir une caractérisation des fonctions de type positif faiblement associées à λ_G. Pour les groupes libres non abéliens, cette caractérisation est due à Haagerup ([Haa], Théorème 3.1).

THÉORÈME 3. — *On suppose que G a la propriété (DR) par rapport à la fonction-longueur L. Soit ϕ une fonction de type positif sur G. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) *ϕ est faiblement associée à λ_G ;*

b) *il existe $s \geqslant 0$ tel que $\|\phi\|_{2,-s,L} < \infty$.*

Si L est conditionnellement de type négatif, ces propriétés sont encore équivalentes à :

c) *pour tout $\lambda > 0$, la fonction $\phi e^{-\lambda L}$ appartient à $L^2(G)$.*

Preuve. — *a)* $\Rightarrow$ *b)* Notons $B_\lambda(G)$ l'espace des coefficients des représentations unitaires de G qui sont faiblement contenues dans λ_G. Pour $\psi \in B_\lambda(G)$, on pose :

$$\|\psi\|_{B_\lambda} = \inf \|\xi\| \cdot \|\eta\|$$

où l'infimum est pris sur toutes les écritures de ψ sous la forme :

$$\psi(g) = \langle \pi(g)\xi | \eta \rangle .$$

$B_\lambda(G)$ devient ainsi un espace de Banach qui s'identifie naturellement au dual de $C_r^*(G)$ (voir [E], remarque 2.6). Du fait de la propriété (DR), il existe $c > 0$ et $s \geqslant 0$ tels que :

$$\|\lambda_G(f)\| \leqslant c\|f\|_{2,s,L}$$

pour tout $f \in C_c(G)$. Par dualité, on a pour tout $\psi \in B_\lambda(G)$:

$$\|\psi\|_{2,-s,L} \leqslant c\|\psi\|_{B_\lambda} .$$

Ceci s'applique en particulier à toute fonction de type positif faiblement associée à λ_G.

b) $\Rightarrow$ *a)* Cette implication n'est autre qu'un résultat de Cowling, Haagerup et Howe, d'ailleurs indépendant de la propriété (DR) (voir [CowHaaHo], remarque *(b)* suivant le Théorème 1).

L'implication *b)* $\Rightarrow$ *c)* est claire. Supposons maintenant L conditionnellement de type négatif. Pour l'implication *c)* $\Rightarrow$ *a)*, on commence par observer que, par le théorème de Schoenberg ([dHarpV], 5.*b*.16), la fonction $e^{-\lambda L}$ est de type positif pour $\lambda > 0$. La fonction $\phi e^{-\lambda L}$ est ainsi une fonction de type positif dans $L^2(G)$. Enfin, pour λ tendant vers 0, la famille $\phi e^{-\lambda L}$ converge vers ϕ uniformément sur tout compact de G. Notons que cette implication n'utilise pas non plus la propriété (DR).

2.2. *Exemples et compléments sur le Théorème* 3.

Nous commençons par donner deux classes d'exemples où les conditions *a*), *b*), *c*) du Théorème 3 sont équivalentes.

i) Soit X l'espace hyperbolique réel (resp. complexe) de dimension $n \geqslant 2$. Le groupe G des isométries de X est localement isomorphe à $SO(n,1)$ (resp. $SU(n,1)$). Si x_0 est une origine choisie dans X, la fonction-longueur $L(g) = |gx_0 - x_0|$ est conditionnellement de type négatif sur G ([FHarz], Corollaire 7.4). D'autre part, G a la propriété (DR) par rapport à L, par le Théorème 2. Ainsi, le Théorème 3 s'applique à G. Il en va de même pour un réseau co-compact dans G.

ii) Soit G un groupe localement compact unimodulaire agissant proprement avec quotient fini sur un arbre localement fini X. Si x_0 est un sommet fixé sur X, la fonction-longueur $L(g) = |gx_0 - x_0|$ est conditionnellement de type négatif sur G ([dHarpV], 6.*a*.2 ; [V], Proposition 1). Le Théorème 2 montre d'autre part que G a la propriété (DR) par rapport à L. Donc le Théorème 3 s'applique à un tel G.

Comme exemples de groupes non discrets qui admettent une telle action sur un arbre, on trouve $SL_2(\mathbb{Q}_p)$ et plus généralement les groupes algébriques simples de rang déployé 1 sur un corps local non archimédien (pour un tel groupe, l'immeuble de Bruhat-Tits est un arbre, voir [T2], 2.7).

Parmi les groupes discrets qui admettent une action sur un arbre du type considéré, on trouve les produits libres, produits amalgamés, extensions HNN,... de groupes finis. Néanmoins, ces exemples sont limités par un résultat de Scott et Wall ([ScWal], Théorème 7.3) qui affirme qu'un groupe discret agissant proprement avec quotient fini sur un arbre localement fini, contient un sous-groupe libre d'indice fini ([2]). Donc, pour un tel groupe, la propriété (DR) est aussi une conséquence de la stabilité par passage aux sur-groupes d'indice fini ([Jo1], Proposition 2.1.5).

([2]) D'après le même résultat de [ScW], la réciproque est vraie : un groupe finiment engendré possédant un sous-groupe libre d'indice fini possède une action propre sur un arbre localement fini, avec graphe quotient fini.

Deux questions :

i) Soit Γ un groupe hyperbolique au sens de Gromov ; notons L_S la fonction-longueur algébrique sur Γ associée à un système générateur fini S. On sait, par le Théorème 2 (ou grâce au Théorème de [dHarp2]), que Γ a la propriété (DR) par rapport à L_S. Si L_S est équivalente à une fonction-longueur conditionnellement de type négatif, on peut appliquer le Théorème 3 à Γ. Mais ceci ne se produit pas pour tout groupe hyperbolique, puisqu'il existe des groupes hyperboliques infinis ayant la propriété (T) de Kazhdan, donc sur lesquels toute fonction conditionnellement de type négatif est bornée (c'est le cas des réseaux co-compacts dans $Sp(n,1)$, avec $n \geqslant 2$; voir à ce propos [dHarpV]). Peut-on caractériser les groupes hyperboliques sur lesquels L_S est équivalente à une fonction-longueur conditionnellement de type négatif ?

ii) Soit (W,S) un système de Coxeter irréductible. Notons L_S la fonction-longueur algébrique sur W associée au système générateur S. On sait que L_S est conditionnellement de type négatif sur W ([BozJaSp] ; [dHarpV] 6.c.15) ; mais on ignore si W a nécessairement la propriété (DR) par rapport à L_S. Ce sera certainement vrai si W est sphérique ou affine (car alors W est à croissance polynomiale, et le Théorème 3.1.7 de [Jo1] s'applique). Ce sera vrai aussi si W est hyperbolique au sens de Gromov (3). On peut encore construire des exemples qui ne sont ni sphériques, ni affines, ni hyperboliques, grâce à la remarque suivante : supposons que S puisse être partagé en deux parties A, B telles que le diagramme induit sur A soit sphérique, que le diagramme induit sur B soit un graphe complet où toutes les arêtes sont de poids infini, et que pour tout $i \in B$ le diagramme induit sur $A \cup \{i\}$ fournisse un groupe ayant la propriété (DR) ; alors W a lui-même la propriété (DR) (en effet, W est le produit amalgamé des $W_{A\cup\{i\}}$ au-dessus du sous-groupe fini W_A : le Théorème 2.2.2 de [Jo1] s'applique donc). La figure 2 fournit un exemple, où les éléments de A apparaissent en blanc, ceux de B en noir ; dans les notations de [Bou], le groupe décrit par cette figure est le produit amalgamé de $\tilde{F}_4$ et de $\tilde{A}_3 \times A_1$ au dessus de $A_3 \times A_1$.

Au vu de l'abondance des exemples, il est naturel de demander si tous les groupes de Coxeter ont la propriété (DR).

---

(3) Les groupes de Coxeter hyperboliques au sens de Gromov ont été caractérisés par Moussong [Mou] : ce sont exactement les groupes de Coxeter qui ne contiennent pas $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$; cette condition peut se lire sur le diagramme de Coxeter.

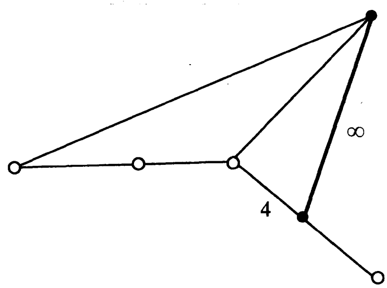

Figure 2

Remarques sur le Théorème 3. — i) Soit G un groupe localement compact ayant la propriété (DR) par rapport à une fonction-longueur conditionnellement de type négatif. Posons:

$$\lambda_0 = \inf\{\lambda > 0 : e^{-\lambda L} \in L^2(G)\}.$$

Il résulte immédiatement du Théorème 3 que la fonction de type positif $e^{-\lambda L}$ est faiblement associée à λ_G si et seulement si $\lambda \geqslant \lambda_0$. En particulier, G est moyennable si et seulement si $\lambda_0 = 0$.

ii) On fait agir $G = SL_2(\mathbb{Q}_p)$ sur son immeuble de Bruhat-Tits, qui n'est autre que l'arbre X homogène de degré $p+1$. Soit x_0 le sommet de X dont le stabilisateur dans G est $K = SL_2(\mathbb{Z}_p)$. Notons Y l'ensemble des sommets de X à distance paire de x_0: c'est l'orbite de x_0 sous G. Considérons la fonction-longueur $L(g) = |gx_0 - x_0|$ associée à x, et le sous-groupe parabolique minimal P de G:

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} : a \in \mathbb{Q}_p^\times, b \in \mathbb{Q}_p \right\}.$$

Nous allons montrer que *le groupe non-unimodulaire P n'a pas la propriété (DR) par rapport à L*. En effet, supposons que P ait la propriété (DR); comme P est moyennable, la remarque précédente implique que, pour tout $\lambda > 0$, la fonction $e^{-\lambda L}$ est dans $L^2(P)$. La décomposition $G = PK$ montre que P agit transitivement sur Y, donc pour tout $\lambda > 0$ la fonction $x \to e^{-\lambda|x-x_0|}$ est dans $\ell^2(Y)$. Mais ceci est absurde car

$$\sum_{x \in Y} e^{-2\lambda|x-x_0|} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-4\lambda n} \cdot |\{x \in X : |x-x_0| = 2n\}|$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-4\lambda n} \cdot (p+1) \cdot p^{2n-1}$$

et la série géométrique dans le dernier terme ne converge que pour $\lambda > \frac{1}{2}\log p$.

Plus généralement, si G est un groupe algébrique simple de rang déployé 1 sur un corps local non archimédien, et si P est un sous-groupe parabolique minimal de G, on montre de la même manière que P n'a pas la propriété (DR) par rapport à une fonction-longueur provenant de l'action sur l'immeuble de Bruhat-Tits de G.

De manière semblable, si G est $SO(n,1)$ (resp. $SU(n,1)$), avec $n \geqslant 2$, et si P est un sous-groupe parabolique minimal de G, on montre en utilisant les formules intégrales liées à la décomposition de Cartan $G = KA^+K$ (voir [Hel], Chap. I, Théorème 5.8) que P n'a pas la propriété (DR) par rapport à la fonction-longueur provenant de l'action de G sur l'espace hyperbolique réel (resp. complexe) de dimension n.

Cette liste d'exemples montre aussi que l'hypothèse d'unimodularité ne peut être supprimée dans les énoncés du Lemme 3 et du Théorème 1.

iii) Si G est un groupe localement compact muni d'une fonction-longueur L, nous dirons que *G est à croissance au plus exponentielle par rapport à L* s'il existe des constantes c, $A > 0$ telles que pour $s \in \mathbb{R}^+$:

$$\mu\{g \in G : L(g) \leqslant s\} \leqslant A e^{cs}.$$

Supposons que G soit à croissance au plus exponentielle par rapport à L. Soit ψ une fonction sur G qui appartient à $L^{2+\varepsilon}(G)$ pour tout $\varepsilon > 0$. Alors $\psi e^{-\lambda L}$ appartient à $L^2(G)$ pour tout $\lambda > 0$. Pour le voir, fixons $\lambda > 0$ et appliquons l'inégalité de Hölder avec $p = 1 + \varepsilon$ et $q = \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}$; il vient :

$$\begin{aligned} \|\psi e^{-\lambda L}\|_2^2 &= \int_G |\psi(g)|^2 e^{-2\lambda L(g)}\, dg \\ &\leqslant \left(\int_G |\psi(g)|^{2(1+\varepsilon)} dg\right)^{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}} \left(\int_G e^{-2\lambda\left(\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\right)L(g)} dg\right)^{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}}. \end{aligned}$$

Le premier facteur du membre de droite est fini pour tout $\varepsilon > 0$. Nous estimons le second facteur en découpant l'intégrale selon les

$C_n = \{g \in G : n-1 < L(g) \leqslant n\}$. Alors

$$\int_G e^{-2\lambda\left(\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\right)L(g)}\, dg \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2\lambda\left(\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\right)(n-1)} \mu(C_n)$$

$$\leqslant A \cdot \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2\lambda\left(\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\right)(n-1)} e^{cn}$$

par croissance au plus exponentielle. La dernière série converge pour ε assez petit, donc $\psi e^{-\lambda L}$ est dans $L^2(G)$.

Soit ϕ une fonction de type positif sur G. Cowling, Haagerup et Howe ont montré que, si ϕ appartient à $L^{2+\varepsilon}(G)$ pour tout $\varepsilon > 0$, alors ϕ est faiblement associée à λ_G ([CowHaaHo], Théorème 1). En combinant la remarque ci-dessus avec l'implication $c) \Rightarrow a)$ du Théorème 3, nous obtenons une preuve courte du résultat de Cowling, Haagerup et Howe dans le cas où G est à croissance au plus exponentielle par rapport à une fonction-longueur conditionnellement de type négatif.

2.3. *Propriétés d'approximation de l'algèbre de Fourier.*

Nous discutons ici des propriétés d'approximation de l'algèbre de Fourier et de la C^*-algèbre réduite d'un groupe discret Γ que nous supposerons toujours *dénombrable*. Nous commençons par un certain nombre de définitions.

Soient A une C^*-algèbre et $n \geqslant 1$ un entier ; un opérateur linéaire T sur A est *n-positif* si l'opérateur $T \otimes \mathrm{id}_n$ sur $A \otimes M_n(\mathbb{C})$ est positif. L'opérateur T est *complètement positif* s'il est n-positif pour tout $n \geqslant 1$, et *complètement borné* si

$$\sup_{n \geqslant 1} \|T \otimes \mathrm{id}_n\| < \infty .$$

Si A est une C^*-algèbre séparable à unité, on dit que *A a la propriété d'approximation n-positive* (resp. *complètement positive*, *complètement bornée*) s'il existe une suite $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'opérateurs n-positifs (resp. complètement positifs, complètement bornés), de rang fini sur A, tels que $T_k(1) = 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, et $\lim_{k \to \infty} \|T_k(x) - x\| = 0$ pour tout $x \in A$.

Notons $W^*(\Gamma)$ l'*algèbre de von Neumann* du groupe Γ, c'est-à-dire le bi-commutant de λ_Γ. L'*algèbre de Fourier* $A(\Gamma)$ est l'espace des coefficients de λ_Γ ; c'est une sous-algèbre de Banach de $B_\lambda(\Gamma)$; elle s'identifie naturellement au pré-dual de $W^*(\Gamma)$ (voir [E], Théorème 3.10).

Si T est un opérateur linéaire sur $A(\Gamma)$, on dit que T est n-positif (resp. *complètement positif, complètement borné*) si l'opérateur transposé T' est n-positif (resp. complètement positif, complètement borné) sur $W^*(\Gamma)$.

Une fonction $\psi : \Gamma \to \mathbb{C}$ est un *multiplicateur* de $A(\Gamma)$ si ψf est dans $A(\Gamma)$ pour tout f dans $A(\Gamma)$. On note $MA(\Gamma)$ l'espace des multiplicateurs de $A(\Gamma)$. Pour $\psi \in MA(\Gamma)$, on note M_ψ le transposé de l'opérateur de multiplication par ψ sur $A(\Gamma)$. L'espace $MA(\Gamma)$ est une algèbre de Banach pour la norme

$$\|\psi\|_{MA(\Gamma)} = \|M_\psi\|.$$

Si ψ est un multiplicateur positif (au sens : M_ψ est positif sur $W^*(\Gamma)$), on a par la proposition 4.3 de [dCaHaa] :

$$\|\psi\|_{MA(\Gamma)} = \psi(1).$$

On note $M_0A(\Gamma)$ l'espace des multiplicateurs complètement bornés de $A(\Gamma)$. C'est une algèbre de Banach pour la norme

$$\|\psi\|_{M_0A(\Gamma)} = \sup_{n\geqslant 1} \|M_\psi \otimes \mathrm{id}_n\|.$$

Enfin, nous notons $\mathbb{C}(\Gamma)$ pour $C_c(\Gamma)$.

Pour les groupes libres non abéliens, le résultat suivant est dû à de Cannière-Haagerup ([dCaHaa], Théorème 4.6).

THÉORÈME 4. — *On suppose que Γ possède la propriété (DR) par rapport à une fonction-longueur L conditionnellement de type négatif. Soit $n \geqslant 1$ un entier fixé. Il existe dans $\mathbb{C}[\Gamma]$ une suite $(\psi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que :*

(1) *Chaque ψ_k est un multiplicateur n-positif de $A(\Gamma)$, et $\psi_k(1) = 1$;*

(2) *Pour tout $f \in A(\Gamma)$: $\lim_{k\to\infty} \|\psi_k f - f\|_{A(\Gamma)} = 0$.*

La preuve du Théorème 4 nécessite deux lemmes ; voici d'abord un lemme d'algèbre linéaire qui est certainement bien connu ; faute de références, nous fournissons une preuve.

LEMME 4. — *Soient $n \geqslant 1$ un entier, $\mathscr{H}$ un espace pré-hilbertien, et $\{x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n\}$ une famille de $2n$ vecteurs dans $\mathscr{H}$. Il existe alors une famille $\{x'_1, \ldots, x'_n, y'_1, \ldots, y'_n\}$ de $2n$ vecteurs dans $\mathscr{H}$ telle que :*

i) $\langle y'_i | y'_j \rangle = 0$ si $i \neq j$;

ii) *Pour toutes formes sesquilinéaires B, C sur $\mathcal{H}$, on a :*

$$\sum_{i,j=1}^{n} \overline{B(x_i, x_j)} C(y_i, y_j) = \sum_{i,j=1}^{n} \overline{B(x'_i, x'_j)} C(y'_i, y'_j).$$

Preuve. — Soit A la matrice $n \times n$ définie par $A_{ij} = \langle y_i | y_j \rangle$. Comme A est positive, il existe une matrice unitaire U telle que UAU^* est diagonale. On fait agir U sur $\mathcal{H}^n = \mathcal{H} \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}$ (n facteurs) en posant, pour $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathcal{H}^n$:

$$v'_i = \sum_{k=1}^{n} U_{ik} v_k.$$

Il suffit de vérifier que les vecteurs $x'_1, \ldots, x'_n, y'_1, \ldots, y'_n$ ainsi définis satisfont les conditions annoncées. Mais, pour $i \neq j$, on a :

$$\langle y'_i | y'_j \rangle = \sum_{k,\ell=1}^{n} U_{ik} A_{k\ell} \overline{U_{j\ell}} = \sum_{k,\ell=1}^{n} U_{ik} A_{k\ell} U^*_{\ell j} = 0.$$

Puis :

$$\sum_{i,j=1}^{n} \overline{B(x'_i, x'_j)} C(y'_i, y'_j) = \sum_{i,j,k,\ell,p,q} \overline{U_{ik} B(x_k, x_\ell)} U_{j\ell} U_{ip} C(y_p, y_q) \overline{U_{jq}}$$

$$= \sum_{k,\ell,p,q} \delta_{kp} \delta_{\ell q} \overline{B(x_k, x_\ell)} C(y_p, y_q) = \sum_{k,\ell=1}^{n} \overline{B(x_k, x_\ell)} C(y_k, y_\ell).$$

LEMME 5. — *Soit $n \geqslant 1$ un entier. Soient Γ un groupe dénombrable, et L une fonction-longueur sur Γ telle que $L(g) > 0$ si $g \neq 1$. On suppose qu'il existe c, $s > 0$ tels que pour tout $f \in \mathbb{C}[\Gamma]$:*

$$\|\lambda_\Gamma(f)\| \leqslant c \|f\|_{2,s,L}$$

(en particulier Γ a la propriété (DR) par rapport à L). Soit $\psi : \Gamma \to \mathbb{C}$ une fonction telle que

i) $\psi = \psi^*$;

ii) *pour tout $g \in \Gamma - \{1\}$: $nc^2 |\psi(g)| (2 + L(g))^{2s+2} \leqslant \psi(1)$. Alors ψ définit un multiplicateur n-positif de $A(\Gamma)$.*

Preuve. — On commence par remarquer que, si $f \in A(\Gamma)$, alors :

$$\|f\|_{2,-s,L} \leqslant c \|f\|_{B_\lambda(\Gamma)} = c \|f\|_{A(\Gamma)}$$

(voir la preuve de l'implication $a) \Rightarrow b)$ du Théorème 3). Par conséquent, si χ_m et C_m sont définis comme à la section 1.1, on a :

$$\begin{aligned}\|f\chi_m\|_2 &\leqslant (1+m)^s\left(\sum_{g\in C_m}|f(g)|^2(1+L(g))^{-2s}\right)^{\frac{1}{2}} = (1+m)^s\|f\chi_m\|_{2,-s,L}\\ &\leqslant (1+m)^s\|f\|_{2,-s,L} \leqslant c(1+m)^s\|f\|_{A(\Gamma)}.\end{aligned}$$

Pour la preuve du lemme proprement dite, grâce à la proposition 3.4 de [dCaHaa] il suffit de montrer que, pour tous $f_1, \ldots, f_n$, $g_1, \ldots, g_n \in \mathbb{C}[\Gamma]$, on a :

$$\sum_{h\in\Gamma}\psi(h)\cdot\sum_{i,j=1}^{n} f_i^* * f_j(h)\cdot g_i * g_j^*(h) \geqslant 0$$

(remarque : vu l'hypothèse $\psi=\psi^*$, le premier membre est certainement réel). Nous pouvons supposer $\langle g_i|g_j\rangle = 0$ pour $i \neq j$. En effet, par le lemme 4, on peut remplacer $f_1, \ldots, f_n$, $g_1, \ldots, g_n$ par $f'_1, \ldots, f'_n$, $g'_1, \ldots, g'_n \in \mathbb{C}[\Gamma]$ avec $\langle g'_i|g'_j\rangle = 0$ si $i \neq j$ et, pour tout $h \in \Gamma$:

$$\sum_{i,j=1}^{n} f_i^* * f_j(h)\cdot g_i * g_j^*(h) = \sum_{i,j=1}^{n} f_i'^* * f'_j(h)\cdot g'_i * g_j'^*(h).$$

Rappelons que, pour f, $g \in \mathbb{C}[\Gamma]$, on a :

$$f * g^*(1) = \langle f|g\rangle$$
$$\|f*g^*\|_{A(\Gamma)} \leqslant \|f\|_2\|g\|_2.$$

Alors :

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{n} f_i^* * f_j(1)\cdot g_i * g_j^*(1) &= \sum_{i,j=1}^{n}\langle f_j|f_i\rangle\langle g_i|g_j\rangle\\ &= \sum_{i=1}^{n}\|f_i\|_2^2\|g_i\|_2^2.\end{aligned}$$

Pour un entier $m \geqslant 1$, on a de la même manière que dans la preuve de la proposition 4.5 de [dCaHaa] :

$$\begin{aligned}\left|\sum_{h\in C_m}\psi(h)\cdot\sum_{i,j=1}^{n} f_i^* * f_j(h)\cdot g_i * g_j^*(h)\right| &\leqslant nc^2(1+m)^{2s}\|\psi\chi_m\|_\infty\cdot\sum_{i=1}^{n}\|f_i\|_2^2\|g_i\|_2^2\\ &= nc^2(1+m)^{2s}\|\psi\chi_m\|_\infty\cdot\sum_{i,j=1}^{n} f_i^* * f_j(1)\cdot g_i * g_j^*(1).\end{aligned}$$

Comme $L(g) > 0$ pour $g \neq 1$ on a, toujours comme à la proposition 4.5 de [dCaHaa] :

$$
\begin{aligned}
- \sum_{h \in \Gamma - \{1\}} \psi(h) \cdot \sum_{i,j=1}^{n} f_i^* * f_j(h) \cdot g_i * g_j^*(h)
&\leqslant \sum_{m \geqslant 1} \left| \sum_{h \in C_m} \psi(h) \cdot \sum_{i,j=1}^{n} f_i^* * f_j(h) \cdot g_i * g_j^*(h) \right| \\
&\leqslant nc^2 \sum_{m \geqslant 1} (1+m)^{2s} \|\psi \chi_m\|_\infty \cdot \sum_{i,j=1}^{n} f_i^* * f_j(1) g_i * g_j^*(1) \\
&\leqslant nc^2 \cdot \sup_{m \geqslant 1} (1+m)^{2s+2} \|\psi \chi_m\|_\infty \cdot \sum_{i,j=1}^{n} f_i^* * f_j(1) g_i * g_j^*(1) \\
&\leqslant \psi(1) \cdot \sum_{i,j=1}^{n} f_i^* * f_j(1) g_i * g_j^*(1)
\end{aligned}
$$

du fait de l'hypothèse ii) sur ψ. Ceci termine la preuve du lemme.

Preuve du Théorème 4. — La preuve est semblable à celle du Théorème 4.6 de [dCaHaa]. Quitte à remplacer L par $L' = L + 1 - \delta_1$, on peut supposer que $L(g) > 0$ si $g \neq 1$ (en effet, L' est encore une fonction-longueur conditionnellement de type négatif, et comme $L \leqslant L' \leqslant L + 1$, on voit que Γ a la propriété (DR) par rapport à L si et seulement s'il l'a par rapport à L').

Soient c, $s > 0$ tels que $\|\lambda_\Gamma(f)\| \leqslant c\|f\|_{2,s,L}$ pour $f \in \mathbb{C}[\Gamma]$. Pour $m \geqslant 1$ et $\lambda > 0$, posons :

$$
\phi_{\lambda,m}(g) = \begin{cases} 1 + c^2 n \cdot \sup\limits_{t > m} (2+t)^{2s+2} e^{-\lambda t} & \text{si } g = 1 \\ e^{-\lambda L(g)} & \text{si } g \in \bigcup\limits_{j=1}^{m} C_j \\ 0 & \text{si } L(g) > m \end{cases}
$$

$$
\phi_\lambda(g) = e^{-\lambda L(g)} \quad (g \in \Gamma).
$$

Par le théorème de Schoenberg, la fonction ϕ_λ est de type positif sur Γ, donc définit un multiplicateur complètement positif de $A(\Gamma)$. Le lemme 5 s'applique pour montrer que $\phi_{\lambda,m} - \phi_\lambda$ est un multiplicateur n-positif de $A(\Gamma)$. Par suite, $\phi_{\lambda,m}$ en est un aussi. On pose

$$
\psi_{\lambda,m} = \frac{\phi_{\lambda,m}}{\phi_{\lambda,m}(1)}
$$

et on montre que

$$\lim_{m\to\infty} \|\psi_{\lambda,m} - \phi_\lambda\|_{MA(\Gamma)} = 0 .$$

Or, pour tout $f \in A(\Gamma)$:

$$\lim_{\lambda\to 0} \|\phi_\lambda f - f\|_{A(\Gamma)} = 0 .$$

L'identité de $A(\Gamma)$ est donc limite forte de la famille de multiplicateurs n-positifs $(\psi_{\lambda,m})_{\lambda>0,\, m\geqslant 1}$. Comme $A(\Gamma)$ est séparable, on peut en extraire une suite $(\psi_k)_{k\geqslant 1}$ convergeant fortement vers l'identité de $A(\Gamma)$.

Les trois corollaires qui suivent sont les mêmes que ceux obtenus pour les groupes libres non abéliens par de Cannière et Haagerup [dCaHaa].

COROLLAIRE 1. — *Si Γ satisfait les hypothèses du Théorème 4, alors, pour tout entier $n \geqslant 1$, la C^*-algèbre réduite $C_r^*(\Gamma)$ a la propriété d'approximation n-positive.*

Preuve. — C'est la même qu'au corollaire 4.7 de [dCaHaa].

COROLLAIRE 2. — *Soit $n \geqslant 1$ un entier. On suppose que Γ satisfait les hypothèses du Théorème 4, et qu'en plus Γ n'est pas moyennable. Soit $(\psi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de multiplicateurs n-positifs de $A(\Gamma)$, comme au Théorème 4. Alors, pour presque tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction ψ_k n'est pas de type positif sur Γ.*

Preuve. — C'est la même qu'au corollaire 4.8 de [dCaHaa] : si une infinité des ψ_k étaient de type positif, on contredirait la non-moyennabilité de Γ, puisque la fonction constante 1 est limite simple des ψ_k.

COROLLAIRE 3. — *On conserve les hypothèses du corollaire 2. Soit $(\psi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de multiplicateurs positifs de $A(\Gamma)$, comme au Théorème 4. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$: $\|\psi_k\|_{MA(\Gamma)} = 1$ et*

$$\limsup_{k\to\infty} \|\psi_k\|_{M_0A(\Gamma)} > 1 .$$

En particulier, l'injection de $M_0A(\Gamma)$ dans $MA(\Gamma)$ n'est pas isométrique.

Preuve. — C'est la même qu'au corollaire 4.9 de [dCaHaa].

Remarques sur les corollaires 1 *à* 3. — i) On sait, grâce aux travaux de Choi, Effros et Lance (cf. [L], §§ 5 et 8), que Γ est moyennable si et seulement si $C_r^*(\Gamma)$ a la propriété d'approximation complètement positive. La section 2.2 fournit de nombreux exemples de groupes Γ non moyennables auxquels s'applique le corollaire 1, donc pour lesquels $C_r^*(\Gamma)$ a la propriété d'approximation n-positive, pour tout $n \geqslant 1$.

De fait, le corollaire 1 peut s'interpréter comme une propriété de moyennabilité faible du groupe Γ, à rapprocher de la moyennabilité faible introduite par Cowling et Haagerup ([CaHaa], Proposition 6.1), qui s'exprime par la propriété d'approximation complètement bornée de $C_r^*(\Gamma)$. Pour un survol de diverses formes faibles de la moyennabilité, voir [V].

ii) Si Γ est un groupe moyennable, les espaces $M_0A(\Gamma)$ et $MA(\Gamma)$ coïncident isométriquement ([Her], Théorème 1 ; voir aussi [Re], Théorème 1). On conjecture que ces deux espaces sont distincts si Γ n'est pas moyennable (voir [CoHaa], § 0) ; pour les groupes libres non abéliens, c'est démontré au Théorème 2 de [Boz]. A l'appui de la conjecture, le corollaire 3 ci-dessus montre que, pour de nombreux groupes non moyennables, l'inclusion $M_0A(\Gamma) \subset MA(\Gamma)$ n'est pas isométrique.

2.4. *Applications n-positives non extensibles.*

Soient A une C^*-algèbre et $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert. Une application linéaire positive $\Phi : A \to \mathscr{B}(\mathscr{H})$ est *extensible* si, pour toute C^*-algèbre B contenant A, il existe une application linéaire positive $\tilde{\Phi} : B \to \mathscr{B}(\mathscr{H})$ qui prolonge Φ. Arveson a montré que toute application complètement positive est extensible (il existe même un prolongement complètement positif : c'est le « théorème de Hahn-Banach » pour les applications complètement positives, [A] Théorème 1.2.3). Størmer a établi que, si A est nucléaire, toute application positive est extensible ([St] Théorème 3.14). Enfin, pour tout $n \geqslant 1$, Robertson et Smith ont construit, sur la C^*-algèbre réduite du groupe libre $\mathbb{F}_2$ sur deux générateurs, une application n-positive qui n'admet aucune extension positive à $\mathscr{B}(\ell^2(\mathbb{F}_2))$ ([RoSm], Théorème 3.2). Notre but est de généraliser ce dernier résultat à d'autres C^*-algèbres réduites de groupes dénombrables. Le résultat suivant nous a été aimablement communiqué par A. G. Robertson.

PROPOSITION 2. — *Soient* Γ *un groupe dénombrable, et* $n \geqslant 1$ *un entier. On fait les hypothèses suivantes :*

i) Γ *est résiduellement fini ;*

ii) Γ *contient un sous-groupe libre non abélien ;*

iii) $C_r^*(\Gamma)$ *a la propriété d'approximation n-positive.*

Alors il existe une application n-positive $\Phi : C_r^*(\Gamma) \to \mathscr{B}(\mathscr{H})$ *qui n'admet aucune extension positive à* $\mathscr{B}(\ell^2(\Gamma))$.

Preuve. — Soit M l'algèbre de von Neumann $M = \bigoplus_{m=1}^{\infty} M_n(\mathbb{C})$, opérant sur $\mathscr{H} = \bigoplus_{m=1}^{\infty} \mathbb{C}^m$. Soit $\mathscr{V}$ un ultrafiltre libre sur $\mathbb{N}$. Si τ_m désigne la trace normalisée sur $M_m(\mathbb{C})$, alors

$$I_{\mathscr{V}} = \{(x_m)_{m\geqslant 1} \in M : \lim_{\mathscr{V}} \tau_m(x_m^* x_m) = 0\}$$

est un idéal bilatère maximal de M, et $N = M/I_{\mathscr{V}}$ est un facteur de type II_1 dont nous appellerons τ la trace unique. Comme Γ est résiduellement fini, il existe un *-homomorphisme injectif $\rho : C_r^*(\Gamma) \to N$ (c'est un résultat de Wassermann, [Was] lemme 1.6 ; dans l'article original, il est énoncé pour $\Gamma = \mathbb{F}_2$, mais la preuve n'utilise que la finitude résiduelle). Comme $C_r^*(\Gamma)$ a la propriété d'approximation n-positive, le Théorème 2.6 de [RoSm] fournit un relèvement n-positif $\Phi : C_r^*(\Gamma) \to M$ de ρ. Nous allons considérer Φ comme une application n-positive de $C_r^*(\Gamma)$ dans $\mathscr{B}(\mathscr{H})$, et montrer que Φ n'admet pas d'extension positive à $\mathscr{B}(\ell^2(\Gamma))$.

Puisque Γ contient un groupe libre non abélien, on montre comme dans [Ro] qu'il existe une projection $e \in \mathscr{B}(\ell^2(\Gamma))$ et deux unitaires u, $v \in C_r^*(\Gamma)$ tels que :

$$(*) \quad e + \frac{1}{2}(ueu^{-1} + u^{-1}eu) \geqslant 1$$
$$\geqslant e + \frac{1}{2}(vev^{-1} + v^{-1}ev) + \frac{1}{2}(v^2ev^{-2} + v^{-2}ev^2).$$

Supposons qu'il existe une extension positive $\tilde{\Phi} : \mathscr{B}(\ell^2(\Gamma)) \to \mathscr{B}(\mathscr{H})$ de l'application Φ. L'algèbre de von Neumann M étant injective, on peut supposer que $\tilde{\Phi}$ est à valeurs dans M, en composant si nécessaire avec une espérance conditionnelle de $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ sur M. En composant $\tilde{\Phi}$

avec l'application-quotient $M \to N$, on obtient une extension positive $\tilde{\rho} : \mathscr{B}(\ell^2(\Gamma)) \to N$ de l'homomorphisme ρ. Grâce au lemme 1 de [Ro], la relation (*) devient :

$$\tilde{\rho}(e) + \frac{1}{2}[\rho(u)\tilde{\rho}(e)\rho(u^{-1}) + \rho(u^{-1})\tilde{\rho}(e)\rho(u)] \geqslant 1$$

$$\geqslant \tilde{\rho}(e) + \frac{1}{2}[\rho(v)\tilde{\rho}(e)\rho(v^{-1}) + \rho(v^{-1})\tilde{\rho}(e)\rho(v)]$$

$$+ \frac{1}{2}[\rho(v^2)\tilde{\rho}(e)\rho(v^{-2}) + \rho(v^{-2})\tilde{\rho}(e)\rho(v^2)].$$

En appliquant la trace τ, il vient

$$2\tau(\tilde{\rho}(e)) \geqslant 1 \geqslant 3\tau(\tilde{\rho}(e))$$

ce qui est une absurdité.

COROLLAIRE 4. — *Soit Γ un groupe dénombrable vérifiant les hypothèses suivantes :*

i) Γ *est résiduellement fini;*

ii) Γ *contient un sous-groupe libre non abélien;*

iii) Γ *a la propriété* (DR) *par rapport à une fonction-longueur conditionnellement de type positif.*

Alors, pour tout entier $n \geqslant 1$, il existe une application n-positive $\Phi : C_r^*(\Gamma) \to \mathscr{B}(\mathscr{H})$ qui n'admet aucune extension positive à $\mathscr{B}(\ell^2(\Gamma))$.

Preuve. — On combine le corollaire 1 et la proposition 2.

Outre les groupes contenant un sous-groupe libre non abélien d'indice fini, le corollaire 4 s'applique aux groupes suivants :

— les réseaux co-compacts dans $SO(d,1)$ ou $SU(d,1) (d \geqslant 2)$;

— les groupes de Coxeter ni sphériques ni affines qui ont la propriété (DR).

En effet, tous ces groupes sont des groupes linéaires finiment engendrés ; un célèbre résultat de Mal'cev [Ma] assure qu'ils sont résiduellement finis. Les réseaux co-compacts dans $SO(d,1)$ ou $SU(d,1)$ sont non moyennables, donc contiennent un sous-groupe libre non abélien, par un fameux théorème de Tits [T1] ; enfin, les groupes de Coxeter ni sphériques ni affines contiennent un sous-groupe libre non abélien (d'après le Théorème principal de [dHarp1]).

BIBLIOGRAPHIE

[A] W. B. Averson, Subalgebras of C^*-algebras, Acta Math., 123 (1969), 141-224.

[Bor] A. Borel, Compact Clifford-Klein forms of symmetric spaces, Topology, 2 (1963), 111-122.

[Bou] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chapitres 4, 5 et 6, Hermann, 1968.

[Boz] M. Bozejko, Remark on Herz-Schur multipliers on free groups, Math. Ann., 258 (1981), 11-15.

[BozJaSp] M. Bozekjo, T. Januszkiewicz et R. Spatzier, Infinite Coxeter groups do not have Kazhdan's property (T), J. Operator Theory, 19 (1988), 63-67.

[dCaHaa] J. de Cannière et U. Haagerup, Multipliers of the Fourier algebras of some simple Lie groups and their discrete subgroups, Amer. J. Math., 107 (1985), 455-500.

[CoMos] A. Connes et H. Moscovici, Cyclic cohomology, the Novikov conjecture and hyperbolic groups, Topology, 29 (1990), 345-388.

[CoHaa] M. Cowling et U. Haagerup, Completely bounded multipliers of the Fourier algebra of a simple Lie group of real rank one, Invent. Math., 96 (1989), 507-549.

[CowHaaHo] M. Cowling, U. Haagerup et R. Howe, Almost L^2 matrix coefficients, J. reine angew. Math., 387 (1988), 97-110.

[E] P. Eymard, L'algèbre de Fourier d'un groupe localement compact, Bull. Soc. Math. France, 92 (1964), 181-236.

[FHarz] J. Faraut et K. Harzallah, Distances hilbertiennes invariantes sur un espace homogène, Ann. Inst. Fourier, 24-3 (1974), 171-217.

[GhHarp] Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov, ouvrage collectif édité par E. Ghys et P. de la Harpe, Progress in Math. 83, Birkhäuser 1990.

[G] M. Gromov, Hyperbolic groups, in « Essays in group theory », édité par S. M. Gersten (Springer, 1987), 75-263.

[Haa] U. Haagerup, An example of a non-nuclear C^*-algebra which has the metric approximation property, Invent. Math., 50 (1979), 279-293.

[dHarp1] P. de la Harpe, Groupes de Coxeter infinis non affines, Expo. Math., 5 (1987), 91-96.

[dHarp2] P. de la Harpe, Groupes hyperboliques, algèbres d'opérateurs et un théorème de Jolissaint, C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. I, 307 (1988), 771-774.

[dHarpV] P. de la Harpe et A. Valette, La propriété (T) de Kazhdan pour les groupes localement compacts, Astérisque 175, Soc. Math. France, 1989.

[Hel] S. Helgason, Groups and geometric analysis, Academic Press, 1984.

[Her] C. Herz, Une généralisation de la notion de transformée de Fourier-Stieltjes, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 24 (1974), 145-157.

[Jo1] P. Jolissaint, Rapidly decreasing functions in reduced C^*-algebras of groups, Trans. Amer. Math. Soc., 317 (1990), 167-196.

[Jo2] P. Jolissaint, K-theory of reduced C^*-algebras and rapidly decreasing functions on groups, K-theory, 2 (1989), 723-735.

[L] E. C. Lance, Tensor products and nuclear C^*-algebras, in « Operator algebras and applications », Proc. Symp. Pure Math., 38 (vol. 1), Amer. Math. Soc., 1982, 379-399.

[Ma] A. I. Mal'cev, On the faithful representations of infinite groups by matrices, Amer. Math. Soc. Transl., 45 (1965), 1-18.

[Mou] G. Moussong, Hyperbolic Coxeter groups, PhD thesis, Ohio State University, 1988.

[Re] P. F. Renaud, Centralizers of the Fourier algebra of an amenable group, Proc. Amer. Math. Soc., 32 (1972), 539-542.

[Ro] A. G. Robertson, A non-extendible positive map on the reduced C^*-algebra of a free group, Bull. London Math. Soc., 18 (1986), 389-391.

[RoSm] A. G. Robertson et R. R. Smith, Liftings and extensions of maps on C^*-algebras, J. Operator Theory, 21 (1988), 117-131.

[ScWal] P. Scott et T. Wall, Topological methods in group theory, in « Homological group theory », édité par C.T.C. Wall, London Math. Soc. Lecture Notes Series 36, Cambridge Univ. Press, 1979.

[Sk] G. Skandalis, Approche de la conjecture de Novikov par la cohomologie cyclique [d'après A. Connes, M. Gromov et H. Moscovici], Sém. Bourbaki, Fév. 1991, Exposé 739.

[St] E. Størmer, Extension of positive maps into $B(\mathscr{H})$, J. Funct. Anal., 66 (1986), 235-254.

[T1] J. Tits, Free subgroups in linear groups, J. Algebra, 20 (1972), 250-270.

[T2] J. Tits, Reductive groups over local fields, Proc. Symp. Pure Math. 33 (vol. 1), Amer. Math. Soc., 1979, 29-69.

[V] A. Valette, Weak forms of amenability for split rank 1 p-adic groups, pré-publication 1990, à paraître dans « p-adic methods and applications », Oxford University Press.

[Was] S. Wassermann, On tensor products of certain group C^*-algebras, J. Funct. Anal., 23 (1976), 239-254.

Manuscrit reçu le 14 mai 1991.

P. Jolissaint et A. Valette,
Université de Neuchâtel
Institut de Mathématiques
Chantemerle 20
2007 Neuchâtel (Suisse).