ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JEAN-CLAUDE TOUGERON

Inégalités de Łojasiewicz globales

Annales de l'institut Fourier, tome 41, nº 4 (1991), p. 841-865
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1991__41_4_841_0>

Ann. inst. Fourier, Grenoble
41, 4 (1991), 841-865.

INÉGALITÉS DE ŁOJASIEWICZ GLOBALES

par Jean-Claude TOUGERON

Cet article est la suite de [3] et reprend, avec quelques exemples et applications, les résultats de [4]. On s'intéresse ici aux propriétés métriques des ensembles analytiques réels ; alors que la théorie de Khovanskii, i.e. l'étude des propriétés topologiques, est une « application » du théorème de Rolle, l'inégalité de Łojasiewicz sera une « conséquence » du théorème des accroissements finis.

On considère *a priori* certaines algèbres de fonctions analytiques (en général, elles seront topologiquement noethériennes) vérifiant des inégalités de Łojasiewicz globales. Le résultat essentiel de ce travail est de montrer que ces inégalités sont encore satisfaites, quand on adjoint à ces algèbres certaines fonctions (cf. Théorèmes I et II). Là encore, par adjonctions successives, on construit de larges classes de fonctions analytiques vérifiant l'inégalité de Łojasiewicz. Les applications sont de deux sortes : applications géométriques (régulière séparation des fermés analytiques) ; théorèmes de division des fonctions C^∞ par des fonctions analytiques (cf. 3.2, 3.5) qui étendent les résultats classiques : division par des polynômes ou (forme locale) par des fonctions analytiques.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit $\mathcal{O}(\Omega)$ une sous-algèbre faiblement noethérienne de l'algèbre $\mathcal{H}(\Omega)$ des fonctions analytiques réelles dans Ω. Cela signifie que $\mathcal{O}(\Omega)$ contient $\mathbb{R}[x]$, est stable par dérivation ; en outre, toute suite décroissante de fermés analytiques pour $\mathcal{O}(\Omega)$ est stationnaire (un fermé analytique pour $\mathcal{O}(\Omega)$ est l'ensemble des zéros dans Ω d'une ou plusieurs fonctions de $\mathcal{O}(\Omega)$).

Mots-clés : Théorème des accroissements finis - Inégalités de Łojasiewicz - Régulure séparation.

A.M.S. Classification : 26B - 26D - 58D.

Notons $\underline{d}(x,y)$ la distance $\inf(1, d(x,y))$, d distance euclidienne, et soit Γ une famille non vide d'applications continues de Ω dans $\mathbb{R}$, qui vont mesurer la croissance au bord des fonctions de $\mathcal{O}(\Omega)$. Pour la commodité des calculs, nous supposerons que Γ vérifie les conditions suivantes :

a) $\forall \gamma \in \Gamma$ et $\forall x \in \Omega$, $\gamma(x) \geqslant \underline{d}(x, \partial\Omega)^{-1}$, i.e. $\gamma(x) \geqslant 1$ et la boule euclidienne ouverte $B(x, \gamma(x)^{-1})$ est contenue dans Ω (si $\Omega = \mathbb{R}^n$, i.e. $\partial\Omega = \varnothing$, $\underline{d}(x, \partial\Omega) = 1$).

b) Si $\gamma \in \Gamma$ et si $C \geqslant 1$, $C \cdot \gamma \in \Gamma$;
Si γ_1, $\gamma_2 \in \Gamma$, $\gamma_1 \cdot \gamma_2 \in \Gamma$;

c) Si $\gamma \in \Gamma$, il existe $\gamma' \in \Gamma$ tel que $\forall x \in \Omega$ et $\forall x' \in B(x, \gamma'(x)^{-1})$, on ait $\gamma(x') \leqslant \gamma'(x)$.

Par exemple, la famille de toutes les fonctions $\Omega \ni x \to C\underline{d}(x, \partial\Omega)^{-\alpha}(1 + |x|)^{\alpha}$ avec $C \geqslant 1$ et $\alpha \geqslant 1$ est du type précédent (croissance polynomiale). Si $\Omega = \mathbb{R}^n$, il en est de même de la famille de toutes les fonctions $x \to Ce^{A|x|}$, $C \geqslant 1$, $A \geqslant 0$ (croissance exponentielle).

Nous dirons que $\mathcal{O}(\Omega)$ *est* une algèbre de type Γ *si* $\mathcal{O}(\Omega)$ *est faiblement noethérienne et si* $\forall f \in \mathcal{O}(\Omega)$, *il existe* $\gamma \in \Gamma$ *et une constante* $\alpha \geqslant 0$ *tels que* $\forall x \in \Omega$:

$$\gamma(x) \geqslant |f(x)| \geqslant \gamma(x)^{-1} \cdot \underline{d}(x, f^{-1}(0))^{\alpha}$$

(*nous dirons que* f *vérifie une inégalité de Łojasiewicz d'ordre* α *et de type* Γ).

Une fonction $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ est *dominée par* Γ s'il existe $\gamma \in \Gamma$ telle que $|f(x)| \leqslant \gamma(x)$, $\forall x \in \Omega$; une algèbre analytique $\mathcal{O}(\Omega)$ est *dominée par* Γ si toute fonction de l'algèbre est dominée par Γ. Le but de cet article est de construire des algèbres de type Γ ; les résultats principaux sont les suivants :

THÉORÈME I. — *Soit* $\mathcal{O}(\Omega)$ *une algèbre analytique de type* Γ *et soit* $\Gamma[y]$ *la famille de toutes les fonctions* $\Omega \times \mathbb{R} \ni (x,y) \to \gamma(x)(1 + |y|)^{\alpha}$, *avec* $\gamma \in \Gamma$ *et* $\alpha \geqslant 1$. *Alors* $\mathcal{O}(\Omega)[y]$ *est une algèbre analytique sur* $\Omega \times \mathbb{R}$ *de type* $\Gamma[y]$.

THÉORÈME II. — *Soit* $\mathcal{O}(\Omega)$ *une algèbre analytique de type* Γ *et supposons que tout ensemble* $X \setminus Y$ (X, Y *fermés analytiques pour* $\mathcal{O}(\Omega)$) *admet un nombre fini de composantes connexes. Soit* $\Psi \in \mathscr{H}(\Omega)$ *vérifiant* *l'une ou l'autre des deux conditions suivantes :*

a) Ψ *est dominée par* Γ *et* $\forall i = 1, \ldots, n$ $\dfrac{\partial \Psi}{\partial x_i} \in \mathcal{O}(\Omega)$.

b) $\Psi = e^{\varphi}$ avec $\varphi \in \mathcal{O}(\Omega)$.

Alors, dans le cas a), $\mathcal{O}(\Omega)[\Psi]$ *est une algèbre de type* Γ ; *dans le cas b),* $\mathcal{O}(\Omega)[\Psi]$ *est de type* $e^{\mathbb{N}.|\varphi|} \cdot \Gamma$.

(On note $e^{\mathbb{N}.|\varphi|} \cdot \Gamma$ la famille formée par tous les $e^{N.|\varphi|} \cdot \gamma$ avec $N \in \mathbb{N}$ et $\gamma \in \Gamma$; si Ω est « assez régulier », le théorème des accroissements finis et les conditions $\dfrac{\partial \Psi}{\partial x_i} \in \mathcal{O}(\Omega)$ de *a*), impliquent que Ψ est dominée par Γ ; cette dernière hypothèse de *a*) est alors superflue.)

En particulier, si $\mathcal{O}(\Omega)$ est topologiquement noethérienne (cf. [3]) et de type Γ, on peut appliquer le théorème précédent ; l'algèbre $\mathcal{O}(\Omega)[\Psi]$ aura des propriétés analogues, ce qui permet par itération, de construire de nouvelles algèbres de type Γ.

Dans le paragraphe 1, nous démontrons les théorèmes I et II ; le paragraphe 2 est consacré à quelques compléments, et le paragraphe 3 à des exemples et quelques applications.

1. Démonstration des théorèmes I et II.

1.1. Soit $\mathcal{O}(\Omega)$ une algèbre analytique faiblement noethérienne et soit X un *fermé analytique irréductible* pour $\mathcal{O}(\Omega)$ (si X est réunion de deux fermés analytiques X_1, X_2, on a $X = X_1$ ou $X = X_2$) ; soit k le plus grand entier tel qu'il existe $f_1, \ldots, f_k \in \mathrm{I}(X) = \{f \in \mathcal{O}(\Omega) ; f|X = 0\}$ et un jacobien $\Delta = \dfrac{D(f_1, \ldots, f_k)}{D(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})} \notin I(X)$. D'après [4], proposition 1.3, $X \backslash \Delta^{-1}(0)$ est une variété analytique de codimension k et c'est une réunion de composantes connexes de la feuille analytique $S = \{x \in \Omega ; f_1(x) = \cdots = f_k(x) = 0 ; \Delta(x) \neq 0\}$. Pour simplifier, supposons que $(i_1, \ldots, i_k) = (1, \ldots, k)$ et soit π la projection $S \ni x \to (x_{k+1}, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-k}$; cette projection est un difféomorphisme local et on note $\dfrac{\partial}{\partial X_i}$ $(i = k+1, \ldots, n)$ le champ de vecteurs sur S défini par $\dfrac{\partial}{\partial X_i}(x) = \pi_*^{-1}\left(\dfrac{\partial}{\partial x_i}(\pi(x))\right)$. On vérifie immédiatement que si $g \in \mathscr{H}(\Omega)$:

$\frac{\partial}{\partial X_i}(g|S) = \left(\frac{\partial g}{\partial x_i} + \frac{1}{\Delta}\sum_{j=1}^{k}\Delta_{ij}\frac{\partial g}{\partial x_j}\right)\Bigg| S$ avec $\Delta_{ij} \in \mathcal{O}(\Omega)$; on munit ainsi le corps des fractions $[\mathcal{O}(\Omega)/I(X)]$ de $\mathcal{O}(\Omega)/I(X)$ de $n-k$ dérivations qui engendrent en chaque point $x \in S$ les $\mathbb{R}$ − dérivations usuelles de l'anneau des germes de fonctions analytiques réelles sur S_x.

LEMME 1.2. − *Avec les notations précédentes, soit $a \in S$ et soit ρ un réel tel que $0 < \rho < \underline{d}(a,\partial S)$ (∂S = frontière de S dans $\mathbb{R}^n$) ; notons $B = \overline{B}(a,\rho)$ la boule euclidienne fermée de centre a et de rayon ρ dans $\mathbb{R}^n$ et supposons que*

$$\sup_{k+1 \leqslant i \leqslant n,\, x \in B \cap S} \left|\frac{\partial}{\partial X_i}(x)\right| = \left(\Delta^2 + \sum_{j=1}^{k}\Delta_{ij}^2\right)^{1/2} \cdot |\Delta|^{-1} = 1/\alpha .$$

Soit $\theta \in \mathscr{H}(\Omega)$ telle que $\theta(x) > 0$ pour tout $x \in B \cap S$ et telle que $\inf_{x \in B \cap S}\left(\theta(x) + \sum_{i=k+1}^{n}\left|\frac{\partial\theta|S}{\partial X_i}(x)\right|\right) = \beta > 0$; *alors :*

$$\theta(a) \geqslant \frac{\rho\beta}{n-k+1}\inf(\alpha,1).$$

Preuve. − Si $\theta(a) \geqslant \frac{\beta}{n-k+1} \geqslant \frac{\rho\beta}{n-k+1}$, il n'y a rien à démontrer ; si $\theta(a) < \frac{\beta}{n-k+1}$, posons $S' = \{x \in B \cap S\,; \theta(x) \leqslant \theta(a)\}$; alors, $\forall x \in S'$, on a $\sum_{i=k+1}^{n}\left|\frac{\partial\theta|S}{\partial X_i}(x)\right| \geqslant \beta - \theta(a)$ et par compacité, on voit qu'il existe un $\varepsilon > 0$, tel que $\forall x \in S'$, il existe un indice $i(x) = i$ avec $\forall y \in S' \cap B(x,\varepsilon)$: $\left|\frac{\partial\theta\,|\,S}{\partial X_i}(x)\right| \geqslant \frac{\beta}{n-k+1}\cdot$ Construisons un chemin analytique $\mathscr{C}_1$ d'origine a, d'extrémité a_1, contenu dans S' et arc de courbe intégrale pour $\frac{\partial}{\partial X_i}$ ($i = i(a)$) de telle sorte que θ soit strictement décroissante sur $\mathscr{C}_1$; on peut supposer que sur $\mathscr{C}_1$: $\left|\frac{\partial\theta\,|S}{\partial X_i}\right| \geqslant \frac{\beta}{n-k+1}$ et qu'en outre : $d(a,a_1) \geqslant \inf(\rho,\varepsilon)$. Si $d(a,a_1) = \rho$, on s'arrête ; sinon, $\varepsilon \leqslant d(a,a_1) < \rho$, et on recommence avec a_1 au lieu de a, i.e. on construit un arc $\mathscr{C}_2$ d'origine a_1 et d'extrémité a_2 tel que sur $\mathscr{C}_2$: $\left|\frac{\partial\theta|S}{\partial X_i}\right| \geqslant \frac{\beta}{n-k+1}$ avec $i = i(a_1)$ et

$d(a_1, a_2) \geqslant \varepsilon$ si $d(a, a_2) < \rho$ (en outre, bien sûr, θ est décroissante sur $\mathscr{C}_2$). Par itération, on a des arcs $\mathscr{C}_j \subset S'$ d'origine a_{j-1} et d'extrémité a_j ; d'après le théorème des accroissements finis :

$$\theta(a) \geqslant \theta(a) - \theta(a_j) \geqslant \sum_{\ell=1}^{j} \operatorname{long} \mathscr{C}_\ell \cdot \frac{\alpha\beta}{n-k+1}.$$

Comme long $\mathscr{C}_\ell \geqslant \varepsilon$ si $d(a, a_\ell) < \rho$, le processus s'arrête, i.e. il existe un a_j final tel que $d(a, a_j) = \rho$, d'où $\theta(a) \geqslant \dfrac{\rho\alpha\beta}{n-k+1}$.

LEMME 1.3. — *On suppose que* $\mathcal{O}(\Omega)$ *est de type* Γ ; *soit* $\delta \in \mathcal{O}(\Omega)\backslash I(X)$ (X *fermé analytique irréductible défini plus haut*) ; *posons* $Y = X \cap (\Delta^{-1}(0) \cup \delta^{-1}(0))$, *et soit* $\theta \in \mathscr{H}(\Omega)$ *telle qu'il existe* $\gamma \in \Gamma$ *et* $\alpha \geqslant 1$ *vérifiant :*

$$(*) \qquad \forall x \in X\backslash Y, \quad |\theta(x)| \geqslant \sum_{i=k+1}^{n} \left| \frac{\partial \theta | S}{\partial X_i}(x) \right| \geqslant \gamma(x)^{-1} \underline{d}(x, Y)^{\alpha}.$$

Alors il existe $\gamma' \in \Gamma$ *et* $\alpha' \geqslant 1$ *tels que :*

$$\forall x \in X\backslash Y, \quad |\theta(x)| \geqslant \gamma'(x)^{-1}\, \underline{d}(x, Y \cap \theta^{-1}(0))^{\alpha'}.$$

Preuve. — D'après la condition *c*) de l'introduction, il existe $\gamma_1 \in \Gamma$ tel que $\forall a \in \Omega$ et $\forall x \in B(a, \gamma_1(a)^{-1})$, on ait $\gamma(x) \leqslant \gamma_1(a)$. Si $a \in X\backslash Y$, pour tout $x \in B_a = B\left(a, \dfrac{1}{2}\gamma_1(a)^{-1}\underline{d}(a, Y)\right)$, on a la majoration $\underline{d}(x, Y) \geqslant \dfrac{1}{2}\underline{d}(a ; Y)$; l'inégalité (*) implique donc si $x \in B_a \cap (X\backslash Y)$:

$$(**) \qquad |\theta(x)| + \sum_{i=k+1}^{n} \left| \frac{\partial \theta | S}{\partial X_i}(x) \right| \geqslant 2^{-\alpha} \cdot \gamma_1(a)^{-1} \cdot \underline{d}(a, Y)^{\alpha}.$$

Par ailleurs, $\dfrac{\partial}{\partial X_i} = \dfrac{1}{\Delta}\left(\Delta \dfrac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{k} \Delta_{ij} \dfrac{\partial}{\partial x_j}\right)$, $\Delta, \Delta_{ij} \in \mathcal{O}(\Omega)$. L'algèbre $\mathcal{O}(\Omega)$ étant de type Γ, il existe $\gamma_2 \in \Gamma$ et $\beta \geqslant 1$ tels que

$$\forall x \in X\backslash Y, \quad \left| \frac{\partial}{\partial X_i}(x) \right| \leqslant \gamma_2(x) \cdot \underline{d}(x, Y)^{-\beta}.$$

D'après la condition *c*) de l'introduction, il existe $\gamma_3 \in \Gamma$ tel que $\forall a \in \Omega$ et $\forall x \in B(a, \gamma_3(a)^{-1})$, on ait $\gamma_2(x) \leqslant \gamma_3(a)$. Ainsi, si $a \in X\backslash Y$

et si $B'_a = B\left(a, \frac{1}{2}(\gamma_1(a)\gamma_3(a))^{-1}\underline{d}(a,Y)\right) \subset B_a$, on a pour tout $x \in B'_a \cap (X \setminus Y)$:

$$(***) \qquad \left|\frac{\partial}{\partial X_i}(x)\right| \leqslant \gamma_3(a) \cdot 2^{\beta} \cdot \underline{d}(a,Y)^{-\beta}.$$

D'après le lemme 1.3 appliqué à la boule

$$B = B\left(a, \frac{1}{2}(\gamma_1(a)\gamma_3(a))^{-1}\underline{d}(a, Y \cup \theta^{-1}(0))\right),$$

laquelle est contenue dans B'_a, on a d'après (**) et (***) :

$$|\theta(a)| \geqslant \frac{2^{-1-\alpha-\beta}}{n-k+1} \cdot \gamma_1(a)^{-2} \cdot \gamma_3(a)^{-2} \cdot \underline{d}(a, Y \cup \theta^{-1}(0))^{1+\alpha+\beta}. \quad \text{c.q.f.d.}$$

Lemme 1.4. — *On suppose toujours que $\mathcal{O}(\Omega)$ est une algèbre de type Γ ; soit $\theta \in \mathcal{H}(\Omega)$ une fonction dont les dérivées premières sont dominées par Γ.*

Supposons que pour tout fermé irréductible X (pour $\mathcal{O}(\Omega)$), il existe un fermé analytique $Y \subsetneqq X$, $\gamma_S \in \Gamma$ et $\alpha_S \geqslant 1$, tels que $\forall x \in S = X \setminus Y$, $|\theta(x)| \geqslant \gamma_S(x)^{-1}\underline{d}(x, Y \cup \theta^{-1}(0))^{\alpha_S}$. Alors il existe $\gamma \in \Gamma$ et $\alpha \geqslant 1$ tels que $\forall x \in \Omega$:

$$|\theta(x)| \geqslant \gamma(x)^{-1}\underline{d}(x, \theta^{-1}(0))^{\alpha}.$$

Preuve. — Si X est un fermé analytique pour $\mathcal{O}(\Omega)$, considérons la proposition suivante :

$P(X)$: il existe $\gamma_X \in \Gamma$ et $\alpha_X \geqslant 1$ tels que, $\forall x \in X$:

$$|\theta(x)| \geqslant \gamma_X(x)^{-1} . \underline{d}(x, \theta^{-1}(0))^{\alpha_X}.$$

Bien entendu $P(X_1), \ldots, P(X_S)$ impliquent $P(X_1 \cup \ldots \cup X_S)$. L'algèbre $\mathcal{O}(\Omega)$ étant faiblement noethérienne, il suffit donc de montrer avec les notations exactes du lemme, que $P(Y) \Rightarrow P(X)$. Par hypothèse, $\forall x \in S$, $|\theta(x)| \geqslant \gamma_S(x)^{-1}\,\underline{d}(x, Y \cap \theta^{-1}(0))^{\alpha_S}$; soient $\gamma \in \Gamma$, $\gamma \geqslant 2$, et $\alpha \geqslant 1$, qui seront déterminés ultérieurement.

Soit $x \in S$; si $\underline{d}(x,Y) \geqslant \gamma(x)^{-1}\,\underline{d}(x,\theta^{-1}(0))^{\alpha}$, alors ou bien $|\theta(x)| \geqslant \gamma_S(x)^{-1}\,\underline{d}(x,\theta^{-1}(0))^{\alpha_S}$, ou bien $|\theta(x)| \geqslant \gamma_S(x)^{-1}\underline{d}(x,Y)^{\alpha_S} \geqslant \gamma_S(x)^{-1}\gamma(x)^{-\alpha_S}\underline{d}(x,\theta^{-1}(0))^{\alpha\alpha_S}$, et dans les deux cas, l'inégalité est démontrée.

Nous supposons donc que $\underline{d}(x,Y) \leqslant \gamma(x)^{-1}\underline{d}(x,\theta^{-1}(0))^{\alpha}$; si $\underline{d}(x,Y) = 1$, on a $\underline{d}(x,\theta^{-1}(0)) = 1$ et l'inégalité est vérifiée ; on peut donc supposer que $\underline{d}(x,Y) = d(x,Y) < 1$. Soit $y \in Y$ tel que $|x-y| = \underline{d}(x,Y)$; comme $\gamma \geqslant 2$:

$$\underline{d}(y,\theta^{-1}(0)) \geqslant \underline{d}(x,\theta^{-1}(0)) - \underline{d}(x,Y) \geqslant \frac{1}{2}\underline{d}(x,\theta^{-1}(0))$$

et

$$\underline{d}(y,\theta^{-1}(0)) \leqslant \underline{d}(x,\theta^{-1}(0)) + \underline{d}(x,Y) \leqslant \frac{3}{2}\underline{d}(x,\theta^{-1}(0)).$$

Par hypothèse : $|\theta(y)| \geqslant \gamma_Y(y)^{-1}\cdot\underline{d}(y,\theta^{-1}(0))^{\alpha_Y}$. Les dérivées premières de θ étant dominées par Γ, il existe $\gamma_1 \in \Gamma$ et $z \in \Omega$ entre x et y tels que :

$$|\theta(y)-\theta(x)| \leqslant \gamma_1(z)|x-y| \leqslant \gamma_1(z)\gamma(x)^{-1}\,\underline{d}(x,\theta^{-1}(0))^{\alpha}$$

(on a $|x-y| \leqslant \gamma(x)^{-1}$ et d'après le *a*) de l'introduction, on a $[x-y] \subset \Omega$). D'après la condition *c*) de l'introduction, il existe $\gamma_2 \in \Gamma$ telle que $|x-z| \leqslant \gamma_2(x)^{-1}$ et $|x-y| \leqslant \gamma_2(x)^{-1}$ impliquent $\gamma_1(z) \leqslant \gamma_2(x)$ et $\gamma_Y(y) \leqslant \gamma_2(x)$. En conséquence, si $\gamma(x) \geqslant \gamma_2(x)$:

$$|\theta(y)-\theta(x)| \leqslant \gamma_2(x)\gamma(x)^{-1}\cdot\underline{d}(x,\theta^{-1}(0))^{\alpha}$$

et

$$|\theta(y)| \geqslant 2^{-\alpha_Y}\cdot\gamma_2(x)^{-1}\cdot\underline{d}(x,\theta^{-1}(0))^{\alpha_Y}.$$

Si l'on choisit $\alpha = \alpha_Y$ et $\gamma(x) \geqslant 2^{\alpha+1}\gamma_2(x)^2$, on a d'après les deux majorations précédentes :

$$|\theta(x)| \geqslant 2^{-\alpha-1}\cdot\gamma_2(x)^{-1}\cdot\underline{d}(x,\theta^{-1}(0))^{\alpha}, \qquad \text{c.q.f.d.}$$

Nous déduisons des lemmes précédents le résultat principal de ce paragraphe. Précisons d'abord une notation ; soit $\Psi \in \mathscr{H}(\Omega)$ telle que pour $i = 1, \ldots, n, \dfrac{\partial\Psi}{\partial x_i} = P_i(\Psi)$, où P_i est un polynôme à coefficients dans $\mathscr{O}(\Omega)$ (i.e. $\mathscr{O}(\Omega)[\Psi]$ est stable par dérivation).

Soit X le fermé analytique irréductible pour $\mathscr{O}(\Omega)$ considéré en 1.1, et soit $Y \subsetneqq X$ un fermé analytique pour $\mathscr{O}(\Omega)$ contenant $\Delta^{-1}(0)$. Si $S = X\setminus Y$, les dérivations $\dfrac{\partial}{\partial X_i}$, $i = k+1, \ldots, n$ opèrent sur tout élément

$\bar{Q}(\Psi|S)$, avec $\bar{Q}(y) = \sum_{j=0}^{q} \bar{f}_j y^j \in [\mathcal{O}(\Omega)/I(X)][y]$ par la formule évidente :

$$\frac{\partial}{\partial X_i}\bar{Q}(\Psi|S) = \sum_{j=0}^{q}\left(\frac{\partial \bar{f}_j}{\partial X_i}(\Psi|S)\right)^j + \sum_{j=0}^{q} j(\bar{f}_j(\Psi|S))^{j-1}\frac{\partial(\Psi|S)}{\partial X_i}$$

d'où compte tenu de 1.1 et de $\dfrac{\partial\Psi}{\partial x_i} = P_i(\Psi)$: $\dfrac{\partial}{\partial X_i}\bar{Q}(\Psi|S) = \bar{Q}_i(\Psi|S)$ où $\bar{Q}_i \in [\mathcal{O}(\Omega)/I(X)][y]$ est le polynôme

$$\sum_{j=0}^{q}\frac{\partial \bar{f}_j}{\partial X_i}y^j + \sum_{j=0}^{q} j\bar{f}_j y^{j-1}\left(\bar{P}_i(y) + \frac{1}{\Delta}\sum_{j=1}^{k}\Delta_{ij}\bar{P}_j(y)\right)$$

où $\bar{P}_j \in [\mathcal{O}(\Omega)/I(X)][y]$ est le polynôme induit par P_j ; $\bar{Q}_i$ est un polynôme de degré

$\leqslant \sup(q, q-1+\sup d^0 P_i)$,

de degré $\leqslant q-1+\sup d^0 P_i$ si $\bar{Q}$ est unitaire.

THÉORÈME 1.5. — *Supposons que $\mathcal{O}(\Omega)$ est une algèbre analytique de type Γ, et soit $\Psi \in \mathcal{H}(\Omega)$ telle que Ψ soit dominée par Γ et telle que $\mathcal{O}(\Omega)[\Psi]$ soit stable par dérivation.*

Supposons que pout tout fermé irréductible X pour $\mathcal{O}(\Omega)$ et tout polynôme unitaire irréductible $\bar{Q} \in [\mathcal{O}(\Omega)/I(X)][y]$ avec $d^0\bar{Q} > 0$:

A : ou bien il existe un indice i tel que $\bar{Q}_i$ ne soit pas divisible par $\bar{Q}$ dans $[\mathcal{O}(\Omega)/I(X)][y]$.

B : ou sinon il existe une strate $S = X\backslash Y$, $\gamma' \in \Gamma$, $\alpha' \geqslant 1$, tels que la conclusion de 1.3 soit satisfaite pour $\theta = \bar{Q}(\Psi|S)$, i.e. :

$$\forall x \in S, \quad |\theta(x)| \geqslant \gamma'(x)^{-1}\underline{d}(x, Y\cup\theta^{-1}(0))^{\alpha'}.$$

Alors $\mathcal{O}(\Omega)[\Psi]$ est une algèbre analytique de type Γ.

Preuve. — D'après la proposition 1.4 de [3], $\mathcal{O}(\Omega)[y]$, et donc a fortiori $\mathcal{O}(\Omega)[\Psi]$, est faiblement noethérienne ; il reste à vérifier l'inégalité de Łojasiewicz globale.

Nous devons montrer que $\theta = Q(\Psi)$ vérifie la conclusion du lemme 1.4 et donc démontrer pour chaque fermé irréductible X, une majoration :

$$(*) \qquad \forall x \in S = X\backslash Y, \quad |\theta(x)| \geqslant \gamma_S(x)^{-1}\underline{d}(x, Y\cup\theta^{-1}(0))^{\alpha_S}$$

pour un $Y \subsetneq X$ convenable. Soit $\bar{Q}$ l'image canonique de Q dans $[\mathcal{O}(\Omega)/I(X)[y]$; la majoration (*) ne dépend que de $\bar{Q}$ et si elle est démontrée pour chaque facteur irréductible de $\bar{Q}$, elle est aussi vraie pour $\bar{Q}$; on peut donc supposer que $\bar{Q}$ est unitaire et irréductible. Dans l'hypothèse B, il n'y a rien à démontrer ; dans l'hypothèse A, l'idéal engendré par $\bar{Q}$ et les $\bar{Q}_i$ dans $[\mathcal{O}(\Omega)/I(X)][y]$ contient 1 ; on en déduit immédiatement que l'hypothèse de 1.3 est vérifiée pour un Y convenable, en utilisant le fait que $\mathcal{O}(\Omega)$ est de type Γ et que Ψ est dominée par Γ. La conclusion de 1.3 et donc celle de 1.4 sont donc vraies, i.e. (*) est satisfaite.

1.6. On déduit facilement de 1.5 les théorèmes I et II.

Preuve du théorème I. — $\mathcal{O}(\Omega)[y]$ est faiblement noethérienne, d'après la proposition 1.4 de [3]. Pour l'inégalité de Łojasiewicz, on applique 1.5, Ω étant remplacé par $\Omega \times \mathbb{R}$, Γ par $\Gamma[y]$ et $\mathcal{O}(\Omega)$ par $\mathcal{O}(\Omega) \circ \pi$ où $\pi : \Omega \times \mathbb{R} \to \Omega$ désigne la projection canonique (l'algèbre $\mathcal{O}(\Omega) \circ \pi$ n'est pas tout à fait une algèbre analytique, puisque cette algèbre ne contient pas tous les polynômes ($y \notin \mathcal{O}(\Omega) \circ \pi$), mais cette hypothèse n'a jamais servi dans les démonstrations). La condition A est toujours satisfaite car si $\bar{Q} \in [\mathcal{O}(\Omega)/I(X)[y]$ et $\bar{Q}_i = \dfrac{\partial \bar{Q}}{\partial y}$, on a $d^0\bar{Q}_i < d^0\bar{Q}$ et $\bar{Q}_i \neq 0$.

En particulier, on retrouve l'inégalité de Hörmander [1] sur les polynômes : si $P \in \mathbb{R}[x]$, il existe des constantes $C > 0$ et $\alpha \geqslant 1$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}^n$: $|P(x)| \geqslant C(1+|x|)^\alpha \underline{d}(x, P^{-1}(0))^\alpha$. On déduit aussi du théorème 1 l'inégalité de Łojasiewicz locale pour les fonctions analytiques ; c'est immédiat par récurrence sur n, car d'après le théorème de préparation de Weierstrass, toute fonction analytique est localement le produit d'un facteur inversible ne jouant aucun rôle dans l'inégalité de Łojasiewicz, par une fonction analytique polynomiale en l'une des variables.

Preuve du théorème II. — On applique le théorème 1.5 dont on conserve les notations.

Hypothèse a) : Chaque polynôme P_i est de degré 0, et donc $d^0\bar{Q}_i < d^0\bar{Q} = q$ pour tout i ; si la condition A n'est pas satisfaite, les $\bar{Q}_i$ sont tous nuls et donc si $S = X \backslash Y$ est une strate convenable, $\theta = Q(\Psi)$ est constante sur chaque composante connexe de S. Ces composantes connexes étant en nombre fini, la condition B est vérifiée.

Hypothèse b : On a $\dfrac{\partial\Psi}{\partial X_i} = g_i.\Psi$, $i = k+1+, \ldots, n$; $g_i = \dfrac{\partial\varphi}{\partial X_i}$.

Si $\bar{Q}(\Psi) = \xi_0 + \xi_1\Psi + \cdots + \Psi^q$, $\xi_i \in [\mathcal{O}(\Omega)/I(X)]$,

$$\bar{Q}_i(\Psi) = \frac{\partial\xi_0}{\partial X_i} + \left(\frac{\partial\xi_1}{\partial X_i} + \xi_1 g_i\right)\Psi + \left(\frac{\partial\xi_2}{\partial X_i} + 2\xi_2 g_i\right)\Psi^2 + \cdots + q g_i \Psi^q.$$

Si la condition A n'est pas satisfaite, $\bar{Q}_i$ est le produit de $\bar{Q}$ par un élément de $[\mathcal{O}(\Omega)/I(X)]$; si $\xi_s \neq 0$, par proportionnalité :

$$\xi_s^{-1}\frac{\partial\xi_s}{\partial X_i} + s g_i = q g_i, \ \textit{i.e.}\ \xi_s^{-1}\frac{\partial\xi_s}{\partial X_i} = (q-s)\frac{\partial\varphi}{\partial X_i}.$$

Soit $S = X/Y$ une strate convenable sur laquelle ces ξ_s n'ont pas de zéros et n'ont pas de pôles ; sur chaque composante connexe de S, on a $\xi_s = C_s\Psi^{q-s}$; la condition B est donc satisfaite car $\theta = C\Psi^q$ sur chacune de ces composantes connexes (en nombre fini).

1.7. Soit $\mathcal{O}(\Omega)$ une algèbre topologiquement noethérienne de type Γ. Quitte à compléter $\mathcal{O}(\Omega)$, on peut supposer que $\mathcal{O}(\Omega)$ contient les inverses f^{-1} de tous les $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ tels que $f^{-1}(0) = \varnothing$. D'après le *a*) du théorème II, si $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ et si f est > 0 en chaque point de Ω, l'algèbre $\mathcal{O}(\Omega)[\operatorname{Log} f]$ est topologiquement noethérienne de type Γ, et il en sera de même de $\mathcal{O}(\Omega)[f^\alpha]$, α réel (on a $f^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Log} f}$ et on applique le *b*) du théorème II). Si $g \in \mathcal{O}(\Omega)$, l'algèbre $\mathcal{O}(\Omega)$ [arc tg g] est aussi topologiquement noethérienne de type Γ. On peut donc ajouter à la complexifiée $\mathcal{O}(\Omega) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ les fonctions θ^α ou $\operatorname{Log}\theta$, avec $\theta = f + ig$: on obtiendra encore des fonctions complexes vérifiant des inégalités de Łojasiewicz de type Γ.

1.8. Voici un exemple d'algèbre de type Γ sur $\mathbb{R}$ qui n'est pas topologiquement noethérienne (Γ est l'ensemble des fonctions $C(1+|x|)^\alpha$, $C \geqslant 1$, $\alpha \geqslant 1$). Notons A l'algèbre des fonctions analytiques réelles sur $\mathbb{R}$, périodiques de période 1. L'algèbre $A[x]$ est noethérienne, donc faiblement noethérienne, car A est un anneau principal ; bien entendu, $A[x]$ n'est pas topologiquement noethérienne.

Tout $a \in A$ vérifie une majoration ($C \geqslant 1, \alpha \geqslant 1$) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad C \geqslant |a(x)| \geqslant C^{-1}\, \underline{d}(x, a^{-1}(0))^\alpha.$$

Considérons un polynôme : $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots a_n x^n$ avec $a_i \in A$, $a_n \neq 0$, $n > 0$. Reprenant les arguments des lemmes précédents, pour vérifier que $P(x)$ vérifie une inégalité de Łojasiewicz de type Γ, il suffit de trouver $C \geqslant 1$, $\alpha > 1$ et $a \in A\backslash\{0\}$ tels que :

$$(*) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad |P(x)| \geqslant C^{-1}(1+|x|)^{-\alpha}\, \underline{d}(x, a^{-1}(0) \cup P^{-1}(0))^{\alpha}$$

car la restriction de P à $a^{-1}(0)$ vérifie trivialement une inégalité de Łojasiewicz par rapport à $P^{-1}(0)$ (en effet, si $a^{-1}(0) = \{x_1 + \mathbb{Z}, \ldots, x_s + \mathbb{Z}\}$, la restriction de P à chaque $x_i + \mathbb{Z}$ coïncide avec un polynôme à coefficients constants). Pour vérifier (*), on procède comme dans le lemme 1.3.

2. Compléments.

2.1. Nous dirons que $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ est *fortement dominée par* Γ s'il existe $\gamma \in \Gamma$ telle que $\forall x \in \Omega$, f se prolonge en une fonction holomorphe $\tilde{f}_x$ sur le polydisque fermé $\tilde{B}(x, 2\gamma(x)^{-1}) = \{z \in \mathbb{C}^n ; \{j = 1, \ldots, n, |z_j - x_j| \leqslant 2\gamma(x)^{-1}\}$; en outre, on suppose que $|\tilde{f}_x(z)|$ est uniformément borné sur ce polydisque par $\gamma(x)$. D'après les inégalités de Cauchy, $|D^{\omega}\tilde{f}_x(z)|$ est uniformément borné sur $\tilde{B}(x, \gamma(x)^{-1})$ par $\omega\,!\gamma(x)^{|\omega|+1}$ et donc $D^{\omega}f$ est fortement dominée par Γ.

Réciproquement, soit $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ et supposons qu'il existe $\gamma \in \Gamma$ telle que $\forall x \in \Omega$ et $\forall \omega \in \mathbb{N}^n : |D^{\omega}f(x)| \leqslant \omega\,!\gamma(x)^{|\omega|+1}$; alors f est fortement dominée par Γ (f se prolonge en une fonction holomorphe $\tilde{f}_x$ sur le polydisque $\tilde{B}(x, 2^{-1}\gamma(x)^{-1})$ et $|\tilde{f}_x(z)| \leqslant 2^n|\gamma(x)|$ sur ce polydisque).

L'algèbre $\mathscr{O}(\Omega)$ est *fortement dominée par* Γ si tout $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ est fortement dominée par Γ.

LEMME 2.2. — *Soit $\mathscr{O}(\Omega)$ une algèbre faiblement noethérienne. Une fonction $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ est fortement dominée par Γ ssi pour tout fermé irréductible X (pour $\mathscr{O}(\Omega)$), il existe un fermé analytique (pour $\mathscr{O}(\Omega)$) $Y \subsetneqq X$ tel qu'il existe $\gamma_S \in \Gamma$ et $\alpha_S \geqslant 1$ vérifiant la condition :*

$$\forall x \in S = X\backslash Y,\ \forall \omega \in \mathbb{N}^n, \quad |D^{\omega}f(x)| \leqslant \omega\,!\ (\gamma_S(x)\ \underline{d}(x, Y)^{-\alpha_S})^{|\omega|+1}.$$

Preuve. — Considérons la proposition suivante :

$P(X)$: Il existe $\gamma_X \in \Gamma$ tel que $\forall x \in X$ et $\forall \omega \in \mathbb{N}^n$:

$$|D^{\omega}f(x)| \leqslant \omega\,!\ \gamma_X(x)^{|\omega|+1}.$$

D'après le principe de noethérianité, il suffit avec les notations du lemme, de montrer que $P(Y) \Rightarrow P(X)$. Si $P(Y)$ est satisfaite, on a par les inégalités de Cauchy, $\forall y \in Y$ et $\forall x \in \tilde{B}(y, 4^{-1}\gamma_Y(y)^{-1})$:

$$|D^\omega \bar{f}_y(x)| \leqslant \omega\,!\, 2^n \gamma_Y(y) \cdot (4\gamma_Y(y))^{|\omega|}.$$

D'après le *c*) de l'introduction, on voit qu'il existe $\gamma_1 \in \Gamma$ tel que $\forall \omega \in \mathbb{N}^n$, $\forall y \in Y$ et $\forall x \in X$ avec $\underline{d}(x,y) \leqslant \gamma_1(x)^{-1}$, on ait

$$|D^\omega f(x)| \leqslant \omega\,!\, \gamma_1(x)^{|\omega|+1}.$$

Soit $x \in S = X \backslash Y$; si $\underline{d}(x,Y) \leqslant \gamma_1(x)^{-1}$, on a $|D^\omega f(x)| \leqslant \omega\,!\, \gamma_1(x)^{|\omega|+1}$; si $\underline{d}(x,Y) \geqslant \gamma_1(x)^{-1}$, on a d'après l'hypothèse :

$$|D^\omega f(x)| \leqslant \omega\,!\, (\gamma_S(x)\gamma_1(x)^{\alpha_S})^{|\omega|+1}$$

d'où l'assertion $P(X)$, en choisissant $\gamma_X = \gamma_S \gamma_1^N$, N entier $\geqslant \alpha_S$.

Lemme 2.3. — *Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$ et soit $\mathcal{O}(\Omega)$ une algèbre de type Γ, fortement dominée par Γ. Alors la clôture algébrique $\widehat{\mathcal{O}(\Omega)}$ de $\mathcal{O}(\Omega)$ dans $\mathcal{H}(\Omega)$ est aussi fortement dominée par Γ.*

Preuve. — Soit $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ vérifiant une équation :

$$a_0 + a_1 f + \cdots + a_q f^q = 0$$

avec $a_i \in \mathcal{O}(\Omega)$, $a_q \neq 0$, $q \geqslant 1$; on peut supposer que le polynôme $\Sigma a_i y^i$ est irréductible sur $[\mathcal{O}(\Omega)]$ et donc supposer que son discriminant $\Delta' \in \mathcal{O}(\Omega)$ est $\neq 0$; on pose $\Delta = a_q \cdot \Delta'$.

On applique à f le lemme 2.2. Soit X un fermé analytique irréductible pour $\mathcal{O}(\Omega)$ et posons $p = \sup_{x \in X}$ (multiplicité de Δ en x). Soit $\sum_{|\omega|=p} D^\omega f(x) \cdot (z-x)^\omega$ la forme initiale du développement de $\Delta(z)$ en $x \in X$ et choisissons une direction $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ telle que génériquement sur X : $\sum_{|\omega|=p} D^\omega f(x).\ \lambda^\omega = \delta(x) \neq 0$. Posons $Y = \{x \in X ; \delta(x) = 0\}$ et supposons par exemple $\lambda_n = 1$. En chaque point $x \in X \backslash Y$, après le changement linéaire de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n) \to (x_1 + a_1 x_n, \ldots, x_{n-1} + a_{n-1} x_n, x_n)$, le germe de Δ en x admet un développement :

$$(*) \qquad \Delta(z) = \delta(x) \cdot (z_n - x_n)^p + \mathcal{A}_x(z) \cdot (z_n - x_n)^{p+1} + \beta_x(z)$$

avec
$$\beta_x(z) = \sum_{j=1}^{n-1} (z_j - x_j)\beta_{j,x}(z)$$

chaque $\beta_{j,x}$ ayant une multiplicité en $x \geqslant p-1$. Par hypothèse, il existe $\gamma \in \Gamma$ et $\alpha \geqslant 1$ tels que :

$$(**) \qquad \forall x \in X \backslash Y, \quad |\delta(x)| \geqslant \gamma(x)^{-1} \underline{d}(x, Y)^{\alpha}.$$

Si $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$, on peut choisir $|z' - x'|$ « assez petit » devant $|z_n - x_n|$ pour que le terme $\delta(x)\cdot(z_n - x_n)^p$ l'emporte dans l'expression de $\Delta(z)$. Par hypothèse, il existe $\gamma' \in \Gamma$ telle que si $z \in \tilde{B}(x, y'(x)^{-1})$ et si $|z_n - x_n| \geqslant |z' - x'|$ (on pose $z = (z', z_n)$), on ait

$$(***) \quad |\mathscr{A}_x(z)| \leqslant \gamma'(x) \qquad \text{et} \qquad |\beta_x(z)| \leqslant |z' - x'|\,|z_n - x_n|^{p-1}\gamma'(x).$$

Posons $x = (x', x_n)$ et choisissons γ_2 et $\gamma_1 \in \Gamma$ de telle sorte que les conditions suivantes soient satisfaites :

a) On pose $\gamma_2 = 2\gamma'\gamma \geqslant \gamma$ et γ' ; si $z = (x', z_n)$, i.e. $z_j = x_j$, $j = 1, \ldots, n-1$, et si $|z_n - x_n| \leqslant \gamma_2(x)^{-1} \underline{d}(x, Y)^{\alpha}$ on a d'après (*), (**) ; (***) :

$$|\Delta(z)| \geqslant \frac{1}{2}\gamma(x)^{-1} \underline{d}(x, Y)^{\alpha} |z_n - x_n|^p.$$

b) On choisit ensuite $\gamma_1 = 4\gamma'\gamma\gamma_2 = 8\gamma'^2\gamma^2$; on vérifie alors, si $|z_n - x_n| = \gamma_2(x)^{-1} \underline{d}(x, Y)^{\alpha}$ et si $|z' - x'| \leqslant \gamma_1(x)^{-1} \underline{d}(x, Y)^{2\alpha}$, l'inégalité :

$$|\Delta(z)| \geqslant \frac{1}{4}\gamma(x)^{-1} \underline{d}(x, Y)^{\alpha} |z_n - x_n|^p = \frac{1}{4}\gamma(x)^{-1}\gamma_2(x)^{-p} \underline{d}(x, Y)^{(p+1)\alpha}.$$

Choisissons γ' assez grand pour que tous les germes $a_{j,x} (x \in X \backslash Y)$ se prolongent en des fonctions holomorphes $\tilde{a}_j$ au voisinage de

$$\tilde{B}_x = \tilde{B}(x', \gamma_1(x)^{-1}\underline{d}(x, Y)^{2\alpha}) \times \tilde{B}(x_n, \gamma_2(x)^{-1}\underline{d}(x, Y)^{\alpha}) = \tilde{B}_{1,x} \times \tilde{B}_{2,x}.$$

D'après *a*), Δ ne s'annule en aucun point de $\{x'\} \times (\tilde{B}_{2,x} \backslash \{x_n\})$; d'après *b*), Δ ne s'annule en aucun point de $\tilde{B}_{1,x} \times \partial\tilde{B}_{2,x}$. D'après le phénomène de Hartogs, le germe de f en x se prolonge en une fonction holomorphe $\tilde{f}_x$ sur $\tilde{B}_x$. Pour majorer $\tilde{f}_x$ sur $\tilde{B}_x$, il suffit d'après le principe du maximum de majorer $\tilde{f}_x$ sur $\tilde{B}_{1,x} \times \partial\tilde{B}_{2,x}$. Choisissant γ' assez grand, on peut supposer que tous les $|\tilde{a}_j(z)|$ sont bornés sur $\tilde{B}_x$ par $\gamma'(x)$. En appliquant *b*), on en déduit une majoration de chaque $|\tilde{a}_j(z)/\tilde{a}_q(z)|$ sur $\tilde{B}_{1,x} \times \partial\tilde{B}_{2,x}$; appliquant le lemme 2.4, on en déduit une majoration de $\tilde{f}_x$ sur $\tilde{B}_{1,x} \times \partial\tilde{B}_{2,x}$, donc sur $\tilde{B}_{1,x} \times \tilde{B}_{2,x}$. On conclut en appliquant le lemme 2.2.

LEMME. 2.4 (*cf.* [2]). — *Soit* $z \in \mathbb{C}$ *racine d'une équation* $z^q + \xi_1 z^{q-1} + \cdots + \xi_q = 0$, $\xi_i \in \mathbb{C}$; alors $|z| \leqslant 2 \sup_i |\xi_i|^{1/i}$.

PROPOSITION 2.5. — *Soit* Ω *un ouvert connexe de* $\mathbb{R}^n$ *et soient* $\mathcal{O}(\Omega)$ *une sous-algèbre de* $\mathcal{H}(\Omega)$, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ *algébrique sur* $\mathcal{O}(\Omega)$. *Si* $\mathcal{O}(\Omega)$ *est faiblement noethérienne (resp. topologiquement noethérienne), l'algèbre* $\mathcal{O}(\Omega)[D^\omega f]$ *engendrée sur* $\mathcal{O}(\Omega)$ *par* f *et toutes ses dérivées est aussi faiblement noethérienne (resp. topologiquement noethérienne).*

Preuve. — Pour le cas faiblement noethérien, nous renvoyons à [5]. Supposons que $\mathcal{O}(\Omega)$ est topologiquement noethérien et soit $f \in \widehat{\mathcal{O}(\Omega)}$ vérifiant une équation $a_0 + a_1 f + \cdots + a_q f^q = 0$, $a_i \in \mathcal{O}(\Omega)$ et $a_q \neq 0$. Considérons le polynôme générique $P(y\,;z) = y_0 + y_1 z + \cdots + y_q z^q$; il existe une partition de l'espace des y en semi-algébriques Y_α telle que sur chaque Y_α le polynôme p admette exactement q_α racines réelles distinctes : $z_{\alpha,1}(y) < \cdots < z_{\alpha,q_\alpha}(y)$, $y \in Y_\alpha$; en outre, les $z_{\alpha,j}$ sont continues et gardent un signe constant, soit > 0, soit < 0, soit $= 0$. Il en résulte immédiatement que les ensembles $f = 0$ ou $f > 0$ sont des semi-analytiques pour $\mathcal{O}(\Omega)$. Les semi-analytiques pour $\widehat{\mathcal{O}(\Omega)}$ sont donc les semi-analytiques pour $\mathcal{O}(\Omega)$, d'où le résultat.

Remarque 2.6. — D'après [3], une limite inductive d'algèbres topologiquement noethériennes est topologiquement noethérienne ; d'après 2.5, $\mathcal{O}(\Omega)$ topologiquement noethérienne $\Rightarrow \widehat{\mathcal{O}(\Omega)}$ topologiquement noethérienne. Cette implication est fausse quand on remplace « topologiquement noethérienne » par « faiblement noethérienne ». Par exemple, l'algèbre $A[x]$ considérée en 1.8 est faiblement noethérienne, mais $\widehat{A[x]}$ ne l'est pas car $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = \sin \dfrac{2\pi x}{2^n} \in \widehat{A[x]}$ et la suite $\{f_n^{-1}(0)\}$ est strictement décroissante.

THÉORÈME 2.7. — a) *Soit* $\mathcal{O}(\Omega)$ *une algèbre de type* Γ, *fortement dominée par* Γ *et soit* $f \in \widehat{\mathcal{O}(\Omega)}$. *Alors l'algèbre* $\mathcal{O}(\Omega)[D^\omega f]$ *est aussi de type* Γ, *fortement dominée par* Γ.

b) *Soit* $\mathcal{O}(\Omega)$ *une algèbre topologiquement noethérienne, de type* Γ, *fortement dominée par* Γ ; *alors* $\widehat{\mathcal{O}(\Omega)}$ *a les mêmes propriétés.*

Preuve. — Compte tenu de 2.3 et 2.5, il suffit de montrer que f vérifie une inégalité de Łojasiewicz de type Γ. Supposons que $P(x;f) = a_0 + a_1 f + \cdots + a_q f^q = 0$, $a_i \in \mathcal{O}(\Omega)$, $a_q \neq 0$, et soit X un fermé analytique irréductible pour $\mathcal{O}(\Omega)$. D'après le lemme 1.4, il suffit de trouver un $Y \subsetneqq X$, $\gamma_S \in \Gamma$ et $\alpha_S \geqslant 1$ tels que

$$\forall x \in S = X \backslash Y, \quad |f(x)| \geqslant \gamma_S(x)^{-1}\, \underline{d}(x, Y \cup f^{-1}(0))^{\alpha_S}.$$

Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $\forall \omega \in \mathbb{N}^n$, $|\omega| < p$ et $\forall i = 0, \ldots, q$, on ait

$$D^{\omega} a_i | X = 0$$

et tel qu'il existe $\omega_0 \in \mathbb{N}^n$, $|\omega_0| = p$, et un i_0 vérifiant :

$$D^{\omega_0} a_{i_0} | X \neq 0.$$

Par dérivations successives de $P(x;f)$, on voit que $f|X$ vérifie une équation :

$$(b_0|X) + (b_1|X)(f|X) + \cdots + (b_r|X)(f|X)^r = 0$$

avec $r \leqslant q$, $b_i \in \mathcal{O}(\Omega)$ et $b_r|X \neq 0$. Si $X' = X \backslash f^{-1}(0) \neq \emptyset$, on peut supposer après changement de notations que

$$(b_0|X') + (b_1/X')(f|X') + \cdots + (b_r|X')(f|X')^r = 0$$

avec $b_0|X' \neq 0$. D'après le théorème I, si $X = g^{-1}(0)$ avec $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ et si $Y = X \cap b_0^{-1}(0)$, il existe $\gamma \in \Gamma$ et $\alpha \geqslant 1$ tels que si $(x,y) \in \Omega \times \mathbb{R}$:

$$|y| + |b_0 + b_1 y + \cdots + b_r y^r| + |g(x)| \geqslant \gamma(x)^{-1}(1+|y|)^{-\alpha}\, \underline{d}(x, Y)^{\alpha}.$$

D'après le lemme 2.3, f est dominée par Γ ; choisissons dans l'inégalité précédente $x \in X'$ et $y = f(x)$; il existe $\gamma' \in \Gamma$ telle que :

$$|f(x)| \geqslant \gamma'(x)^{-1}\, \underline{d}(x, Y)^{\alpha}.$$

En définitive, si $x \in S = X \backslash Y$:

$$|f(x)| \geqslant \gamma'(x)^{-1}\, \underline{d}(x, Y \cup f^{-1}(0))^{\alpha}. \qquad \text{c.q.f.d.}$$

Nous terminons ce paragraphe par une remarque sur les fonctions composées. Soient $\mathcal{O}(\Omega)$ (resp. $\mathcal{O}(\Omega')$) une algèbre analytique de type Γ (resp. de type Γ') sur un ouvert connexe Ω de $\mathbb{R}^n$ (resp. un ouvert connexe Ω' de $\mathbb{R}^p$) ; on note $\Gamma \otimes \Gamma'$ la famille de toutes les fonctions $\Omega \times \Omega' \ni (x,y) \to \gamma(x)\gamma'(x)$ avec $\gamma \in \Gamma$, $\gamma' \in \Gamma'$; si $f : \Omega \to \Omega'$ a ses composantes dans $\mathcal{O}(\Omega)$, on note $\Gamma.(\Gamma' \circ f)$ la famille de toutes les fonctions $\Omega \ni x \to \gamma(x) \cdot (\gamma' \circ f(x))$, $\gamma \in \Gamma$, $\gamma' \in \Gamma'$. On vérifie facilement que $\Gamma \otimes \Gamma'$ et $\Gamma.(\Gamma' \circ f)$ vérifient les conditions *a*), *b*), *c*) de l'introduction.

PROPOSITION 2.8. — *Avec les notations précédentes, supposons que* $\mathcal{O}(\Omega) \otimes \mathcal{O}(\Omega')$ *est une algèbre analytique de type* $\Gamma \otimes \Gamma'$ *sur* $\Omega \times \Omega'$. *Alors l'algèbre* $\mathcal{O}(\Omega)\cdot(\mathcal{O}(\Omega')\circ f)$ *formée de toutes les sommes finies* $\Sigma\varphi_i\cdot(\varphi_i'\circ f)$ *avec* $\varphi_i \in \mathcal{O}(\Omega)$, $\varphi_i' \in \mathcal{O}(\Omega')$, *est une algèbre analytique de type* $\Gamma\cdot(\Gamma'\circ f)$. *En outre, si* $\mathcal{O}(\Omega)$ (resp. $\mathcal{O}(\Omega')$) *est fortement dominée par* Γ *(resp.* Γ'*),* $\mathcal{O}(\Omega)\cdot(\mathcal{O}(\Omega')\circ f)$ *est fortement dominée par* $\Gamma\cdot(\Gamma'\circ f)$.

Preuve. — Visiblement, $\mathcal{O}(\Omega)\cdot(\mathcal{O}(\Omega')\circ f)$ est stable par dérivation ; on a un homomorphisme surjectif : $\mathcal{O}(\Omega) \otimes \mathcal{O}(\Omega') \ni \Sigma\varphi_i \otimes \varphi_i' \to \Sigma\varphi_i\cdot(\varphi_i'\circ f) \in \mathcal{O}(\Omega)\cdot(\mathcal{O}(\Omega')\circ f)$; $\mathcal{O}(\Omega) \otimes \mathcal{O}(\Omega')$ étant faiblement noethérienne, il en sera de même de $\mathcal{O}(\Omega)\cdot(\mathcal{O}(\Omega')\circ f)$. En outre, il existe $y \in \Gamma$, $\gamma' \in \Gamma'$, $\alpha \geqslant 1$ tels que, $\forall (x,y) \in \Omega \times \Omega'$:

$$\gamma(x)\gamma'(y) \geqslant |\Sigma\varphi_i(x)\varphi_i'(y)| + \sum_{j=1}^{p} |y_i - f_j(x)| \geqslant \gamma(x)^{-1}\gamma'(y)^{-1}\underline{d}(x,\theta^{-1}(0))^{\alpha}$$

où $\theta = \Sigma\varphi_i\cdot(\varphi_i'\circ f)$ En substituant dans les majorations précédentes $f(x)$ à y, on obtient l'inégalité de Łojasiewicz cherchée. Enfin, l'affirmation relative à la domination forte se vérifie immédiatement.

Conservons toutes les hypothèses précédentes (en particulier $\mathcal{O}(\Omega)\otimes\mathcal{O}(\Omega')$ est une algèbre analytique de type $\Gamma\otimes\Gamma'$ sur $\Omega\times\Omega'$) ; nous supposons en outre que $n = p$ et que $f: \Omega \to \Omega'$ est surjective (donc le jacobien $\Delta = \dfrac{D(f_1, \ldots, f_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)}$ ne s'annule pas identiquement sur Ω supposé connexe).

Considérons l'algèbre, notée $\mathcal{O}(\Omega')\cdot(\mathcal{O}(\Omega)\circ f^{-1})$, engendrée sur $\mathcal{O}(\Omega')$ par toutes les dérivées de toutes les $\varphi' \in \mathcal{H}(\Omega')$ telles que $\varphi'\circ f \in \mathcal{O}(\Omega)$; enfin, à chaque fonction $\gamma \in \Gamma$, associons une fonction γ_* sur Ω' par la formule $\gamma_*(y) = \inf_{x \in f^{-1}(y)} \gamma(x)$, et notons $\Gamma'\cdot(\Gamma\circ f^{-1})$ la plus petite famille de fonctions sur Ω' contenant tous les produits $\gamma'\cdot\gamma_*$, $\gamma \in \Gamma$ et $\gamma' \in \Gamma'$, et vérifiant les conditions *a*), *b*), *c*) de l'introduction.

PROPOSITION 2.9. — *Supposons, en plus de toutes les hypothèses précédentes, que* $\mathcal{O}(\Omega)$ *est fortement dominée par* Γ *et* $\mathcal{O}(\Omega')$ *fortement dominée par* Γ'. *Alors l'algèbre* $\mathcal{O}(\Omega')\cdot(\mathcal{O}(\Omega)\circ f^{-1})$ *est une algèbre analytique sur* Ω', *de type* $\Gamma'\cdot(\Gamma\circ f^{-1})$, *fortement dominée par* $\Gamma'\cdot(\Gamma\circ f^{-1})$.

Preuve. — Considérons l'algèbre $\tilde{\mathcal{O}}(\Omega) = \{\varphi \in \mathscr{H}(\Omega),\ \exists s \in \mathbb{N}$ tel que $\varphi \cdot \Delta^S \in \mathcal{O}(\Omega)\}$; visiblement $\tilde{\mathcal{O}}(\Omega) \supset \mathcal{O}(\Omega)$ et $\tilde{\mathcal{O}}(\Omega)$ est stable par dérivation. Construisons une stratification de Ω en strates $S = X \setminus Y (X$ et Y sont des fermés analytiques pour $\mathcal{O}(\Omega))$ telles que la multiplicité de Δ en chaque point de S soit constante $= \mu_S$ et telles qu'il existe un multi-indice $\omega_S \in \mathbb{N}^n$, $|\omega_S| = \mu_S$, avec $\forall x \in S$, $D^{\omega_S}\Delta(x) \neq 0$. Si $\varphi = \Psi/\Delta^S \in \tilde{\mathcal{O}}(\Omega)(\Psi \in \mathcal{O}(\Omega))$, on a $\varphi^{-1}(0) \cap S = (D^{s.\omega_S}\Psi)^{-1}(0) \cap S$. Comme $\mathcal{O}(\Omega)$ est faiblement noethérienne, il en sera de même de $\tilde{\mathcal{O}}(\Omega)$; comme $\tilde{\mathcal{O}}(\Omega) \subset \widehat{\mathcal{O}(\Omega)}$, le théorème 2.7 implique que $\tilde{\mathcal{O}}(\Omega)$ est de type Γ, fortement dominée par Γ. On peut donc, pour la démonstration, supposer que $\mathcal{O}(\Omega) = \tilde{\mathcal{O}}(\Omega)$.

Soit $\varphi' \in \mathscr{H}(\Omega')$ telle que que $\varphi' \circ f \in \mathcal{O}(\Omega)$; les formules de dérivation d'une fonction composée montrent que si $\omega \in \mathbb{N}^n$, $|\omega| \geqslant 1$,

$$(D^{\omega}\varphi') \circ f \in \Delta^{-2|\omega|+1} \cdot \mathcal{O}(\Omega) \subset \mathcal{O}(\Omega).$$

Si $\mathcal{O}(\Omega) \circ f^{-1} = \{\varphi' \in \mathscr{H}(\Omega'); \varphi' \circ f \in \mathcal{O}(\Omega)\}$, on a donc un morphisme surjectif : $\mathcal{O}(\Omega') \otimes (\mathcal{O}(\Omega) \circ f^{-1}) \ni \Sigma\varphi_i \otimes \varphi'_i \to \Sigma\varphi_i\varphi'_i \in \mathcal{O}(\Omega') \cdot (\mathcal{O}(\Omega) \circ f^{-1})$; on a aussi un morphisme injectif :

$$\mathcal{O}(\Omega') \otimes (\mathcal{O}(\Omega) \circ f^{-1}) \ni \Sigma\varphi_i \otimes \varphi'_i \to \Sigma\varphi_i \otimes (\varphi'_i \circ f) \in \mathcal{O}(\Omega') \otimes (\mathcal{O}(\Omega).$$

Comme cette dernière algèbre est faiblement noethérienne sur $\Omega' \times \Omega$, l'algèbre $\mathcal{O}(\Omega') \otimes (\mathcal{O}(\Omega) \circ f^{-1})$ est faiblement noethérienne sur $\Omega' \times \Omega'$, et il en sera de même de $\mathcal{O}(\Omega') \cdot (\mathcal{O}(\Omega) \circ f^{-1})$.

Soit $\varphi' \in \mathcal{O}(\Omega) \circ f^{-1}$ et démontrons pour φ' une inégalité de Łojasiewicz. D'abord, le théorème des accroissements finis montre l'existence d'une fonction $\gamma \in \Gamma$ telle que $\forall x, x' \in \Omega$:

$$\underline{d}(f(x), f(x')) \leqslant \gamma_1(x)\, \underline{d}(x, x').$$

Il existe $\gamma_2 \in \Gamma$ et $\alpha \geqslant 1$ tels que $\forall x \in \Omega$ et $y = f(x)$:

$$\begin{aligned}\gamma_2(x) \geqslant |\varphi' \circ f(x)| = |\varphi'(y)| &\geqslant \gamma_2(x)^{-1}\, \underline{d}(x, f^{-1}(\varphi'^{-1}(0)))^{\alpha} \\ &\geqslant \gamma_1(x)^{-1}\gamma_2(x)^{-1}\, \underline{d}(y, \varphi'^{-1}(0))^{\alpha}.\end{aligned}$$

D'où, si $\gamma = \gamma_1\gamma_2$

$$\gamma_*(y) \geqslant |\varphi'(y)| \geqslant \gamma_*(y)^{-1}\, \underline{d}(y, \varphi'^{-1}(0))^{\alpha}.$$

Ces inégalités, relatives à φ', se démontreraient pareillement pour $\Sigma\varphi_i \otimes \varphi'_i \in \mathcal{O}(\Omega') \otimes (\mathcal{O}(\Omega) \circ f^{-1})$ en utilisant au lieu de $f : \Omega \to \Omega'$ le morphisme id $\times f : \Omega' \times \Omega \to \Omega' \times \Omega'$; on en déduirait des inégalités :

$$\gamma'(y')\cdot\gamma_*(y) \geqslant |\Sigma\varphi_i(y')\cdot\varphi_i'(y)| \geqslant \gamma'(y')^{-1}\cdot\gamma_*(y)^{-1}\cdot \underline{d}((y',y), \theta^{-1}(0))^\alpha$$

avec $\gamma' \in \Gamma'$, $\gamma \in \Gamma$, $\alpha \geqslant 1$; $\theta = \Sigma\varphi_i \otimes \varphi_i'$. En appliquant les inégalités précédentes à $\Sigma\varphi_i(y').\ \varphi_i'(y) + \Sigma|y_j' - y_j|$ au lieu de $\Sigma\varphi_i(y')\cdot\varphi_i'(y)$, puis en faisant $y = y'$, on obtient les inégalités cherchées :

$$\gamma'(y)\cdot\gamma_*(y) \geqslant |\Sigma\varphi_i(y)\cdot\varphi_i'(y)| \geqslant \gamma'(y)^{-1}\cdot\gamma_*(y)^{-1}\cdot \underline{d}(y,\theta^{-1}(0))^\alpha$$

avec $\theta = \Sigma\varphi_i\varphi_i'$.

Il resterait enfin à démontrer que $\mathcal{O}(\Omega')\cdot(\mathcal{O}(\Omega)\circ f^{-1})$ est fortement dominée par $\Gamma'\cdot(\Gamma\circ f^{-1})$; si $\varphi' \in \mathcal{O}(\Omega)\circ f^{-1}$, il suffit de trouver un $\gamma \in \Gamma$, tel que $\forall\omega \in \mathbb{N}^n$, $\forall x \in \Omega : |(D^\omega\varphi')\circ f(x)| \leqslant \omega!\,\gamma(x)$. On remarque comme plus haut que $(D^\omega\varphi')\circ f \in \Delta^{-2|\omega|+1}.\ \mathcal{O}(\Omega)$: la preuve est analogue à celle de 2.5, le Δ de 2.5 étant remplacé ici par le déterminant jacobien Δ.

Remarque 2.10. — Soient $\mathcal{O}(\Omega)$, $\mathcal{O}(\Omega')$ deux algèbres analytiques sur des ouverts connexes de $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^p$ respectivement, et soit $f : \Omega \to \Omega'$ un morphisme à composantes dans $\mathcal{O}(\Omega)$.

(2.10.1) Si $\mathcal{O}(\Omega)$, $\mathcal{O}(\Omega')$, $\mathcal{O}(\Omega) \otimes \mathcal{O}(\Omega')$ sont faiblement noethériennes (resp. topologiquement noethériennes), l'algèbre $\mathcal{O}(\Omega)\cdot(\mathcal{O}(\Omega')\circ f)$ est faiblement noethérienne (resp. topologiquement noethérienne).

(2.10.2) Si de plus f est surjectif, les mêmes hypothèses entraînent que $\mathcal{O}(\Omega')\cdot(\mathcal{O}(\Omega)\circ f^{-1})$ est faiblement noethérienne (resp. topologiquement noethérienne). Les vérifications sont immédiates.

3. Exemples et applications.

Les résultats précédents fournissent par itération, de nombreux exemples d'inégalités de Łojasiewicz, obtenus à partir d'inégalités biens connues (cas analytique local ou cas algébrique, par exemple). La première application est celle de régulière séparation.

3.1. Deux fermés X et Y de Ω sont Γ-*régulièrement situés* si les conditions suivantes (équivalentes) sont satisfaites :

— Il existe $\gamma \in \Gamma$ et $\alpha > 0$ tels que

$$\forall x \in X, d(x,Y) \geqslant \gamma(x)^{-1}\, d(x, X \cap Y)^\alpha.$$

– Il existe $\gamma \in \Gamma$ et $\alpha > 0$ tels que $\forall x \in \Omega$:

$$\underline{d}(x,X) + \underline{d}(x,Y) \geqslant \gamma(x)^{-1}\,\underline{d}(x,X\cap Y)^{\alpha}.$$

– Il existe $\gamma \in \Gamma$ et $\alpha > 0$ tels que $\forall x \in X$ et $\forall x' \in Y$:

$$\underline{d}(x,x') \geqslant \gamma(x)^{-1}\gamma(x')^{-1}(\underline{d}(x,X\cap Y)^{\alpha} + \underline{d}(x',X\cap Y)^{\alpha}).$$

(3.1.1) *Si $\mathcal{O}(\Omega)$ est de type Γ et si f, $g \in \mathcal{O}(\Omega)$, les fermés $X = f^{-1}(0)$ et $Y = g^{-1}(0)$ sont Γ-régulièrement situés.*

En effet, il existe $\gamma_1 \in \Gamma$ et $\alpha > 0$ tels que $\forall x \in \Omega$:

$$|f(x)| + |g(x)| \geqslant \gamma_1(x)^{-1}\,\underline{d}(x,X\cap Y)^{\alpha}.$$

Mais par le théorème des accroissements finis, il existe $\gamma_2 \in \Gamma$ telle que $\forall x \in \Omega$:

$$|f(x)| \leqslant \gamma_2(x)\,\underline{d}(x,X), \qquad |g(x)| \leqslant \gamma_2(x)\,\underline{d}(x,Y)$$

d'où le résultat.

(3.1.2) Soit $\mathcal{O}(\Omega)$ une algèbre analytique de type Γ telle que $\mathcal{O}(\Omega) \otimes \mathcal{O}(\Omega)$ soit de type $\Gamma \otimes \Gamma$, et soit $f: \mathbb{R}^n \supset \Omega \to \Omega' \subset \mathbb{R}^p$ une application à composantes dans $\mathcal{O}(\Omega)$; soit Γ' une famille de fonctions sur Ω' vérifiant les conditions *a*), *b*), *c*) de l'introduction ; on suppose que $\forall \gamma \in \Gamma$ et $\forall X$ fermé analytique pour $\mathcal{O}(\Omega)$, il existe $\gamma' \in \Gamma'$ continue telle que $\forall y \in f(X)$:

$$(*) \qquad \inf_{x \in f^{-1}(y)\cap X} \gamma(x) \leqslant \gamma'(y).$$

Alors, si X et Y sont deux fermés analytiques pour $\mathcal{O}(\Omega)$, les adhérences dans Ω' : $\overline{f(X)}$ et $\overline{f(Y)}$ de $f(X)$ et $f(Y)$ respectivement, sont Γ'-régulièrement situées.

Preuve. – En effet, il existe $\gamma_1 \in \Gamma$ et $\alpha > 0$ tels que, $\forall x \in X$, $\forall x' \in Y$:

$$|f(x) - f(x')| \geqslant \gamma_1(x)^{-1}\gamma_1(x')^{-1}\,\underline{d}((x,x'),Z)^{\alpha}$$

où $Z = \{(x,x') \in X \times Y ; f(x) = f(x')\}$; d'après le théorème des accroissements finis, il existe $\gamma_2 \in \Gamma$ telle que :

$$d((x,x'),Z) \geqslant \gamma_2(x)^{-1}\gamma_2(x')^{-1} d((y,y'),(f\times f)(Z))$$

où $y = f(x)$; $y' = f(x')$; comme $(f \times f)(Z)$ est la diagonale de $(f(X) \cap f(Y)) \times (f(X) \cap f(Y))$, il existe $\gamma \in \Gamma$ telle que :

$$\begin{aligned}|y-y'| &\geqslant \gamma(x)^{-1}\gamma(x')^{-1}(\underline{d}(y,\overline{f(X)} \cap \overline{f(Y)}+\underline{d}(y',\overline{f(X)} \cap \overline{f(Y)})))^{\alpha} \\ &\geqslant \gamma'(y)^{-1}\gamma'(y')^{-1}(\underline{d}(y,\overline{f(X)} \cap \overline{f(Y)}+\underline{d}(y',\overline{f(X)} \cap \overline{f(Y)}))^{\alpha}\end{aligned}$$

γ' désignant la fonction associée à γ par (*). On en déduit par passage à la limite, la même inégalité pour $y \in \overline{f(X)}$ où $y' \in \overline{f(Y)}$, c.q.f.d.

(3.1.3) Supposons toujours que $\mathcal{O}(\Omega)$ est de type Γ et $\mathcal{O}(\Omega) \otimes \mathcal{O}(\Omega)$ de type $\Gamma \otimes \Gamma$, et considérons un semi-analytique X pour $\mathcal{O}(\Omega)$, défini par des inégalités larges, i.e. $X = \bigcup_i \bigcap_j \{x \in \Omega; f_{ij}(x) \geqslant 0\}$ avec $f_{ij} \in \mathcal{O}(\Omega)$ en nombre fini (ce semi-analytique est fermé, mais contrairement au cas local, il n'est pas évident que tout semi-analytique fermé soit défini par des inégalités larges) ; si $Y = \bigcup_k \bigcap_\ell \{x \in \Omega; g_{k\ell}(x) \geqslant 0\}$ est un autre semi-analytique, introduisons des variables auxiliaires y_{ij}, $z_{k\ell}$ et soit $\mathbb{R}^N$ l'espace euclidien paramétré par $y = (y_{ij})$ et $z = (z_{k\ell})$; soit $\pi : \Omega \times \mathbb{R}^N \to \Omega$ la projection canonique et posons

$$\tilde{X} = \bigcup_i \bigcap_j \{(x,y,z) \in \Omega \times \mathbb{R}^N; f_{ij}(x) = y_{ij}^2\} ;$$
$$\tilde{Y} = \bigcup_k \bigcap_\ell \{(x,y,z) \in \Omega \times \mathbb{R}^N; g_{k,\ell}(x) = z_{k\ell}^2\} ;$$

visiblement, $\pi(\tilde{X}) = X$, $\pi(\tilde{Y}) = Y$, et $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$ sont des fermés analytiques de $\Omega \times \mathbb{R}^N$ obtenus en annulant des fonctions de $\mathcal{O}(\Omega)[y,z]$; mais d'après le théorème I, $\mathcal{O}(\Omega)[y,z]$ vérifie les mêmes hypothèses que celles vérifiées par $\mathcal{O}(\Omega)$. On déduit alors de (3.1.2) appliqué à π le résultat suivant :

Sous les hypothèses précédentes, les semi-analytiques X et Y sont Γ-régulièrement situés.

On peut aussi déduire de l'inégalité de Łojasiewicz des théorèmes de division. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit Γ la famille de toutes les fonctions $\Omega \ni x \to C\underline{d}(x,\partial\Omega)^{-\alpha}(1+|x|)^{\alpha}$; notons $\mathscr{E}(\Omega,\partial\Omega)$ l'espace des fonctions à valeurs réelles, définies et de classe C^∞ dans Ω, qui se prolongent en des fonctions C^∞ sur $S^n = \mathbb{R}^n \cup \infty$, infiniment plates sur $S^n \backslash \Omega$ (une fonction $C^\infty f$ dans Ω appartient à $\mathscr{E}(\Omega,\partial\Omega)$ si et seulement si, $\forall \gamma \in \Gamma$ et $\forall \omega \in \mathbb{N}^n$, $|y(x) \cdot D^{\omega} f(x)|$ est borné sur Ω). Nous admettrons le résultat suivant (la preuve est standard mais demanderait quelques développements supplémentaires ; on utilise les idées de [5]) :

THÉORÈME 3.2. — *Avec* Γ *comme précédemment, soit* $\mathcal{O}(\Omega)$ *une algèbre analytique de type* Γ *sur* Ω, *et soient* $f_1, \ldots, f_q \in \mathcal{O}(\Omega)^p$; $\varphi \in \mathcal{E}(\Omega; \partial\Omega)^p (p, q \in \mathbb{N}^*)$. *Supposons qu'en chaque point* $a \in \Omega$, *la série de Taylor* $T_a\varphi \in \mathbb{R}[[x]]^p (x = (x, \ldots, x_n))$ *de* φ *en* a *est une combinaison linéaire à coefficients dans* $\mathbb{R}[x]]$ *des séries de Taylor* $T_a f_1, \ldots, T_a f_q$. *Alors il existe* $g_1, \ldots, g_q \in \mathcal{E}(\Omega; \partial\Omega)$ *tels que :*

$$\varphi = \sum_{i=1}^{q} g_i f_i .$$

3.3. Dans notre premier exemple, on choisit $\Omega = \mathbb{R}^n$ et l'on étend $\mathbb{R}[x]$ en utilisant les résultats des § 1, 2. Notons par $\mathcal{O}$ la donnée pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'une sous-algèbre analytique $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ de $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\forall n,\ p \in \mathbb{N},\ \mathcal{O}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathcal{O}(\mathbb{R}^p) \subset \mathcal{O}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p)$. Nous écrivons $\mathcal{O} < \mathcal{O}'$ si $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{O}'(\mathbb{R}^n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et définissons ainsi une relation d'ordre sur l'ensemble de ces familles. On note Γ la famille de toutes les fonctions $\mathbb{R}^n \ni x \to C(1 + |x|)^\alpha$, avec $C \geqslant 1$ et $\alpha \geqslant 1$.

Soit $\mathcal{A}$ la plus petite famille $\mathcal{O}$ vérifiant les conditions suivantes pour tout $n \in \mathbb{N}$:

a) $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ est algébriquement close dans $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ et $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n) \supset \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$.

b) Si $\varphi \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ a ses dérivées dans $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$, on a $\varphi \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$.

c) Si $\varphi \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ est > 0 en chaque point de $\mathbb{R}^n$, $\log \varphi$, φ^α(α réel) appartiennent aussi à $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$.

d) Les $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ sont stables par composition, i.e. si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ a ses composantes dans $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ et si $\varphi \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^p)$, alors $\varphi \circ f \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$.

e) Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application ayant ses composantes dans $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$; on suppose que f est surjective et qu'il existe un $N > 0$ tel que $|f(x)| \geqslant |x|^N$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ en dehors d'un compact K. Alors, si $\varphi \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ vérifie $\varphi \circ f \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$, on a $\varphi \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$.

$\mathcal{A}$ contient par exemple arc tg φ, $\log(1 + \varphi^2)$, dès que $\varphi \in \mathcal{A}$, mais ne contient pas les exponentielles, sinus et cosinus. Alors :

THÉORÈME 3.4. — *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ *est une algèbre topologiquement nœthérienne, de type* Γ, *fortement dominée par* Γ.

Preuve. — Pour vérifier que $\mathscr{A}(\mathbb{R}^n)$ est une algèbre topologiquement nœthérienne, de type Γ, fortement dominée par Γ, il suffit de montrer que si $\mathscr{O}(\mathbb{R}^n)$ vérifie ces propriétés, il en est de même de $\mathscr{O}(\mathbb{R}^n)[D^{\omega}\Psi]$, $\Psi \in \mathscr{H}(\mathbb{R}^n)$, dans chacun des cas suivants : α) Ψ est algébrique sur $\mathscr{O}(\mathbb{R}^n)$, ce qui résulte de 2.7 ; β) Ψ a ses dérivées dans $\mathscr{O}(\mathbb{R}^n)$ ou $\Psi = f^{\alpha}$ (α réel et $f \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^n)$ est > 0), ce qui résulte du théorème II et de [3] ; γ) $\Psi = \varphi \circ f$ avec $\varphi \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^p)$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ a ses composantes dans $\mathscr{O}(\mathbb{R}^n)$ ce qui résulte de 2.8 et 2.10 ; δ) $\Psi \circ f \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^n)$ où $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vérifie les hypothèses de *e*), ce qui résulte de 2.9 et 2.10.

Les fonctions de $\mathscr{A}(\mathbb{R}^n)$ sont à croissance tempérée ; $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ désignant comme d'habitude l'espace des fonctions C^{∞} sur $\mathbb{R}^n$, à valeurs complexes et à décroissance rapide ainsi que toutes leurs dérivées à l'infini, on déduit de 3.2 et 3.4 le résultat suivant qui étend le théorème classique de division des distributions tempérées par les polynômes (cf. [2]) :

COROLLAIRE 3.5. — *Soient* $f_1, \ldots, f_q \in \mathscr{A}(\mathbb{R}^n)^p \otimes \mathbb{C}$ *et soit* $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)^p$; *supposons qu'en chaque point* $a \in \mathbb{R}^n$, *la série de Taylor* $T_a\varphi \in \mathbb{C}[[x]]^p$ *de* φ *en* a *soit une combinaison linéaire à coefficient dans* $\mathbb{C}[[x]]$ *des séries de Taylor* $T_af_1, \ldots, T_af_q$. *Alors il existe* $g_1, \ldots, g_q \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ *tels que* $\varphi = \sum_{i=1}^{q} g_if_i$ *(cela signifie encore que le sous-module* $\sum_{i=1}^{q} f_i \cdot \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ *de* $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)^p$ *est fermé dans* $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)^p$ *pour la topologie usuelle).*

On déduit de là, par dualité, un théorème de division des distributions tempérées par les fonctions de $\mathscr{A}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathbb{C}$; par transformation de Fourier, si $\varphi_1, \ldots, \varphi_p \in \mathscr{F}(\mathscr{A}(\mathbb{R}^n) \otimes \mathbb{C}) = {}^{\mathscr{F}}\mathscr{A}(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, le module convolutif $\sum_{i=1}^{q} \varphi_i * \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)^p$ est fermé dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)^p$.

On en déduit bien sûr l'existence de solutions tempérées pour diverses équations de convolution.

Précisons quelques éléments de ${}^{\mathscr{F}}\mathscr{A}(\mathbb{R})$. Soient $a \in \mathbb{C}$, $\mathscr{I}m\, a \neq 0$, et $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \notin \mathbb{Z}$. Si $p \in \mathbb{N}$, les solutions de toutes les équations

$$(*) \qquad \left((x-a)\frac{d}{dx} - \alpha\right)^{(p+1)} f \in \mathbb{C}[x]$$

forment l'espace vectoriel $E_{(*)}$ sur $\mathbb{C}$ engendré par $\mathbb{C}[x]$ et les fonctions $(x-a)^{\alpha}(\mathrm{Log}\,(x-a))^q$ avec $0 \leqslant q \leqslant p$. On a $E_{(*)} \subset \mathscr{A}(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}$ et donc

$\mathscr{F}(E_{(*)}) \subset {}^{\mathscr{F}}\mathscr{A}(\mathbb{R})$. Par transformation de Fourier, l'équation (*) devient :

$$\left(\xi\frac{d}{d\xi} + ia\xi + (\alpha+1)\right)^{(p+1)}\hat{f} \in \mathbb{C}[\delta]$$

où l'on note $\mathbb{C}[\delta]$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ engendré par δ et toutes ses dérivées. Si $\mathscr{I}m\, a < 0$, l'espace des solutions $\mathscr{F}(E_{(*)})$ de cette dernière équation est l'espace vectoriel engendré sur $\mathbb{C}$ par $\mathbb{C}[\delta]$ et les parties finies $Y(\xi)\cdot\xi^{-\alpha-1}\cdot e^{-ia\xi}\cdot(\mathrm{Log}\,\xi)^q$, $0 \leqslant q \leqslant p$.

3.6. On obtiendrait une famille plus vaste $\mathscr{A}'$ en ajoutant les exponentielles, i.e en imposant en plus des conditions *a*), ..., *e*), la condition $\varphi \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow e^{\varphi} \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^n)$; on peut alors remplacer dans *d*) la majoration $|f(x)| \geqslant |x|^N \dots$ par $|f(x)| \geqslant \log_N(|x|)$ où $\log_N$ est la composée de N logarithmes. Si Γ' est la famille formée de tous les produits d'un nombre fini de fonctions de la forme $\mathbb{R}^n \ni x \to Ce_N(|x|)$ $(C \geqslant 1, N \in \mathbb{N}$ et e_N est la composée de N exponentielles) on montre que $\mathscr{A}'$ vérifie le théorème 3.4, à condition toutefois de remplacer Γ par Γ'.

Bien entendu, dans chaque cas particulier, on a des inégalités de Łojasiewicz plus précises ; par exemple, si $\varphi = \sum_{i=1}^{N} P_i e^{Q_i}$ avec $P_i, Q_i \in \mathbb{R}[x]$ *et* $m = \sup_i d^0 Q_i > 0$, on a une inégalité :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad |\varphi(x)| \geqslant Ce^{-A|x|^m}\,\underline{d}(x, \varphi^{-1}(0))^{\alpha}$$

$(C, A, \alpha$ sont des constantes $> 0)$. Enfin, on peut utiliser ces inégalités pour démontrer des théorèmes de division pour des espaces de fonctions C^{∞} à décroissance exponentielle à l'infini, ainsi que toutes leurs dérivées.

3.7. Si $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_N)$ est un $N+1$ uple de nombres réels non tous nuls, posons :

$$f_{\alpha}(x) = (x^{-1})^{\alpha_0}(\mathrm{Log}\, x^{-1})^{\alpha_1} \dots (\mathrm{Log}_N x^{-1})^{\alpha_N}$$

f_{α} est analytique sur un intervalle $]0,\varepsilon[$, $\varepsilon > 0$. Si f, g sont deux fonctions réelles sur un tel intervalle, on écrit $f < g$ si $\forall x > 0$ assez petit, on a $f(x) < g(x)$; $f \sim g$ si $f(x) = g(x)(1+\varepsilon(x))$ avec $\varepsilon(x) \to 0$ quand $x \to 0$, $x > 0$. On vérifie aisément les points suivants :

a) $f_{\alpha} < f_{\beta}$ si $\alpha < \beta$ pour l'ordre lexicographique.

b) Si $\beta_0 < 0$ et $C > 0$, on a $f_\alpha \circ Cf_\beta \sim C^{-\alpha_0}(-\beta_0)^{\alpha_1} f_{\alpha\circ\beta}$ où $\alpha \circ \beta$ est la suite $(-\alpha_0\beta_0, -\alpha_0\beta_1+\alpha_1, \dots, -\alpha_0\beta_N+\alpha_N)$.

c) Si $f \sim g$, on a $f_\alpha \circ f \sim f_\alpha \circ g$ (on suppose que $f(x)$, $g(x) \to 0$ quand $x \to 0$).

En particulier, si $\beta^{-1} = (\beta_0^{-1}, \beta_1\beta_0^{-1}, \dots, \beta_N\beta_0^{-1})$, on a l'équivalence :

$$f_{\beta^{-1}} \circ f_\beta(x) \sim (-\beta_0)^{\beta_1\beta} x, \, x \to 0.$$

Si $n, m \in \mathbb{N}$, considérons des suites $\alpha^{ij} = (\alpha_0^{ij}, \dots, \alpha_N^{ij})$ comme précédemment avec $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant m$ et supposons que $\forall_{i,j}$, le premier terme $\alpha_k^{ij} \neq 0$ est < 0 (donc $f_{\alpha^{ij}}(x) \to 0$ quand $x \to 0$, $x \geqslant 0$) ; soit φ une fonction analytique réelle au voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^{nm}$ et considérons la fonction :

$$f(x) = \varphi(f_{\alpha^{11}}(x_1), \dots, f_{\alpha^{1m}}(x_1); \quad f_{\alpha^{21}}(x_2), \dots, f_{\alpha^{2m}}(x_2); \\ \dots; f_{\alpha^{n1}}(x_n), \dots, f_{\alpha^{nm}}(x_n)).$$

La fonction $f(x)$ est holomorphe au voisinage de l'origine dans le premier quadrant ouvert $(\mathbb{R}^{+*})^n$. D'après les résultats précédents, pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit, $f^{-1}(0) \cap B(0,\varepsilon)$ admet un nombre fini de composantes connexes (uniformément borné), et $f(x)$ vérifie une inégalité de Łojasiewicz

$$|f(x)| \geqslant (|x_1| \dots |x_n|)^\alpha \underline{d}(x, f^{-1}(0))^\alpha$$

pour un $\alpha > 0$.

3.8. Notons $\mathfrak{a}_n$ l'algèbre de tous les germes $f(x)$ définis comme précédemment (donc, m, N, les α^{ij} et φ sont variables). Soit $f \in \mathfrak{a}_n$ telle que $f^{-1}(0)$ est de dimension un et soit C un arc analytique connexe contenu dans $f^{-1}(0) \cap B(0,\varepsilon)$ et adhérent à l'origine. Une question intéressante est la suivante :

Existe-t-il une paramétrisation de C par des fonctions de $\mathfrak{a}_1$? Je ne sais pas répondre à cette question pour n quelconque, mais pour $n = 2$ la réponse me semble positive, sous l'hypothèse (évidemment nécessaire) que C a en 0 un contact d'ordre fini avec l'axe des x_1, et l'axe des x_2.

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. HORMANDER, On the division of distributions by polynomials, Arks Mat., 3 (1958).

[2] B. MALGRANGE, Ideals of differentiable functions, Oxford Univ. Press, 1966.

[3] J. Cl. TOUGERON, Algèbres analytiques topologiquement nœthériennes, Annales de l'Institut Fourier, 41-4 (1991), 823-840.

[4] J. Cl. TOUGERON, Sur certaines algèbres de fonctions analytiques, Séminaire de géométrie algébrique réelle, Paris VII (1986).

[5] J. Cl. TOUGERON, Familles nœthériennes de modules sur $k[[x]]$ et applications, Preprint Rennes (1985).

Manuscrit reçu le 19 avril 1991.

Jean-Claude TOUGERON,
Université de Rennes I
I.R.M.A.R.
Campus de Beaulieu
35042 Rennes Cedex.