ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JACQUES DENY

Noyaux de convolution de Hunt et noyaux associés à une famille fondamentale

Annales de l'institut Fourier, tome 12 (1962), p. 643-667

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1962__12__643_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
12 (1962), 643-667.

NOYAUX DE CONVOLUTION DE HUNT ET NOYAUX ASSOCIÉS A UNE FAMILLE FONDAMENTALE

par **Jacques DENY** (Paris)

Un noyau continu sur un espace localement compact X est une application linéaire positive de l'ensemble des mesures de Radon à support compact sur X dans l'ensemble des mesures de Radon à support quelconque, qui est continue pour les topologies vagues (diffusion continue dans la terminologie de G. Choquet). Par exemple, si X est un groupe abélien localement compact, et si N est une mesure positive sur X, l'application $\mu \to N*\mu$ est un noyau continu; un tel noyau est dit de convolution.

On dira qu'un noyau continu V est un noyau de Hunt s'il est l'intégrale d'un semi-groupe continu (en un sens évident qui sera d'ailleurs précisé au n° 3) de noyaux continus P_t; symboliquement: $V = \int_0^\infty P_t\, dt$. Dans son mémoire fondamental [6], G. Hunt ne se limite pas aux noyaux continus, mais il suppose que les opérateurs P_t sont sous-markoviens, autrement dit que la masse totale de la mesure μP_t, transformée par P_t de la mesure $\mu \geqslant 0$, est inférieure ou égale à la masse totale de μ, et ceci pour toute mesure $\mu \geqslant 0$ à support compact et tout nombre réel $t \geqslant 0$. Nous ne ferons jamais cette hypothèse restrictive, qui permet d'utiliser des méthodes probabilistes en considérant divers processus de Markov associés au semi-groupe P_t. Nous ne supposerons pas que l'espace X est séparable.

J'ai étudié autrefois [2] une classe de noyaux de convolution, appelés noyaux associés [1] : ce sont, en gros, les noyaux de convolution V pour lesquels il existe une balayée stricte σ_v de la mesure de Dirac sur le complémentaire de n'importe quel voisinage compact v de l'origine du groupe X, le « V-potentiel » $(\sigma_v)^n V$ engendré par l'itérée d'ordre n de la mesure σ_v tendant vers 0 lorsque n tend vers l'infini (voir n° 7); ces noyaux sont ceux d'une bonne théorie du potentiel, dans le cadre de la convolution.

Le but essentiel de ce travail est de prouver que les noyaux « associés » ne sont autres que les noyaux de convolution de Hunt [2]. D'autre part il existe des noyaux continus de Hunt $V = \int_0^\infty P_t\, dt$ (non de convolution) tels que certaines mesures excessives (mesures $\xi \geqslant 0$ telles que $\xi P_t \leqslant \xi$ quel que soit $t \geqslant 0$) n'admettent pas de décomposition de Riesz; on verra incidemment (n° 6) que, dans le cas de la convolution, il existe toujours une telle décomposition, même dans le cas « surmarkovien ».

1. Noyaux-diffusions ; noyaux élémentaires.

Soit X un espace localement compact, donné une fois pour toutes; on désigne par $M = M(X)$ l'ensemble des mesures de Radon réelles sur X, par M_0 l'ensemble des mesures à support compact, par M^+ et M_0^+ les sous-ensembles de M et de M_0 constitués par des mesures $\geqslant 0$.

DÉFINITION 1. 1. — *Un noyau-diffusion sur* X *est une application* $V : \mu \to \mu V$ *de* M_0 *dans* M *qui est linéaire, positive, et telle que les relations* $\mu \in M_0^+$, $\mu_n \in M_0^+ (n = 1, 2, \ldots)$, $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n$, *entraînent :*

$$\mu V = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n V. \tag{1.1}$$

(1) Sous-entendu « à une famille fondamentale »; cette terminologie n'était pas heureuse, mais il est inutile d'en changer puisque les noyaux en question ne sont autres que les noyaux de convolution de Hunt; ce sont aussi les noyaux de convolution satisfaisant au principe d'unicité des masses et au principe du balayage sur tout ouvert (voir [1]). Dans la définition, il suffit que v décrive un système fondamental de voisinages de l'origine.

(2) Résultat énoncé sans démonstration dans la note [1], mais seulement dans le cas des noyaux « bornés ».

Le domaine D(V) d'un tel opérateur V peut être étendu à certaines mesures à support non compact : les mesures $\geqslant 0$ de D(V) sont les mesures μ telles que la mesure

$$\mu V = \sup_{K \subset X} \mu_K V$$

existe, μ_K désignant la restriction de μ au compact K; l'ensemble de ces mesures est noté $D^+(V)$; le domaine D(V) est constitué par les différences de mesures de $D^+(V)$.

Évidemment si $\mu \in D^+(V)$ et si $0 \leqslant \nu \leqslant \mu$, on a $\nu \in D^+(V)$ et $\nu V \leqslant \mu V$; d'autre part la relation (1. 1) s'étend au cas où μ et les μ_n sont dans $D^+(V)$.

La somme d'un nombre fini de noyaux-diffusion se définit d'une manière évidente, de même que la notion de série convergente de tels noyaux. Le produit (en général non commutatif) de la diffusion V par la diffusion W sera défini si l'image de M_0 par V est contenue dans le domaine de W, et on posera $\mu(VW) = (\mu V)\, W$ $(\mu \in M_0)$.

Définition 1. 2. — *On dit que le noyau-diffusion* V *satisfait au principe du balayage si, quel que soit* $\mu \in M_0^+$ *et quel que soit l'ouvert relativement compact* ω, *il existe une mesure* $\mu' \in M_0^+$ *telle que :*

(i) μ' *est portée par l'adhérence de* ω.
(ii) $\mu' V \leqslant \mu V$.
(iii) *Les restrictions de* μV *et* $\mu' V$ *à* ω *sont identiques.*

En remplaçant dans la définition précédente M_0^+ par $D^+(V)$ et « relativement compact » par « quelconque », on obtient la définition du *principe du balayage sur tout ouvert.*

Définition 1. 3. — *Le noyau* V *est dit élémentaire s'il est de la forme*

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$$

où T *est un noyau-diffusion dont les itérés* T^n *existent tous, et sont tels que la série converge.*

Dans cette définition T^0 représente le noyau « identité » I.

Définition 1. 4. — *Soit* T *un noyau-diffusion; les mesures* ξ *de* $D^+(T)$ *satisfaisant à* $\xi T \leqslant \xi$ (*resp.* $\xi T = \xi$) *sont dites* T-*surharmoniques* (*resp.* T-*harmoniques*).

Si $V = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$ est un noyau élémentaire, et si $\mu \in D^+(V)$, la mesure μV (appelée le V-potentiel engendré par μ) est évidemment T-surharmonique.

Voici maintenant quelques propositions très simples qui seront utiles :

Proposition 1. 1. — *Tout noyau élémentaire satisfait au principe d'unicité des masses.*

Autrement dit, si V est un noyau élémentaire, les relations $\mu \in D(V)$ et $\mu V = 0$ entraînent $\mu = 0$; c'est immédiat.

Proposition 1. 2. — *Soit* $V = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$ *un noyau élémentaire, et soit* ξ *une mesure* T-*surharmonique*; *il existe un* V-*potentiel* μV (*avec* $\mu \in D^+(V)$) *et une mesure* T-*harmonique* η *tels que* $\xi = \mu V + \eta$; *une telle décomposition de « Riesz » est unique.*

C'est également immédiat; la « racine » μ de ξ n'est autre que la mesure $\xi - \xi T$ et la « partie harmonique » η de ξ est la mesure $\lim_{n \to \infty} \xi T^n$.

Un corollaire important est le suivant : toute mesure T-surharmonique ξ majorée par un V-potentiel est le V-potentiel d'une mesure positive (autrement dit $\xi = \mu V$, avec $\mu = \xi - \xi T$).

Proposition 1. 3. — *Tout noyau élémentaire satisfait au principe du balayage* (et même au principe du balayage sur tout ouvert) [3].

On va montrer beaucoup plus : soit $\mu \in D^+(V)$ et soit e un ensemble universellement mesurable (pas nécessairement ouvert); l'enveloppe inférieure des mesures T-surharmoniques majorant μV sur e est T-surharmonique, donc (corollaire précédent) de la forme $\mu' V$, avec $\mu' \in D^+(V)$; cette mesure μ' satisfait évidemment aux conditions (ii) et (iii) de la définition 1. 2; il reste à prouver (i); or μ' est portée par e, car si on

[3] Voir [3] pour plus de détails, en particulier pour une détermination explicite de la mesure « balayée » μ'; voir également [2] pour le cas des noyaux de convolution, et [5] pour des hypothèses un peu différentes et des interprétations probabilistes.

appelle μ'_e et μ''_e les restrictions de μ' à e et au complémentaire de e on a $(\mu'_e + \mu''_e T)V = \mu' V - \mu''_e$, ce qui exige (par définition de $\mu' V$) $\mu''_e = 0$.

2. Noyaux continus.

On désigne par $C = C(X)$ l'ensemble des fonctions numériques continues sur l'espace localement compact X, par C_0 l'ensemble des fonctions de C qui sont à support compact, par C^+ et C_0^+ les sous-ensembles de C et C_0 constitués par des fonctions positives.

Définition 2. 1. — *Le noyau* V *sur* X *est dit continu si l'application* $\mu \rightarrow \mu V$ *de* M_0 *dans* M *est continue lorsqu'on munit* M_0 *et* M *des topologies* $\sigma(M_0, C)$ *et* $\sigma(M, C_0)$.

On rappelle que $\sigma(M_0, C)$, par exemple, est la topologie la moins fine qui rende continues les formes linéaires (définies sur M_0) :

$$\mu \rightarrow \langle \mu, f \rangle = \int f \, d\mu \quad (\forall f \in C).$$

On notera aussi $\langle \mu, f \rangle$ l'intégrale $\int f \, d\mu$ lorsque $f \in C_0$ et $\mu \in M$; on emploiera la même notation lorsque $f \in C$ et $\mu \in M$, l'intégrale $\int f \, d\mu$ étant absolument convergente.

Le transposé d'un noyau continu est une application linéaire positive de C_0 dans C; on utilisera la même notation pour désigner un noyau V et son transposé, mais on écrira Vf pour désigner la transformée de $f \in C_0$ par ce transposé. On aura ainsi :

$$(2.1) \quad \langle \mu, Vf \rangle = \langle \mu V, f \rangle, \qquad \forall f \in C_0, \qquad \forall \mu \in D(V).$$

Définition 2. 2. — *On dira que le noyau* V *est strictement positif si* $\varepsilon_x V \neq 0$ $\forall x \in X$, ε_x *désignant la masse* $+1$ *au point* x.

Il revient au même de dire, d'après (2. 1), que, pour tout $x \in X$, il existe $f \in C_0^+$ avec $Vf(x) > 0$.

Le lemme suivant est une application immédiate du théorème de Borel-Lebesgue :

Lemme 2. 1. — *Pour que le noyau* V *soit strictement positif, il faut et suffit que, à tout compact* K *de* X, *on puisse associer une fonction* $f \in C_0^+$ *telle que*

$$Vf(x) \geqslant 1 \quad \forall x \in K.$$

LEMME 2. 2. — *Soit* $\{\mu_i\}_{i\in I}$ *une famille de mesures* $\geqslant 0$; *s'il existe un noyau continu strictement positif* A *et une mesure* $\nu \geqslant 0$ *tels que*

$$\mu_i \in D^+(A) \qquad \textit{et} \qquad \mu_i A \leqslant \nu \quad \forall i \in I$$

l'ensemble des mesures $\mu_i A$ *est vaguement borné.*

En effet soit $f \in C_0^+$; d'après le lemme 2. 1 il existe $g \in C_0^+$ avec $Ag(x) \geqslant f(x)$ $\forall x \in X$; donc, d'après (2. 1) :

$$\langle \mu_i, f\rangle \leqslant \langle \mu_i, Ag\rangle = \langle \mu_i A, g\rangle \leqslant \langle \nu, g\rangle$$

d'où

$$\sup_{i\in I} \langle \mu_i, f\rangle < +\infty \qquad \forall f \in C_0^+$$

ce qui est la définition du fait que l'ensemble des mesures μ_i est vaguement borné.

En vue des applications de ce lemme, rappelons que les ensembles vaguement bornés de mesures positives sont les ensembles relativement compacts (pour la topologie vague).

3. Noyaux de Hunt continus.

DÉFINITION 3. 1. — *Une famille* $\{P_t\}_{t\geqslant 0}$ *à un paramètre réel de noyaux continus sur l'espace localement compact* X *est appelée semi-groupe continu si*

(i) $P_s P_t = P_{s+t}$, $\forall s \geqslant 0$, $\forall t \geqslant 0$;
(ii) $P_0 = I$ (*opérateur identité*);
(iii) *pour toute fonction* $f \in C_0$ *l'application* $(x, t) \to P_t f(x)$ *de* $X \times R^+$ *dans* R *est continue.*

DÉFINITION 3. 2. — *Un noyau continu* V *est dit noyau de Hunt s'il existe un semi-groupe continu de noyaux continus* P_t *tel que*

$$Vf(x) = \int_0^\infty P_t f(x)\, dt, \qquad \forall f \in C_0, \qquad \forall x \in X.$$

Un tel noyau sera écrit symboliquement $V = \int_0^\infty P_t\, dt$.

La transformée d'une mesure $\mu \in M_0$ par V est la mesure μV définie par

$$(3.\ 1) \qquad \langle \mu V, f\rangle = \int_0^\infty \langle \mu P_t, f\rangle\, dt, \qquad \forall f \in C_0;$$

cela résulte immédiatement du théorème de Fubini; *cette formule* (3. 1) *s'étend à toute mesure* $\mu \in D(V)$ (considérer d'abord le cas des mesures $\geqslant 0$); la mesure μV, notée symboliquement $\int_0^\infty \mu P_t\, dt$, est le V-potentiel engendré par μ.

Lemme 3. 1. — *Tout noyau de Hunt continu est strictement positif.*

Cela résulte immédiatement des définitions et du lemme 2. 1.

Lemme 3. 2. — *Soit* $V = \int_0^\infty P_t\, dt$ *un noyau de Hunt continu; soit* $f \in C_0$ *et soit* $\lambda \in R^+$; *la fonction numérique définie sur* X *par*

$$R_\lambda f(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, P_t f(x)\, dt$$

est continue.

Il suffit de le montrer pour $f \in C_0^+$; alors la fonction $R_\lambda f$ est semi-continue inférieurement sur X, et il en est de même de la fonction : $x \rightarrow \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda t}) P_t f(x)\, dt$; la somme de ces deux fonctions semi-continues inférieurement étant égale à la fonction continue Vf, chacune d'elles est continue.

L'application $f \rightarrow R_\lambda f$ de C_0 dans C étant positive, elle définit un noyau continu R_λ sur X, qu'on appellera ***résolvante*** du semi-groupe P_t. Ce noyau R_λ est lui-même un noyau de Hunt, car c'est l'intégrale du semi-groupe continu $\{e^{-\lambda t} P_t\}_{t \geqslant 0}$.

Lemme 3. 3. — *Les résolvantes* R_λ *associées à un noyau de Hunt* V *vérifient l'équation résolvante :*

$$(3.\ 2) \qquad (\lambda - \lambda')R_\lambda R_{\lambda'} = R_{\lambda'} - R_\lambda \qquad (\lambda' \geqslant 0,\ \lambda > 0).$$

En particulier, pour $\lambda' = 0$, *on a :*

$$(3.\ 3) \qquad \lambda V R_\lambda = \lambda R_\lambda V = V - R_\lambda \qquad (\lambda > 0).$$

C'est une conséquence facile du théorème de Fubini.

Lemme 3. 4. — *Soit* V *un noyau continu de Hunt; pour tout nombre réel* $\lambda > 0$ *le noyau* $V + I/\lambda$ *est proportionnel à un noyau élémentaire, et on a :*

$$(3.\ 4) \qquad V + \frac{I}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda R_\lambda)^n.$$

C'est une conséquence facile de la relation

$$(3.\ 5)\quad \mathrm{R}_\lambda^n f(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)\,!}\frac{d^{n-1}}{d\lambda^{n-1}}\mathrm{R}_\lambda f(x) = \int_0^\infty \frac{t^{n-1}}{(n-1)\,!}e^{-\lambda t}\mathrm{P}_t f(x)\,dt \quad (f \in \mathrm{C}_0,\ x \in \mathrm{X})$$

qui se déduit elle-même de l'équation résolvante (3. 2).

De ce lemme d'approximation on peut déduire simplement diverses propriétés des noyaux de Hunt :

Proposition 3. 1. — *Le semi-groupe associé à un noyau de Hunt continu est unique.*

Soit en effet $\mathrm{V} = \int_0^\infty \mathrm{P}_t\,dt = \int_0^\infty \mathrm{Q}_t\,dt$ un noyau de Hunt continu; appelons R_λ et S_λ les résolvantes des semi-groupes P_t et Q_t; d'après (3. 4) on a

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda\mathrm{R}_\lambda)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(\lambda\mathrm{S}_\lambda)^n$$

ce qui entraîne $\mathrm{R}_\lambda = \mathrm{S}_\lambda$ pour tout $\lambda > 0$ (d'après l'unicité des masses pour les noyaux élémentaires); les semi-groupes continus P_t et Q_t ayant mêmes résolvantes sont identiques.

Proposition 3. 2. — *Tout noyau de Hunt continu satisfait au principe du balayage.*

Soit en effet V un tel noyau; soit $\mu \in \mathrm{D}^+(\mathrm{V})$ et soit ω un ouvert *relativement compact* de X. Pour tout $\lambda > 0$ le noyau $\mathrm{V} + \mathrm{I}/\lambda$ est proportionnel à un noyau élémentaire (lemme 3. 4), donc satisfait au principe du balayage (proposition 1. 3); il existe donc une mesure $\mu_\lambda \geqslant 0$ portée par ω telle que

$$(3.\ 6)\qquad \mu_\lambda\mathrm{V} + \frac{\mu_\lambda}{\lambda} \leqslant \mu\mathrm{V} + \frac{\mu}{\lambda}.$$

(3. 7) les restrictions à ω de $\mu_\lambda\mathrm{V} + \frac{1}{\lambda}\mu_\lambda$ et de $\mu\mathrm{V} + \frac{1}{\lambda}\mu$ sont identiques.

Pour $\lambda \geqslant 1$ on a, d'après (3. 6) : $\mu_\lambda\mathrm{V} \leqslant \mu\mathrm{V} + \mu$; d'après le lemme 2. 2 la famille $\{\mu_\lambda\}_{\lambda \geqslant 1}$ est vaguement bornée (car le noyau V est strictement positif), donc relativement compacte; soit μ' une valeur d'adhérence des μ_λ lorsque λ tend vers $+\infty$; évidemment μ' est portée par l'adhérence de ω et satisfait aux propriétés (ii) et (iii) de la définition 1. 2, car les relations (3. 6) et (3. 7) passent à la limite vague, les mesures μ_λ étant portées par un compact fixe [4].

Proposition 3. 3. — *Tout noyau de Hunt continu satisfait au principe d'unicité des masses.*

On va d'abord établir le lemme suivant : *pour toute mesure* $\mu \in D(V)$ *l'application* $t \to \mu P_t$ *est continue.*

C'est vrai par définition si μ est à support compact; sinon on peut supposer $\mu \geqslant 0$ et se borner à prouver la continuité à l'origine : $\lim\limits_{t \to 0} \mu P_t = \mu$.

Comme on a

$$\mu P_t V = \int_t^\infty \mu P_s \, ds \leqslant \int_0^\infty \mu P_s \, ds = \mu V$$

la famille $\{P_t\}_{t>0}$ est vaguement bornée (lemme 2. 2) donc relativement compacte; soit ν une valeur d'adhérence de μP_t lorsque t tend vers 0 et soit $f \in C_0^+$; comme $P_t f(x)$ tend vers $f(x)$ lorsque t tend vers 0 on a, d'après le lemme de Fatou :

$$\langle \mu, f \rangle \leqslant \liminf_{t \to 0} \langle \mu, P_t f \rangle = \liminf_{t \to 0} \langle \mu P_t, f \rangle \leqslant \langle \nu, f \rangle$$

d'où $\mu \leqslant \nu$.

D'autre part, comme Vf est continue, donc semi-continue inférieurement, on a :

$$\begin{aligned} \langle \nu V, f \rangle = \langle \nu, Vf \rangle &\leqslant \limsup_{t \to 0} \langle \mu P_t, Vf \rangle \\ &= \limsup_{t \to 0} \langle \mu, P_t V f \rangle \leqslant \langle \mu, Vf \rangle = \langle \mu V, f \rangle \end{aligned}$$

d'où $\nu V \leqslant \mu V$.

Comme V est strictement positif, les relations $\mu \leqslant \nu$ et $\nu V \leqslant \mu V$ entraînent $\mu = \nu$; la famille relativement compacte μP_t, admettant la seule valeur d'adhérence μ lorsque t tend vers 0, converge bien vers μ.

Le lemme est donc établi; on en déduit facilement la proposition 3. 3, à savoir : si $\mu \in D(V)$ et si $\mu V = 0$, alors $\mu = 0$; en effet, d'après le lemme prouvé, la mesure

$$\mu V \frac{I - P_t}{t} = \frac{1}{t} \int_0^t (\mu P_s) \, ds$$

converge vers μ lorsque t tend vers 0.

[4] Voir une autre démonstration, utilisant le « principe de domination », dans [4].

4. Mesures excessives [5].

Dans ce paragraphe, $V = \int_0^\infty P_t\,dt$ désigne un noyau continu de Hunt, dont les résolvantes sont notées R_λ.

DÉFINITION 4.1. — *La mesure* $\xi \geqslant 0$ *est dite excessive* (*resp. invariante*) *si on a* $\xi \in D(P_t)$ *et* $\xi P_t \leqslant \xi$ (*resp.* $\xi P_t = \xi$) *quel que soit* $t \geqslant 0$.

PROPOSITION 4.1. — *Si* ξ *est excessive, on a* $\lim_{t \to 0} \xi P_t = \xi$.

C'est une conséquence immédiate de la décroissance de l'application $t \to \xi P_t$ et du lemme de Fatou.

REMARQUE. — Pour que la mesure excessive ξ soit invariante, il faut et il suffit qu'on ait $\xi P_s = \xi$ pour *un* nombre réel $s > 0$.

PROPOSITION 4.2. — *Pour que la mesure* $\xi \geqslant 0$ *soit excessive, il faut et il suffit que* $\xi(\lambda R_\lambda) \leqslant \xi$ *quel que soit* $\lambda > 0$; *lorsqu'il en est ainsi, l'application* $\lambda \to \xi(\lambda R_\lambda)$ *est croissante et converge vers* ξ *lorsque* λ *tend vers* $+\infty$.

En effet si ξ est excessive, on a

$$\xi(\lambda R_\lambda) = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t}(\xi P_t)\,dt \leqslant \xi$$

donc ξ est excessive. Si inversement $\xi \geqslant 0$ est telle que $\xi(\lambda R_\lambda) \leqslant \xi$ pour tout $\lambda > 0$, on a, d'après une formule classique d'inversion de la transformation de Laplace :

$$\xi P_t = \lim_{k \to \infty} \xi\left(\frac{k}{t} R_{\frac{k}{t}}\right) \leqslant \xi$$

donc ξ est excessive. La croissance de l'application $\lambda \to \xi(\lambda R_\lambda)$ résulte aisément de l'équation résolvante (3.2), et on achève en utilisant le lemme de Fatou.

REMARQUE. — Pour que la mesure $\xi \geqslant 0$ soit invariante, il faut et il suffit que $\xi \in D(R_\lambda)$ pour tout $\lambda > 0$, et que, pour une valeur particulière λ_0, on ait $\xi(\lambda_0 R_{\lambda_0}) = \xi$.

[5] Cette notion, introduite par G. HUNT [6] dans le cas des semi-groupes sous-markoviens, est *une* généralisation de la notion de fonction surharmonique ordinaire; pour l'utilisation systématique des résolvantes dans l'étude analogue (mais plus délicate) des « fonctions excessives », voir aussi P. A. MEYER [7].

PROPOSITION 4. 3. — *Si ξ est une mesure excessive, on a :*

$$(4.1) \qquad \lim_{n\to\infty} \xi(\lambda R_\lambda)^n = \lim_{\lambda\to 0} \xi(\lambda R_\lambda) = \lim_{t\to\infty} \xi P_t.$$

En effet appelons η la mesure invariante $\lim\limits_{t\to\infty} \xi P_t$.

1° On a $\eta = \lim\limits_{n\to\infty} \xi(\lambda R_\lambda)^n \ \forall\lambda > 0$, car, d'après (3. 5), on a

$$(4.2) \quad \xi(\lambda R_\lambda)^n = \frac{\lambda^n}{(n-1)!}\int_0^\infty t^{n-1}\, e^{-\lambda t}\,(\xi P_t)\, dt$$
$$\geqslant \frac{\lambda^n}{(n-1)!}\int_0^\infty t^{n-1}\, e^{-\lambda t}\,\eta\, dt = \eta;$$

et d'autre part, pour $n > k > t\lambda$ on a, d'après la proposition 4. 2 :

$$\xi(\lambda R_\lambda)^n \leqslant \xi(\lambda R_\lambda)^k \leqslant \xi\left(\frac{k}{t} R_{\frac{k}{t}}\right)^k$$

d'où $\lim\limits_{n\to\infty} \xi(\lambda R_\lambda)^n \leqslant \xi P_t \ \forall t > 0$ et finalement (proposition 4. 1) : $\lim\limits_{n\to\infty} \xi(\lambda R_\lambda)^n \leqslant \xi$.

2° On a $\lim\limits_{\lambda\to 0} \xi(\lambda R_\lambda) = \eta$, car on a déjà vu $\xi(\lambda R_\lambda) \geqslant \eta$ [faire $n = 1$ dans la formule (4. 2)]; d'autre part, si $f \in C_0^+$, si $\varepsilon > 0$, et si $t_0 > 0$ est tel que $\langle \xi P_t, f\rangle \leqslant \langle \eta, f\rangle + \varepsilon$ pour $t \geqslant t_0$, on a :

$$\langle \xi(\lambda R_\lambda), f\rangle = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t}\langle \xi P_t, f\rangle\, dt$$
$$\leqslant \lambda \int_0^{t_0} e^{-\lambda t}\langle \xi, f\rangle\, dt + \lambda\int_{t_0}^\infty e^{-\lambda t}(\langle \eta, f\rangle + \varepsilon)\, dt$$

d'où immédiatement :

$$\limsup_{\lambda\to 0}\, \langle \xi(\lambda R_\lambda), f\rangle \leqslant \langle \eta, f\rangle.$$

DÉFINITION 4. 3. — *Si ξ est une mesure excessive, on appelle partie invariante de ξ la mesure invariante définie par* (4. 1).

DÉFINITION 4. 4. — *On appelle mesure excessive pure toute mesure excessive dont la partie invariante est nulle.*

Toute mesure excessive peut évidemment s'écrire d'une façon et d'une seule sous forme de somme d'une mesure invariante (sa partie invariante) et d'une mesure excessive pure.

Proposition 4. 4. — *Tout* V-*potentiel engendré par une mesure positive est une mesure excessive pure.*

C'est évident, car si $\xi = \mu V$, avec $\mu \in D^+(V)$, on a :

$$\xi P_t = \mu V P_t = \int_t^\infty (\mu P_s)\, ds$$

donc la mesure ξP_t est $\leqslant \xi$ et tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$.

Un exemple très simple, dû à G. Hunt, montre que *la réciproque de la proposition* 4. 4 *est inexacte :* X est l'intervalle ouvert $]0, +\infty[$ de la droite réelle, et P_t est l'opérateur de translation par le nombre réel $t \geqslant 0$; il est immédiat de constater que la mesure de Lebesgue sur X est excessive pure, mais ce n'est pas un potentiel (ce serait le potentiel engendré par la masse $+1$ à l'origine si X était l'intervalle *fermé* $[0, +\infty[$.)

On trouvera dans [6] des conditions suffisantes, portant sur le semi-groupe P_t, pour qu'une mesure excessive pure soit un potentiel; on verra au n° 6 qu'il en est toujours ainsi dans le cas des noyaux de convolution; la démonstration utilisera le résultat suivant :

Lemme 4. 1. — *Soit* ξ *une mesure excessive : pour tout* $\lambda > 0$ *la mesure* $\mu_\lambda = \lambda\xi(I - \lambda R_\lambda)$ *appartient à* $D^+(V)$; *l'application* $\lambda \to \mu_\lambda V$ *est croissante et converge vers la partie excessive pure de* ξ *lorsque* λ *tend vers* $+\infty$; *de plus on a :*

$$(4.\ 3) \qquad \mu_{\lambda'}(V - R_\lambda) = \mu_\lambda(V - R_{\lambda'}), \qquad \forall\lambda > 0 \quad et \quad \lambda' > 0.$$

En effet d'après la proposition 4. 2 la mesure ξ est (λR_λ)-surharmonique (voir définition 1. 4) pour tout $\lambda > 0$; d'après la décomposition de Riesz pour les noyaux élémentaires (proposition 1. 2) on a :

$$\xi = \frac{1}{\lambda}\mu_\lambda \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda R_\lambda)^n + \eta$$

où $\eta = \lim_{n\to\infty} \xi(\lambda R_\lambda)^n$ est la partie invariante de ξ (proposition 4. 3).

Appliquant l'opérateur λR_λ aux deux membres de cette relation il vient :

$$(\xi - \eta)\lambda R_\lambda = \frac{1}{\lambda}\mu_\lambda \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda R_\lambda)^n$$

d'où, d'après le lemme fondamental 3. 4 :

$$(4.4) \qquad \mu_\lambda V = (\xi - \eta)\lambda R_\lambda.$$

Comme $\xi - \eta$ est excessive (c'est la partie excessive pure de ξ) il résulte bien de la proposition 4. 2 que $\mu_\lambda V$ croît vers $\xi - \eta$ lorsque λ croît indéfiniment.

La relation (4. 3) se déduit de (3. 3) en appliquant aux deux membres de (4. 4) l'opérateur $\lambda' R_{\lambda'}$.

Remarque. — D'après (4. 4) on a $\mu_\lambda V \leqslant \xi - \eta$, donc l'ensemble μ_λ est relativement compact (lemme 2. 2). Si on pouvait montrer que la famille $\{\mu_\lambda\}$ admet *une seule* valeur d'adhérence μ lorsque λ tend vers $+\infty$ (et on verra qu'il en est ainsi dans le cas des noyaux de convolution; cette limite μ serait appelée « racine » de la mesure excessive ξ) on en déduirait cette généralisation du théorème de décomposition de Riesz : toute mesure excessive ξ se met d'une façon et d'une seule sous forme de somme de trois mesures excessives : une mesure invariante, une mesure excessive pure de racine nulle, et un V-potentiel de mesure positive (la racine de ξ).

5. Noyaux de composition ; lemmes de convergence.

On supposera désormais que X est un groupe abélien localement compact.

On appellera noyau de convolution sur X toute application $\mu \to \varkappa * \mu$ de M_0 dans M, $\varkappa$ étant une mesure $\geqslant 0$ donnée sur X; une telle application est un noyau continu au sens du n° 2. Le domaine d'un tel noyau est constitué par l'ensemble des mesures μ telles que $\varkappa * \mu$ ait un sens; le transposé d'un tel noyau est l'application $f \to \check{\varkappa} * f$ de C_0 dans C, $\check{\varkappa}$ désignant le symétrique de $\varkappa$ par rapport à l'origine du groupe X.

On utilisera fréquemment deux lemmes simples concernant les limites de produits de convolution :

Lemme 5. 1. — *Soient μ_i, ν_i, ϖ_i trois familles de mesures positives sur* X, *indexées par le même ensemble d'indices* I, *et soit Φ un filtre sur* I; *on suppose que μ_i, ν_i, et ϖ_i convergent suivant Φ vers les limites respectives μ, ν et ϖ; si on a $\mu_i * \nu_i \leqslant \varpi_i$ $\forall i \in$ I, alors $\mu * \nu \leqslant \varpi$.*

C'est une conséquence facile et d'ailleurs bien connue de la semi-continuité. Le fait qu'en général on n'a pas

$$\mu * \nu = \lim_{\Phi} \mu_i * \nu_i$$

lorsque cette dernière limite existe (à moins que, par exemple, μ_i ne soit portée par un compact fixe) est la source de bien des difficultés. D'où l'intérêt du lemme suivant :

Lemme 5. 2. — *Soit* $\{\mu_i\}_{i \in I}$ *une famille de mesures positives, convergeant vers* μ *suivant un filtre* Φ *sur* I; *on suppose qu'il existe une mesure* $\alpha \geqslant 0$ *non nulle et une mesure* $\nu \geqslant 0$ *telles que* $\alpha * \mu \leqslant \nu$ $\forall i \in I$; *si* ϖ *est une mesure* $\geqslant 0$ *telle que* $\varpi * \nu$ *ait un sens, on a:*

$$\lim_{\Phi} \varpi * \mu_i = \varpi * \mu.$$

Soit en effet $f \in C_0^+$; comme $\check{\varpi} * f$ est continue, donc semi-continue inférieurement, on a :

$$(5.1) \quad \langle \varpi * \mu, f \rangle = \langle \mu, \check{\varpi} * f \rangle \leqslant \liminf_{\Phi} \langle \mu_i, \hat{\varpi} * f \rangle$$
$$= \liminf_{\Phi} \langle \varpi * \mu_i, f \rangle.$$

Soit d'autre part $g \in C_0^+$ telle que $f \leqslant \check{\alpha} * g$ (lemme 2. 1); soit $\varepsilon > 0$; appelons ϖ_K et ϖ'_K les restrictions de ϖ à un compact $K \subset X$ et à son complémentaire. Comme $\nu * \varpi'_K$ décroît vers 0 lorsque K « croît » vers X, il existe un compact K tel que $\langle \nu * \varpi'_K, g \rangle \leqslant \varepsilon$; on a donc :

$$\limsup_{\Phi} \langle \varpi * \mu_i, f \rangle \leqslant \lim_{\Phi} \langle \varpi_K * \mu_i, f \rangle + \limsup_{\Phi} \langle \varpi'_K * \mu_i, f \rangle;$$

or on a :

$$\lim_{\Phi} \langle \varpi_K * \mu_i, f \rangle = \langle \varpi_K * \mu, f \rangle \leqslant \langle \varpi * \mu, f \rangle$$

car ϖ_K est à support compact; d'autre part :

$$\langle \varpi'_K * \mu_i, f \rangle \leqslant \langle \varpi'_K * \mu_i, \check{\alpha} * g \rangle = \langle \alpha * \mu_i * \varpi'_K, g \rangle \leqslant \langle \nu * \varpi'_K, g \rangle \leqslant \varepsilon$$

d'où :

$$\limsup_{\Phi} \langle \varpi * \mu_i, f \rangle \leqslant \langle \varpi * \mu, f \rangle.$$

En rapprochant de (5. 1) il vient :

$$\lim_{\Phi} \langle \varpi * \mu_i, f \rangle = \langle \varpi * \mu, f \rangle$$

d'où le lemme.

6. Décomposition de Riesz pour un noyau de convolution de Hunt.

Conformément aux définitions précédentes (voir les n^os 3 et 5), un noyau de convolution de Hunt est l'opérateur de convolution par une mesure $\varkappa$ de la forme

$$\varkappa = \int_0^\infty \alpha_t \, dt$$

où les mesures $\alpha_t \geqslant 0$ constituent un semi-groupe vaguement continu, c'est-à-dire :

(i) $\alpha_t * \alpha_s = \alpha_{t+s} \; \forall s \geqslant 0 \; \forall t \geqslant 0$.
(ii) $\alpha_0 = \delta$ (masse $+ 1$ à l'origine du groupe X).
(iii) l'application $t \rightarrow \alpha_t$ est vaguement continue.

Les résolvantes R_λ sont les opérateurs de convolution par les mesures

$$\rho_\lambda = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \alpha_t \, dt.$$

Les mesures excessives sont les mesures $\xi \geqslant 0$ telles que

$$\alpha_t * \xi \leqslant \xi \quad \forall t > 0$$

ou encore

$$\lambda\rho_\lambda * \xi \leqslant \xi \quad \forall \lambda > 0.$$

D'après la proposition 4. 3 la partie invariante de la mesure excessive ξ est

$$\eta = \lim_{t \to \infty} \alpha_t * \xi = \lim_{\lambda \to 0} \lambda\rho_\lambda * \xi = \lim_{n \to \infty} (\lambda\rho_\lambda)^n * \xi.$$

THÉORÈME 6. 1. — *Toute mesure excessive s'écrit d'une façon et d'une seule sous forme de somme d'un potentiel de mesure positive et d'une mesure invariante.*

Soit en effet ξ une mesure excessive, et soit η sa partie invariante; si on pose

$$\mu_\lambda = \lambda\xi * (\delta - \lambda\rho_\lambda)$$

il vient, d'après (4. 3) et (4. 4) :

(6. 1) $\mu_\lambda * (\varkappa - \rho_{\lambda'}) = \mu_{\lambda'} * (\varkappa - \rho_\lambda) \quad \forall \lambda > 0 \quad \forall \lambda' > 0,$
(6. 2) $\mu_\lambda * \varkappa = (\xi - \eta) * (\lambda\rho_\lambda) \leqslant \xi - \eta \quad \forall \lambda > 0.$

D'après (6. 2) et le lemme 2. 2, la famille $\{\mu_\lambda\}$ est relativement compacte; soit μ une valeur d'adhérence de μ_λ lorsque λ tend vers $+\infty$ et soit Φ un filtre sur R tel que $\mu_{\lambda'}$ converge vers μ suivant Φ. D'après (5. 2) et le lemme de convergence 6. 2 (avec $\mu_i = \rho_{\lambda'}$, $\alpha = \varkappa$, $\nu = (\xi - \eta)$, $\varpi = \rho_\lambda$), on a

$$\lim_{\Phi} \mu_{\lambda'} * \rho_\lambda = \mu * \rho_\lambda.$$

D'autre part $\rho_{\lambda'} * \mu_\lambda$ décroît vers 0 lorsque λ' croît vers $+\infty$. A la limite suivant Φ il vient donc, d'après (6. 1) et le lemme 4. 1 :

$$\mu_\lambda * \varkappa = \lim \mu_{\lambda'} * \varkappa - \mu * \rho_\lambda = \xi - \eta - \mu * \rho_\lambda.$$

Faisons maintenant tendre λ vers 0 dans cette relation; évidemment $\mu * \rho_\lambda$ croît vers $\mu * \varkappa$ lorsque λ décroît vers 0; d'autre part, d'après (6. 2) et la proposition 4. 1, la mesure $\mu_\lambda * \varkappa = (\xi - \eta) * (\lambda\rho_\lambda)$ décroît vers la partie invariante de la mesure excessive $\xi - \eta$, c'est-à-dire vers 0; finalement il vient :

$$\xi - \eta = \mu * \varkappa$$

ce qui prouve que ξ est la somme de sa partie invariante η et du potentiel engendré par μ.

Le théorème d'unicité des masses (proposition 3. 3) prouve que cette décomposition est unique.

Remarque. — L'unicité de la décomposition de Riesz prouve que la mesure μ_λ utilisée dans la démonstration précédente converge vers μ lorsque λ tend vers $+\infty$; cette mesure μ (la « racine » de la mesure excessive ξ) est aussi la limite de $\frac{1}{t}(\delta - \alpha_t) * \xi$ lorsque t tend vers 0.

7. Tout noyau de convolution de Hunt est associé à une famille fondamentale.

Définition 7. 1. — *Un noyau de convolution $\varkappa$ sur le groupe* X *est dit associé à une famille fondamentale s'il existe un système fondamental* V(0) *de voisinages conpacts de l'origine tel que, à tout $v \in$ V(0), on puisse associer une mesure $\sigma_v \geqslant 0$ telle que :*

(i) $\varkappa * \sigma_v \leqslant \varkappa$ *et* $\varkappa * \sigma_v \neq \varkappa$;

(ii) *les restrictions de* $\varkappa$ *et de* $\varkappa * \sigma_v$ *au complémentaire de* v *sont identiques.*

(iii) $\lim\limits_{n \to \infty} \varkappa * (\sigma_v)^n = 0.$

LEMME 7. 1. — *Soit* $\varkappa$ *un noyau de convolution de Hunt; soit* $\{\xi_i = \varkappa * \mu_i\}_{i \in \mathrm{I}}$ *une famille de potentiels de mesures positives majorée par un potentiel fixe* ζ; *si* ξ_i *converge suivant un filtre* Φ *sur* I, *la limite* ξ *est un potentiel* $\varkappa * \mu$ *et* μ_i *converge vers* μ *suivant* Φ.

En effet ξ est excessive (puisque c'est une limite de mesures excessives; les inégalités de définition passent à la limite vague, d'après le lemme 5. 1); comme ξ est majorée par un potentiel, sa partie invariante est nulle; c'est donc un potentiel $\varkappa * \mu$, d'après le théorème 6. 1.

Appelons ρ_λ les résolvantes de $\varkappa$. D'après (3. 3) on a:

$$\lambda \rho_\lambda * \xi_i = \xi_i - \rho_\lambda * \mu_i.$$

D'après le lemme de convergence 5. 2 appliqué à la famille ξ_i (avec $\alpha = \rho_\lambda$, $\nu = \zeta$, $\varpi = \rho_\lambda$) on a:

$$\lim_{\Phi} \lambda \rho_\lambda * \xi_i = \lambda \rho_\lambda * \xi \quad \forall \lambda > 0$$

donc $\rho_\lambda * \mu_i$ converge suivant Φ vers la mesure

$$\xi - \lambda \rho_\lambda * \xi = \rho_\lambda * \mu.$$

Comme $\varkappa * \mu_i$ est majorée par la mesure fixe ζ, la famille μ_i est relativement compacte (lemme 2. 2). Si donc ν est la limite de μ_i suivant un ultrafiltre $\mathfrak{U}$ plus fin que Φ, on a d'après le lemme 5. 2 (avec $\alpha = \varkappa$, $\nu = \zeta$, $\varpi = \rho_\lambda$):

$$\lim_{\mathfrak{U}} \rho_\lambda * \mu_i = \rho_\lambda * \nu,$$

et par conséquent:

$$\rho_\lambda * \mu = \rho_\lambda * \nu \quad \forall \lambda > 0$$

d'où, par passage à la limite croissante (lorsque λ décroît vers 0): $\varkappa * \mu = \varkappa * \nu$, et par suite $\mu = \nu$ (théorème d'unicité des masses, proposition 3. 3); la famille μ_i n'a donc pas d'autre valeur d'adhérence que μ suivant Φ; elle converge donc vers μ suivant Φ.

LEMME 7. 2. — *Tout noyau de convolution de Hunt satisfait au principe du balayage sur tout ouvert.*

En effet on a vu qu'un tel noyau $\varkappa$ satisfait au principe du balayage sur tout ouvert relativement compact (proposition 3. 2); soit Ω un ouvert quelconque et soit μ une mesure positive telle que $\varkappa * \mu$ ait un sens; appelons μ_ω une mesure balayée de μ sur l'ouvert relativement compact $\omega \subset \Omega$; par définition μ_ω est portée par l'adhérence de ω (donc par l'adhérence de Ω) et on a

$$\varkappa * \mu_\omega \leqslant \varkappa * \mu$$

les restrictions à ω de $\varkappa * \mu_\omega$ et $\varkappa * \mu$ sont égales. Il en résulte que la famille $\varkappa * \mu_\omega$ est relativement compacte; toute valeur d'adhérence de $\varkappa * \mu_\omega$ lorsque ω « tend » vers Ω est, d'après le lemme 7. 1 un potentiel $\varkappa * \mu'$ satisfaisant à toutes les conditions de la définition 1. 2; en particulier la mesure μ' est portée par l'adhérence de Ω, car c'est une valeur d'adhérence de la famille $\{\mu_\omega\}$; c'est bien une balayée de μ sur Ω.

THÉORÈME 7. 1. — *Tout noyau de convolution de Hunt est associé à une famille fondamentale.*

Soit en effet v un voisinage compact de l'origine, et soit σ_v une mesure balayée de δ sur le complémentaire de v; toutes les conditions de la définition 7. 1 sont remplies par σ_v; en effet :

$$K * \sigma_v \leqslant \varkappa * \delta = \varkappa \quad \text{et} \quad \varkappa * \sigma_v \neq \varkappa \quad \text{(principe d'unicité des masses).}$$

Les restrictions de $\varkappa * \sigma_v$ et $\varkappa$ au complémentaire de v sont identiques, par définition du balayage.

Il reste à prouver que la suite décroissante $\varkappa * (\sigma_v)^n$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini; or la limite des potentiels $\varkappa * (\sigma_v)^n$, majorés par le potentiel fixe $\varkappa = \varkappa * \delta$, est un potentiel $\zeta = \varkappa * \mu$ et on a évidemment $\zeta * \sigma_v = \zeta$, d'où :

$$\zeta * \mu = \lim_{n \to \infty} \varkappa * (\sigma_v)^n * \mu = \lim_{n \to \infty} (\varkappa * \mu) * (\sigma_v)^n = \lim_{n \to \infty} \zeta * (\sigma_v)^n = \zeta,$$

le passage à la limite étant permis puisque la suite $\varkappa * (\sigma_v)^n$ est décroissante. Or la mesure $\varkappa - \zeta \geqslant \varkappa - \varkappa * \sigma_v$ est strictement positive; comme on a $(\varkappa - \zeta) * \mu = \varkappa * \mu - \zeta * \mu = 0$, on a donc $\mu = 0$, d'où $\zeta = \varkappa * \mu = 0$. La condition (iii) de la définition 7. 1 est bien satisfaite.

8. Tout noyau de convolution associé à une famille fondamentale est un noyau de Hunt.

On se donne une fois pour toutes un noyau de convolution $\varkappa$ associé à une famille fondamentale (définition 7. 1). Introduisons les notations suivantes : si v est un élément de $\mathfrak{V}(0)$, on appellera a_v le nombre réel > 0 bien déterminé par la condition que la mesure

$$\tau_v = a_v(\delta - \sigma_v) * \varkappa \tag{8. 1}$$

(qui, d'après les conditions (i) et (ii) de la définition 7. 1 est positive, non nulle et portée par v) ait une masse totale égale à 1.

On appellera $\varkappa_v$ le noyau de convolution (proportionnel à un noyau élémentaire)

$$\varkappa_v = \frac{1}{a_v} \sum_{n=0}^{\infty} (\sigma_v)^n \qquad (\text{avec } (\sigma_v)^0 = \delta); \tag{8. 2}$$

d'après (8. 2) et la condition (iii) de la définition 7. 1 on a :

$$\varkappa = \tau_v * \varkappa_v \quad \text{quel que soit } v. \tag{8. 3}$$

Définition 8. 1. — *La mesure $\xi \geqslant 0$ est dite surharmonique (resp. harmonique) si on a $\sigma_v * \xi \leqslant \xi$ (resp. $\sigma_v * \xi = \xi$) pour tout voisinage compact v de l'origine.*

Évidemment tout potentiel $\varkappa * \mu$ $(\mu \geqslant 0)$ est surharmonique, car on a, d'après (8. 1) :

$$a_v(\delta - \sigma_v) * (\varkappa * \mu) = \mu * \tau_v \geqslant 0.$$

Observons d'ailleurs que lorsque v tend vers l'origine en restant contenu dans un compact fixe, la mesure $\mu * \tau_v$ converge vers μ (car τ_v converge vers δ), ce qui prouve que *le noyau $\varkappa$ satisfait au principe d'unicité des masses.*

Lemme 8. 1. — *Toute mesure surharmonique est la somme d'un potentiel engendré par une mesure positive et d'une mesure harmonique. Une telle décomposition est unique.*

Voici brièvement une démonstration de ce théorème de décomposition de Riesz, établi dans [2] : soit ξ une mesure surharmonique ; posons :

$$\mu_v = a_n(\delta - \sigma_v) * \xi \geqslant 0;$$

pour tout couple de voisinages v et $v' \in \mathcal{V}(0)$, on a :

$$a_v(\delta - \sigma_v) * \mu_{v'} = a_{v'}(\delta - \sigma_v) * \mu_v$$

car le produit de composition $(\delta - \sigma_v) * (\delta - \sigma_{v'}) * \xi$ est associatif; en composant les deux membres de cette relation par $\varkappa$ et en utilisant l'associativité, il vient, d'après (8. 1) :

$$\tau_v * \mu_{v'} = \tau_{v'} * \mu_v;$$

comme τ_v est portée par v et a pour masse totale 1 il résulte facilement de cette relation que, lorsque v' tend vers l'origine, $\mu_{v'}$ converge vers une mesure μ telle que

$$(8.\ 4) \qquad \tau_v * \mu = \mu_v \quad \text{quel que soit} \quad v \in \mathcal{V}(0).$$

Mais, d'après la définition 1. 4, ξ est σ_v-surharmonique; donc (propriété 1. 2)

$$\xi = \varkappa_v * \mu_v + \eta_v \qquad \text{avec} \qquad \eta_v = \lim_{n \to \infty} \varkappa * (\sigma_v)^n;$$

donc, d'après (8. 3) et (8. 4)

$$\xi = \varkappa * \mu + \eta_v.$$

La mesure η_v est harmonique (au sens de la définition 8. 1), car, si on compose les deux membres de la relation précédente par $(\delta - \sigma_{v'})$ il vient (d'après (8. 4) et la définition de μ_v) : $(\delta - \sigma_{v'}) * \eta_v = 0$. On a donc prouvé l'existence d'une décomposition de Riesz, et l'unicité d'une telle décomposition s'établit immédiatement par le procédé qui a servi plus haut à montrer le principe d'unicité des masses pour le noyau $\varkappa$; cela prouve en passant que la mesure harmonique η_v est indépendante de v.

On utilisera les corollaires suivants :

LEMME 8. 2. — *Toute mesure surharmonique majorée par un potentiel est un potentiel.*

En effet d'après le lemme 8. 1 et la condition (iii) de la définition 7. 1 les potentiels de mesures positives sont les mesures surharmoniques ξ telles que $\lim_{n \to \infty} \xi * (\sigma_v)^n = 0$ pour n'importe quel voisinage $v \in \mathcal{V}(0)$.

LEMME 8. 3. — *Soit $\{\mu_i\}_{i \in I}$ une famille de mesures positives telle que les potentiels $\varkappa * \mu_i$ soient définis et majorés par un potentiel fixe; si la famille $\{\varkappa * \mu_i\}$ converge suivant un filtre Φ sur* I, *la limite est un potentiel $\varkappa * \mu$ et μ_i converge vers μ suivant Φ.*

En effet d'après le lemme 5. 1 la limite de $\varkappa * \mu_i$ est une mesure surharmonique majorée par un potentiel; c'est donc un potentiel $\varkappa * \mu$ (lemme 8. 2); comme $\varkappa * \mu_i$ est majoré par un potentiel fixe et que la convolution de σ_v par tout potentiel est bien définie, on a, d'après le lemme de convergence 5. 2 :

$$\lim_{\Phi} (\varkappa * \mu_i) * \sigma_v = (\varkappa * \mu) * \sigma_v (v \in \mathcal{V}(0))$$

d'où, d'après (8. 1) :

$$\lim_{\Phi} \tau_v * \mu_i = \tau_v * \mu$$

d'où le résultat, τ_v ayant un support « arbitrairement petit ».

Nous sommes maintenant en mesure d'établir le résultat énoncé dans le titre de ce paragraphe; c'est immédiat dans le cas d'un noyau élémentaire; le cas général s'en déduit par un passage à la limite un peu laborieux.

Lemme 8. 4. — *Tout noyau de convolution proportionnel à un noyau élémentaire est un noyau de Hunt.*

Soit en effet $\varkappa = \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \sigma^n$ un tel noyau; un calcul élémentaire prouve qu'on a

$$\varkappa = \int_0^{\infty} \alpha_t \, dt$$

où les mesures

$$\alpha_t = e^{-at} \exp (at \, \sigma) = e^{-at} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n t^n \sigma^n}{n\,!}$$

constituent un semi-groupe continu.

Pour passer au cas général, on va utiliser des formules élémentaires réunies dans le lemme suivant :

Lemme 8. 5. — *Soit* $V = \int_0^{\infty} P_t \, dt$ *un noyau continu de Hunt; si on pose* $Q_t = \int_0^t P_s \, ds$ *on a :*

(8. 5) $VP_t = V - Q_t \leqslant V \quad \forall t \geqslant 0,$

(8. 6) $VQ_{s+t} - VQ_s \leqslant tV \quad \forall s \geqslant 0 \quad \forall t \geqslant 0.$

(8. 7) $0 \leqslant VP_s - VP_{s+t} = Q_{s+t} - Q_s = Q_t P_s \quad \forall s \geqslant 0 \quad \forall t \geqslant 0.$

C'est immédiat; on n'utilisera d'ailleurs ces formules que dans le cas des noyaux de convolution.

THÉORÈME 8. 1. — *Tout noyau de convolution associé à une famille fondamentale est un noyau de Hunt.*

Soit $\varkappa$ un noyau de convolution associé à une famille fondamentale; on va diviser la démonstration en quatre parties:

1° *Construction d'un semi-groupe* α_t. — A tout voisinage compact $v \in \mathfrak{V}(0)$ on associe le noyau $\varkappa_v$ défini par la formule (8. 2) et la mesure τ_v définie par (8. 1). Comme $\varkappa_v$ est proportionnel à un noyau élémentaire, on a, d'après le lemme 8. 4:

$$\varkappa_v = \int_0^\infty \alpha_t^{(v)}\, dt$$

où les mesures $\alpha_t^{(v)}$ constituent un semi-groupe continu.

En prenant pour opérateur Q_t l'opérateur de convolution par la mesure $\beta_t^{(v)} = \int_0^t \alpha_s^{(v)}\, ds$ la formule (8. 5) donne:

$$\varkappa_v * \alpha_t^{(v)} = \varkappa_v - \beta_t^{(v)} \leqslant \varkappa_v$$

d'où, en composant par τ_v et utilisant (8. 3):

$$\varkappa * \alpha_t^{(v)} = \varkappa - \beta_t^{(v)} * \tau_v \leqslant \varkappa. \tag{8. 8}$$

En procédant d'une manière analogue, on déduit de (8. 6) et (8. 7) les formules suivantes:

$$\varkappa * \beta_{s+t}^{(v)} - \varkappa * \beta_s^{(v)} \leqslant t\varkappa \quad (s \geqslant 0,\ t \geqslant 0) \tag{8. 9}$$

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \varkappa * \alpha_s^{(v)} - \varkappa * \alpha_{s+t}^{(v)} &= \tau_v * (\beta_{s+t}^{(v)} - \beta_s^{(v)}) \\ &= \tau_v * \beta_t^{(v)} * \alpha_s^{(v)} \quad (s \geqslant 0,\ t \geqslant 0). \end{aligned} \tag{8. 10}$$

D'après le lemme 2. 2, les formules (8. 8) et (8. 9) entraînent que les familles $\alpha_t^{(v)}$ et $\beta_t^{(v)}$ sont relativement compactes [v parcourant $\mathfrak{V}(0)$]. Soit alors $\mathfrak{U}$ un ultrafiltre plus fin que le filtre des sections de l'ensemble ordonné $\mathfrak{V}(0)$; soient α_s et β_s les limites de $\alpha_s^{(v)}$ et $\beta_s^{(v)}$ suivant $\mathfrak{U}$; on va prouver que la famille des mesures $\{\alpha_s\}_{s\geqslant 0}$ constitue un semi-groupe.

Tout d'abord on a l'inégalité

$$\alpha_s * \alpha_t \leqslant \alpha_{s+t} \quad (s \geqslant 0, t \geqslant 0) \tag{8. 11}$$

qui résulte par passage à la limite de l'égalité $\alpha_s^{(v)} * \alpha_t^{(v)} = \alpha_{s+t}^{(v)}$ (lemme 5. 1). Pour obtenir une inégalité en sens inverse observons qu'on a, d'après le lemme 8. 3 et les majorations (8. 8) et 8. 9):

$$\varkappa * \alpha_s = \lim_{\mathfrak{U}} \varkappa * \alpha_s^{(v)} \qquad (s \geqslant 0)$$

$$\varkappa * \beta_s = \lim_{\mathfrak{U}} \varkappa * \beta_s^{(v)} \qquad (s \geqslant 0)$$

d'où, d'après (8. 8) et (8. 10), en observant que τ_v converge vers δ suivant $\mathfrak{U}$ et qu'on peut supposer cette mesure portée par un compact fixe :

$$(8.12) \qquad \varkappa * \alpha_t = \varkappa - \beta_t \quad (t \geqslant 0)$$

$$(8.13) \qquad \varkappa * \alpha_s - \varkappa * \alpha_{s+t} = \beta_{s+t} - \beta_s \geqslant \beta_t * \alpha_s \quad (s \geqslant 0,\ t \geqslant 0)$$

(pour prouver (8. 13) on a encore utilisé le lemme 5. 1, qui entraîne $\beta_t * \alpha_s \leqslant \lim_{\mathfrak{U}} \tau_v * \beta_t^{(v)} * \alpha_s^{(v)}$).

De (8. 12) et (8. 13) on tire

$$\varkappa * \alpha_{s+t} \leqslant \varkappa * \alpha_s * \alpha_t \quad (s \geqslant 0, \quad t \geqslant 0);$$

en rapprochant de (8. 11) on obtient bien l'égalité

$$\alpha_{s+t} = \alpha_s * \alpha_t \quad (s \geqslant 0, t \geqslant 0)$$

(car le noyau $\varkappa$ est différent de 0) ce qui prouve que les mesures α_t constituent un semi-groupe; notons d'ailleurs que $\alpha_0 = \delta$.

2° *Continuité du semi-groupe* $\{\alpha_t\}$. — D'après le lemme 8. 3 on peut passer à la limite sur (8. 9) qui donne

$$(8.14) \qquad \varkappa * \beta_{s+t} - \varkappa * \beta_s \leqslant t\varkappa \quad (s \geqslant 0, t \geqslant 0).$$

Soit alors $f \in C_0^+$, et soit $g \in C_0^+$ telle que $f \leqslant \check{\varkappa} * g$ (lemme 2. 1). D'après (8. 13) et (8. 14), on a :

$$0 \leqslant \langle \varkappa * \alpha_s, f \rangle - \langle \varkappa * \alpha_{s+t}, f \rangle = \langle \beta_{s+t} - \beta_s, f \rangle \leqslant \langle \beta_{s+t} - \beta_s, \check{\varkappa} * g \rangle$$
$$= \langle \varkappa * \beta_{s+t} - \varkappa * \beta_s, g \rangle \leqslant t \langle \varkappa, g \rangle,$$

ce qui prouve que l'application $s \to \varkappa * \alpha_s$ est continue; comme les potentiels $\varkappa * \alpha_s$ sont majorés par le potentiel fixe $\varkappa * \delta = \varkappa$, le lemme 8. 3 entraîne alors que l'application $s \to \alpha_s$ est bien continue.

3° *Si les* α_t *ne sont pas tous égaux à* δ, *on a*

$$\lim_{t \to \infty} \alpha_t = \lim_{t \to \infty} \varkappa * \alpha_t = 0.$$

En effet l'application $t \to \varkappa * \alpha_t$ est décroissante, car les applications $t \to \varkappa * \alpha_t^{(v)}$ le sont; d'après le lemme 8. 3, α_t tend donc vers une limite α_∞ lorsque t tend vers l'infini, et $\varkappa * \alpha_\infty = \lim_{t \to \infty} \varkappa * \alpha_t$.

Faisons tendre s vers l'infini dans la relation $\alpha_{t+s} = \alpha_t * \alpha_s$; il vient :

$$\alpha_\infty = \alpha_t * \alpha_\infty \qquad (t \geqslant 0)$$

(le lemme 5. 2 s'applique, avec $\alpha = \nu = \varkappa$, $\varpi = \mu_t$), d'où, d'après (8. 12) :

$$\varkappa * \alpha_\infty = \varkappa * \alpha_t * \alpha_\infty = (\varkappa - \beta_t) * \alpha_\infty$$

d'où $\beta_t * \alpha_\infty = 0$ quel que soit $t \geqslant 0$; si α_∞ n'est pas nulle, on a $\beta_t = 0$ pour tout $t \geqslant 0$, d'où, d'après (8. 12) et le principe d'unicité des masses : $\alpha_t = \delta$ pour tout $t \geqslant 0$.

4° *On a :* $\varkappa = \int_0^\infty \alpha_t \, dt$.

Montrons d'abord qu'on peut passer à la limite suivant $\mathfrak{U}$ dans la relation

$$\text{(8. 15)} \qquad \varkappa_v * \beta_s^{(v)} = \int_0^s \varkappa_v * \alpha_t^{(v)} \, dt$$

ou encore, pour $f \in C_0^+$ donnée :

$$\langle \varkappa_v * \beta_s^{(v)}, \; f \rangle = \int_0^\infty \langle \varkappa_v * \alpha_t^{(v)}, \; f \rangle \, dt;$$

pour cela il suffit de prouver que la fonction numérique continue $t \to \langle \varkappa_v * \alpha_t^{(v)}, \; f \rangle$ converge uniformément suivant $\mathfrak{U}$ vers la fonction $t \to \langle \varkappa * \alpha_t, \; f \rangle$; or cela résulte de ce que les fonctions $t \to \langle \varkappa_v * \alpha_t^{(v)}, \; f \rangle$ sont *également continues* lorsque v décrit $\mathfrak{V}(0)$; en effet si $g \in C_0^+$ est telle que $f \leqslant \hat{\varkappa} * g$, on a, d'après (8. 7), (8. 8) et 8. 9) :

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \langle \varkappa_v * \alpha_s^{(v)}, f \rangle - \langle \varkappa_v * \alpha_{s+t}^{(v)}, f \rangle = \langle \beta_t^{(v)} * \alpha_s^{(v)}, f \rangle \leqslant \langle \beta_t^{(v)} * \alpha_s^{(v)}, \hat{\varkappa} * g \rangle \\ = \langle \varkappa * \beta_t^{(v)} * \alpha_s^{(v)}, g \rangle \leqslant t \, \langle \varkappa, g \rangle \end{aligned}$$

d'où l'égale continuité sur tout intervalle borné.

On peut donc passer à la limite suivant $\mathfrak{U}$ sur (8. 15); en observant que, d'après (8. 3), la limite de $\varkappa_v * \alpha_t^{(v)}$ (resp. de $\varkappa_v * \beta_s^{(v)}$) est la même que la limite de $\varkappa * \alpha_t^{(v)}$ (resp. de $\varkappa * \beta_s^v$), c'est-à-dire $\varkappa * \alpha_t$ (resp. $\varkappa * \beta_s$), il vient

$$\varkappa * \beta_s = \int_0^s \varkappa * \alpha_t \, dt = \varkappa * \int_0^s \alpha_t \, dt.$$

D'après le principe d'unicité des masses, on a donc :

$$\beta_s = \int_0^s \alpha_t \, dt \qquad (s \geqslant 0),$$

d'où, d'après (8. 12) :

$$\varkappa = \int_0^s \alpha_t \, dt + \varkappa * \alpha_s.$$

Cette relation montre qu'il est impossible que tous les α_s soient égaux à δ; d'après la troisième partie de la démonstration on a donc (en faisant tendre s vers l'infini) :

$$\varkappa = \int_0^\infty \alpha_t \, dt$$

ce qui achève la démonstration du théorème; observons qu'il en résulte à posteriori, d'après l'unicité du semi-groupe associé à un noyau de Hunt continu (proposition 3. 1), que la mesure $\alpha_t^{(v)}$ converge vers α_t lorsque v « tend » vers l'origine d'une façon quelconque.

Remarque. — *Si $\varkappa$ est un noyau de convolution de Hunt, les mesures excessives et les mesures surharmoniques relativement à $\varkappa$ sont les mêmes.*

En effet on peut montrer que les unes et les autres ne sont autres que les limites croissantes de potentiels de mesures positives.

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. Choquet et J. Deny, Aspects linéaires de la théorie du potentiel, III, noyaux de composition satisfaisant au principe du balayage sur tout ouvert (*C. R. Acad. Sc. de Paris*, 250, 4260-4262, 1960).

[2] J. Deny, Familles fondamentales; noyaux associés (*Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, 3, 76-101, 1951).

[3] J. Deny, Les noyaux élémentaires (*Séminaire de Théorie du Potentiel*, 4e année, Paris, 1959-1960).

[4] J. Deny, Éléments de théorie du potentiel par rapport à un noyau de Hunt (*Séminaire de théorie du potentiel*, 5e année, Paris 1960-1961).

[5] J.-L. Doob, Discrete potential theory and boundaries (*J. of Math. and Mech.*, 8, 433-458, 1959).

[6] G. A. Hunt, Markov processes and potentials, I and II (*Illinois J. of Math.*, 1, 44-93 et 316-369, 1957).

[7] P. A. Meyer, Fonctionnelles additives et fonctionnelles multiplicatives de Markov (*à paraître dans ce volume des Annales*).