ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

CLAUDE LOBRY

À propos du sens des textes mathématiques, un exemple : la théorie des «bifurcations dynamiques»

Annales de l'institut Fourier, tome 42, nº 1-2 (1992), p. 327-351

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1992__42_1-2_327_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
42, 1-2 (1992), 327-351

A PROPOS DU SENS DES TEXTES MATHÉMATIQUES UN EXEMPLE : LA THÉORIE DES "BIFURCATIONS DYNAMIQUES"

par Claude LOBRY

à Jean et Michèle Martinet

Nous avions très souvent, Jean Martinet et moi, de longues et vives discussions sur le sens et l'utilité de l'activité mathématique. J'étais volontier provocateur et lui, sans prendre ma provocation trop au sérieux, acceptait toujours le débat que je proposais. Les mathématiciens de renom qui acceptent ce genre de discussions sont si rares de nos jours que je ne pouvais laisser échapper une telle aubaine. Aussi je dois avouer que j'ai trop souvent abusé de notre amitié en attaquant une communauté mathématique dont il était convenu, tacitement entre nous, qu'il s'en ferait l'avocat. J'ai abusé mais qui, sauf un saint, aurait résisté tant le spectacle de son enthousiasme était un plaisir pour l'interlocuteur.

Très peu de temps avant de tomber malade il s'était intéressé à la « Théorie des Bifurcations Dynamiques » et avait rédigé une courte note sur ce thème. Cette théorie fournit un matériel intéressant pour une discussion sur l'utilisation pratique des résultats mathématiques. C'est à une telle discussion que je convie le lecteur.

Mots-Clés : Texte formel – Sens – Bifurcations – Infinitésimaux.
Classification A.M.S. : 03A-34.

1. La langue naturelle et le formalisme.

Nous savons tous que la langue naturelle véhicule des ambiguïtés qui rendent difficile la pratique mathématique. Les ambiguïtés sont abordées dans des discussions entre mathématiciens et considérées comme (provisoirement) levées lorsque ces derniers sont tous d'accord pour dire : «Nous nous sommes parfaitement compris». Ce désir de perfection dans la communication est certainement partagé par tous les scientifiques (et bien d'autres) mais ce qui caractérise les mathématiciens c'est la possession d'une arme redoutablement efficace : la méthode formaliste. Efficace, mais dangereuse !

Par méthode formaliste j'entends l'aller retour incessant entre des énoncés «informels», «intuitifs», c'est-à-dire porteurs de sens, et des énoncés «précis», «rigoureux», c'est-à-dire écrits selon les indications d'une théorie formelle (généralement la théorie des ensembles). Il est bien évident qu'il ne peut y avoir équivalence entre des énoncés informels, éventuellement ambigus, et des énoncés formels. Tout énoncé informel peut avoir plusieurs traductions formelles, dont il convient de discuter. Mais réciproquement, il ne faut pas non plus oublier que lė même énoncé formel peut avoir plusieurs interprétations «intuitives», plus ou moins adéquates.

Le problème posé du «bon accord» entre l'énoncé informel et porteur de sens, et l'énoncé rigoureux mais insignifiant n'a bien sûr pas d'autre réponse qu'une vigilance critique constante. C'est enfoncer une porte ouverte que le dire ! Toutefois, si la parole est aisée, l'art, lui, est difficile. C'est ce que je voudrais montrer sur l'exemple de la Théorie des Bifurcations.

2. La bifurcation de Poincaré-Andronov-Hopf.

Voici pour commencer un énoncé relativement formel du célèbre théorème de Poincaré-Andronov-Hopf (PAH en abrégé) en dimension deux.

Soit la famille de systèmes différentiels :

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(x(t), y(t), \mu) \\ y'(t) &= g(x(t), y(t), \mu). \end{aligned}$$

Si les données f et g satisfont les hypothèses suivantes :

1) Les fonctions f et g sont C^∞.

2) $f(0,0,\mu) = g(0,0,\mu) = 0$.

3) Si, désignant par $\alpha(\mu) \pm i\beta(\mu)$ les valeurs propres (donc supposées complexes conjuguées) de la partie linéaire du système à l'origine, on a :

$$\mu < 0 \Rightarrow \alpha(\mu) < 0$$
$$\mu > 0 \Rightarrow \alpha(\mu) > 0$$
$$\alpha'(0) \neq 0$$
$$\beta(0) \neq 0.$$

4) Pour $\mu = 0$ l'origine est un attacheur du système différentiel.

alors la famille de systèmes différentiels possède les propriétés suivantes :

- Pour $\mu < 0$ l'origine est un état stationnaire stable.
- Pour $\mu > 0$ (assez petit) l'origine est un état stationnaire instable entourée par un cycle limite stable.
- Le diamètre du cycle limite est de l'ordre de $\sqrt{\mu}$.

Ce résultat est également valable en dimension quelconque (Hopf 1942).

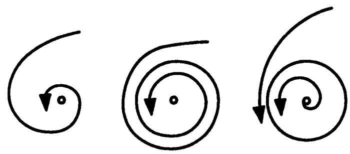
En raison de ses implications évidentes dans les sciences physiques, moins évidentes mais également certaines en chimie et dans les sciences de la vie, le théorème de PAH possède une très large audience. Il est énoncé dans de nombreux ouvrages didactiques sous une forme très proche de celle que j'ai proposée et suivi de «commentaires» qui sont toujours à peu près les mêmes. En voici deux exemples :

V.I. Arnold dans «Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires», Springer Verlag, 1978, p. 256.

«Lorsque μ **passe** par 0, le foyer de l'origine des coordonnées **perd** sa stabilité. Pour $\mu = 0$, l'origine des coordonnées est également un foyer stable, mais non structurellement stable : les trajectoires ne se **rapprochent** pas exponentiellement de 0.

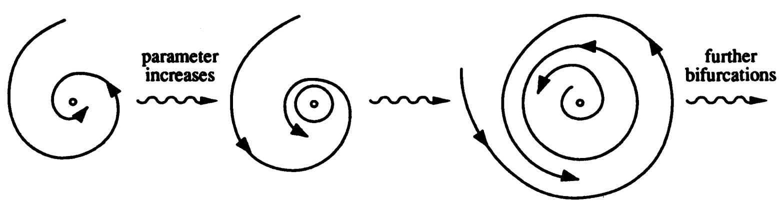
Pour $\mu > 0$ les trajectoires s'éloignent du foyer à une distance proportionnelle à $\sqrt{\mu}$ et s'enroulent autour d'un cycle limite stable. Donc, lorsque μ **passe** par 0, la perte de stabilité s'accompagne de la **naissance** d'un cycle limite stable dont le rayon **croit** comme $\sqrt{\mu}$.

En d'autres termes, l'état stationnaire **perd** sa stabilité et il **apparaît** un régime périodique stable dont l'amplitude est proportionnelle à la racine carrée de l'écart du paramètre par rapport à la valeur critique. Les physiciens parlent dans ce cas d'excitation douce d'auto-oscillations. »



J.E. Marsden-M. McCracken, in « The Hopf bifurcation and its applications », Springer Verlag, 1976, p. 9.

The Hopf bifurcations refers to the **development** of periodic orbits ("self-oscillations") from a stable fixed point, as a parameter **crosses** the critical value.



Ces textes sont ambigus. J'ai mis en caractères gras toutes les expressions qui laissent supposer que μ est un **paramètre dynamique** qui varie avec le **temps**. Mais de quel temps s'agit-il ?

Celui du système dynamique, le « temps » **t** de :

$$x'(\mathbf{t}) = f(x(\mathbf{t}),\ y(\mathbf{t}),\ \mu)$$
$$y'(\mathbf{t}) = g(x(\mathbf{t}),\ y(\mathbf{t}),\ \mu).$$

Si μ varie effectivement en fonction du temps, cette variation est-elle supposée lente ? Il n'est pas possible de décider quelle est exactement l'interprétation que les auteurs ont derrière la tête. Cependant il arrive que l'interprétation soit beaucoup plus nette. Voici encore un texte de V. Arnold (Catastrophe Theory, traduction anglaise Springer Verlag, 1986, pp 20-21) dont je reproduis intégralement la partie qui nous concerne.

Chapter 6. Loss of Stability of Equilibrium and the Generation of Auto-Oscillations

Loss of stability of an equilibrium state on change of parameter is not necessarily associated with the bifurcation of this state. An equilibrium state can lose stability without even interacting with another state.

The corresponding metamorphosis of the phase picture on the plane is indicated in Fig. 16. Two versions are possible:

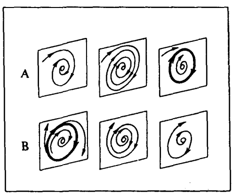


Fig. 16

A. On change of the parameter *the equilibrium state gives birth to a limit cycle* (radius of order $\sqrt{\varepsilon}$ where the parameter differs from the bifurcation value by ε). The stability of the equilibrium is transferred to the cycle, the equilibrium point itself become unstable.

B. An *unstable limit cycle collapses to an equilibrium state:* the attraction domain of the state collapses as the cycle disappears and the instability is transferred to the equilibrium state.

It was know by Poincaré and proved by Andronov and his pupils (the detailed proof was published before the war, in 1939*), that apart from the loss of stability resulting from a stable equilibrium state combining with an unstable one (as described in Chapter 5) and the A and B cases just described, for generic one parameter families of systems with two dimensional phase space no other forms of loss of stability are encountered. Later it was proved that also in systems having phase spaces of higher dimension loss of stability of equilibrium states on change of parameter must take one of the above forms (in the directions of all the additional co-ordinate axes the equilibrium states continue to be attractors).

If an equilibrium state represents a steady state in a real system the metamorphoses A and B represent the following situations.

A. On loss of stability of equilibrium the *steady state becomes a periodic oscillatory state* (Fig. 17), the amplitude of the oscillation being proportional to the square root of the criticality, the difference of the parameter from the critical value at which stability of equilibrium is lost.

This form of loss of stability is called *'soft'* loss of stability since the oscillating state for small criticality differs little from the equilibrium state.

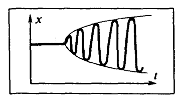


Fig. 17

* Andronov, A. A., Leontovitch, E. A.: Some cases of the dependence of limit cycles on parameters, Uchenye Zapiski Gor'kovskovo Universiteta, *6* (1939), 3–24.
The results were also included in the first edition of the famous book of Andronov and Haikin, Oscillation Theory, Moscow 1937 (English trans: Princeton University Press, 1949).

La figure 17 montre que le système est supposé à l'état stationnaire pour une valeur de μ négative, que μ **croit au cours du temps et devient positif** (le signal représenté sur la figure est continu) ; le fait que les oscillations sont (relativement) serrées laisse entendre que μ croit lentement. Cette figure 17 est à rapprocher de la figure 16A dans laquelle le système est étudié pour des «tranches» μ constant. C'est ici que le formalisme mathématique va nous permettre d'exprimer avec une grande efficacité ce que nous voulons exprimer :

La figure 16A représente le portrait de phase du système de $\mathbf{R}^3$:

$$x'(t) = f(x(t),\ y(t),\ \mu)$$
$$y'(t) = g(x(t),\ y(t),\ \mu)$$
$$\mu'(t) = 0.$$

pour diverses valeurs de μ_0.

La figure 17 nous montre une trajectoire du système de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(x(t),\ y(t),\ \mu) \\ y'(t) &= g(x(t),\ y(t),\ \mu). \\ \mu'(t) &= \varepsilon \end{aligned}$$

où ε est un petit paramètre positif.

Et nous voyons que, a priori, il est tout à fait abusif de déduire la figure 17 du théorème de PAH. A partir de maintenant je désigne par :

«Théorie des bifurcations statiques», la théorie qui traite des systèmes :

$$\begin{aligned} X'(t) &= F(X(t), \mu(t)) \\ \mu'(t) &= 0 \end{aligned}$$

«Théorie des bifurcations dynamiques», la théorie qui traite des systèmes :

$$\begin{aligned} X'(t) &= F(X(t), \mu(t)) \\ \mu'(t) &= \varepsilon. \end{aligned}$$

3. L'émergence de la théorie des bifurcations dynamiques.

Il est bien clair, et cela n'enlève rien à l'intérêt de la théorie des bifurcations statiques, que dans d'innombrables situations concrètes c'est une Théorie des bifurcations dynamiques qui est pertinente. Il était donc naturel que beaucoup de scientifiques, non mathématiciens, interprètent les énoncés ambigus du type 1) et 2) selon leurs besoins, c'est-à-dire comme des énoncés de la théorie dynamique. On peut imaginer que certains s'étaient rendus compte de la difficulté et avaient cru pouvoir la lever (et nous allons voir que c'est dans une grande mesure correct) en invoquant le fait que, tout système réel étant soumis à des petites perturbations, nécessairement on doit quitter l'équilibre instable, dès que μ est positif. Il est toutefois intéressant de noter que ce n'est que très récemment que l'on a reconnu la nécessité d'une théorie sérieuse.

En 1984 P. Mandel et T. Erneux publiaient [8] un article dont je reproduit les premières lignes d'introduction :

> In many experimental studies of instabilities in laser with a saturable absorber, the control parameter is slowly varied in time. In a recent

study we have shown that this time dependence may include dramatic changes in the bifurcation diagram derived on the assumption of a stationary control parameter.

En 1985 [11] Neishtadt publiait un résultat mettant en évidence l'existence d'un retard à la bifurcation dans le cas de la bifurcation de PAH dynamique.

En 1986, de façon indépendante, sur la base d'expérimentations numériques [6] et de résultats de sa théorie des «canards» en dimension 3 [14], Wallet et moi mettions le doigt sur la question des bifurcations dynamiques et la «nécessité» du théorème de Neishtadt, sans être capable de le prouver. Une problématique était née qui a conduit, au moment où sont écrites ces lignes, à une bonne quarantaine d'articles(1).

4. De la récupération des résultats anciens.

Il est courant en mathématiques que la réponse à une question se trouve, un peu déguisée, dans le cadre d'une autre théorie. C'est partiellement le cas ici. En effet, un simple changement d'échelle de temps montre que toute question relative au système :

$$\begin{aligned} x' &= f(x,\mu) \\ \mu' &= \varepsilon \end{aligned}$$

peut être reformulée en une question relative au système :

$$\begin{aligned} \varepsilon x' &= f(x,\mu) \\ \mu' &= 1 \end{aligned}$$

ou encore si on décide d'appeler le «paramètre» μ d'un autre nom :

$$\begin{aligned} \varepsilon x' &= f(x,y) \\ y' &= 1 \end{aligned}$$

(1) On peut consulter [1] pour se faire une idée de l'état de l'art en 1990, état qui vient d'être pas mal bousculé en janvier 1991 par une courte note non publiée de J.L. Callot – Pour être tout à fait juste je dois signaler que je connais des articles plus anciens que ceux cités dans ce paragraphe 3 : Haberman d'une part et Rubenfeld d'autre part en 1979 [5] [12], mettent en évidence de manière non équivoque des phénomènes de retard à la bifurcation. Il existe peut-être des publications encore plus anciennes. Quand je dis qu'une problématique était née je veux dire que, pour diverses raisons, plusieurs groupes de mathématiciens se sont intéressés indépendamment et à peu près simultanément au même type de problèmes.

systèmes qui sont des cas particuliers des «systèmes à deux échelles de temps» ou encore «singulièrement perturbés», sur lesquels existe une littérature extrêmement abondante. Comme on peut s'y attendre certains auteurs ont redécouvert des résultats existants, d'autres, qui les connaissaient, les ont réinterprétés.

Il est important de noter ici le fait suivant :

faire un changement de temps qui transforme le système

$$\begin{aligned} \varepsilon x' &= f(x, \mu) \\ \mu' &= 1 \end{aligned}$$

en le système

$$\begin{aligned} x' &= f(x, \mu) \\ \mu' &= \varepsilon \end{aligned}$$

peut difficilement être considéré comme un acte mathématique d'une haute technicité! Pourtant ce simple geste a pour conséquence de faire tomber gratuitement des résultats établis dans de nouveaux champs d'utilisation. Il est porteur de sens.

Cela dit, le résultat de la théorie des systèmes à deux échelles de temps qui aurait permis d'élucider le fonctionnement d'une «Bifurcation de PAH dynamique» n'existait pas avant 1985, et c'est à Neishtadt que nous devons de l'avoir prouvé dans une perspective «bifurcations dynamiques». Le résultat a été connu en Occident quelques années plus tard.

5. Le théorème de Neishtadt.

Je laisse à nouveau la parole à Arnold. Il s'agit d'un extrait de sa conférence au congrès de Mécanique de Grenoble en 1988.

> "Before leaving the loss of stability theory, I shall mention one important phenomenon, discovered recently in the one parameter dynamical bifurcation theory – the delay in the loss of stability manifested by the systems depending on a slowly changing parameter.
>
> Everybody knows the typical scenario of the mild loss of stability in one parameter families of evolutionary systems. The amplitude of the self oscillations generated by such a bifurcation grows like the square root of the distance of the parameter value from the critical

one (this bifurcation has been studied by Andronov in 1931 and by E. Hopf in 1942 and hence is usually called the Hopf bifurcation).

It happens that when the parameter really (while slowly) changes with time, a typical system's behaviour is very different from that described by the quasistationary theory, which assumes that everything goes as in the case where the parameter and the time are independent variables.

Namely, for a long period of time after the moment when the parameter passes the critical value, the system does not leave the neighbourhood of the equilibrium point, which has become unstable; in fact, so long that the slowly varying parameter increment becomes finite. Only then the system leaves the neighbourhood of the equilibrium point. It leaves it with a jump, going to the periodic attractor born at the critical moment (fig. 5). This attractor has grown up to a finite amplitude selfoscillation regime. Thus the transition from the stationary attractor to the periodic one looks like a sudden jump at a parameter value very different from the theoretical value of the loss of stability.

It is interesting that this happens only in analytic systems. In finitely smooth, even in infinitely smooth nonanalytic systems the delay in the stability loss measured by the difference between the critical value of the parameter and its value at the jump moment, tends to zero with the velocity of the variation of the parameter.

The delay phenomenon has been first described by Shishkova [13] in a model example (1973). The general theory due to A.I. Neishtadt [11], appeared only in 1985."

Cette dernière et longue citation d'Arnold appelle les commentaires suivants.

1) On sait qu'Arnold accorde une grande importance à l'utilisation pratique des mathématiques. Ses livres, ou sa polémique avec R. Thom sur l'utilisation de la «théorie des catastrophes» en témoignent. Qu'il éprouve le besoin d'écrire une aussi longue interprétation dans la langue naturelle du théorème de Neishtadt, montre qu'il attache une très grande importance à la question des bifurcations dynamiques.

2) Arnold a, dans ses livres, l'immense mérite, de vouloir systématiquement donner du sens aux résultats mathématiques en leur donnant des interprétations dans la langue naturelle. Cette interprétation du théorème

de Neishtadt met catégoriquement en cause l'interprétation qu'il faisait encore peu de temps auparavant du théorème de PAH (celle citée plus haut) extraite, ironie du sort, d'un livre qui se voulait une approche critique de la théorie des catastrophes! Ceci montre que la traduction dans la langue naturelle des théorèmes fournis par un formalisme mathématique est un art difficile où même les plus grands peuvent faire des faux pas et où les résultats ne sont jamais définitivement acquis.

3) Arnold dit, que le phénomène ne se produit que dans le cas analytique ("It is interesting that this happens only in analytic systems") car sinon «le retard tend vers 0 avec le paramètre ε» ("In finitely smooth, even in infinitely smooth nonanalytic systems the delay in the stability loss measured by the difference between the critical of the parameter and its value at the jump moment, tends to zero with the velocity of the variation of the parameter"). Il s'agit d'une traduction du théorème 2 de l'article [11] de Neishtadt, dont je ne conteste pas la validité, mais qui ne me semble pas toujours donner une bonne interprétation de la réalité comme le montre par exemple l'expérimentation numérique suivante (fig 1) faite avec des données non analytiques. La raison en est, selon moi, que le formalisme mathématique utilisé par Neishtadt, celui de l'analyse classique, n'est pas le mieux adapté à l'étude des systèmes à plusieurs échelles de temps. C'est ce que je vais essayer de montrer après un petit détour sur l'Analyse Non Standard.

6. L'Analyse Non Standard.

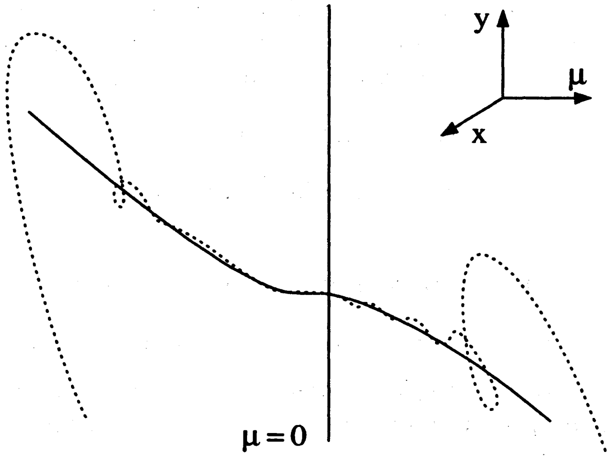
La théorie de Robinson nous enseigne qu'une analyse dans laquelle l'usage d'expressions «ε est un réel strictement positif infiniment petit fixé» ne conduit pas nécessairement à des contradictions, pourvu que l'on respecte certaines règles. L'analyse non standard fournit des formalismes mathématiques dans lesquels des expressions comme :

ε est infiniment petit

ω est infiniment grand

peuvent ne pas être prises comme des expressions de la langue naturelle, mais comme des expressions techniques. Précisons un peu.

Je me place dans le système formel I.S.T. proposé par Nelson [10]. Je choisis ce système car il est largement répandu et choque moins les habitudes «classiques», mais un système plus simple comme Z.F.L. proposé



$$
\begin{aligned}
x' &= y + \mu(x - g(\mu)) \\
y' &= -(x - g(\mu)) + \mu y \\
\mu' &= 0.05 \\
g(\mu) &= \mu|\mu|
\end{aligned}
$$

En trait plein on a tracé l'état «quasi stationnaire» : $x = g(\mu)$; $y = 0$.
En pointillé une trajectoire issue de : $x = 0$; $y = 1$; $\mu = -1$.

Fig. 1. – Persistance du retard avec des données non analytiques.

par Lutz [7] conviendrait aussi, ou encore le célèbre slogan de G. Reeb «Les entiers naïfs ne remplissent pas N»). Dans I.S.T. le symbole st précédant un ensemble x :

$$\text{st}x \text{ (lire «}x\text{ est standard»)}$$

est un prédicat unaire dont l'emploi est régi par trois axiomes. De ces axiomes il découle que :

0 est standard, 1 est standard...

si c est standard alors $n + 1$ est standard

il existe un entier ω tel que :

$$\text{st}n \Rightarrow n < \omega$$

{!! Ne pas dire qu'il y a une contradiction en considérant «l'ensemble des entiers standards» et en lui appliquant un célèbre théorème... Rien ne permet d'affirmer que les entiers standard constituent un ensemble!!}. Pour des raisons évidentes nous décidons que la proposition :

$$\omega \text{ est un entier et st } n \Rightarrow n < \omega$$

doit se lire : «ω est un entier **infiniment grand**», de même que la proposition :

$$\varepsilon \text{ est un réel strictement positif et st } n \Rightarrow n < 1/\varepsilon$$

doit se lire : ε est un réel strictement positif «**infiniment petit**».

Ce qui veut dire que les expressions ε est infiniment petit, ω est infiniment grand peuvent être lues soit avec toute la charge émotionnelle de la langue naturelle, c'est-à-dire comme **porteuses de sens**, soit comme de simples équivalents graphiques d'expressions formelles. Ce genre de pratique, qui est également banale en analyse classique où on est bien obligé de dire que :

> «U_n tend vers 0 quand n tend vers l'infini» est un équivalent graphique (on dit une «définition»!) de l'expression :
>
> $$\forall\varepsilon > 0\ \exists N \text{ tel que } n > N \Rightarrow |U_n| < \varepsilon$$

ne doit donc pas choquer.

Enfin, si x est un point d'un espace métrique pour dire que y est infiniment proche de x on dira que :

y est dans le **halo** de x,

en ayant présent à l'esprit que le halo de x n'est pas un ensemble.

{C'est peut être cette pratique qui est la plus délicate tant est forte l'éducation ensembliste naïve qui nous fait assimiler à un ensemble tout ce qui peut être nommé.}

Il existe encore des referees qui ignorent ces choses élémentaires et qui écrivent par exemple :

> «De plus la présentation n'est pas vraiment mathématique; les exemples les plus flagrants de l'argumentation non mathématique étant les cas où l'auteur écrit (i.e.p 17) : «Soit $a \in \mathbf{R}$ tel que $f(a) = 1$ et $f'(a) \ll 0$» sans se rendre compte que cela n'a pas de sens pour une

constante.» (Rapport d'un referee de Siam J. on Applied Math en 1990).

On pourrait envisager d'habituer ces referees retardataires à cette nouvelle façon de faire en écrivant systématiquement les expressions infiniment petit, infiniment grand, équivalent etc... en italiques lorsqu'elles sont prises au sens de la théorie formelle mais ce serait probablement du temps perdu. Cependant je le ferai ici pour bien distinguer les énoncés mathématiques de leur éventuelle traduction dans la langue naturelle puisque c'est l'objet même de la discussion.

7. La Bifurcation Dynamique : Le cas trivial.

Considérons maintenant l'équation différentielle très simple :

$$y'(t) = (1/\varepsilon)ty(t).$$

...On peut considérer qu'il s'agit, après changement de temps, du problème de bifurcation dynamique le plus simple :

$$\begin{aligned} x'(t) &= \mu(t)x(t) \\ \mu'(t) &= \varepsilon \end{aligned}$$

pour lequel 0 est stable pour μ négatif, instable pour μ positif.

Traçons, pour $\varepsilon = 1/10;\ 1/20;\ 1/100$ des solutions telles que $y(-1)$ soit compris entre 0 et 1.

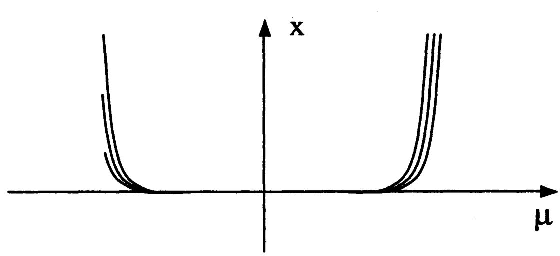


Fig. 2. – Le retard dans le cas trivial.

La façon classique de rendre compte de ce dessin est de démontrer le «théorème» suivant :

PROPOSITION 1 (classique). — *Soit $y(t,\varepsilon)$ la solution de condition initiale $y(-1) = y_0$ $(0 < y_0 < 1)$.*

– Sur tout intervalle $[a,b]$ contenu dans l'intervalle ouvert $]-1:+1[$ la famille de fonctions $y(t,\varepsilon)$ converge uniformément vers 0 quand ε tend vers 0.

– Pour t strictement plus grand que 1, $y(t,\varepsilon)$ tend vers l'infini quand ε tend vers 0.

Dont la démonstration se fait «regardant» la formule :

$$y(t,\varepsilon) = y_0\ \exp((1/2\varepsilon)(t^2-1)).$$

L'observation de la même formule, ou des arguments qualitatifs, conduisent à l'énoncé non standard suivant.

PROPOSITION 1′ (non standard). — *Soit ε infiniment petit strictement positif. La solution $y(t)$ de condition initiale :*

$$y(-1) = y_0(0 < y_0 < 1)$$

est, pour t non infiniment proche de -1 ou $+1$, infiniment petite si t est compris entre moins -1 et $+1$ et infiniment grande pour t plus grand que $+1$.

Les deux formulations rendent toutes les deux compte des dessins. Dans les deux cas on dira, en langue naturelle :

«Lorsque le paramètre de bifurcation μ croit lentement on observe que la déstabilisation n'a pas lieu au passage de $\mu = 0$ mais plus tard, pour μ proche de $+1$. Il y a retard à la bifurcation».

Prenons maintenant la même équation mais perturbée par une constante δ :

$$y'(t) = (1/\varepsilon)ty(t) + \delta.$$

La formule qui donne les solutions :

$$y(t,\varepsilon) = \exp((1/2\varepsilon)(t^2-1))\{y_0 + \int_{-1}^{t} \exp(-(1/2\varepsilon)(s^2-1))\delta \mathrm{ds}\}$$

montre clairement que si δ n'est pas nul, pour tout t strictement positif $y(t,\varepsilon)$ tend vers l'infini quand ε tend vers 0. Nous avons donc :

PROPOSITION 2 (classique). — *Soit $y(t,\varepsilon)$ la solution de condition initiale $y(-1) = y_0$ $(0 < y_0 < 1)$ du système perturbé*

$$y'(t) = (1/\varepsilon)ty(t) + \delta \qquad \delta < 0.$$

Pour tout t strictement positif, $y(t,\varepsilon)$ tend vers l'infini, quand ε tend vers 0.

Faut-il en déduire que dès que le système :

$$y'(t) = \mu y(t)$$
$$\mu'(t) = \varepsilon$$

est perturbé par une petite constante **il n'y a plus de phénomène de retard à la bifurcation ?**

Il est assez clair que non, car inversement, si nous partons d'un système non perturbé et d'une valeur de ε **fixe** pour laquelle nous avons convenu qu'il y a retard, alors, par dépendance continue des solutions, pour cet ε on observera un retard si δ est assez petit. Ceci nous conduira à énoncer le résultat suivant :

PROPOSITION 3 (classique). — *Soit $y(t,\varepsilon,\delta)$ la solution de condition initiale $y(-1) = y_0$ $(0 < y_0 < 1)$ du système perturbé :*

$$y'(x) = (1/\varepsilon) \times y(x) + \delta \qquad \delta > 0.$$

– *Sur tout intervalle $[a,b]$ contenu dans l'intervalle ouvert $]-1;+1[$ la famille de fonctions $y(t,\varepsilon,\delta)$ converge uniformément vers 0 quand ε et δ tendent vers 0 de manière à ce que la quantité $\delta\exp(1/\varepsilon)$ tende vers 0.*

– *Pour t strictement plus grand que 1, $y(t,\varepsilon,\delta)$ tend vers l'infini quand ε tend vers 0.*

Nous traduirons les propositions 1 et 3 dans la langue naturelle par :

« Lorsque le paramètre de bifurcation μ croit lentement on observe que la déstabilisation n'a pas lieu au passage de $\mu = 0$ mais plus tard, pour $\mu = +1$. Il y a retard à la bifurcation. Si le système est perturbé par une constante δ le phénomène de retard persiste pourvu que la perturbation soit assez petite (exponentiellement petite) par rapport à la vitesse de croissance de μ. »

La proposition 2 (bien que ce soit un théorème parfaitement juste !) ne possède de traduction en langue naturelle acceptable que si on envisage des expériences successives dans lesquelles on fait croître à chaque fois μ plus lentement, la perturbation restant fixée, situation qui bien entendu peut se présenter, mais le cas le plus fréquent est celui ou la vitesse de croissance de μ est déterminée une fois pour toutes par un dispositif.

Il est intéressant de noter que le théorème 2 ne possède pas d'équivalent non standard, car ε étant fixé infiniment petit, il n'est pas possible de conclure, en l'absence de renseignement sur l'ordre de grandeur de δ, alors que dans la formulation classique si δ est supposé fixe, il finit toujours par devenir grand par rapport à ε. Ceci montre que, contrairement à une idée assez répandue, la position non standard qui consiste à fixer ε n'est pas laxiste. Le seul théorème non standard possible est un analogue de la proposition 3 :

PROPOSITION 3′ (Non Standard). — *Soit $\delta > 0$ et $\varepsilon > 0$ infiniment petits tels que $\delta \exp(1/\varepsilon)$ soit infiniment petit. La solution $y(t)$ de condition initiale :*

$$y(-1) = y_0 \, (0 < y_0 < 1)$$

est, pour t non infiniment proche de -1 ou $+1$, infiniment petite si t est compris entre moins -1 et $+1$, infiniment grande pour t plus grand que $+1$.

8. Version Non Standard du théorème de Neishtadt.

Je vais montrer dans ce paragraphe que le théorème de Neishtadt correspond en quelque sorte à la proposition 2 du paragraphe précédent, et qu'une meilleure version peut en être obtenue facilement dans le formalisme non standard alors qu'une version équivalente en termes classiques semble excessivement peu naturelle.

La démonstration que Neishtadt propose de son théorème, consiste à faire un «grand» nombre de changements de variables de manière à transformer le système de départ en un système pour lequel (0,0) est une solution, perturbé par un terme de l'ordre de $\exp(-1/\varepsilon)$. L'analyticité est utilisée via les inégalités de Cauchy, pour montrer qu'après n changements de variable le terme perturbatif est majoré par :

$$C^n n! \varepsilon^n$$

qui est effectivement exponentiellement petit pour n de l'ordre de $1/\varepsilon$. Comme Neishtadt énonce ses résultats de façon asymptotique, pour ε tendant vers 0, la majoration doit être valide pour tout n. D'où la nécessité de l'analyticité. Dans un contexte où ε est un paramètre *infiniment petit* fixé, on procèdera différemment :

on supposera que les dérivées successives des données satisfont des majorations par $C^n n!$ jusqu'à l'ordre ω *infiniment grand.* Et on énoncera le théorème :

THÉORÈME (Neishtadt [11], version N.S.). – *Soit le système :*

$$x'(t) = f(x(t), \mu(t))$$
$$\mu'(t) = \varepsilon$$

avec l'état «quasi stationnaire» $\mu \mapsto \varphi(\mu)$ (i.e.$f(\varphi(\mu) = 0)$. Sous les hypothèses générales du théorème de bifurcation de PAH relativement à l'état quasi stationnaire et si il existe une constante C non infiniment grande et un entier ω infiniment grand tels que toutes les «dérivées des données» d'ordre inférieur à ω soient inférieures à $C^n n!$ alors, pour tout ε infiniment petit supérieur à $1/\omega$, une trajectoire issue d'un point (x_0, μ_0) tel que :

x_0 est non infiniment grand

μ_0 est négatif non infiniment petit

est infiniment proche de l'état quasi stationnaire $\varphi(\mu(t))$ dès que $\mu(t)$ n'est plus infiniment proche de μ_0 et le reste tant qu'il reste inférieur et non infiniment proche d'une certaine valeur μ_s (qui ne dépend que de μ_0) strictement positive non infiniment petite.

Une traduction dans la langue naturelle de ce théorème est la suivante. On suppose que les données sont ω fois différentiables, où ω est un grand nombre. Alors pour des valeurs de ε petites, mais pas trop on observera que la solution du système ne quitte l'état quasi stationnaire qu'un certain temps après que le paramètre ait dépassé la valeur critique. Ou, plus brutalement : si les données sont différentiables un certain nombre de fois et ε est petit mais pas trop, il y a un phénomène de retard à la bifurcation.

La situation, techniquement plus complexe, est donc fondamentalement la même qu'au paragraphe précédent. Un système non analytique apparaît ici comme le perturbé d'un système analytique pour lequel le résultat est vrai, et comme précédemment, pour ε fixé, si la perturbation est assez faible les résultats subsisteront. Il n'est pas impossible d'obtenir l'analogue classique de la version non standard du théorème de Neishtadt, mais la différence est que cette fois ce ne sont pas des nombres ε et δ qui doivent tendre vers 0 en satisfaisant une relation, mais un ordre de différentiabilité qui doit tendre vers l'infini quand ε tend vers 0, ce qui n'est vraiment pas naturel! Le formalisme qui permet de dire qu'un nombre fixé est infiniment petit présente ici un net avantage.

9. La disparition du retard.

Il ressort donc maintenant de nos interprétations que, en cas de données non analytiques, si on fait tendre ε vers 0 le phénomène de retard doit disparaître. Les expérimentations suivantes (Fig. 3 et Fig. 4) semblent bien corroborer cette affirmation.

Ces expérimentations sont bien satisfaisantes! Toutefois il me faudra tempérer mon optimisme sur la valeur prédictive de ma théorie en considérant la contre expérience suivante, où les données sont on ne peut plus analytiques.

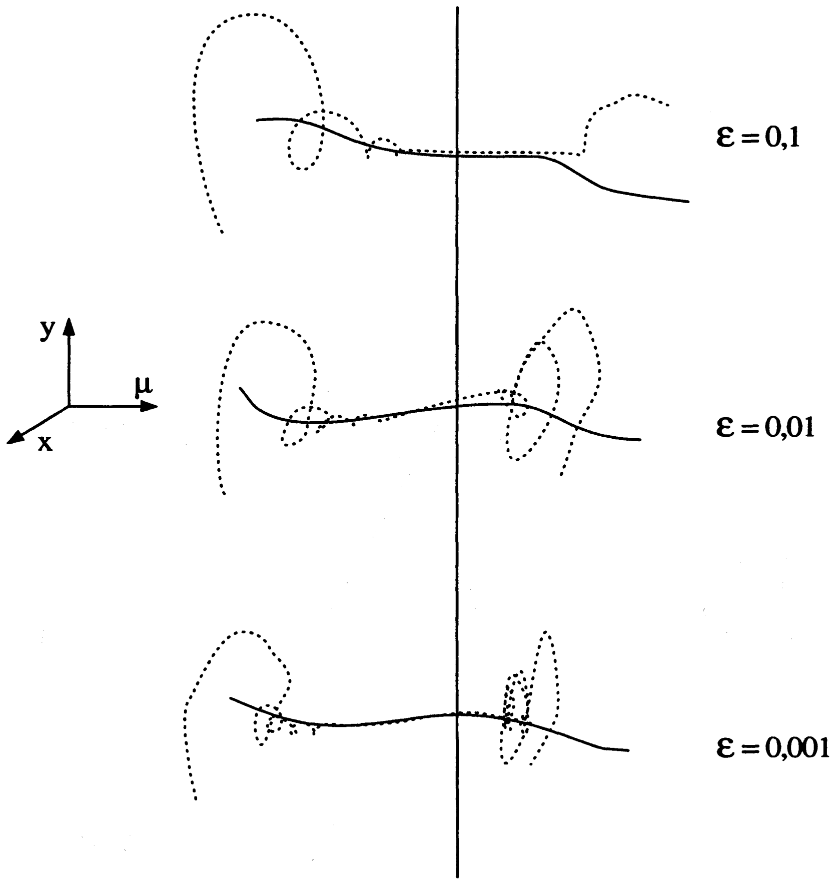
La disparition du retard, quand ε est trop petit, même quand les données sont analytiques, nous oblige donc à reconsidérer la question.

L'explication est simple. Les expériences présentées sont des simulations sur ordinateur. Il existe donc une différence entre les prédictions théoriques relatives aux équations différentielles et les observations qui est due à deux causes (au moins) :

1) Le schéma numérique (ici RK 4) ne donne pas des solutions «exactes».

2) Les calculs sur ordinateur ne sont pas exacts mais sujets à des erreurs d'arrondi.

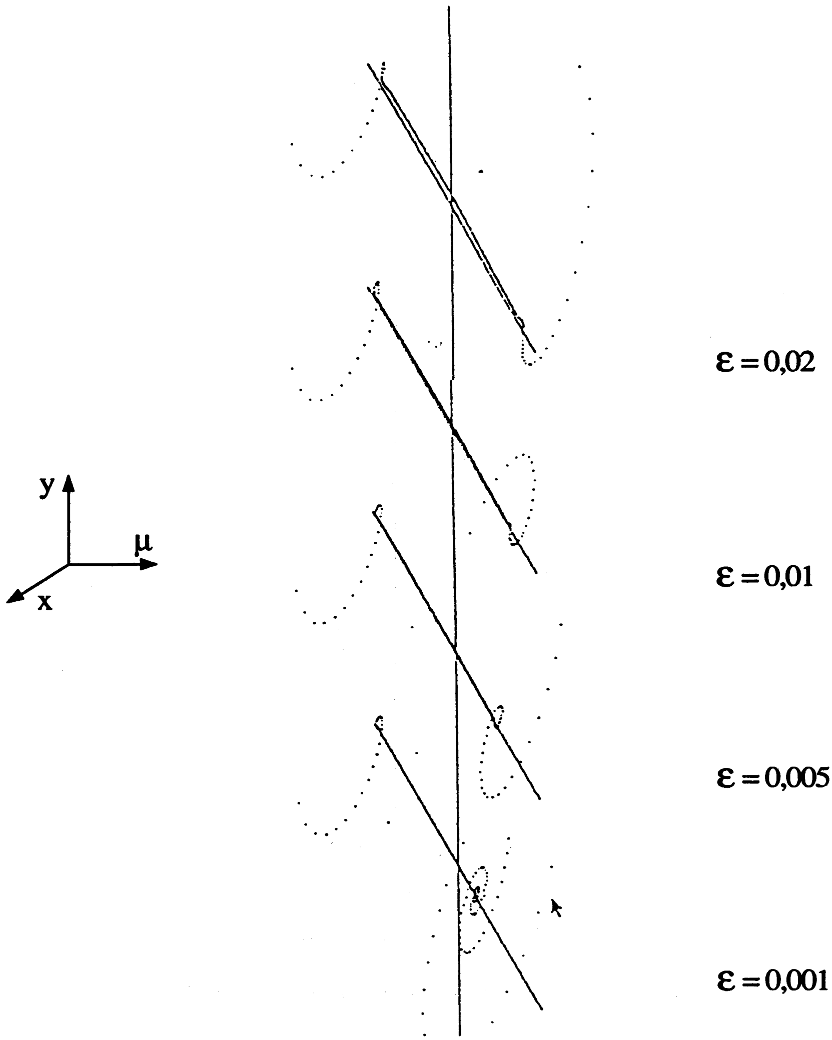
A défaut d'une théorie mathématique précise faisant le lien entre le comportement des systèmes différentiels et leur simulation numérique on peut aborder le problème en faisant des hypothèses sur les effets que peuvent causer les deux sources d'erreur 1) et 2) puis tester ces dernières. Cette attitude, si elle n'est pas entièrement satisfaisante du point de vue mathématique, a le mérite de développer des arguments qui peuvent avoir une portée plus générale que l'explication du comportement de ces simulations.



$$x' = y + \mu(x - g(\mu))$$
$$y' = -(x - g(\mu)) + \mu y$$
$$\mu' = \varepsilon \qquad g(\mu) = \mu|\mu|$$

Fig. 3. – Disparition du retard pour ε trop petit.

Dans ce genre d'expérimentation on constate que si on fait varier le pas d'intégration autour de la valeur ε, les résultats observés sont remarquablement constants. C'est pourquoi nous chercherons à expliquer les expérimentations ci-dessus sur la base du point 2, c'est-à-dire de l'existence d'erreurs numériques que nous allons traiter comme un **bruit**.



$$x' = y + \mu(x - \mu)$$
$$y' = -(x - \mu) + \mu y$$
$$\mu' = \varepsilon$$

Fig. 4. – Disparition du retard (bis).

10. Les bifurcations dynamiques en présence de bruit.

On considère le système :

$$x'(t) = f(x(t), \mu(t)) + \sigma dw/dt$$
$$\mu'(t) = \varepsilon$$

avec état «quasi stationnaire» $\mu \mapsto \varphi(\mu)$ (i.e. $f(\varphi(\mu), \mu) = 0$), sous les hypothèses générales du théorème de bifurcation de PAH relativement à l'état quasi stationnaire. Le symbole dw/dt est un «bruit blanc gaussien» au sens de la théorie des processus stochastiques, l'équation différentielle étant prise au sens de Ito.

Dans la théorie "Radically Elementary Probability Theory" [9] de Nelson, l'objet ci-dessus est remarquablement facile à décrire de la façon suivante [3] [4] :

on fixe *dt infiniment petit* et ε *infiniment grand* par rapport à *dt* et on écrit l'équation ci-dessus sous la forme d'une récurrence :

$$x(t + dt) = x(t) + dt\ f(x(t), \mu(t)) + \sigma Z_t \sqrt{dt}$$
$$\mu(t + dt) = \mu(t) + \varepsilon\ dt$$

où Z_t est une suite de variables aléatoires indépendantes prenant les valeurs $+1$ et -1 avec la probabilité $1/2$.

On peut alors démontrer que [2] le retard est de l'*ordre* de $\sqrt{\varepsilon}$, c'est-à-dire *infinitésimal*, sauf si la constante σ est de l'*ordre* de $\exp(-1/\varepsilon)$ où alors il redevient non *infiniment petit*. L'effet d'une perturbation aléatoire est donc, comme dans l'exemple déterministe simple développé au §7 ci-dessus, sans effet sur le retard si elle a une amplitude exponentiellement petite par rapport à la vitesse de croissance de μ. Remarquons qu'il semble difficile de tester une affirmation de ce type autrement qu'en observant l'amplitude limite du bruit acceptable pour différentes valeurs de ε de plus en plus petites, ce qui plaide cette fois-ci pour des représentations mathématiques dans lesquelles ε tend vers 0, et montre bien qu'aucune formalisation n'est une panacée universelle!

Ce théorème est donc en défaveur d'un retard à la bifurcation sauf dans des circonstances où le bruit est très petit par rapport à ε. Qu'en est-il dans la Nature? Cela dépend de l'objet réel. La figure suivante extraite de «La Recherche» montre que le retard peut exister ailleurs que dans des simulations d'ordinateur (il s'agit d'observations d'un phénomène se produisant dans les lasers; les auteurs de l'article sont principalement intéressés par l'allure chaotique que prend la dynamique dans la partie de droite; les deux premières bifurcations montrent clairement un phénomène de retard[2]).

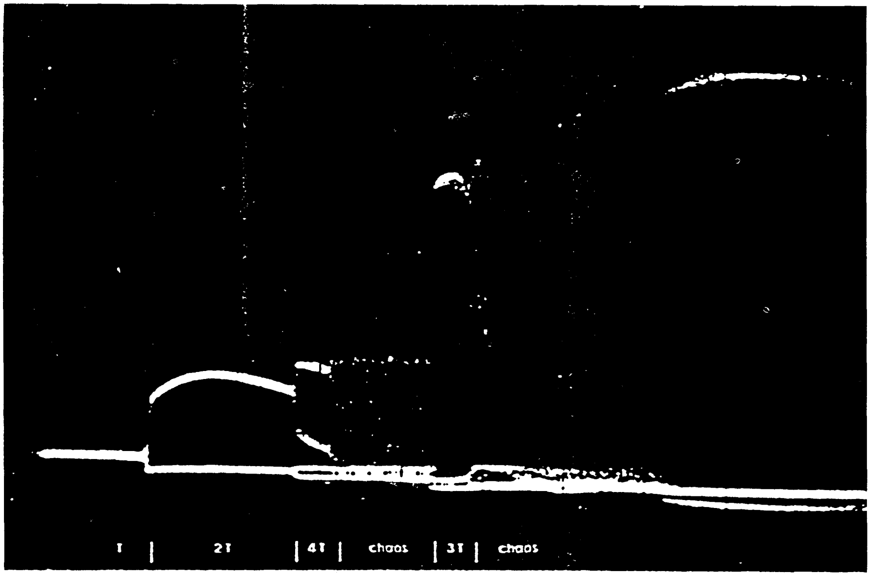


Fig. 5. – Extrait de «La Recherche» n° 215, p. 1385.
(cliché de P. Glorieux)

11. Conclusion.

Les liens entre les résultats mathématiques et leur valeur pratique sont complexes. L'histoire récente de la théorie des bifurcations dynamiques le rappelle. Les résultats mathématiques, de plus en plus abstraits ont, plus que jamais besoin d'interprétations dans la langue naturelle. Ceci pose le problème de la **place** de ces interprétations dans l'organisation du travail scientifique. Je vais préciser le sens de ma question par une petite anecdote.

---

(2) Le lecteur intéressé trouvera dans : Didier Dangoisse, Pierre Glorieux, and Daniel Hennequin, Physical Review A Vol 36, n°10, pp 4775-4791 une description complète de ce phénomène.

L'article [6] de G. Wallet et moi-même a été soumis à Astérisque en 1986. Il reçut le commentaire suivant d'un referee anonyme.

Il s'agit là d'une note de 5 pages, ne contenant aucun résultat (ou démonstration) nouveau. Elle se présente comme un commentaire d'un phénomène de «retard de bifurcation» qui se manifeste pour la bifurcation de Hopf (cas étudié ici) lorsque le paramètre de bifurcation évolue lentement en fonction du temps.

(... suit une description très correcte du contenu, qui se termine par...)

Des remarques très intéressantes (mais très courtes) sont faites dans le paragraphe 5, concernant les mauvaises interprétations possibles de la bifurcation de Hopf, lorsque le paramètre évolue lentement soit sous l'effet d'un bruit de fond, soit sous celui d'une dérive systématique (cf. le commentaire très intéressant concernant l'utilisation de capteurs de petites oscillations). Le paragraphe 5 constitue la seule part vraiment intéressante de la note.

A l'opposé du commentaire que je citais plus haut, qui était celui d'un ignorant, celui-ci rend très bien compte de notre article. Il s'agit effectivement d'un **commentaire** de résultats déjà établis, sans résultat mathématique nouveau. Il est exact que la seule part **intéressante** est le §5. Les paragraphes précédents ne sont qu'un rappel, pour la commodité du lecteur, de résultats acquis ailleurs. Que ces commentaires aient été jugés intéressants, voire très intéressants, indépendamment du plaisir apporté aux lecteurs, pose à son tour un problème. En effet le rapporteur concluait :

«Mon avis pour la publication est assez réservé».

Avis que l'éditeur suivait en refusant la publication.

Devant la masse croissante des articles soumis la tâche des rapporteurs et des éditeurs est difficile. Dans le cas de l'article qui nous occupe, l'éditeur a probablement jugé que la note n'étant pas à strictement parler une note de mathématiques – puisqu'il s'agissait d'un commentaire – il était préférable de la refuser. Un tel choix a ses justifications. Il est en effet difficile de demander à une revue de mathématiques de publier des romans d'amour sous le simple prétexte que dans la Vie avec un grand V tout est lié... Puisque revues de mathématiques il y a il est nécessaire qu'elle définissent leur champ de publication. Mais, malheureusement, comme pour tout ce qui touche à la réalité, il n'existe pas de critère formel qui permette de décider ce qui est bon ou mauvais pour une revue de mathématiques. Dans le cas évoqué on pourra dire, à juste titre, que ce ne sont pas les mathématiciens, mais les utilisateurs qui doivent être alertés sur «les mauvaises interprétations possibles de la bifurcation de Hopf» et que la note avait sa place dans une revue de Physique ou de tout autre discipline... Mais je répondrai, également à juste titre, me semble-t-il, qu'à la date de soumission il n'existait pour ainsi dire pas de théorie mathématique du phénomène posé par la «mauvaise interprétation» (sauf bien entendu le théorème de Neishtadt, mais le referee et les auteurs l'ignoraient) et qu'il était donc intéressant que le commentaire paraisse dans une revue comme Astérisque, largement diffusée chez les mathématiciens français, afin de motiver ces derniers. C'est, et ce sera toujours la délicate responsabilité des éditeurs de trancher ce genre de questions.

Toutefois, je pense que depuis le milieu du siècle, l'activité de **commentaire** a été beaucoup trop rejetée à l'extérieur de la communauté mathématique française. (Je pourrais étayer cette affirmation par de nombreux exemples mais ce serait sortir du cadre de cet article.) Cela est dommage, car la mathématique vivante se nourrit beaucoup de commentaires. Par exemple, tous les travaux sur les itérations complexes qui poursuivent les travaux de G. Julia, susciteraient-ils autant d'intérêt chez les mathématiciens si les «commentaires» de B. Mandelbrot, si longtemps ignorés, ne leur avaient donné un «sens»?

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. BENOIT, Editor, Dynamical Bifurcation, Springer, Lecture Notes in Math., n° 1493.

[2] E. BENOIT, Linear Dynamical Bifurcation in presence of noise dans "Dynamical Bifurcation", Springer, Lecture Notes in Math., n° 1493.

[3] E. BENOIT, Diffusions discrètes, multigraphié, Ecole des Mines de Paris (1989).

[4] E. BENOIT, B. CANDELPERGHER et C. LOBRY, Continuity of trajectories of random walks with infinitesimal steps. Actes du Bellman Continuum (A. Blaquière, éditeur), Lecture notes in Control and Information Sciences, n° 121 (1989), 497.

[5] R. HABERMAN, Slowly varying jump and transition phenomena associated with algebraic bifurcation problems, Siam J. Appl. Math., vol. 37, n° 1 (1976), 69-106.

[6] C. LOBRY et G. WALLET, La traversée de l'axe imaginaire n'a pas toujours lieu là où l'on croit l'observer, Actes du colloque de «Mathématiques finitaires» de Lumigny, préprint Université de Poitiers, 1987.

[7] R. LUTZ, Gazette des mathématiciens, n° 34 (1987).

[8] P. MANDEL, T. ERNEUX, Lazer Lorenz equation with a time dependent parameter. Physical Review Letters, vol. 53, n° 19 (1984), 1818-1820.

[9] E. NELSON, Radically Elementary Probability Theory, Annals of Math. Studies, n° 117, Princeton University Press, 1987.

[10] E. NELSON, Bul. Amer. Math. Soc., 83-6 (1977), 1165-1198.

[11] NEISHTADT, Usp. Mat. Nauk, 40, n° 5 (1985), 300-301.

[12] L.A. RUBENFELD, A model bifurcation problem exhibiting the effect of slow passage through critical, Siam J. Appl. Math., vol. 37, n° 2 (1979), 302-306.

[13] M.A. SHISHKOVA, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 209, n° 3 (1973), 573-579.

[14] G. WALLET, Entrée-sortie dans un tourbillon, Annales de l'Institut Fourier, 36-4 (1986), 157-184.

Claude LOBRY,
8, boulevard du Tzarewitch
06000 Nice (France).