

# ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

ALAIN GUICHARDET

## Caractères des algèbres de Banach involutives

*Annales de l'institut Fourier*, tome 13, n° 1 (1963), p. 1-81

[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1963\\_\\_13\\_1\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1963__13_1_1_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1963, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## CARACTÈRES DES ALGÈBRES DE BANACH INVOLUTIVES

par Alain GUICHARDET (Paris)

### INTRODUCTION

La méthode des représentations induites, mise au point par G. W. Mackey, permet de trouver toutes les représentations unitaires irréductibles de certains produits semi-directs dits « réguliers », de groupes abéliens ; nous étudions dans le chapitre II de ce travail certains produits semi-directs non réguliers ; à vrai dire, nous ne décrivons pas toutes leurs représentations irréductibles, mais seulement certaines d'entre elles, que nous appelons « normales » ; nous étudions aussi les représentations factorielles « normales » de ces groupes, et, à côté de résultats positifs, nous obtenons des contre-exemples à plusieurs conjectures naturelles.

La notion de représentation factorielle « normale » a été introduite par R. Godement (cf. [14]) pour les groupes localement compacts unimodulaires ; en fait plusieurs auteurs ont déjà remarqué que, même pour des groupes très simples, cette notion n'était pas tout à fait assez large ; nous en exposons systématiquement une extension au chapitre I, en nous plaçant dans le cadre des algèbres de Banach involutives (sur la définition des caractères des  $C^*$ -algèbres, cf. aussi [31]).

Donnons maintenant un résumé plus détaillé du chapitre I ; les résultats du § 1 sont très semblables à ceux de [14], mais les méthodes de démonstration diffèrent sensiblement ; étant donnée une algèbre de Banach involutive  $A$  admettant une unité approchée, une représentation factorielle  $\pi$  de  $A$  sera dite « normale » si  $\pi(A)$  contient au moins un élément non

nul admettant une trace dans le facteur engendré par  $\pi(A)$ ; nous définissons les traces et les caractères de  $A$  de façon à obtenir une correspondance biunivoque entre d'une part, les caractères définis à une constante multiplicative près, et d'autre part les représentations factorielles normales définies à une quasi-équivalence près (théorème 1).

Le théorème 1 du § 2 concerne la nature borélienne de la correspondance précédente; plus précisément supposons  $A$  séparable et telle que toute forme linéaire positive centrale sur  $A$  soit continue; si on munit l'ensemble  $C_{f,1}$  des caractères de  $A$  de type fini et de norme 1 de la structure borélienne sous-jacente à la topologie de la convergence simple et l'ensemble  $\hat{A}_f$  des classes de quasi-équivalence de représentations factorielles de type fini de la structure borélienne définie dans [8], la correspondance en question induit un isomorphisme borélien de  $C_{f,1}$  sur  $\hat{A}_f$ . Le théorème 2 suppose que  $A$  est une  $C^*$ -algèbre séparable; il affirme d'une part que sur le sous-ensemble  $\hat{A}_{nor}$  de  $\hat{A}$  formé des classes d'équivalence de représentations irréductibles normales la structure borélienne de Mackey et la structure borélienne sous-jacente à la topologie de Jacobson sont identiques et analytiques; et d'autre part que si on munit l'ensemble  $C_I$  des caractères de type I de  $A$  de la structure borélienne la moins fine rendant boréliennes les applications  $\lambda \rightarrow \lambda(x)$  ou  $x \in A^+$  (les caractères sont considérés comme des applications de  $A^+$  dans  $[0, +\infty]$ ) et si  $A$  vérifie une hypothèse supplémentaire assez large, la correspondance canonique entre le quotient de  $C_I$  par la relation de proportionnalité et  $\hat{A}_{nor}$  est un isomorphisme borélien.

Les résultats du § 3 (relatifs à la décomposition des traces en sommes continues de caractères) s'inspirent de travaux non publiés de R. Godement; celui du n° 2 (unicité de la décomposition), qui était énoncé sans démonstration par R. Godement, précise certains résultats connus antérieurement (cf. par exemple [35], p. 288 et [8], th. 3).

Les produits semi-directs  $G = G_0 \times G_1$  étudiés dans le chapitre II sont supposés vérifier les conditions suivantes :

- $G_0$  est discret et dénombrable;
- $G_1$  est distingué, abélien et sa topologie est à base dénombrable;

— la fonction 1 sur  $G_0$  est limite uniforme sur tout compact de fonctions de type positif à supports compacts;

— une condition, dite « condition (\*) », relative aux mesures positives sur  $\hat{G}_1$ , qui intervient dans [4] pour la construction des exemples de facteurs (ch. I, § 9, n° 3).

Le § 1 est consacré essentiellement à la représentation des éléments de la  $C^*$ -algèbre  $A$  de  $G$  par des applications  $x : a \rightarrow x_a$  de  $G_0$  dans la  $C^*$ -algèbre  $A_1$  de  $G_1$  (prop. 1), ainsi qu'à leur approximation par des éléments pour lesquels  $x_a$  est nul sauf pour un nombre fini d'éléments  $a$  (prop. 2); on notera  $A^\circ$  la sous-algèbre, isomorphe à  $A_1$ , formée des  $x \in A$  pour lesquels  $x_a = 0$  si  $a \neq e_0$  (élément neutre de  $G_0$ ).

Le § 2 est consacré aux représentations factorielles normales et aux idéaux primitifs de  $A$ ; le théorème 1 donne une méthode pour obtenir toutes les classes de quasi-équivalence de représentations factorielles de type  $II_1$  à partir de mesures positives sur  $\hat{G}_1$  invariantes et ergodiques pour l'action de  $G_0$ ; cette méthode est celle utilisée dans [29] pour construire des exemples de facteurs. Le théorème 2 donne une méthode pour obtenir toutes les classes d'équivalence de représentations irréductibles normales (telles que  $\pi(A^\circ)$  soit de rang infini) à partir des trajectoires infinies discrètes de  $G_0$  dans  $\hat{G}_1$ ; cette méthode est basée sur la notion de « système cinématique » exposée dans [36]. Le corollaire de la prop. 4 établit une relation entre le genre (CCR, GCR, NGCR) de  $A$  et la nature des trajectoires de  $G_0$  dans  $\hat{G}_1$ . Le théorème 3 permet de décrire les idéaux primitifs  $I$  de  $A$  tels que  $A^\circ/I \cap A^\circ$  soit de rang infini, à l'aide de certaines parties fermées de  $\hat{G}_1$ , exactement les adhérences des trajectoires infinies de  $G_0$ ; on a mis en remarque une description de la topologie de Jacobson sur l'ensemble de ces idéaux.

Le § 3 est consacré à l'étude détaillée d'un exemple: le groupe  $G$  des transformations  $x \rightarrow ax + b$  où  $a$  est une puissance entière de 2 et  $b$  un nombre rationnel dyadique;  $G$  est un produit semi-direct vérifiant les conditions requises au début du chapitre II;  $A$  est NGCR.

Dans le n° 2, en utilisant des mesures invariantes ergodiques sur  $\hat{G}_1$  assez voisines de celles considérées dans [33], nous donnons des exemples de représentations factorielles de

type  $\text{II}_1$  de  $A$  qui ont même noyau sans pour autant être quasi-équivalentes, ce qui répond par la négative à une conjecture de J. Dixmier.

Dans le n° 3 on montre que les représentations irréductibles  $\pi$  pour lesquelles  $\pi(A^{\otimes n})$  est de rang fini sont de dimensions finies et que leurs classes d'équivalence correspondent biunivoquement aux couples  $(T, \theta)$ , où  $T$  est une trajectoire finie de  $G_0$  dans  $\hat{G}_1$  et  $\theta$  un élément de  $\hat{G}_0$ ; on en déduit que  $A$  admet un système complet de représentations irréductibles de dimensions finies; comme  $A$  n'est pas GCR, ceci répond par la négative à une conjecture de G. W. Mackey ([28], p. 154).

Dans le n° 4 on précise la nature des caractères de type I de  $A$ ; tout d'abord l'intersection des idéaux de définition de ces caractères est nulle; de plus, les seuls d'entre eux qui soient des caractères au sens de [14] sont ceux de type fini; enfin les idéaux de définition de certains de ces caractères ne contiennent aucune fonction à support fini sur  $G$ .

Le n° 5 contient quelques indications concernant les idéaux primitifs de  $A$ ; en particulier l'idéal  $\{0\}$  est primitif et tout idéal primitif non nul contient strictement un idéal primitif non nul; il existe un idéal bilatère fermé maximal  $I$  tel que  $A/I$  soit NGCR.

Dans le n° 6 on montre que l'espace des caractères partout définis de  $A$ , muni de la topologie de la convergence simple, n'est pas localement compact.

Enfin le n° 7 concerne la structure borélienne de l'ensemble des classes de représentations irréductibles normales de  $A$ ; on montre (prop. 8) que la structure borélienne de Mackey et la structure borélienne sous-jacente à la topologie de Jacobson, qui sont identiques et analytiques dans le cas général, sont ici standard.

Signalons pour terminer que ce travail constitue la thèse de doctorat de l'auteur; je tiens à exprimer ici ma profonde reconnaissance à M. Dixmier sans l'aide constante de qui cette thèse n'aurait jamais vu le jour, ainsi qu'à MM. Choquet et Schwartz qui ont bien voulu se joindre à lui pour en constituer le jury.

## NOTATIONS ET RAPPELS

Soit  $G$  un groupe localement compact; on désignera par  $L^1(G)$  (resp.  $L^2(G)$ ) l'espace des fonctions sur  $G$  à valeurs complexes et intégrables (resp. de carré intégrable) pour la mesure de Haar à gauche sur  $G$ . Il ne sera question ici que de représentations *unitaires continues* dans des espaces hilbertiens et de l'équivalence *unitaire* de telles représentations. Nous appellerons *C\*-algèbre de  $G$*  l'algèbre complétée de  $L^1(G)$  pour la norme  $f \rightarrow \sup_{\pi} \|\pi(f)\|$ ,  $\pi$  parcourant l'ensemble des représentations de  $G$  (sur cette notion cf. [30], § 18, n° 3 et [9], p. 369).

Par *algèbre normée involutive* nous entendrons « algèbre normée munie d'une involution *isométrique* ». Soit  $A$  une algèbre normée involutive; on notera  $A^+$  l'ensemble des éléments positifs de  $A$  (i.e. de la forme  $xx^*$ ); une représentation  $\pi$  de  $A$  dans un espace hilbertien  $H$  est dite *non dégénérée* si on a  $\pi(A)h \neq \{0\}$  pour tout élément  $h$  non nul de  $H$ ; elle est dite *factorielle* si l'algèbre de von Neumann engendrée par  $\pi(A)$  est un facteur; deux représentations  $\pi_1$  et  $\pi_2$  sont dites *quasi-équivalentes* s'il existe un isomorphisme de l'algèbre de von Neumann engendrée par  $\pi_1(A)$  sur l'algèbre de von Neumann engendrée par  $\pi_2(A)$  transformant  $\pi_1(x)$  en  $\pi_2(x)$  pour tout  $x \in A$ . Nous appellerons *unité approchée* de  $A$  toute famille filtrante  $(x_i)_{i \in I}$  telle que  $x_i \in A$ ,  $\|x_i\| \leq 1$  et que  $\|x_i y - y\|$  et  $\|y x_i - y\|$  tendent vers 0 suivant le filtre des sections de  $I$  pour tout  $y \in A$ .

Soit  $A$  une algèbre normée involutive admettant une unité approchée  $(x_i)$  et soit  $\pi$  une représentation non dégénérée de  $A$  dans un espace hilbertien  $H$ ;  $\pi(x_i)$  *converge ultra-fortement*

vers 1; en effet, il suffit de vérifier la convergence forte puisque l'on a

$$\|\pi(x_i)\| \leq \|x_i\| \leq 1$$

et on peut supposer qu'il existe un élément  $h \in H$  tel que l'ensemble  $\pi(A)h$  soit partout dense dans  $H$ ; il suffit alors de vérifier que

$$\|\pi(x_i)\pi(y)h - \pi(y)h\| \rightarrow 0$$

pour tout  $y \in A$ , ce qui résulte immédiatement de la définition.

Soit  $A$  une algèbre de Banach involutive admettant une unité approchée  $(x_i)$ ; pour toute forme linéaire positive continue  $f$  sur  $A$  on a

$$\lim f(x_i) = \lim f(x_i^*) = \lim f(x_i^*x_i) = \|f\|$$

en vertu de [34], th. 4.5.14.

Suivant [12] une  $C^*$ -algèbre sera dite *NGCR* si elle n'admet aucun idéal bilatère fermé GCR différent de  $\{0\}$ .

Soient  $A$  une  $C^*$ -algèbre abélienne et  $X$  l'espace topologique des caractères de  $A$ ; rappelons que l'*isomorphisme de Gelfand* est l'application de  $A$  sur l'espace des fonctions continues sur  $X$  nulles à l'infini définie par  $x \rightarrow \hat{x}$  avec  $\hat{x}(\chi) = \chi(x)$ .

Pour toute algèbre hilbertienne  $A$  on notera  $\mathcal{U}(A)$  (resp.  $\mathcal{V}(A)$ ) l'algèbre de von Neumann à gauche (resp. à droite) associée à  $A$ ; et pour tout élément  $x$  borné relativement à  $A$ ,  $U_x$  (resp.  $V_x$ ) l'opérateur de multiplication à gauche (resp. à droite) par  $x$ .

Pour tout espace topologique localement compact  $Z$  on note  $\mathcal{C}(Z)$  (resp.  $\mathcal{K}(Z)$ , resp.  $L_\infty(Z)$ ) l'espace des fonctions sur  $Z$  à valeurs complexes et continues (resp. continues et à support compacts, resp. continues et nulles à l'infini). Pour tout espace vectoriel topologique  $H$  on désigne par  $\mathcal{L}(H)$  l'espace des endomorphismes continus de  $H$ .

Si  $f$  est une application d'un ensemble  $E$  dans un autre ensemble et  $F$  un sous-ensemble de  $E$ , on note  $f|_F$  la restriction de  $f$  à  $F$ ; on emploie la même notation pour la restriction d'une mesure à un sous-ensemble mesurable.

## CHAPITRE PREMIER

### CARACTÈRES DES ALGÈBRES DE BANACH INVOLUTIVES

#### § 1. Traces et caractères.

Dans tout ce paragraphe  $A$  désigne une *algèbre de Banach involutive admettant une unité approchée*.

##### 1. Généralités.

DÉFINITIONS. — Soit  $I$  un idéal autoadjoint de  $A$ ; nous appellerons trace définie sur  $I$  toute fonction  $\sigma$  définie sur  $I \times I$  à valeurs complexes et vérifiant :

- (i)  $\sigma$  est une forme sesquilinéaire hermitienne positive;
- (ii)  $\sigma(y, x) = \sigma(x^*, y^*)$  pour  $x \in I, y \in I$ ;
- (iii)  $\sigma(zx, y) = \sigma(x, z^*y)$  pour  $x \in I, y \in I, z \in A$ ;
- (iv) pour tout  $x \in I$  la forme linéaire positive  $f$  sur  $A$  définie par  $f(z) = \sigma(zx, x)$  est continue et de norme  $\sigma(x, x)$ ;
- (v) les éléments  $xy$  ( $x \in I, y \in I$ ) sont partout denses dans  $I$  pour la structure préhilbertienne (non nécessairement séparée) déduite du produit scalaire  $\sigma(x, y)$ .

Remarque 1. — Si  $A$  est une  $C^*$ -algèbre la première partie de l'axiome (iv) est une conséquence des précédents; en effet sur une  $C^*$ -algèbre, toute forme linéaire positive est continue ([34], th. 4.8.15).

Notations. — On notera  $N$  l'idéal autoadjoint de  $A$  formé des  $x \in I$  tels que  $\sigma(x, x) = 0$  et  $\Lambda$  l'application canonique de  $I$  sur  $I/N$ ;  $I/N$ , muni du produit scalaire

$$(\Lambda x | \Lambda y) = \sigma(x, y),$$

est un espace préhilbertien séparé; on notera  $H$  l'espace



hilbertien complété et  $J$  l'involution dans  $H$  prolongeant l'application  $\Lambda x \rightarrow \Lambda x^*$ ; pour tout  $z \in A$  on désignera par  $\pi(z)$  (resp.  $\rho(z)$ ) l'opérateur linéaire dans  $I/N$  transformant  $\Lambda x$  en  $\Lambda(zx)$  (resp.  $\Lambda(xz)$ ) pour tout  $x \in I$ .

**PROPOSITION 1.** — *L'algèbre  $I/N$  est une algèbre hilbertienne; les opérateurs  $\pi(z)$  et  $\rho(z)$  sont continus pour tout  $z \in A$  et leurs prolongements linéaires continus à  $H$  définissent des représentations  $\pi$  et  $\rho$  de  $A$  et de l'algèbre conjuguée dans  $H$ ; on a  $J\pi(z)J = \rho(z^*)$  pour tout  $z \in A$ .*

Les axiomes (i), (ii) et (iv) des algèbres hilbertiennes (cf. [4], ch. 1, § 5, déf. 1) sont trivialement vérifiés. Démontrons la continuité de  $\pi(z)$  : on a, en vertu des axiomes (iii) et (iv) :

$$(\pi(z)\Lambda x | \pi(z)\Lambda x) = \sigma(z^*zx, x) \leq \|z^*z\| \sigma(x, x) = \|z^*z\| (\Lambda x | \Lambda x).$$

L'axiome (iii) des algèbres hilbertiennes se trouve démontré du même coup. Enfin pour  $x \in I$  et  $z \in A$  on a

$$\rho(z^*)\Lambda x = J\pi(z)J\Lambda x$$

par suite  $\rho(z)$  est continu et les prolongements de  $\pi(z)$  et  $\rho(z)$  à  $H$  vérifient  $\rho(z) = J\pi(z)J$ .

**DÉFINITION.** — *La représentation  $\pi$  (resp.  $\rho$ ) sera dite représentation gauche (resp. droite) canoniquement associée à  $\sigma$ .*

**Remarque 2.** — Les restrictions de  $\pi$  et  $\rho$  à  $I$  sont non dégénérées en vertu de l'axiome (v).

**Remarque 3.** — Pour tout  $x \in I$  la forme linéaire positive sur  $A$  :  $f(z) = \sigma(zx, x)$  converge vers  $\sigma(x, x)$  suivant toute unité approchée de  $A$ , car

$$\sigma(zx, x) = (\pi(z)\Lambda x | \Lambda x)$$

et  $\pi(z)$  tend fortement vers 1 (cf. Notations et rappels).

**Remarque 4.** — Soit  $E$  une partie de  $I$  partout dense dans  $I$  pour la topologie initiale; les éléments  $xy$  ( $x \in E$ ,  $y \in E$ ) sont partout denses dans  $I$  pour le produit scalaire  $\sigma(x, y)$ ; il suffit en effet de montrer que tout élément  $\Lambda(uv)$  de  $I/N$  ( $u \in I$ ,  $v \in I$ ) est limite d'éléments  $\Lambda(xy)$  ( $x \in E$ ,  $y \in E$ ), ce qui résulte de la continuité du produit par rapport à chacune des variables.

Il en résulte que si  $A$  est séparable il en est de même de  $H$ .

*Remarque 5.* — Supposons que I admette une unité approchée; l'axiome (v) est alors équivalent au suivant :

(v') la forme linéaire positive  $f$  sur I :  $f(z) = \sigma(zx, x)$  tend vers  $\sigma(x, x)$  suivant au moins une unité approchée de I. Ceci est alors vrai pour toute unité approchée de I.

(v')  $\implies$  (v) : il suffit de montrer que si  $x \in I$  et si  $(z_i)$  est une unité approchée de I,  $z_i x \rightarrow x$  pour la structure préhilbertienne, c'est-à-dire

$$\sigma(z_i x - x, z_i x - x) \rightarrow 0;$$

or

$$\sigma(z_i x - x, z_i x - x) = \sigma(z_i^* z_i x, x) - \sigma(z_i x, x) - \overline{\sigma(z_i x, x)} + \sigma(x, x);$$

mais  $(z_i)$  est aussi unité approchée pour l'adhérence  $\bar{I}$  de I; si donc  $k$  est la norme de la restriction à I de la forme linéaire positive  $z \rightarrow (zx, x)$ , on a (cf. Notations et rappels) :

$$\lim \sigma(z_i x, x) = \lim \overline{\sigma(z_i x, x)} = \lim \sigma(z_i^* z_i x, x) = k$$

et  $k = \sigma(x, x)$ ; d'où l'assertion.

(v)  $\implies$  (v') : même démonstration que pour la remarque 3.

*Exemple 1.* — Soit  $g$  une forme linéaire positive définie sur un idéal autoadjoint I de A et vérifiant :

- (i)  $g(zx) = g(xz)$  pour  $x \in I$  et  $z \in A$ ;
- (ii) pour tout  $x \in I$  la forme linéaire positive  $f$  sur A :  $f(z) = g(zxx^*)$  est continue et de norme  $g(xx^*)$ ;
- (iii) les éléments  $xy$  ( $x \in I, y \in I$ ) sont partout denses dans I pour le produit scalaire  $g(xy^*)$ .

On vérifie immédiatement que la forme  $\sigma(x, y) = g(xy^*)$  est une trace définie sur I.

*Exemple 2.* — Pour toute forme linéaire positive centrale continue  $g$  sur A, la forme  $\sigma(x, y) = g(xy^*)$  est une trace définie sur A; pour le montrer nous allons nous ramener à l'exemple 1 : l'axiome (i) et la première partie de l'axiome (ii) sont trivialement vérifiés; deuxième partie de l'axiome (ii) : soit  $(z_i)$  une unité approchée de A; on a

$$\|f\| = \lim g(z_i x x^*) = g(x x^*).$$

Axiome (iii) : il suffit de démontrer que  $z_i x$  tend vers  $x$  pour la structure préhilbertienne; même démonstration qu'à la remarque 5.

*Exemple 3.* — Soient  $\pi$  une représentation non dégénérée de  $A$ ,  $\mathfrak{A}$  l'algèbre de von Neumann engendrée par  $\pi(A)$ ,  $\text{Tr}$  une trace normale sur  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{m}$  son idéal de définition; on suppose que les éléments  $ST$  ( $S$  et  $T \in \pi(A) \cap \mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}$ ) sont partout denses dans  $\pi(A) \cap \mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}$  pour le produit scalaire  $\text{Tr}(ST^*)$ . Alors la forme  $\sigma(x, y) = \text{Tr } \pi(xy^*)$  est une trace définie sur  $\pi^{-1}(\mathfrak{m}^{\frac{1}{2}})$ .

Les axiomes (i), (ii), (iii) et (v) des traces sont trivialement vérifiés; l'axiome (iv) résulte de la continuité ultra-faible de  $\text{Tr } \pi(zxz^*)$  par rapport à  $\pi(z)$  et du fait que  $\pi(z)$  tend ultra-fortement vers 1 suivant toute unité approchée de  $A$ .

*Notations.* — En plus des notations posées après la remarque 1, nous noterons  $\mathfrak{U}$  (resp.  $\mathfrak{V}$ ) l'algèbre de von Neumann gauche (resp. droite) associée à l'algèbre hilbertienne  $I/N$ ,  $\text{Tr}$  la trace naturelle sur  $\mathfrak{U}$  et  $\mathfrak{m}$  son idéal de définition.

**LEMME 1.** — *La forme  $\tilde{\sigma}(x, y) = \text{Tr } \pi(xy^*)$  est une trace définie sur  $\tilde{I} = \pi^{-1}(\mathfrak{m}^{\frac{1}{2}})$  et prolongeant  $\sigma$ .*

On a évidemment  $\tilde{I} \supset I$  et  $\tilde{\sigma}$  prolonge  $\sigma$ ; les hypothèses de l'exemple 3 sont satisfaites parce que  $\pi(I)$  est isomorphe à  $I/N$  et partout dense dans  $\pi(A) \cap \mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}$  pour le produit scalaire  $\text{Tr}(ST^*)$ ; donc  $\tilde{\sigma}$  est une trace.

**LEMME 2.** — *Soient  $\sigma$  et  $\sigma'$  deux traces définies respectivement sur  $I$  et  $I'$ ,  $\sigma'$  prolongeant  $\sigma$ , et soient  $N, \Lambda, H, \mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{m}, \pi, \rho$ , (resp.  $N', \dots$ ) les éléments correspondants. On a*

$$\pi'^{-1}(\mathfrak{m}'^{\frac{1}{2}}) \subset \pi^{-1}(\mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}).$$

On a évidemment  $N = N' \cap I$ ; pour  $x \in I$  on a  $\|\Lambda x\| = \|\Lambda' x\|$ ; il existe donc un isomorphisme  $T$  de  $H$  sur un sous-espace fermé  $H'_0$  de  $H'$  tel que  $T\Lambda x = \Lambda' x$  pour tout  $x \in I$ ; posons  $P = TT^*$ . On a

$$\pi'(a)T = T\pi(a) \tag{1}$$

pour tout  $a \in A$ , car, pour tout  $x \in I$ :

$$\pi'(a) T\Lambda x = \Lambda'(ax) = T\Lambda(ax) = T\pi(a) \Lambda x.$$

On a de même  $\rho'(a)T = T\rho(a)$  et on en déduit que  $T^*\rho'(a) = \rho(a) T^*$  et aussi que  $P$  permute à  $\pi'(A)$  et  $\rho'(A)$ .

Soit maintenant  $a \in \pi^{-1}\left(m^{\frac{1}{2}}\right)$ ; l'opérateur  $\pi'(a)$  est de la forme  $U'_h$  où  $h$  est borné dans  $H'$ ; montrons que  $T^*h$  est borné dans  $H$  et que  $\pi(a) = U_{T^*h}$ , c'est-à-dire que l'on a, pour tout  $x \in I$ :

$$\rho(x^*) T^*h = \pi(a) \Lambda x.$$

On a, pour tout  $x \in I$

$$\begin{aligned} \rho(x^*) T^*h &= T^* \rho'(x^*) h = T^* U'_h \Lambda' x = T^* \pi'(a) \Lambda' x \\ &= T^* \pi'(a) T \Lambda x = \pi(a) \Lambda x \end{aligned}$$

d'où l'égalité annoncée; par suite  $\pi(a) \in m^{\frac{1}{2}}$ .

**COROLLAIRE.** — On a  $I' \subset \pi^{-1}\left(m^{\frac{1}{2}}\right)$ .

*Remarque 6.* — Si  $\mathcal{U}'$  et  $\mathcal{V}'$  sont des facteurs et si  $\sigma \neq 0$ ,  $\Lambda'(I)$  est partout dense dans  $H'$  et  $\pi$  et  $\pi'$  sont équivalentes. En effet  $P$  n'est pas nul et permute à  $\pi'(A)$  et  $\rho'(A)$ ; on a donc  $P = 1$ ; l'équivalence de  $\pi$  et  $\pi'$  résulte alors de (1).

**DÉFINITION.** — Une trace  $\sigma$  définie sur un idéal  $I$  sera dite maximale s'il n'existe aucune trace prolongeant  $\sigma$  et définie sur un idéal contenant strictement  $I$ .

**PROPOSITION 2.** — (i) Une trace  $\sigma$  est maximale si et seulement si on a  $\tilde{I} = I$  avec les notations du lemme 1.

(ii) La trace  $\tilde{\sigma}$  du lemme 1 est maximale.

(i) Si  $\sigma$  est maximale on a  $\tilde{I} = I$  puisque  $\tilde{\sigma}$  prolonge  $\sigma$ . Inversement supposons  $\tilde{I} = I$ ; soit  $\sigma'$  un prolongement de  $\sigma$  défini sur  $I' \supset I$ ; on a (cor. du lemme 2)

$$I' \subset \pi^{-1}\left(m^{\frac{1}{2}}\right) = \tilde{I} = I$$

donc  $I' = I$ .

(ii) Il suffit de montrer que  $\tilde{\tilde{I}} = \tilde{I}$ ; or  $\tilde{\tilde{I}} = \tilde{\pi}^{-1}\left(\tilde{m}^{\frac{1}{2}}\right)$  et (lemme 2)

$$\tilde{\pi}^{-1}\left(\tilde{m}^{\frac{1}{2}}\right) \subset \pi^{-1}\left(m^{\frac{1}{2}}\right) = \tilde{I}.$$

**DÉFINITION.** — La trace  $\tilde{\sigma}$  du lemme 1 sera dite prolongement maximal canonique de  $\sigma$ .

*Remarque 7.* — Toute trace maximale est le prolongement maximal canonique d'une trace obtenue par la méthode de l'exemple 1.

Soit en effet  $\sigma$  maximale définie sur  $I$ ; soient  $\pi, \mathcal{U}, \text{Tr}, \mathfrak{m}$  les éléments associés; pour  $x \in \pi^{-1}(\mathfrak{m})$  posons  $g(x) = \text{Tr } \pi(x)$ ; on voit facilement que  $g$  vérifie les conditions (i), (ii) et (iii) de l'exemple 1 et que  $\sigma$  est le prolongement maximal canonique de la trace sur  $\pi^{-1}(\mathfrak{m})$  associée à  $g$ .

## 2. Caractères. Représentations factorielles normales.

**DÉFINITIONS.** — Soient  $\sigma$  et  $\sigma'$  deux traces maximales définies respectivement sur  $I$  et  $I'$ ; on dira que  $\sigma$  majore  $\sigma'$  si  $I \subset I'$  et si  $\sigma'(x, x) \leq \sigma(x, x)$  pour tout  $x \in I$ . Une trace maximale sera appelée caractère si  $\sigma \neq 0$  et si toute trace maximale majorée par  $\sigma$  est proportionnelle à  $\sigma$ .

**PROPOSITION 3.** — Soient  $\sigma$  une trace maximale non nulle,  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{V}$  les algèbres de von Neumann associées; les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{V}$  sont des facteurs;
- (ii)  $\sigma$  est un caractère.

Définissons  $N, \Lambda, H, \text{Tr}, \mathfrak{m}, \pi, \rho$  comme au n° 1.

(i)  $\Rightarrow$  (ii) : soient  $\sigma'$  une trace majorée par  $\sigma$  et  $I'$  son idéal de définition; pour  $x$  et  $y \in I$ ,  $\sigma'(x, y)$  ne dépend que de  $\Lambda x$  et  $\Lambda y$ ; c'est une forme sesquilinéaire, hermitienne, positive, continue, qui se prolonge donc à  $H$  par continuité; il existe un opérateur hermitien continu  $E$  dans  $H$  tel que  $0 \leq E \leq 1$  et

$$\sigma'(x, y) = (E\Lambda x | \Lambda y) \quad \text{pour } x \text{ et } y \in I;$$

on voit immédiatement que  $E \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ , donc  $E$  est un scalaire  $k$  et on a

$$\sigma'(x, y) = k\sigma(x, y)$$

pour  $x$  et  $y \in I$  et par suite pour  $x$  et  $y$  quelconques.

(ii)  $\Rightarrow$  (i) : supposons que  $\sigma$  soit un caractère; soit  $E$  un élément hermitien de  $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$  tel que  $0 \leq E \leq 1$ ; soit  $\mathfrak{n}_E$  l'idéal autoadjoind des  $T \in \mathcal{U}$  tels que

$$E^{\frac{1}{2}}T \in \mathfrak{n} = \mathfrak{m}^{\frac{1}{2}};$$

soit  $I_E = \pi^{-1}(n_E) \supset I$ ; pour  $x$  et  $y \in I_E$  posons

$$\sigma_E(x, y) = \text{Tr}(E\pi(xy^*)).$$

La fonction  $T \rightarrow \text{Tr}(ET)$  est une trace normale sur  $\mathcal{U}^+$ , dont l'idéal de définition est  $n_E^2$ ; pour montrer que  $\sigma_E$  est une trace il suffit (exemple 3) de montrer que les éléments  $ST$  ( $S$  et  $T \in \pi(A) \cap n_E$ ) sont partout denses dans  $\pi(A) \cap n_E$  pour le produit scalaire  $(S, T) \rightarrow \text{Tr}(EST^*)$ ; montrons d'abord que  $\pi(A) \cap n$  est partout dense dans  $\pi(A) \cap n_E$  pour ce produit scalaire.

Soit  $T \in \pi(A) \cap n_E$ ; on a  $E^{\frac{1}{2}}T = U_h$  avec  $h$  borné, et  $E^{\frac{1}{2}}T^* = U_h^*$ ; donc

$$\text{adhérence image } U_h \subset \text{adhérence image } E^{\frac{1}{2}};$$

posons  $X = E^{\frac{1}{2}}(I/N)$ ; comme  $h \in \overline{U_h(H)}$ ,  $h \in X$  et il existe une suite  $x_n \in I$  telle que  $E^{\frac{1}{2}}\Lambda x_n \rightarrow h$ ; posons  $T_n = U_{\Lambda x_n} \in \pi(A) \cap n$ ; on a

$$\begin{aligned} \text{Tr}(E(T_n - T)(T_n - T)^*) &= \text{Tr}(U_{E^{\frac{1}{2}}\Lambda x_n - h} U_{E^{\frac{1}{2}}\Lambda x_n - h}^*) \\ &= (E^{\frac{1}{2}}\Lambda x_n - h | E^{\frac{1}{2}}\Lambda x_n - h) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

d'où l'assertion.

D'autre part les éléments  $ST$  ( $S$  et  $T \in \pi(A) \cap n$ ) sont partout denses dans  $\pi(A) \cap n$  pour le produit scalaire  $(S, T) \rightarrow \text{Tr}(ST^*)$ , et *a fortiori* pour le produit scalaire plus petit  $(S, T) \rightarrow \text{Tr}(EST^*)$ .

On a donc prouvé que  $\sigma_E$  était une trace; elle est évidemment majorée par  $\sigma$ ; son prolongement maximal canonique doit donc être proportionnel à  $\sigma$ : pour  $x$  et  $y \in I$

$$\begin{aligned} \sigma_E(x, y) &= k\sigma(x, y) \quad \text{avec} \quad k \geq 0 \\ (E\Lambda x | \Lambda y) &= k(\Lambda x | \Lambda y) \end{aligned}$$

donc  $E = k$  et  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{V}$  sont des facteurs.

**DÉFINITION.** — Une représentation factorielle non dégénérée  $\pi$  de  $A$  est dite normale si le facteur engendré par  $\pi(A)$  est semi-fini et si  $\pi(A)$  en contient un élément à trace non nul.

Une représentation irréductible d'une  $C^*$ -algèbre est alors normale si et seulement si  $\pi(A)$  contient l'algèbre  $K$  des opérateurs compacts; cette condition étant évidemment suffi-

sante, montrons qu'elle est nécessaire: si  $\pi$  est normale,  $\pi(A) \cap K$  est un idéal non nul de  $\pi(A)$ , et par conséquent est irréductible; mais  $\pi(A) \cap K$  est une algèbre CCR (cf. [22], th. 7. 4) et par suite est égale à  $K$ .

En particulier toute représentation factorielle non dégénérée d'une algèbre GCR est de type I et normale.

**PROPOSITION 4.** — Soient  $\pi$  une représentation factorielle normale de  $A$ ,  $\alpha$  le facteur engendré par  $\pi(A)$ ,  $\text{Tr}$  la trace canonique sur  $\alpha$ ,  $\mathfrak{m}$  son idéal de définition. Alors

(i)  $\alpha$  est l'algèbre de von Neumann engendrée par  $\pi(A) \cap \mathfrak{m}$ ;

(ii) la forme  $\sigma(x, y) = \text{Tr } \pi(xy)$  est un caractère défini sur

$$I = \pi^{-1}\left(\mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}\right);$$

(iii) soient  $\pi_1$  la représentation gauche canoniquement associée à  $\sigma$  et  $\mathcal{U}$  le facteur engendré par  $\pi_1(A)$ ; il existe un isomorphisme et un seul de  $\mathcal{U}$  sur  $\alpha$  transformant  $\pi_1(x)$  en  $\pi(x)$  pour tout  $x \in A$ ;

(iv) tout caractère sur  $A$  s'obtient de cette façon.

(iv) résulte immédiatement des prop. 1 et 3.

Muni du produit scalaire  $(S, T) \rightarrow \text{Tr}(ST^*)$ ,  $\mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}$  est une algèbre hilbertienne achevée; soit  $H'$  l'espace hilbertien complété; il existe un isomorphisme  $\Phi$  (resp. un antiisomorphisme  $\Psi$ ) de  $\alpha$  sur  $\mathcal{U}\left(\mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}\right)$  (resp.  $\mathcal{V}\left(\mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}\right)$ ) tel que pour  $R \in \alpha$  et  $S \in \mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}$

$$(\Phi(R))(S) = RS \quad \text{et} \quad (\Psi(R))(S) = SR.$$

Posons, pour tout  $a \in A$

$$\pi_1(a) = \Phi(\pi(a))$$

$$\pi_2(a) = \Psi(\pi(a^*));$$

les opérateurs  $\pi_1(a)$  (resp.  $\pi_2(a)$ ) engendrent  $\mathcal{U}\left(\mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}\right)$  (resp.  $\mathcal{V}\left(\mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}\right)$ ) puisque les  $\pi(a)$  sont ultrafortement denses dans  $\alpha$ .

Soit maintenant  $H'_0 \subset H'$  l'adhérence de  $\pi(I) = \pi(A) \cap \mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}$ ; on a  $H'_0 \neq 0$ ; de plus pour  $x \in I$  et  $a \in A$

$$(\pi_1(a))(\pi(x)) = (\Phi(\pi(a)))(\pi(x)) = \pi(a)\pi(x) = \pi(ax) \in \pi(I),$$

$$(\pi_2(a))(\pi(x)) = (\Psi(\pi(a^*)))(\pi(x)) = \pi(x)\pi(a^*) = \pi(xa^*) \in \pi(I)$$

donc  $\pi(I)$ , et par suite  $H'_0$ , est stable par  $\pi_1(A)$  et  $\pi_2(A)$ ; par suite  $H'_0 = H'$  et  $\pi(I)$  est partout dense dans  $\mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}$  pour le produit scalaire  $\text{Tr}(ST^*)$ .

Pour montrer que  $\sigma$  est une trace, il suffit (exemple 3) de prouver que tout élément  $T$  de  $\pi(I)$  est limite pour ce produit scalaire d'éléments  $RS$  ( $R$  et  $S \in \pi(I)$ ); or  $T$  est limite d'éléments  $R_n S_n$  ( $R_n$  et  $S_n \in \mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}$ ); puis tout élément  $R_n$  (resp.  $S_n$ ) est limite, d'après ce qui précède, d'éléments  $R_{n,p}$  (resp.  $S_{n,p}$ ) de  $\pi(I)$ ;  $\sigma$  est donc une trace.

L'idéal  $N$  des  $x \in I$  tels que  $\sigma(x, x) = 0$  est identique au noyau de  $\pi$ ;  $I/N$  est isomorphe à  $\pi(I)$ ; l'algèbre de von Neumann gauche  $\mathcal{U}$  associée à  $\sigma$  est donc isomorphe à  $\mathcal{U}(\pi(I)) = \mathcal{U}(\mathfrak{m}^{\frac{1}{2}})$ , donc à  $\alpha$  et l'isomorphisme en question transforme  $\pi_1(a)$  en  $\pi(a)$  pour tout  $a \in A$ .

On a ainsi démontré (i) et (iii). Pour terminer la démonstration de (ii) il reste à prouver que  $\sigma$  est maximale, i.e. que si  $\pi_1(a)$  est de la forme  $U_h$  ( $h$  borné dans  $H'$ ) alors  $a \in I$ ; or,  $\mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}$  étant achevée, on a  $h \in \mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}$

$$\begin{aligned} \pi_1(a) &= U_h = \Phi(h) \\ \pi(a) &= h \in \mathfrak{m}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

d'ou enfin  $a \in I$ .

**THÉORÈME 1.** — *La formule  $\sigma(x, y) = \text{Tr } \pi(xy^*)$  établit une correspondance biunivoque entre*

a) *l'ensemble des classes de quasi-équivalence de représentations factorielles normales de  $A$ .*

b) *l'ensemble des caractères sur  $A$  définis à un facteur constant près.*

Résulte aussitôt de la prop. 4.

**DÉFINITION.** — *On appellera type d'un caractère le type de la représentation associée.*

**PROPOSITION 5.** — *Soient  $\sigma$  et  $\sigma'$  deux caractères de  $A$  définis respectivement sur  $I$  et  $I'$  et soit  $A'$  une sous- $*$ -algèbre partout dense dans  $A$ ; supposons que  $I \cap A' = I' \cap A'$  et que  $\sigma$  et  $\sigma'$  soient égaux et non nuls sur  $I \cap A'$ . Alors  $\sigma$  et  $\sigma'$  sont égaux.*

Soient  $N, \Lambda, H, \pi, \rho$ , (resp.  $N', \dots$ ) les éléments associés à  $\sigma$  (resp.  $\sigma'$ ) posons  $I_0 = I \cap A'$ ;  $\Lambda(I_0)$  est stable par  $\pi(A')$  et  $\rho(A')$ , donc aussi son adhérence  $\Lambda(I_0)$  dans  $H$ ;  $\Lambda(I_0)$  est donc



stable par  $\pi(A)$  et  $\rho(A)$ , et comme  $\Lambda(I_0) \neq 0$  on a  $\overline{\Lambda(I_0)} = H$ .

On voit de même que  $\overline{\Lambda'(I_0)} = H'$ .

Pour  $x$  et  $y \in I_0$  on a  $(\Lambda x | \Lambda y) = (\Lambda' x | \Lambda' y)$ ; il existe donc un isomorphisme  $T$  de  $H$  sur  $H'$  tel que  $T\Lambda x = \Lambda' x$  pour tout  $x \in I_0$ ; soient alors  $x \in I_0$  et  $y \in A'$ ; on a

$$T\pi(y)\Lambda x = T\Lambda(yx) = \Lambda'(yx) = \pi'(y)\Lambda'x = \pi'(y)T\Lambda x$$

d'où  $T\pi(y) = \pi'(y)T$  pour tout  $y \in A'$  et, par continuité, pour tout  $y \in A$ ;  $\pi$  et  $\pi'$  sont équivalentes et  $\sigma$  et  $\sigma'$  sont proportionnels, donc égaux.

**DÉFINITION.** — Soit  $G$  un groupe localement compact; nous appellerons caractère de  $G$  tout caractère de la  $C^*$ -algèbre  $A$  de  $G$ .

Supposons maintenant  $G$  unimodulaire; il est facile de construire une application injective de l'ensemble des caractères de  $G$  au sens de [14] dans l'ensemble des caractères au sens actuel; il suffit pour cela de montrer que

a) toute représentation factorielle normale au sens de [14] est normale au sens actuel relativement à  $L^1(G)$  (elle sera alors normale relativement à  $A$  et on pourra prendre le caractère correspondant);

b) deux caractères au sens de [14] qui coïncident sur  $L^1(G)$  sont identiques.

Or tout caractère  $\chi$  au sens de [14] est défini sur un idéal bilatère partout dense  $K$  de l'algèbre  $M(G)$ ; mais  $K \cap L^1(G)$  est partout dense dans  $K$  puisque  $\varepsilon$  est adhérent à  $L^1(G)$ ; soit  $\pi$  une représentation factorielle telle que, pour tout  $\alpha \in K$

$$\chi(\alpha, \alpha) = \text{Tr } \pi(\alpha\alpha^*);$$

on a a) puisque  $\pi(K \cap L^1(G))$  est partout dense dans  $\pi(K)$ ; et b) résulte de la prop. 5.

On verra plus loin que cette application n'est pas surjective en général (ch. II, § 3, n° 4, rem. 1).

## § 2. Structures boréliennes.

### 1. Généralités.

Dans tout ce paragraphe,  $A$  désigne une algèbre de Banach involutive, séparable, admettant une unité approchée et telle que toute forme linéaire positive centrale sur  $A$  soit continue;  $A$  peut

être en particulier une  $C^*$ -algèbre séparable ou une algèbre de Banach involutive séparable avec élément unité.

On considère les caractères comme des formes linéaires définies sur des idéaux autoadjoints de  $A$ ; plus précisément tout caractère s'obtient de la façon suivante: soient  $\pi$  une représentation factorielle normale de  $A$ ,  $\text{Tr}$  la trace canonique du facteur engendré par  $\pi(A)$ ,  $\mathfrak{m}$  son idéal de définition; on pose, pour  $x \in \pi^{-1}(\mathfrak{m})$

$$\lambda(x) = \text{Tr } \pi(x);$$

l'idéal  $I = \pi^{-1}(\mathfrak{m})$  sera dit *idéal restreint de définition* de  $\lambda$ ; pour  $x \geq 0$ ,  $x \notin I$  nous poserons  $\lambda(x) = +\infty$ .

Nous noterons  $C$  l'ensemble des caractères et le munirons de la structure borélienne la moins fine rendant boréliennes les fonctions  $\lambda \rightarrow \lambda(x)$  ( $x \in A^+$ ); nous noterons par ailleurs  $C_f$  l'ensemble des caractères de type fini (ce sont des formes linéaires continues sur  $A$ ),  $C_{f,1}$  l'ensemble de ceux qui sont de norme 1 et  $C_I$  l'ensemble des caractères de type I. Nous désignerons par  $C^0$  l'espace quotient de  $C$  par la relation de proportionnalité, muni de la structure borélienne quotient, et  $C_I^0$  l'ensemble des éléments de type I de  $C^0$ , muni de la structure borélienne induite par celle de  $C^0$ . Enfin pour tout idéal autoadjoint  $I$  de  $A$  nous noterons  $C(I)$  l'ensemble des caractères dont l'idéal restreint de définition contient  $I$  et qui ne sont pas identiquement nuls sur  $I$ .

En ce qui concerne les représentations nous emploierons les notations suivantes :

pour tout  $n = 1, 2, \dots, \infty$ ,  $H_n$  est un espace hilbertien fixé de dimension  $n$ ;

$A_{\text{rep}, n}$  : ensemble des représentations de  $A$  dans  $H_n$ ;

$A_{\text{irr}, n}$  : ensemble des éléments irréductibles de  $A_{\text{rep}, n}$ ;

$A_{\text{irr}, \text{nor}, n}$  : ensemble des éléments normaux de  $A_{\text{irr}, n}$ ;

$A_{\text{rep}}$  : ensemble somme des  $A_{\text{rep}, n}$ ;

$A_{\text{irr}}$  (resp.  $A_{\text{fac}}$ ) : ensemble des éléments irréductibles (resp. factoriels) de  $A_{\text{rep}}$ ;

$A_{\text{irr}, \text{nor}}$  : ensemble des éléments normaux de  $A_{\text{irr}}$ ;

$\hat{A}$  : quotient de  $A_{\text{irr}}$  par la relation d'équivalence;

$\hat{A}_{\text{nor}}$  : ensemble des éléments normaux de  $\hat{A}$ ;

$\tilde{A}$  : quotient de  $A_{\text{fac}}$  par la relation de quasi-équivalence;

$\tilde{A}_f$  : ensemble des éléments de type fini de  $\tilde{A}$ .

Les structures boréliennes de  $A_{\text{rep}, n}$ ,  $A_{\text{rep}}$  et  $\hat{A}$  sont définies comme dans [28], et celle de  $\tilde{A}$  comme dans [8].

Nous noterons enfin  $\Psi$  (resp.  $\Psi^0$ ) l'application canonique de  $C$  (resp.  $C^0$ ) dans  $\tilde{A}$  et  $\Phi$  (resp.  $\Phi^0$ ) l'application canonique de  $C_I$  (resp.  $C_I^0$ ) sur  $\hat{A}_{\text{nor}}$ .

**LEMME 1.** — *Si  $I$  est l'idéal autoadjoint engendré par une famille dénombrable d'éléments positifs  $x_i$ ,  $C(I)$  est borélien dans  $C$ .*

Car soit  $\lambda \in C$ ; on a  $\lambda \in C(I)$  si et seulement si

- a) pour tout  $i$ :  $\lambda(x_i) < +\infty$ .
- b) pour au moins un  $i$ :  $\lambda(x_i) > 0$ .

**LEMME 2.** — *Soient  $I$  un idéal autoadjoint de  $A$ ,  $X(I)$  l'ensemble des traces (non nécessairement maximales), considérées comme des formes sesquilinéaires, définies sur  $I$ ; on munit  $X(I)$  de la structure borélienne  $B(I)$ , la moins fine rendant boréliennes les fonctions  $\sigma \rightarrow \sigma(x, y)$  ( $x$  et  $y \in I$ ). Il existe alors une application borélienne  $\Omega$  de  $X(I)$  dans  $A_{\text{rep}}$  telle que, pour toute  $\sigma \in X(I)$ ,  $\Omega(\sigma)$  soit équivalente à la représentation gauche canoniquement associée à  $\sigma$ .*

Nous reprenons les notations du § 1 et notons  $N_\sigma$ ,  $\Lambda_\sigma$ ,  $H_\sigma$ ,  $\pi_\sigma$  les éléments associés à  $\sigma$ . Pour tout  $p = 1, 2, \dots, \infty$  soit  $(e_1, e_2, \dots)$  une base orthonormale de l'espace  $H_p$ . Soit enfin  $(x_n)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) une suite multiplicativement stable et partout dense dans  $I$ ; on sait (§ 1, rem. 4) que les éléments  $\Lambda_\sigma x_n$  sont partout denses dans  $H_\sigma$ ; soient  $\mathcal{K}_\sigma$  l'espace vectoriel engendré algébriquement par les  $\Lambda_\sigma(x_n)$  et  $d_\sigma$  sa dimension algébrique.

Je dis que

(i) pour tout  $p = 1, 2, \dots, \infty$  l'ensemble  $Z_p$  des  $\sigma \in X(I)$  tels que  $d_\sigma = p$  est borélien dans  $X(I)$ ;

(ii) il existe une suite  $h_1(\sigma), h_2(\sigma), \dots$  telle que

a) pour tout  $\sigma \in X(I)$ ,  $h_1(\sigma), h_2(\sigma), \dots$  engendrent algébriquement  $\mathcal{K}_\sigma$ ;

b) si  $d_\sigma = \infty$ ,  $h_1(\sigma), h_2(\sigma), \dots$  forment un système orthonormal; si  $d_\sigma < \infty$ ,  $h_1(\sigma), \dots, h_{d_\sigma}(\sigma)$  forment un système orthonormal et  $h_n(\sigma) = 0$  pour  $n > d_\sigma$ ;

c) pour tout  $n$  il existe un recouvrement de  $X(I)$  par des parties boréliennes disjointes  $Z'_{n,1}, Z'_{n,2}, \dots$  possédant la propriété suivante :

sur chaque  $Z'_{n,i}$ ,  $h_n(\sigma)$  se met sous la forme  $\sum_i f_i(\sigma)\Lambda_\sigma(x_i)$  où les  $f_i$  sont des fonctions boréliennes identiquement nulles pour  $i$  assez grand.

La démonstration est celle de [4], ch. II, § 1, lemme 1 ou l'on remplace simplement  $Z$  par  $X(I)$ ,  $\zeta$  par  $\sigma$ ,  $\mathcal{H}(\zeta)$  par  $H_\sigma$ ,  $x_1, x_2, \dots$  par  $\Lambda(x_1), \Lambda(x_2), \dots$ ,  $y_1, y_2, \dots$  par  $h_1, h_2, \dots$  et « mesurable » par « borélien ».

Le sous-espace  $\mathcal{X}_\sigma$  étant partout dense dans  $H_\sigma$ ,  $h_1(\sigma), h_2(\sigma), \dots$  forment une base orthonormale de  $H_\sigma$ ; pour  $\sigma \in Z_p$  soit  $U_\sigma$  l'isomorphisme de  $H_\sigma$  sur  $H_p$  transformant  $h_n$  en  $e_n$  et soit  $\pi'_\sigma$  la représentation de  $A$  dans  $H_p$  définie par

$$\pi'_\sigma(x) = U_\sigma \pi_\sigma(x) U_\sigma^{-1};$$

le lemme sera démontré si on prouve que toutes les fonctions

$$\sigma \rightarrow (\pi'_\sigma(x)k_1|k_2) \quad (k_1 \text{ et } k_2 \in H_p, x \in A)$$

sont boréliennes sur  $Z_p$ .

Supposons d'abord  $k_1$  et  $k_2$  combinaisons linéaires des  $e_i$ :

$$\begin{aligned} k_1 &= \sum_i \lambda_{1,i} e_i \\ k_2 &= \sum_j \lambda_{2,j} e_j; \end{aligned}$$

on a alors

$$(\pi'_\sigma(x)k_1|k_2) = \sum_i \sum_j \lambda_{1,i} \lambda_{2,j} (\pi_\sigma(x)h_i(\sigma)|h_j(\sigma))$$

et il suffit de montrer que toutes les fonctions

$$\sigma \rightarrow (\pi_\sigma(x)h_i(\sigma)|h_j(\sigma))$$

sont boréliennes sur chaque ensemble  $Z_p \cap Z'_{i,r} \cap Z'_{j,s}$ ; or sur un tel ensemble on a

$$\begin{aligned} h_i(\sigma) &= \sum_l f_l(\sigma)\Lambda_\sigma(x_l) \\ h_j(\sigma) &= \sum_m g_m(\sigma)\Lambda_\sigma(x_m) \\ (\pi_\sigma(x)h_i(\sigma)|h_j(\sigma)) &= \sum_l \sum_m f_l(\sigma)g_m(\sigma)(\Lambda_\sigma(xx_l)|\Lambda_\sigma(x_m)) \\ &= \sum_l \sum_m f_l(\sigma)g_m(\sigma)\sigma(xx_l, x_m). \end{aligned}$$

Si maintenant  $k_1$  et  $k_2$  sont quelconques dans  $H_p$ , la fonction  $\sigma \rightarrow (\pi'_\sigma(x)k_1|k_2)$  est limite d'une suite de fonctions boréliennes, donc borélienne.

PROPOSITION 1. — *Supposons qu'il existe une suite d'idéaux autoadjoints  $I_n$  de  $A$ , engendrés par des familles dénombrables d'éléments positifs, telle que l'on ait*

$$C = \bigcup_n C(I_n);$$

alors  $\Psi^0$  est borélienne.

Il suffit de démontrer que  $\Psi$  est borélienne, ou encore (lemme 1) que  $\Psi|C(I)$  est borélienne pour tout idéal autoadjoint  $I$ . Or soit  $\Pi$  l'application de  $C(I)$  dans  $X(I)$  définie par

$$\Pi(\lambda) = \sigma \quad \text{avec} \quad \sigma(x, y) = \lambda(xy^*) \quad \text{pour} \quad x \text{ et } y \in I;$$

$\Pi$  est borélienne pour la structure borélienne  $B(I)$  du lemme 2 en vertu de l'identité.

$$4\lambda(xy^*) = \lambda((x+y)(x+y)^*) - \lambda((x-y)(x-y)^*) \\ + i\lambda((x+iy)(x+iy)^*) - i\lambda((x-iy)(x-iy)^*).$$

D'autre part on a pour tout  $\lambda \in C(I)$

$$\Omega(\Pi(\lambda)) \in \Psi(\lambda)$$

d'après la remarque 6 du § 1, n° 1; en notant  $\Theta$  l'application canonique de  $A_{\text{fae}}$  sur  $\hat{A}$  on a donc

$$\Psi|C(I) = \Theta \circ \Omega \circ \Pi$$

et la proposition résulte du lemme 2.

## 2. Représentations factorielles de type fini.

Soient  $\sigma$  une trace maximale,  $I$  son idéal de définition,  $\pi$  la représentation gauche canoniquement associée à  $\sigma$ ,  $\mathcal{U}$  l'algèbre de von Neumann engendrée par  $\pi(A)$ ,  $\text{Tr}$  la trace naturelle sur  $\mathcal{U}$ ,  $\mathfrak{m}$  son idéal de définition; on a évidemment

$$\pi^{-1}(\mathfrak{m}) \subset I = \pi^{-1}\left(\mathfrak{m}^{\frac{1}{2}}\right).$$

Supposons que  $I = A$ ; on a alors  $\pi^{-1}(\mathfrak{m}) = A$ , car  $\pi(A) \subset \mathfrak{m}$  puisque tout élément de  $A$  est égal au produit de deux autres éléments de  $A$  (cf. [3], th. 1); ceci permet de parler de *traces partout définies* sans préciser si on les considère comme des formes linéaires ou sesquilinéaires; d'autre part, en rapprochant ceci de l'exemple 2 du § 1, n° 1, on voit qu'il existe une correspondance biunivoque entre les traces partout définies et les formes linéaires positives centrales sur  $A$ :

$$\sigma(x, y) = \lambda(xy^*).$$

On notera  $D$  l'espace des formes linéaires positives centrales de norme  $\leq 1$ ; avec la topologie de la convergence simple sur  $A$ ,  $D$  est compact, métrisable et à base dénombrable ([2], ch. III, § 3, prop. 6).

**PROPOSITION 2.** — *Pour qu'un caractère soit partout défini, il faut et il suffit qu'il soit de type fini.*

La condition énoncée étant évidemment suffisante, montrons qu'elle est nécessaire; ce fait étant trivial si  $A$  admet une unité, supposons  $A$  sans unité, et soit  $A'$  l'algèbre obtenue par adjonction d'une unité; si  $\lambda$  est un caractère partout défini sur  $A$ , il est continu d'après l'hypothèse faite sur  $A$  au début du § 2 et se prolonge en une forme linéaire positive centrale  $\lambda'$  sur  $A'$  définie par

$$\lambda'(x + \alpha 1) = \lambda(x) + \alpha|\lambda|.$$

Soit  $\pi$  (resp.  $\pi'$ ) la représentation gauche canoniquement associée à  $\lambda$  (resp.  $\lambda'$ );  $\pi'$  est évidemment de type fini; un raisonnement calqué sur celui du lemme 2 du § 1 montre que  $\pi$  est équivalente à la représentation que  $\pi'|A$  induit dans un sous-espace stable par  $\pi'(A')$ ; par conséquent  $\pi$  est de type fini.

(On peut d'ailleurs démontrer que  $\pi$  est équivalente à  $\pi'|A$  elle-même.)

**COROLLAIRE 1.** — *Si  $A$  est l'idéal autoadjoint engendré par une famille dénombrable  $E$  (et en particulier si  $A$  admet une unité),  $C_f$  est borélien dans  $C$ .*

En effet soit  $\sigma$  un caractère considéré comme forme sesquilinéaire; on a  $\sigma \in C_f$  si et seulement si  $\sigma$  est partout défini (prop. 2), donc si et seulement si on a  $\sigma(x, x) < +\infty$  pour tout  $x \in E$ .

**COROLLAIRE 2.** — *L'ensemble  $C_{f,1}$  est un  $G_\delta$  dans  $D$ .*

On vérifie immédiatement que  $C_{f,1}$  est l'ensemble des points extrémaux non nuls de  $D$  et l'assertion résulte de [13], appendice 1.

**COROLLAIRE 3.** — *L'espace borélien  $C_{f,1}$  est standard.*

**THÉORÈME 1.** — *Le sous-ensemble  $\tilde{A}_f$  de  $\tilde{A}$ , formé des éléments de type fini, est borélien dans  $\tilde{A}$  et standard; l'application cano-*

nique de  $C$  dans  $\tilde{A}$  induit un isomorphisme borélien de  $C_{f,1}$  sur  $\tilde{A}_f$ .

Considérons, comme dans la prop. 1, l'application borélienne  $\Pi$  de  $C_{f,1}$  dans  $X(A)$  muni de la structure borélienne  $B(A)$  et l'application borélienne  $\Omega$  de  $X(A)$  dans  $A_{\text{rep}}$ ; l'application  $\Lambda = \Omega \circ \Pi$  est borélienne et injective, et comme  $C_{f,1}$  est standard et  $A_{\text{rep}}$  dénombrablement engendré,  $\Lambda$  est un isomorphisme borélien de  $C_{f,1}$  sur  $\Lambda(C_{f,1})$  (cf. [28], th. 3.2); de plus  $\tilde{\Lambda}(C_{f,1})$  rencontre chaque classe de quasi-équivalence de  $A_{\text{fac}}$  en un point au plus; si  $\Theta$  est l'application canonique de  $A_{\text{fac}}$  sur  $\tilde{A}$ ,  $\Theta|_{\Lambda(C_{f,1})}$  est un isomorphisme borélien de  $\Lambda(C_{f,1})$  sur  $\Theta(\Lambda(C_{f,1}))$  ([8], prop. 2), lequel est alors standard et borélien dans  $\tilde{A}$ ; enfin on a évidemment

$$\Psi|_{C_{f,1}} = \Theta \circ \Lambda$$

et, d'après la prop. 2

$$\Psi(C_{f,1}) = \tilde{A}_f.$$

### 3. Représentations irréductibles normales.

**LEMME 3.** — *Pour tout  $n = 1, 2, \dots, \infty$ , tout  $x \in A$  et tout  $T \in \mathcal{L}(H_n)$ ,  $\|\pi(x) - T\|$  est une fonction borélienne de  $\pi$  pour  $\pi \in A_{\text{rep}, n}$ .*

Soient  $h_1, h_2, \dots$  des éléments partout denses dans la boule unité de  $H_n$ ; on a

$$\|\pi(x) - T\| = \sup_p \|(\pi(x) - T)h_p\|;$$

il suffit donc de montrer que pour tout  $h \in H_n$  la fonction  $\pi \rightarrow \|(\pi(x) - T)h\|$  est borélienne; or on a

$$\begin{aligned} \|(\pi(x) - T)h\|^2 &= ((\pi(x) - T)^*(\pi(x) - T)h|h) \\ &= (\pi(x^*x)h|h) - (\pi(x)Th|h) - (\pi(x)h|Th) + (T^*Th|h). \end{aligned}$$

**THÉORÈME 2.** — *On suppose que  $A$  est une  $C^*$ -algèbre séparable.*

(i)  $\hat{A}_{\text{nor}}$  est borélien dans  $\hat{A}$  pour la structure borélienne de Mackey.

(ii) Sur  $\hat{A}_{\text{nor}}$  la structure borélienne de Mackey et la structure borélienne sous-jacente à la topologie de Jacobson sont identiques et analytiques.

(iii) Si  $\Phi^0$  désigne l'application canonique de  $C_1^0$  sur  $\hat{A}_{\text{nor}}$ ,  $(\Phi^0)^{-1}$  est borélienne.

(iv) *Supposons qu'il existe une suite d'idéaux autoadjoints  $I_n$  de  $A$ , engendrés par des familles dénombrables d'éléments positifs, telle que l'on ait  $C = \bigcup_n C(I_n)$ ; alors  $\Phi^0$  est un isomorphisme borélien.*

Démonstration.

(i) Montrons en premier lieu que  $A_{\text{irr, nor, } n}$  est borélien dans  $A_{\text{irr, } n}$ , pour tout  $n$ ; soient  $(x_i)$  une suite partout dense dans  $A$  et  $T$  un opérateur compact non nul dans  $H_n$ ;  $A$  étant une  $C^*$ -algèbre, un élément  $\pi$  de  $A_{\text{irr, } n}$  est normal si et seulement si il existe un élément  $x \in A$  tel que  $\pi(x) = T$ ; ou encore si pour tout entier positif  $r$  il existe un entier  $i$  tel que

$$\|\pi(x_i) - T\| \leq \frac{1}{r}$$

et l'assertion est une conséquence du lemme 3.

Il résulte de ce qui précède, d'une part que  $\hat{A}_{\text{nor}}$  est borélien dans  $A$  pour la structure borélienne de Mackey, et d'autre part que  $A_{\text{irr, nor, } n}$  est standard.

(ii) Montrons maintenant que  $\hat{A}_{\text{nor}}$  est analytique pour la structure borélienne de Mackey; il suffit ([28], p. 141) de trouver des applications boréliennes  $f_j$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) de  $A_{\text{irr, nor, } n}$  dans l'ensemble réel telles que deux éléments  $\pi$  et  $\rho$  de  $A_{\text{irr, nor, } n}$  soient équivalents si et seulement si  $f_j(\pi) = f_j(\rho)$  pour tout  $j$ ; mais les éléments de  $\hat{A}_{\text{nor}}$  étant définis par leurs noyaux (cf. [12], dém. du th. 1, a5)  $\implies$  a6)) on peut prendre  $f_j(\pi) = \|\pi(x_j)\|$  et l'assertion résulte du lemme 3.

Démontrons enfin l'identité des deux structures boréliennes sur  $\hat{A}_{\text{nor}}$ ; la première étant analytique et plus fine que la seconde il suffit ([28], th. 4. 2) de prouver que la seconde est « dénombrablement engendrée », c'est-à-dire

a) séparée.

b) engendrée par une famille dénombrable d'ensembles boréliens.

Or

a)  $\hat{A}_{\text{nor}}$  est homéomorphe pour la topologie de Jacobson à un ensemble d'idéaux primitifs de  $A$ , lequel est certainement un  $T_0$ -espace, et la structure borélienne sous-jacente est séparée;

b) la topologie de Jacobson sur  $\hat{A}$  est à base dénombrable ([10], cor. du th. 3.2.) et ceci reste évidemment vrai pour  $\hat{A}_{\text{nor}}$ .



(iii) Il suffit de trouver une application borélienne  $\Lambda$  de  $A_{\text{irr, nor}}$  dans  $C_I$  qui, par passage aux quotients, donne  $(\Phi^0)^{-1}$ ; soit  $(h_{n,i})$  une base orthonormale de  $H_n$ ; pour  $\pi \in A_{\text{irr, nor, n}}$  on définira  $\Lambda(\pi)$  par

$$\Lambda(\pi)(x) = \sum_i (\pi(x)h_{n,i}|h_{n,i}) \quad \text{pour tout } x \in A^+;$$

l'application  $\Lambda$  possède trivialement les propriétés requises.

(iv) résulte de (iii), de la prop. 1 et de [7].

### § 3. Décomposition des traces.

Dans tout ce paragraphe  $A$  désigne une algèbre de Banach involutive, séparable et admettant une unité approchée.

#### 1. Existence de la décomposition.

Soient  $I$  un idéal autoadjoint de  $A$ ,  $E$  une partie partout dense dans  $I$  et multiplicativement fermée; toute trace  $\sigma$  définie sur  $I$  est entièrement déterminée par les valeurs qu'elle prend sur  $E$  (cf. § 1, n° 1, rem. 3); (si en particulier  $\sigma$  est maximale et si  $E$  est un idéal autoadjoint,  $\sigma$  est le prolongement maximal canonique de  $\sigma|_E$  en vertu du lemme 2, § 1, n° 1).

Définissons  $X(I)$  et  $B(I)$  comme au lemme 2 du § 2 et  $E$  comme ci-dessus;  $B(I)$  est identique à la structure borélienne la moins fine rendant boréliennes les fonctions  $\sigma \rightarrow \sigma(x, y)$  où  $x$  et  $y \in E$ ; en effet pour  $x$  et  $y \in I$  la fonction  $\sigma \rightarrow \sigma(x, y)$  est limite d'une suite de fonctions  $\sigma \rightarrow \sigma(x_n, y_n)$  où  $x_n$  et  $y_n \in E$  (cf. § 1, n° 1, rem. 4). Choissant  $E$  dénombrable, on voit que  $B(I)$  est *dénombrablement engendrée*.

**THÉORÈME 1.** — *Soient  $\sigma$  une trace maximale et  $I$  son idéal de définition.*

(i) *Il existe un idéal autoadjoint  $I_0$  partout dense dans  $I$ , un ensemble  $X$  de caractères deux à deux non proportionnels et dont les idéaux de définition (comme formes sesquilineaires) contiennent  $I_0$ , une topologie compacte à base dénombrable et une mesure positive  $\mu$  sur  $X$  tels que, pour  $x$  et  $y \in I_0$  l'application  $\chi \rightarrow \chi(x, y)$  soit  $\mu$ -mesurable et*

$$\sigma(x, y) = \int \chi(x, y) d\mu(\chi).$$

(ii) Désignons par  $\Psi$  l'application canonique de  $C$  dans  $\tilde{A}$ ; il existe une partie  $X'$  de  $X$ , borélienne, de complémentaire  $\mu$ -négligeable et telle que  $\Psi(X')$  soit borélien dans  $A$  et standard et que la restriction de  $\Psi$  à  $X'$  soit un isomorphisme borélien.

Démonstration. Nous noterons  $N, \Lambda, H, \mathcal{U}, \mathcal{V}, \text{Tr}, m, \pi$  les éléments associés à  $\sigma$  (cf. § 1, n° 1),  $\alpha$  l'algèbre hilbertienne achevée associée à  $I/N$ ,  $\mathfrak{Z}$  le centre de  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{V}$ ; enfin  $\{x_1, x_2, \dots\}$  une  $*$ -algèbre sur le corps des rationnels complexes, dénombrable et partout dense dans  $I$  pour la norme.

a) *Décomposition de  $\mathfrak{A}$ .*

Soit  $H = \int_z^\oplus H(z) d\nu(z)$  une décomposition de  $H$  associée à  $\mathfrak{Z}$ ,  $Z$  étant localement compact à base dénombrable,  $\nu$  positive bornée et  $H(z) \neq 0$  pour tout  $z$ . Il existe des décompositions

$$\alpha = \int^\oplus \alpha(z) d\nu(z)$$

( $\alpha(z)$  étant achevée et partout dense dans  $H(z)$  pour tout  $z$ ) et

$$\Lambda(x_n) = \int^\oplus \Lambda(x_n)(z) d\nu(z)$$

les  $\Lambda(x_n)(z)$  étant partout denses dans  $\alpha(z)$  et formant une  $*$ -algèbre sur le corps des rationnels pour presque tout  $z$ , soit pour  $z \in Z'$ .

Soient  $\mathcal{U}(z), \mathcal{V}(z), \text{Tr}_z, m(z)$  les éléments associées à  $\alpha(z)$ ;  $\mathcal{U}(z)$  et  $\mathcal{V}(z)$  sont des facteurs pour presque tout  $z$ , soit pour  $z \in Z'' \subset Z'$ .

b) *Décomposition de  $\pi$ .*

Par une méthode classique on associe à chaque  $a \in A$  une décomposition

$$\pi(a) = \int^\oplus \pi(a)(z) d\nu(z)$$

de façon que presque partout, soit pour  $z \in Z''' \subset Z''$ ,  $a \rightarrow \pi(a)(z)$  soit une représentation  $\pi_z$  de  $A$  dans  $H(z)$  et que l'on ait pour tout  $n$

$$\pi_z(x_n) = U_{\Lambda(x_n)(z)}.$$

Pour  $z \in Z'''$ ,  $\pi_z(A)$  contient les opérateurs  $U_{\Lambda(x_n)(z)}$ , donc engendre l'algèbre de von Neumann  $\mathcal{U}(z)$ , et  $\pi_z$  est factorielle et normale.

c) *Caractères*  $\chi_z$ . Pour  $z \in Z'''$ ,  $\pi_z$  définit un idéal autoadjoint  $I_z = \pi_z^{-1}(\mathfrak{m}(z)^{\frac{1}{2}})$  et un caractère  $\chi_z$  défini sur  $I_z$ :

$$\chi_z(x, y) = \text{Tr}_z(\pi_z(xy^*));$$

on a en particulier pour tout  $m$  et tout  $n$ :

$$\chi_z(x_m, x_n) = (\Lambda(x_m)(z) | \Lambda(x_n)(z));$$

$I_z$  contient les  $x_n$ , donc aussi l'idéal autoadjoint  $I_0$  qu'ils engendrent, pour tout  $z \in Z'''$ .

D'autre part il existe (cf. [31], th. 1) une partie  $Z^{IV} \subset Z'''$  de complémentaire  $\nu$ -négligeable telle que si  $z$  et  $z' \in Z^{IV}$  et  $z \neq z'$ , alors  $\chi_z$  et  $\chi_{z'}$  soient non proportionnels.

d) *Modification de la topologie de  $Z^{IV}$* .

L'espace  $Z^{IV}$  n'est pas nécessairement localement compact; mais considérons sur  $Z$  la relation d'équivalence  $R$  dont les classes sont les points de  $Z^{IV}$  et l'ensemble  $Z - Z^{IV}$ ; elle est  $\nu$ -mesurable et il existe un espace localement compact à base dénombrable  $Y$  et une application  $\nu$ -propre  $q$  de  $Z$  sur  $Y$  telle que

$$R(z, z') \iff q(z) = q(z')$$

(cf. [1], ch. 6, § 3, prop. 2); l'espace  $X = q(Z^{IV})$  est localement compact; soit  $\mu$  la restriction de  $q(\nu)$  à  $X$ ; considérons  $X$  comme un ensemble de caractères et écrivons  $\chi$  au lieu de  $\chi_z$  pour  $z \in Z^{IV}$ ; pour  $x$  et  $y \in I_0$  la fonction  $\chi \rightarrow \chi(x, y)$  est  $\mu$ -mesurable et on a

$$\sigma(x, y) = \int \chi(x, y) d\mu(\chi).$$

e) *Démonstration de (ii)*.

Définissons  $X(I)$  et  $B(I)$  comme au lemme 2 du § 2; il existe des compacts  $K_p \subset X$  deux à deux disjoints, tels que  $X - \bigcup_p K_p$  soit  $\mu$ -négligeable et que les applications  $\chi \rightarrow \chi(x_m, x_n)$  soient continues sur chaque  $K_p$ ; ces applications sont boréliennes sur  $X' = \bigcup_p K_p$  et  $X'$  est standard pour la structure borélienne sous-jacente à la topologie; l'application identique de  $X'$  dans  $X(I_0)$  est borélienne; c'est donc un isomorphisme et  $X'$  est borélien dans  $X(I_0)$  (cf. [28], th. 3.2). Soit  $\Omega$  la

restriction à  $X'$  de l'application borélienne de  $X(I_0)$  dans  $A_{\text{rep}}$  définie au lemme 2 du § 2;  $\Omega$  est injective, c'est donc un isomorphisme borélien de  $X'$  sur  $\Omega(X')$  et  $\Omega(X')$  est borélien dans  $A_{\text{fac}}$  et standard; puis  $\Psi(X')$  est borélien dans  $\tilde{A}$  et standard et  $\Psi$  est un isomorphisme borélien de  $X'$  sur  $\Psi(X')$  (cf. [8], prop. 2).

**COROLLAIRE** (contenu implicitement dans [35]). — *L'algèbre  $L^1(G)$  d'un groupe localement compact séparable unimodulaire admet un système complet de représentations factorielles normales.*

Soit  $\sigma$  la trace définie sur  $L^1(G) \cap L^2(G)$  par le produit scalaire de  $L^2(G)$ ; on sait que  $\sigma(x, x) = 0$  entraîne  $x = 0$ , et le corollaire résulte de la décomposition de  $\sigma$  en caractères.

## 2. Unicité de la décomposition.

**LEMME 1.** — *Soient  $\bar{A}$  un facteur,  $B$  une  $*$ -algèbre fortement dense dans  $\bar{A}$ ,  $I$  un idéal autoadjoint non nul de  $B$ ;  $I$  est fortement dense dans  $\bar{A}$ .*

Soient  $J$  l'adhérence forte de  $I$  et  $\bar{A}_1, B_1, I_1, J_1$  les boules unité respectives de  $\bar{A}, B, I, J$ ; l'application  $f: (S, T) \rightarrow ST$  de  $\bar{A}_1 \times \bar{A}_1$  dans  $\bar{A}_1$  est fortement continue et on a

$$f(B_1 \times I_1) \subset I_1;$$

comme  $B_1$  (resp.  $I_1$ ) est fortement dense dans  $\bar{A}_1$  (resp.  $J_1$ ) on a

$$f(\bar{A}_1 \times J_1) \subset J_1$$

autrement dit  $J$  est un idéal à gauche de  $\bar{A}$ ; on démontre de même que  $J$  est un idéal à droite, et comme il est fortement fermé et non nul, il est identique à  $\bar{A}$ .

**LEMME 2.** — *Soient  $Z$  un espace localement compact,  $\nu$  une mesure positive sur  $Z$ ,  $I_0$  un idéal autoadjoint de  $A$ ,  $J_0$  une  $*$ -algèbre sur le corps des rationnels dénombrable et partout dense dans  $I_0$ ,  $(a_n)$  une suite partout dense dans  $A$ ; pour tout  $z \in Z$  soit  $\sigma_z$  un caractère dont l'idéal de définition (comme forme sesquilinéaire)  $I_z$  contient  $I_0$  et qui n'est pas identiquement nul sur  $I_0$ . On suppose les fonctions  $z \rightarrow \sigma_z(a_n x, y)$  et  $z \rightarrow \sigma_z(x, y)$   $\nu$ -mesurables pour tout  $n$  et tout couple  $(x, y)$  ( $x$  et  $y \in J_0$ ); soient  $N_z, \Lambda_z, H_z, U_z, V_z, \pi_z, \rho_z$  les éléments associés à  $\sigma_z$  (cf. § 1, n° 1).*

Dans ces conditions les champs de vecteurs  $z \rightarrow \Lambda_z(x)$  ( $x \in J_0$ ) définissent (au sens de [4], ch. II, § 1, prop. 4) sur le champ  $z \rightarrow H_z$  une structure de champ  $\nu$ -mesurable pour laquelle les champs  $z \rightarrow \pi_z(a)$ ,  $\rho_z(a)$  pour  $a \in A$ ,  $\mathcal{U}_z$ ,  $\mathcal{V}_z$ ,  $\Lambda_z(I_z)$  sont  $\nu$ -mesurables.

Tout d'abord la fonction  $z \rightarrow \sigma_z(ax, y)$  pour  $x$  et  $y \in J_0$  et  $a \in A$  est  $\nu$ -mesurable; de plus pour  $x$  et  $y \in J_0$  la fonction

$$(\Lambda_z x | \Lambda_z y) = \sigma_z(x, y)$$

est  $\nu$ -mesurable; puis les  $\Lambda_z(x)$  avec  $x \in J_0$  sont partout denses dans  $\Lambda_z(I_0)$  (cf. § 1, n° 1, rem. 4), lui-même partout dense dans  $H_z$  (cf. § 1, n° 1, rem. 6).

Alors pour  $a \in A$  le champ  $z \rightarrow \pi_z(a)$  est  $\nu$ -mesurable car, pour  $x$  et  $y \in J_0$

$$(\pi_z(a) \Lambda_z x | \Lambda_z y) = \sigma_z(ax, y);$$

même chose pour le champ  $z \rightarrow \rho_z(a)$ . Le champ  $z \rightarrow \mathcal{U}_z$  est  $\nu$ -mesurable puisque  $\mathcal{U}_z$  est engendrée par les  $\pi_z(a_n)$ ; même chose pour  $\mathcal{V}_z$ . Enfin le champ d'algèbres hilbertiennes  $z \rightarrow \Lambda_z(I_z)$  est  $\nu$ -mesurable en vertu de [4], ch. II, § 4, prop. 1.

Dans les lemmes 3 et 4 on posera

$$\begin{aligned} H &= \int^{\oplus} H_z d\nu(z) \\ \pi(a) &= \int^{\oplus} \pi_z(a) d\nu(z) \quad \text{pour } a \in A \\ \mathcal{U}_0 &= (\pi(A))''; \end{aligned}$$

on supposera  $Z$  à base dénombrable et  $\sigma_z(x, y)$   $\nu$ -intégrable pour  $x$  et  $y \in J_0$ .

LEMME 3. — Si  $\mathcal{U}_0$  est un facteur les caractères  $\sigma_z$  sont presque tous deux à deux proportionnels.

Soient  $\text{Tr}_z$  la trace naturelle sur  $\mathcal{U}_z$ ,  $\alpha$  l'algèbre hilbertienne  $\int^{\oplus} \Lambda_z(I_z) d\nu(z)$ ,  $\mathcal{U}$  l'algèbre de von Neumann  $\int^{\oplus} \mathcal{U}_z d\nu(z)$ ,  $\text{Tr}$  la trace sur  $\mathcal{U}$  égale à  $\int^{\oplus} \text{Tr}_z d\nu(z)$ ;  $\mathcal{U}$  est associée à  $\alpha$  et on a  $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$ .

La trace  $\text{Tr}$  est normale et fidèle sur  $\mathcal{U}_0$ ; montrons qu'elle y est semi-finie: soit  $T \in \mathcal{U}_0^+$ ,  $T \neq 0$ ; pour  $y \in J_0$  on a

$$\begin{aligned} \text{Tr } \pi(y^* y) &= \int^{\oplus} \text{Tr}_z \pi_z(y^* y) d\nu(z) \\ &= \int \sigma_z(y, y) d\nu(z) < + \infty \end{aligned}$$

donc

$$\text{Tr} \left( T^{\frac{1}{2}} \pi(y^*y) T^{\frac{1}{2}} \right) < + \infty;$$

or

$$T^{\frac{1}{2}} \pi(y^*y) T^{\frac{1}{2}} \in \mathcal{U}_0 \quad \text{et} \quad \leq \|\pi(y)\|^2 \cdot T;$$

de plus  $\pi(y) T^{\frac{1}{2}}$  n'est pas nul pour tout  $y \in J_0$ , car  $\pi(I_0)$ , étant un idéal autoadjoint non nul de  $\pi(A)$ , est fortement dense dans  $\mathcal{U}_0$  (lemme 1);  $\pi(J_0)$  l'est aussi et en faisant tendre  $\pi(y)$  vers 1 on obtiendrait  $T = 0$ ; il existe donc  $y \in J_0$  tel que

$$T^{\frac{1}{2}} \pi(y^*y) T^{\frac{1}{2}} \neq 0 \quad \text{et} \quad \leq T$$

et  $\text{Tr}$  est semi-finie sur  $\mathcal{U}_0$ .

Soit  $\mathfrak{Z}$  l'algèbre des opérateurs diagonalisables; pour toute partie mesurable non négligeable  $Y$  de  $Z$  soit  $P_Y$  le projecteur de  $Z$  correspondant à  $Y$ ; comme  $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U} \subset \mathfrak{Z}'$  on a  $P_Y \in \mathcal{U}'$ .

La fonction sur  $\mathcal{U} : T \rightarrow \text{Tr} (P_Y T)$  induit sur  $\mathcal{U}_0$  une trace normale; elle est semi-finie (même raisonnement que pour  $\text{Tr}$ ) et fidèle puisque l'application  $T \rightarrow T_{P_Y}$  est un isomorphisme de  $\mathcal{U}_0$  sur  $(\mathcal{U}_0)_{P_Y}$ ; elle est donc proportionnelle à  $\text{Tr}$ :

$$\text{Tr}(P_Y T) = h(Y) \text{Tr}(T).$$

En particulier pour  $x$  et  $y \in J_0$

$$\text{Tr}(P_Y \pi(xy^*)) = \int_Y \sigma_Z(x, y) d\nu(z) = h(Y) \int_Z \sigma_Z(x, y) d\nu(z).$$

Soit  $x_0 \in J_0$  tel que

$$\int_Z \sigma_Z(x_0, x_0) d\nu(z) \neq 0;$$

on a

$$\begin{aligned} h(Y) &= \left( \int_Z \sigma_Z(x_0, x_0) d\nu(z) \right)^{-1} \int_Y \sigma_Z(x_0, x_0) d\nu(z), \\ &= \left( \int_Z \sigma_Z(x_0, x_0) d\nu(z) \right)^{-1} \left( \int_Y \sigma_Z(x_0, x_0) d\nu(z) \right) \left( \int_Y \sigma_Z(x, y) d\nu(z) \right) \end{aligned}$$

pour  $x$  et  $y \in J_0$ .

Étant donné l'arbitraire de  $Y$  il existe un ensemble  $Z_0 \subset Z$  de complémentaire négligeable tel que pour  $z \in Z_0$  on ait

$$\sigma_Z(x, y) = \left( \int_Z \sigma_Z(x_0, x_0) d\nu(z) \right)^{-1} (\sigma_Z(x_0, x_0)) \left( \int_Z \sigma_Z(x, y) d\nu(z) \right)$$

quels que soient  $x$  et  $y \in J_0$ ; comme  $\sigma_z$  n'est pas identiquement nul sur  $J_0$ , les caractères  $\sigma_z (z \in Z_0)$  sont deux à deux proportionnels sur  $J_0$ , donc sur  $I_0$ , donc enfin deux à deux proportionnels.

LEMME 4. — *Si les  $\sigma_z$  sont deux à deux non proportionnels on a*

$$\mathcal{U}_0 = \int^{\oplus} \mathcal{U}_z d\nu(z).$$

L'algèbre de von Neumann  $\mathcal{U} = \int^{\oplus} \mathcal{U}_z d\nu(z)$  est engendrée par  $\mathcal{U}_0$  et par l'algèbre  $\mathcal{Z}$  des opérateurs diagonalisables (cf. [4], ch. II, § 3, th. 1), autrement dit

$$\mathcal{U}' = \mathcal{U}'_0 \cap \mathcal{Z}';$$

pour démontrer le lemme il suffit de prouver que  $\mathcal{U}_0 \supset \mathcal{Z}$  ou encore, en posant  $\mathcal{Y} = \mathcal{U}_0 \cap \mathcal{Z}$ , que  $\mathcal{Y} = \mathcal{Z}$ .

Je dis que  $\mathcal{Y}$  est le centre de  $\mathcal{U}_0$ ; en effet, d'une part

$$\mathcal{Y} \subset \mathcal{U}_0 \quad \text{et} \quad \mathcal{Y} \subset \mathcal{Z} \subset \mathcal{U}'_0$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_0 \cap \mathcal{U}'_0 &\subset \mathcal{Z}' \cap \mathcal{U}'_0 = \mathcal{U}' \\ &\subset \mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U} \\ \text{d'où} &\quad \subset \mathcal{U} \cap \mathcal{U}' = \mathcal{Z} \\ &\quad \subset \mathcal{Y}. \end{aligned}$$

Soient  $H = \int_Z^{\oplus} H(y) d\lambda(y)$  une décomposition de  $H$  associée à  $\mathcal{Y}$  et  $g$  l'application de  $Z$  sur  $Y$  correspondant à l'injection canonique de  $\mathcal{Y}$  dans  $\mathcal{Z}$  (cf. [15], § 1, prop. 1); on peut supposer  $\lambda = g(\nu)$ ; soit  $\nu = \int \nu_y d\lambda(y)$  une désintégration de  $\nu$  associée à  $g$ . Pour presque tout  $y \in Y$  les fonctions  $z \rightarrow \sigma_z(a_n x, x')$  où  $x$  et  $x' \in J_0$  sont  $\nu_y$ -mesurables; appliquant le lemme 2 on peut donc considérer

$$\begin{aligned} K(y) &= \int^{\oplus} H_z d\nu_y(z) \\ \text{et} \quad \pi_y(a) &= \int^{\oplus} \pi_z(a) d\nu_y(z); \end{aligned}$$

on sait ([15], § 5) qu'on peut identifier  $K(y)$  à  $H(y)$  pour presque tout  $y$  et qu'après cette identification on a

$$\pi(a) = \int^{\oplus} \pi_y(a) d\lambda(y).$$

Soit  $\mathfrak{U}_0 = \int^{\oplus} \mathfrak{U}_0(y) d\lambda(y)$  une décomposition de  $\mathfrak{U}_0$ ;  $\mathfrak{U}_0(y)$  est presque partout un facteur engendré par  $\pi_y(A)$ ; d'après le lemme 3,  $\nu_y$  est ponctuelle pour presque tout  $y$  et on a  $\mathfrak{Y} = \mathfrak{Z}$ .

PROPOSITION 1. — Soient  $\sigma$  une trace maximale,  $I$  son idéal de définition,  $J$  une  $*$ -algèbre sur le corps des rationnels complexes, dénombrable et partout dense dans  $I$ ,  $I_0$  l'idéal autoadjoint de  $A$  engendré par  $J$ ,  $X$  un ensemble de caractères deux à deux non proportionnels muni d'une topologie localement compacte à base dénombrable et d'une mesure positive  $\mu$ ,  $I_\chi, N_\chi, \Lambda_\chi, H_\chi, \mathfrak{U}_\chi, \mathfrak{V}_\chi, \pi_\chi, \rho_\chi$  les éléments associés à tout  $\chi \in X$ ; on suppose que pour tout  $\chi \in X$  on a  $I_\chi \supset I_0$ , que  $\chi$  n'est pas identiquement nul sur  $I_0$ , que pour  $x$  et  $y \in I_0$  la fonction  $\chi \rightarrow \chi(x, y)$  est  $\mu$ -intégrable et que

$$\sigma(x, y) = \int \chi(x, y) d\mu(\chi).$$

Alors

(i) les champs de vecteurs  $\chi \rightarrow \Lambda_\chi(x)$  où  $x \in J$  définissent sur le champ  $\chi \rightarrow H_\chi$  une structure de champ  $\mu$ -mesurable pour laquelle les champs  $\chi \rightarrow \pi_\chi(a), \rho_\chi(a)$  pour  $a \in A, \mathfrak{U}_\chi, \mathfrak{V}_\chi$ , sont  $\mu$ -mesurables;

(ii) Il existe un isomorphisme de  $H$  sur  $\int^{\oplus} H_\chi d\mu(\chi)$  transformant  $\Lambda(x)$  en  $\int^{\oplus} \Lambda_\chi(x) d\mu(\chi)$  pour tout  $x \in I_0$ ,  $\pi(a)$  en  $\int^{\oplus} \pi_\chi(a) d\mu(\chi)$  et  $\rho(a)$  en  $\int^{\oplus} \rho_\chi(a) d\mu(\chi)$  pour tout  $a \in A, \mathfrak{U}$  en  $\int^{\oplus} \mathfrak{U}_\chi d\mu(\chi)$ ,  $\mathfrak{V}$  en  $\int^{\oplus} \mathfrak{V}_\chi d\mu(\chi)$  et enfin  $\mathfrak{Z}$  en l'algèbre des opérateurs diagonalisables.

Démonstration.

(i) résulte immédiatement du lemme 2.

(ii) : pour  $x \in I_0$  posons  $\dot{x} = \int^{\oplus} \Lambda_\chi(x) d\mu(\chi)$ ; alors pour  $x$  et  $y \in I_0$  on a

$$\begin{aligned} (\Lambda(x)|\Lambda(y)) &= \sigma(x, y) = \int \chi(x, y) d\mu(\chi) \\ &= \int (\Lambda_\chi(x)|\Lambda_\chi(y)) d\mu(\chi) \\ &= (\dot{x}|\dot{y}). \end{aligned}$$

Il existe donc un isomorphisme  $\Omega$  de  $H$  sur un sous-espace  $H_1$  de  $\int^{\oplus} H_\chi d\mu(\chi)$  transformant  $\Lambda(x)$  en  $\dot{x}$  pour tout  $x \in I_0$ ;  $H_1$  est stable par  $\int^{\oplus} \pi_\chi(a) d\mu(\chi)$  pour tout  $a \in A$ , donc par



l'algèbre de von Neumann engendrée et en particulier (lemme 4) par l'algèbre  $\mathfrak{Z}_1$  des opérateurs diagonalisables; mais ([4], ch. II, § 1, prop. 7) les transformés des  $\hat{x}$  ( $x \in I_0$ ) par les éléments de  $\mathfrak{Z}_1$  engendrent l'espace  $\int^{\oplus} H_\gamma d\mu(\gamma)$ ; on a donc  $H_1 = \int^{\oplus} H_\gamma d\mu(\gamma)$ .

Puis  $\Omega$  transforme  $\pi(a)$  en  $\int \pi_\gamma(a) d\mu(\gamma)$  pour tout  $a \in A$  car pour  $x \in I_0$  on a

$$\begin{aligned} \Omega\pi(a)\Lambda(x) &= \Omega\Lambda(ax) = \langle a\hat{x} \rangle = \int^{\oplus} \Lambda_\gamma(ax) d\mu(\gamma) \\ &= \int^{\oplus} \pi_\gamma(a)\Lambda_\gamma(x) d\mu(x) \\ &= \left( \int^{\oplus} \pi_\gamma(a) d\mu(\gamma) \right) \Omega\Lambda(x). \end{aligned}$$

Même raisonnement pour  $\rho(a)$ .

Par suite  $\Omega$  transforme  $\mathfrak{U}$  (resp.  $\mathfrak{V}$ ) en l'algèbre de von Neumann engendrée par les opérateurs  $\int^{\oplus} \pi_\gamma(a) d\mu(\gamma)$  (resp.  $\int^{\oplus} \rho_\gamma(a) d\mu(\gamma)$ ) c'est-à-dire (lemme 4) en  $\int^{\oplus} \mathfrak{U}_\gamma d\mu(\gamma)$  (resp.  $\int^{\oplus} \mathfrak{V}_\gamma d\mu(\gamma)$ );  $\Omega$  transforme enfin  $\mathfrak{Z}$  en le centre de  $\int^{\oplus} \mathfrak{U}_\gamma d\mu(\gamma)$ , c'est-à-dire  $\mathfrak{Z}_1$ .

**THÉORÈME 2.** — Soient  $\sigma$  une trace maximale,  $I$  son idéal de définition,  $I_0$  l'idéal autoadjoint de  $A$  engendré par une suite  $(x_n)$  partout dense dans  $I$ ,  $X$  un ensemble de caractères deux à deux non proportionnels, muni d'une topologie localement compacte à base dénombrable et d'une mesure positive  $\mu$ ; on suppose que

a) pour tout  $\chi \in X$ ,  $\chi$  n'est pas identiquement nul sur  $I_0$ .

b) pour  $x$  et  $y \in I_0$  la fonction  $\chi \rightarrow \chi(x, y)$  est définie et  $\mu$ -intégrable et  $\sigma(x, y) = \int \chi(x, y) d\mu(\chi)$ .

Définissons de même  $X'$  et  $\mu'$  avec les mêmes propriétés. Il existe alors des sous-ensembles  $X_0$  de  $X$  et  $X'_0$  de  $X'$  de complémentaires respectivement  $\mu$ - et  $\mu'$ -négligeables et une application bijective  $\mu$ -propre  $f$  de  $X_0$  sur  $X'_0$  telle que  $f(x)$  soit proportionnel à  $\chi$  pour tout  $\chi \in X_0$ ; si on pose  $f(\chi) = k(\chi)\chi$ , on a

$$f(\mu) = (k \circ f^{-1})\mu'.$$

*Démonstration.* — Soit  $J$  l'algèbre involutive sur le corps des rationnels complexes engendrée par les  $(x_n)$ ; d'après la

prop. 1 et [4], ch. II, § 6, th. 4 il existe des sous-ensembles  $X_0$  de  $X$  et  $X'_0$  de  $X'$  de complémentaires négligeables, une bijection de  $X_0$  sur  $X'_0$  telle que  $f(\mu)$  soit équivalente à  $\mu'$  et pour tout  $\chi \in X_0$  un isomorphisme  $V_\chi$  de  $H_\chi$  sur  $H_{f(\chi)}$  tel que

$$V_\chi \Lambda_\chi(x) = \Lambda'_{f(\chi)}(x)$$

pour  $x \in J$  et par suite pour  $x \in I_0$ . Alors  $V_\chi$  transforme  $\pi_\chi(a)$  en  $\pi'_{f(\chi)}(a)$  pour tout  $a \in A$  et tout  $\chi \in X_0$  car pour  $x \in J$  on a

$$V_\chi \pi_\chi(a) \Lambda_\chi(x) = V_\chi \Lambda_\chi(ax) = \Lambda'_{f(\chi)}(ax) = \pi'_{f(\chi)}(a) \Lambda'_{f(\chi)}(x) = \pi'_{f(\chi)}(a) V_\chi \Lambda_\chi(x).$$

Donc  $f(\chi)$  est proportionnel à  $\chi$  pour tout  $\chi \in X_0$ : soit  $f(\chi) = k(\chi)\chi$  avec  $k(\chi) > 0$ . Posons  $f(\mu) = h\mu'$  avec  $h(\chi') > 0$ : pour  $x$  et  $y \in I_0$  on a

$$\begin{aligned} \int \chi(x, y) d\mu(\chi) &= \sigma(x, y) = \int \chi'(x, y) d\mu'(\chi') \\ &= \int (h(\chi'))^{-1} \chi'(x, y) d(f(\mu))(x') \\ &= \int (h(f(\chi)))^{-1} (f(\chi))(x, y) d\mu(\chi) \\ (1) \qquad \qquad \qquad &= \int (k(\chi))(h(f(\chi)))^{-1} \chi(x, y) d\mu(\chi). \end{aligned}$$

On va d'abord montrer que  $k(\chi) (h(f(\chi)))^{-1} \leq 1$  presque partout; supposons en effet que l'on ait  $k(\chi) (h(f(\chi)))^{-1} \geq \alpha > 1$  sur un ensemble  $E$   $\mu$ -intégrable non négligeable; soit  $\xi = (\xi(\chi))$  un élément de  $\int^\oplus H_\chi d\mu(\chi)$  vérifiant

$$\|\xi(\chi)\| = \begin{cases} 1 & \text{si } \chi \in E \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Choisissons  $\varepsilon$  de façon que

$$\alpha \left( (\mu(E))^{\frac{1}{2}} - \varepsilon^{\frac{1}{2}} \right)^2 > \left( (\mu(E))^{\frac{1}{2}} + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \right)^2.$$

Comme les champs  $\chi \rightarrow \Lambda_\chi(x)$  où  $x \in I_0$  sont partout denses dans  $\int^\oplus H_\chi d\mu(\chi)$  (prop. 1) il existe  $x \in I_0$  tel que

$$\int_{x_0} \|\Lambda_\chi(x) - \xi(\chi)\|^2 d\mu(\chi) \leq \varepsilon;$$

on a alors

$$\begin{aligned} \int_E \|\Lambda_\chi(x) - 1\| d\mu(\chi) &\leq \int_E \|\Lambda_\chi(x) - \xi(\chi)\| d\mu(\chi) \\ &\leq (\varepsilon \cdot \mu(E))^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{E}} \chi(x, x) d\mu(\chi) &\geq (\mu(\mathbf{E}))^{-1} \left( \int_{\mathbf{E}} \|\Lambda_{\chi}(x)\| d\mu(\chi) \right)^2 \\ &\geq (\mu(\mathbf{E}))^{-1} \left( \int_{\mathbf{E}} (1 - \|\Lambda_{\chi}(x)\| - 1) d\mu(\chi) \right)^2 \\ &\geq \left( (\mu(\mathbf{E}))^{\frac{1}{2}} - \varepsilon^{\frac{1}{2}} \right)^2 \end{aligned}$$

et

$$(2) \quad \int (k(\chi)) (h(f(\chi)))^{-1} \cdot \chi(x, x) d\mu(\chi) \geq \alpha \left( (\mu(\mathbf{E}))^{\frac{1}{2}} - \varepsilon^{\frac{1}{2}} \right)^2$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \int \chi(x, x) d\mu(\chi) &= \int \|\Lambda_{\chi}(x)\|^2 d\mu(\chi) \leq \left( \|\xi\| + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \right)^2 \\ (3) \quad &= \left( (\mu(\mathbf{E}))^{\frac{1}{2}} + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \right)^2. \end{aligned}$$

Les inégalités (2) et (3) sont, à cause du choix de  $\varepsilon$ , en contradiction avec (1), d'où l'assertion.

Posons alors

$$l(\chi) = (k(\chi)) (h(f(\chi)))^{-1} - 1;$$

soient  $X_1$  l'ensemble des  $\chi \in X_0$  tels que  $l(\chi) = 0$  et  $X_x$  ( $x \in J$ ) l'ensemble des  $\chi \in X_0$  tels que  $\Lambda_{\chi}(x) \neq 0$ ; on a  $X_0 = \bigcup_{x \in J} X_x$

puisque pour tout  $\chi$  les  $\Lambda_{\chi}(x)$  ( $x \in J$ ) sont partout denses dans  $H_{\chi}$ , lequel est non nul;  $X_1 \cap X_x$  est  $\mu$ -négligeable pour tout  $x \in J$  donc  $X_1$  est  $\mu$ -négligeable et on a

$$(h(f(\chi))) = k(\chi)$$

presque partout, soit

$$f(\mu) = h\mu' = (k \circ f^{-1})\mu'.$$

## CHAPITRE II

### REPRÉSENTATIONS UNITAIRES DE CERTAINS PRODUITS SEMI-DIRECTS

Dans tout ce chapitre  $G$  désigne un groupe localement compact, produit semi-direct d'un sous-groupe  $G_0$  *discret* par un sous-groupe distingué  $G_1$  *unimodulaire*; on notera  $(a, b)$  un élément quelconque de  $G$  avec  $a \in G_0$ ,  $b \in G_1$ , le produit étant défini par

$$(a, b) (a', b') = (aa', b.ab')$$

où  $a \rightarrow (b \rightarrow ab)$  est un homomorphisme de  $G_0$  dans le groupe des automorphismes de  $G_1$ ; on a alors

$$(a, b)^{-1} = (a^{-1}, a^{-1}b^{-1})$$

et en notant  $e_0$  et  $e_1$  les éléments neutres de  $G_0$  et  $G_1$ ,

$$\begin{aligned} (a, b) &= (e_0, b) (a, e_1) \\ (a, e_1) (e_0, b) (a^{-1}, e_1) &= (e_0, ab). \end{aligned}$$

On notera  $d(ab) = \delta_a^{-1} db$  l'action de  $G_0$  sur la mesure de Haar de  $G_1$ ; on a alors la mesure de Haar à gauche sur  $G$

$$\int f(a, b) d(a, b) = \sum_a \delta_a \int f(a, b) db.$$

Désignons par  $A, A_0, A_1$  les  $C^*$ -algèbres respectives de  $G, G_0, G_1$ . Nous supposons que la fonction 1 sur  $G_0$  (resp.  $G_1$ ) est limite uniforme sur tout compact de fonctions de type positif à supports compacts; il en est alors de même pour  $G$  d'après [37], et la représentation régulière gauche  $\pi_0$  (resp.  $\pi_1$ , resp.  $\pi$ ) de  $G_0$  (resp.  $G_1$ , resp.  $G$ ) définit un isomorphisme de  $A_0$  (resp.  $A_1$ , resp.  $A$ ) sur son image.

### § 1. Préliminaires sur la $C^*$ -algèbre de $G$ .

1. Représentation des éléments de  $A$  par des applications de  $G_0$  dans  $A$ .

Pour  $f \in L^1(G)$  et  $a \in G_0$  nous noterons  $f_a$  l'élément de  $L^1(G_1)$  défini par

$$f_a(b) = \delta_a f(a, b);$$

pour  $g \in L^1(G_1)$  nous noterons  $g^a$  l'élément de  $L^1(G)$  défini par

$$g^a(a', b') = \begin{cases} \delta_a^{-1} g(b') & \text{si } a' = a \\ 0 & \text{sinon;} \end{cases}$$

enfin nous noterons  $L^1(G_1)^a$  l'ensemble des  $g^a$  pour  $g \in L^1(G_1)$ .

L'application  $f \rightarrow f_a$  induit sur  $L^1(G_1)^a$  un isomorphisme d'espaces de Banach de  $L^1(G_1)^a$  sur  $L^1(G_1)$ , et même un isomorphisme d'algèbres de Banach involutives pour  $a = e_0$ ; on désignera par  $A^a$  l'adhérence de  $L^1(G_1)^a$  dans  $A$ .

L'espace  $L^2(G)$  est somme hilbertienne d'espaces  $H_a (a \in G_0)$ , images de  $L^2(G_1)$  par des isomorphismes  $J_a$  tels que

$$(J_a h)(a', b') = \begin{cases} \delta_a^{-\frac{1}{2}} h(b') & \text{si } a' = a \\ 0 & \text{sinon;} \end{cases}$$

tout opérateur continu  $T$  dans  $L^2(G)$  est donc représenté par une matrice  $(T_{a, a'})$  où

$$T_{a, a'} = J_a^* T J_{a'} \in \mathcal{L}(L^2(G_1)).$$

Soit  $f \in L^1(G)$ ; pour  $\varphi \in L^2(G)$  on a

$$(\pi(f)\varphi)(a, b) = \sum_{a'} \delta_{a'} \int f(a', b') \varphi(a'^{-1}a, a'^{-1}(b'^{-1}b)) db'$$

d'où, pour  $\psi \in L^2(G_1)$ ;

$$((\pi(f))_{a_1, a_2} \psi)(b) = \delta_{a_1 a_2^{-1}} \int f(a_1 a_2^{-1}, b') \psi(a_2 a^{-1}(b'^{-1}b)) db';$$

$(\pi(f))_{a_1, a_2}$  ne dépend que de  $a_1 a_2^{-1}$  et est donc de la forme  $(\pi(f))_{a_1 a_2^{-1}}$  où

$$((\pi(f))_a \psi)(b) = \delta_a^{1/2} \int f(a, b') \psi(a^{-1}(b'^{-1}b)) db'.$$

Pour  $a \in G_0$  soit  $U_a$  l'opérateur unitaire dans  $L^2(G_1)$  défini par

$$(U_a \psi)(b) = \delta_a^{\frac{1}{2}} \psi(a^{-1}b);$$

on a alors

$$(1) \quad (\pi(f))_a = \pi_1(f_a)U_a.$$

Par continuité, pour  $x \in A$ ,  $(\pi(x))_{a, a_a}$  est de la forme  $(\pi(x))_{a, a_a^{-1}}$  et on a

$$(\pi(x))_a U_a^{-1} \in \pi_1(A_1);$$

soit  $x_a$  l'élément de  $A_1$  défini par

$$\pi_1(x_a) = \pi(x)_a U_a^{-1};$$

l'application  $x \rightarrow x_a$  de  $A$  dans  $A_1$  est linéaire, diminue les normes et prolonge l'application  $f \rightarrow f_a$  déjà considérée.

Pour  $f \in L^1(G_1)^a$  la formule (1) montre que  $\|f\|_A = \|f_a\|_{A_1}$ ; la restriction de l'application  $x \rightarrow x_a$  à  $A^a$  est donc un isomorphisme d'espaces de Banach de  $A^a$  sur  $A_1$  et même un isomorphisme d'algèbres de Banach involutives pour  $a = e_0$ . Pour tout  $x \in A_1$  on notera  $x^a$  l'élément correspondant de  $A^a$ , qui est donc défini par

$$(x^a)_{a'} = \begin{cases} x & \text{si } a' = a \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Enfin si  $x \in A$  on a

$$(\pi(xx^*))_{e_0} = \sum_a (\pi(x))_a (\pi(x))_a^*$$

la série convergeant fortement; donc  $(xx^*)_{e_0} > 0$  et  $(xx^*)_{e_0}$  est nul si et seulement si  $x = 0$ .

Nous avons ainsi démontré la

**PROPOSITION 1.** — *A tout élément  $x$  de  $A$  est associée de façon biunivoque une application  $a \rightarrow x_a$  de  $G_0$  dans  $A_1$  telle que pour  $x \in L^1(G)$  on ait*

$$x_a \in L^1(G_1) \quad \text{et} \quad x_a(b) = \delta_a \cdot x(a, b);$$

*pour tout  $a \in G_0$  l'application  $x \rightarrow x_a$  est linéaire et continue; elle est positive et fidèle pour  $a = e_0$ ; elle induit sur  $A^a$  un isomorphisme d'espaces de Banach de  $A^a$  sur  $A_1$ , et même un isomorphisme d'algèbres de Banach involutives pour  $a = e_0$ .*

2. Action de  $G_0$  dans  $A_1$ . Quelques formules.

Pour  $f \in L^1(G_1)$  et  $a \in G_0$  posons  $(a.f)(b) = \delta_a f(a^{-1}b)$ ; on a

$$\pi_1(a.f) = U_a \pi_1(f) U_a^{-1}$$

donc  $\|a.f\|_{A_1} = \|f\|_{A_1}$ , et l'automorphisme  $f \rightarrow a.f$  de  $L^1(G_1)$  se prolonge en un automorphisme  $x \rightarrow a.x$  de  $A_1$ ; on a encore

$$\pi_1(a.x) = U_a \pi_1(x) U_a^{-1}$$

d'où on déduit facilement que pour  $x \in A$  et  $y \in L^1(G)$

$$(2) \quad (x^*)_a = a.((x_{a^{-1}})^*)$$

$$(3) \quad (xy)_a = \sum_a x_a(a'.y_{a'^{-1}a})$$

la dernière série convergeant au sens de  $A_1$ .

Soit maintenant  $(u_i)_{i \in I}$  une unité approchée de  $L^1(G_1)$ ; on sait que  $(u_i)$  est aussi unité approchée pour  $A_1$ ; on a, pour  $z \in A_1$  et  $a \in G_0$

$$(4) \quad z^a = \lim z^{e_0}(u_i)^a$$

$$(5) \quad (a.z)^{e_0} = \lim (u_i)^a z^{e_0}(u_i)^{a^{-1}};$$

en effet les deux membres de (4) sont dans  $A^a$  et il suffit de vérifier que

$$(z^a)_a = \lim (z^{e_0}(u_i)^a)_a;$$

or  $(z^a)_a = z$  et  $(z^{e_0}(u_i)^a)_a = zu_i$ ; de même les deux membres de (5) sont dans  $A^{e_0}$  et il suffit de vérifier que

$$((a.z)^{e_0})_{e_0} = \lim ((u_i)^a z^{e_0}(u_i)^{a^{-1}})_{e_0};$$

or on a

$$((a.z)^{e_0})_{e_0} = a.z$$

et

$$((u_i)^a z^{e_0}(u_i)^{a^{-1}})_{e_0} = u_i a.(zu_i).$$

Soit enfin  $\rho$  une représentation unitaire de  $G$ ; pour  $a \in G_0$  on a

$$\rho(a, e_1) = \lim \rho((u_i)^a)$$

et par suite, pour  $z \in A_1$ :

$$(4') \quad \rho(z^a) = \rho(z^{e_0}) \rho(a, e_1)$$

$$(5') \quad \rho((a.z)^{e_0}) = \rho(a, e_1) \rho(z^{e_0}) \rho(a, e_1)^{-1}.$$

REMARQUE. — Supposons  $G_1$  discret; soit  $\sigma$  la forme linéaire positive sur  $A_1$  prolongeant la forme  $f \rightarrow f(e_1)$  sur  $L^1(G_1)$ :

alors  $A$  est isomorphe au « produit croisé » de  $A_1$  par le groupe d'automorphismes  $G_0$  pour la forme  $\sigma$  (cf. [38], th. 1).

**3. Approximation des éléments de  $A$ .**

(Le résultat de ce numéro a été démontré avec l'aide de P. Eymard, à qui est due, essentiellement, l'idée d'employer les éléments  $P_i x$ .)

En vertu de l'hypothèse faite au début de ce chapitre sur  $G_0$ , il existe une famille filtrante  $(f_i)_{i \in I}$  de fonctions de type positif sur  $G_0$  à supports finis telles que  $f_i(e_0) = 1$  et que  $f_i(a) \rightarrow 1$  pour tout  $a \in G_0$ .

Soit  $x \in A$ ; pour tout  $i \in I$  posons

$$P_i x = \sum_a f_i(a) (x_a)^a;$$

comme  $\|(x_a)^a\| \leq \|x\|$ ,  $P_i$  est un opérateur linéaire continu dans  $A$ ; de plus si  $x$  est hermitien,  $P_i x$  l'est aussi; en effet

$$(P_i x)^* = \sum_a f_i(a^{-1}) ((x_a)^a)^* = \sum_a f_i(a) ((x_a)^a)^{-1})^*$$

et on voit facilement que

$$((x_a)^{a^{-1}})^* = (x_a)^a.$$

LEMME 1. — On a  $\|P_i\| \leq 2$  pour tout  $i \in I$  (la norme  $\| \cdot \|$  est prise au sens de  $A$ ).

Il suffit de montrer que  $\|P_i x\| \leq \|x\|$  pour tout élément hermitien  $x$  de  $L^1(G)$ , ou encore que pour un tel  $x$  on a

$$|g(P_i x)| \leq \|x\|$$

pour toute forme linéaire positive continue  $g$  sur  $A$  telle que  $\|g\| \leq 1$ ; une telle forme est définie par une fonction de type positif  $\psi$  sur  $G$  telle que  $\psi(e_1, e_0) \leq 1$  et comme  $P_i x \in L^1(G)$ , on a

$$\begin{aligned} g(P_i x) &= \sum_a \delta_a \int \psi(a, b) (P_i x)(a, b) db \\ &= \sum_a \delta_a \int \psi(a, b) f_i(a) x(a, b) db; \end{aligned}$$

posons

$$\psi'(a, b) = f_i(a) \psi(a, b);$$

on obtient

$$(6) \quad g(P_i x) = \sum_a \delta_a \int \psi'(a, b) x(a, b) db.$$



La fonction sur  $G$  :  $\psi''(a, b) = f_i(a)$  est de type positif; il en est alors de même de  $\psi' = \psi''\psi$  et en outre  $\psi'(e_0, e_1) \leq 1$ ; on a donc, d'après (6)

$$|g(P_i x)| \leq \|x\|.$$

**PROPOSITION 2.** — *On a  $x = \lim P_i x$  pour tout  $x \in A$ .*

Il suffit, en vertu du lemme 1, de le démontrer pour  $x \in L^1(G)$  et dans ce cas cela résulte du fait que pour toute partie finie  $E$  de  $G_0$ :

$$\begin{aligned} \|x - P_i x\|_1 &= \sum_a \|x_a - (P_i x)_a\|_1 \\ &= \sum_a |1 - f_i(a)| \|x_a\|_1 \\ &\leq \sum_{a \in E} |1 - f_i(a)| \|x_a\|_1 + 2 \sum_{a \in G_0 - E} \|x_a\|_1. \end{aligned}$$

**COROLLAIRE.** — *Soit  $\rho$  une représentation de  $G$  et soit  $x$  un élément de  $A$ ; si on a  $\rho((x_a)^{e_0}) = 0$  pour tout  $a \in G_0$ , alors  $\rho(x) = 0$ .*

Car d'après la formule (4')

$$\begin{aligned} \rho((x_a)^h) &= \rho((x_a)^{e_0})\rho(a, e_1) = 0 \quad \text{pour tout } a \\ \rho(P_i x) &= 0 \quad \text{pour tout } i \text{ et enfin } \rho(x) = 0. \end{aligned}$$

#### 4. Idéaux autoadjoints fermés de $A$ et de $A_1$ .

**LEMME 2.** — (i) *Soit  $I$  un idéal autoadjoint fermé de  $A$ ; l'image  $\Pi(I)$  de  $I \cap A^{e_0}$  par l'application  $x \rightarrow x_{e_0}$  est un idéal autoadjoint fermé de  $A_1$  invariant par  $G_0$ .*

(ii) *Soit  $J$  un idéal autoadjoint fermé invariant de  $A_1$ ; l'ensemble  $\Pi'(J)$  des  $x$  de  $A$  tels que  $x_a \in J$  pour tout  $a$  est un idéal autoadjoint fermé de  $A$  et on a*

$$\Pi'(J) = J.$$

(iii) *On a  $\Pi'\Pi(I) \subset I$  pour tout idéal autoadjoint fermé  $I$  de  $A$ .*

*Démonstration.* — (i)  $\Pi(I)$  est évidemment un idéal autoadjoint fermé; il est invariant par  $G_0$  en vertu de la formule (5).

(ii)  $\Pi'(J)$  est évidemment un sous-espace vectoriel fermé; il est autoadjoint d'après la formule (2); pour montrer que c'est un idéal il suffit de prouver que si  $x \in \Pi'(J)$  et  $y \in L^1(G)$ , alors  $xy \in \Pi'(J)$ , ce qui résulte de la formule (3); la dernière assertion est évidente.

(iii) Soit  $\rho$  une représentation de  $A$  de noyau  $I$ ; on a, pour tout  $x \in A$ ,  $x \in \Pi' \Pi(I)$  si et seulement si  $x_a \in \Pi(I)$  pour tout  $a$ , donc si et seulement si  $\rho((x_a)^{e_0}) = 0$  pour tout  $a$  et ceci entraîne  $\rho(x) = 0$  (cor. de la prop. 2).

**5. Homomorphisme de  $A$  sur  $A_0$ .**

On désigne ici par  $\lambda$  le prolongement à  $A_1$  de la forme linéaire positive sur  $L^1(G_1)$  définie par  $\lambda(g) = \int g(b) db$ .

PROPOSITION 3. — Pour toute  $f \in L^1(G)$  soit  $\tilde{f}$  l'élément de  $L^1(G_0)$  défini par

$$\tilde{f}(a) = \delta_a \int f(a, b) db;$$

l'application  $f \rightarrow \tilde{f}$  se prolonge en un homomorphisme de  $A$  sur  $A_0$ , dont le noyau est l'ensemble des  $x \in A$  tels que  $\lambda(x_a) = 0$  pour tout  $a$ .

L'application  $f \rightarrow \tilde{f}$  est évidemment linéaire et surjective; c'est un homomorphisme car pour  $f$  et  $g \in L^1(G)$  on a

$$\begin{aligned} \tilde{f}^*(a) &= \delta_a \int \overline{f(a^{-1}, a^{-1}b^{-1})} db = \int \overline{f(a^{-1}, b)} db = (\tilde{f})^*(a) \\ (\tilde{f}\tilde{g})(a) &= \delta_a \int \left( \sum_{a'} \delta_{a'} \int f(a', b') g(a'^{-1}a, a'^{-1}(b'-b)) db' \right) db \\ &= \delta_a \sum_{a'} \left( \int f(a', b') db' \int g(a'^{-1}a, b) db \right) \\ &= \sum_{a'} \tilde{f}(a') \tilde{g}(a'^{-1}a) = (\tilde{f}\tilde{g})(a). \end{aligned}$$

Elle se prolonge donc en un homomorphisme de  $A$  dans  $A_0$ , dont l'image est une  $C^*$ -algèbre contenant  $L^1(G_0)$  et par suite identique à  $A_0$ .

D'autre part, appliquant les résultats du n° 1 au cas où  $G_1$  se réduit à  $e_1$ , on voit que tout élément  $u$  de  $A_0$  est représenté par une fonction  $u(a)$  et que pour tout  $a \in G_0$ ,  $u(a)$  dépend continûment de  $u$ ; comme pour  $x \in L^1(G)$  on a

$$\tilde{x}(a) = \lambda(x_a)$$

cette égalité reste vraie pour  $x \in A$  et on a

$$\begin{aligned} \tilde{x} = 0 &\iff \tilde{x}(a) = 0 \quad \text{pour tout } a \\ &\iff \lambda(x_a) = 0 \quad \text{pour tout } a. \end{aligned}$$

## § 2. Représentations factorielles de $G$ .

Dans tout ce paragraphe on suppose  $G_0$  discret et dénombrable et  $G_1$  abélien à base dénombrable; on suppose de plus que la fonction 1 sur  $G_1$  est limite uniforme sur tout ensemble fini de fonctions de type positif à supports finis; les hypothèses du début du chapitre sont donc satisfaites. Enfin il sera question uniquement de représentations unitaires de  $G$  dans des espaces hilbertiens à bases dénombrables.

On sait que pour  $f \in L^1(G_1)$  on a  $\|f\|_{A_1} = \|\hat{f}\|_\infty$  et que la transformation de Fourier  $f \rightarrow \hat{f}$  se prolonge en un isomorphisme  $\mathcal{F}$  de  $A_1$  sur  $L_\infty(\hat{G}_1)$ .

On notera  $\chi \rightarrow a\chi$  l'action de  $G_0$  dans  $\hat{G}_1$  avec

$$\langle a\chi, b \rangle = \langle \chi, a^{-1}b \rangle;$$

on notera d'autre part  $\varphi \rightarrow a\varphi$  l'action de  $G_0$  dans  $L_\infty(\hat{G}_1)$  avec

$$(a\varphi)(\chi) = \varphi(a^{-1}\chi);$$

pour tout  $x \in A_1$  on a alors  $\mathcal{F}(a.x) = a.(\mathcal{F}x)$ . Enfin si  $d\chi$  est la mesure de Haar sur  $\hat{G}_1$  on a  $d(a\chi) = \delta_a d\chi$ .

### 1. Propriétés générales des représentations de $G$ .

Soient  $\pi$  une représentation de  $G$  dans un espace hilbertien  $H$  et  $I$  le noyau de la représentation correspondante de  $A$ ;  $\mathcal{F}(\Pi(I))$  est l'ensemble des éléments de  $L_\infty(\hat{G}_1)$  nuls sur une partie fermée de  $\hat{G}_1$  invariante par  $G_0$ ; et  $F$  s'identifie au spectre de  $\pi(A^e)$ . Soit  $C$  la classe de mesures sur  $\hat{G}_1$  associée à  $\pi|_{G_1}$  grâce au théorème de Ambrose-Godement-Naïmark. Tout élément de  $G_0$ , transformant  $\pi|_{G_1}$  en une représentation équivalente, conserve  $C$ ; autrement dit les éléments de  $C$  sont des mesures quasi-invariantes par  $G_0$ ; leur support est  $F$ ; enfin si  $\pi$  est factorielle,  $C$  est ergodique (cf. par exemple [25], p. 542).

LEMME 1. — *Supposons que pour tout  $a \in G_0$  différent de  $e_0$  et tout ensemble  $E \in \hat{G}_1$  mesurable et non négligeable pour  $C$*

il existe un ensemble  $E' \subset E$  mesurable et non négligeable pour  $C$  tel que  $aE' \cap E' = \emptyset$ . Alors si  $x \in A$  et si  $\pi(x) = 0$ , on a  $\pi((x_a)^{\circ}) = 0$  pour tout  $a$ . On a en outre  $I = \Pi' \Pi(I)$ .

En vertu des hypothèses de dénombrabilité il existe une mesure  $\mu \in C$  telle que  $\|\mu\| = 1$  et une décomposition  $H = \int^{\oplus} H(\gamma) d\mu(\gamma)$  telle que, en notant  $\varphi \rightarrow T_\varphi$  le prolongement à  $L^\infty(\hat{G}_1, \varphi)$  de l'isomorphisme de Gelfand,  $T_\varphi$  soit l'opérateur de multiplication par  $\varphi$ .

Soit  $a \in G_0$ ; il existe une fonction localement  $\mu$ -intégrable  $r_a(\gamma)$  telle que

$$d\mu(a\gamma) = r_a(\gamma) d\mu(\gamma);$$

d'autre part, comme  $\pi(a, e_1)$  conserve l'algèbre des opérateurs diagonalisables, on sait (cf. [15], § 4) qu'il existe pour tout  $\gamma \in \hat{G}_1$  un isomorphisme  $U_{a,\gamma}$  de  $H(a^{-1}\gamma)$  sur  $H(\gamma)$  tel que pour tout  $h = (h(\gamma)) \in H$  on ait presque partout

$$(\pi(a, e_1)h)(\gamma) = r_{a^{-1}}(\gamma)^{\frac{1}{2}} U_{a,\gamma} h(a^{-1}\gamma).$$

Soient  $x \in A$  tel que  $\pi(x) = 0$ ,  $a_0 \in G_0$  et  $\varepsilon > 0$ ; il existe un élément  $y$  de  $A$  tel que  $y_a = 0$  sauf pour un nombre fini d'éléments distincts  $a_1, \dots, a_n$  et éventuellement  $a_0$  et que l'on ait  $\|y - x\| \leq \varepsilon$ . Comme

$$\pi(y) = \sum_a T_{\mathcal{F}_{y_a}} \pi(a, e_1)$$

on a, pour tout  $h = (h(\gamma)) \in H$  et pour presque tout  $\gamma$  :

$$(\pi(y)h)(\gamma) = \sum_a r_{a^{-1}}(\gamma)^{\frac{1}{2}} \mathcal{F}_{y_a}(\gamma) U_{a,\gamma} h(a^{-1}\gamma).$$

D'après l'hypothèse et le lemme de Zorn il existe une suite  $(E_j)$  de parties mesurables de  $\hat{G}_1$ , deux à deux disjointes, telles que  $\cup E_j$  soit de complémentaire négligeable et que l'on ait, pour tout  $i = 1, 2, \dots, n$  et pour tout  $j$  :

$$a_i a_0^{-1} E_j \cap E_j = \emptyset;$$

choisissons  $j$  arbitrairement et  $h \in H$  tel que

$$\|h(\gamma)\| = \begin{cases} 1 & \text{si } \gamma \in a_0^{-1} E_j \\ 0 & \text{sinon;} \end{cases}$$

on a alors

$$\|\pi(y)h\|^2 \leq \varepsilon^2 \|h\|^2 = \varepsilon^2 \mu(a_0^{-1} E_j).$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} \|\pi(y)h\|^2 &= \int \left\| \sum_a r_{a^{-1}}(\chi)^{\frac{1}{2}} \mathcal{F}y_a(\chi) U_{a,\chi} h(a^{-1}\chi) \right\|^2 d\mu(\chi) \\ &\geq \int_{E_j} \left\| \sum_a r_{a^{-1}}(\chi)^{\frac{1}{2}} \mathcal{F}y_a(\chi) U_{a,\chi} h(a^{-1}\chi) \right\|^2 d\mu(\chi) \\ &= \int_{E_j} r_{a_0^{-1}}(\chi)^{\frac{1}{2}} |\mathcal{F}y_{a_0}(\chi)|^2 d\mu(\chi) \\ &= \int_{a_0^{-1}E_j} |\mathcal{F}y_{a_0}(a_0\chi)|^2 d\mu(\chi) \end{aligned}$$

et comme ceci est vrai pour tout  $j$ :

$$\int |\mathcal{F}y_{a_0}(a_0\chi)|^2 d\mu(\chi) \leq \varepsilon^2.$$

D'autre part on a  $\|x_a - y_a\|_{A_i} \leq \varepsilon$  pour tout  $a$ , et en particulier

$$|\mathcal{F}x_{a_0}(a_0\chi) - \mathcal{F}y_{a_0}(a_0\chi)| \leq \varepsilon$$

pour tout  $\chi$ ; donc

$$\left( \int |\mathcal{F}x_{a_0}(a_0\chi)|^2 d\mu(\chi) \right)^{\frac{1}{2}} \leq 2\varepsilon$$

et, vu l'arbitraire de  $\varepsilon$

$$\int |\mathcal{F}x_{a_0}(a_0\chi)|^2 d\mu(\chi) = 0;$$

par suite

$$\int |\mathcal{F}x_{a_0}(\chi)|^2 d\mu(\chi) = 0$$

et enfin

$$\pi((x_{a_0})^{e_0}) = 0.$$

Enfin l'égalité  $I = \Pi' \Pi(I)$  résulte de ce qui précède et du lemme 2 du § 1.

## 2. Représentations factorielles normales relativement à $A'$ .

On désigne par  $A'$  la sous-algèbre de  $A$  formée des éléments  $x$  tels que  $x_a$  soit nul sauf pour un nombre fini d'éléments  $a$ ; une représentation factorielle  $\pi$  de  $G$  sera dite *normale relativement à  $A'$*  si,  $\mathfrak{m}$  étant l'idéal de définition de la trace canonique du facteur engendré par  $\pi(A)$ , on a  $\pi(A') \cap \mathfrak{m} \neq \{0\}$ .

On n'est malheureusement pas parvenu à déterminer si toute représentation factorielle normale relativement à  $A$  l'est aussi relativement à  $A'$ .

LEMME 2. — Soient  $\pi$  une représentation de  $G$ ,  $\alpha$  l'algèbre de von Neumann engendrée par  $\pi(A)$ ,  $\text{Tr}$  une trace normale sur  $\alpha$ ; on suppose que la classe de mesures sur  $\hat{G}_1$  associée à  $\pi|_{G_1}$  vérifie la condition du lemme 1. Alors pour  $x \in A'^+$  on a

$$\text{Tr } \pi(x) = \text{Tr } \pi((x_{e_0})^{e_0}).$$

Soit  $x \in A'^+$  tel que  $x_a = 0$  sauf pour  $a = a_1, \dots, a_n$ ; on a

$$\pi(x) = \sum_{i=1}^n \pi((x_{a_i})^{e_0}) \pi(a_i, e_1).$$

D'autre part il existe en vertu du théorème de Zorn une suite  $(E_j)$  de projecteurs de l'algèbre de von Neumann engendrée par  $\pi(A^{e_0})$ , deux à deux orthogonaux, de somme 1 et tels que  $E_j$  soit orthogonal à  $\pi(a_i, e_1) E_j \pi(a_i, e_1)^{-1}$  pour tout  $j$  et tout  $i$  vérifiant  $1 \leq i \leq n$  et  $a_i \neq e_0$ . On a alors

$$\begin{aligned} E_j \pi(x) E_j &= \sum_{i=1}^n \pi((x_{a_i})^{e_0}) E_j \pi(a_i, e_1) E_j \\ &= E_j \pi((x_{e_0})^{e_0}) E_j \\ \text{Tr } \pi(x) &= \sum_j \text{Tr} (E_j \pi(x) E_j) \\ &= \sum_j \text{Tr} (E_j \pi((x_{e_0})^{e_0}) E_j) \\ &= \text{Tr } \pi((x_{e_0})^{e_0}). \end{aligned}$$

*Définition.* — Une mesure positive  $\mu$  définie sur une partie ouverte invariante  $\Omega$  de  $\hat{G}_1$  sera dite vérifier la condition (\*) si pour tout élément  $a$  de  $G_0$  différent de  $e_0$  et toute partie  $\mu$ -mesurable non négligeable  $E$  de  $\Omega$  il existe une partie  $\mu$ -mesurable non négligeable  $E'$  de  $E$  telle que  $aE' \cap E' = \emptyset$ .

PROPOSITION 1. — (i) Soit  $\mu$  une mesure positive, invariante, ergodique et vérifiant la condition (\*), définie sur un ouvert invariant  $\Omega$  de  $\hat{G}_1$ ; la formule

$$(\pi(a, b)\varphi)(a', \chi) = \langle \chi, b \rangle \varphi(a^{-1}a', a^{-1}\chi)$$

définit une représentation  $\pi$  de  $G$  dans  $L^2(G_0) \otimes L^2(\Omega, \mu)$ ; cette représentation est factorielle et normale relativement à  $A'$ ; son caractère  $\lambda$  dans  $A$  est donné par

$$\lambda(x) = \mu(\mathcal{F}x_{e_0} | \Omega) \quad \text{pour} \quad x \in A^+;$$

elle est de type I (resp. II) si et seulement si  $\mu$  est atomique

(resp. diffuse), et de type fini si et seulement si  $\mu$  est bornée (et par conséquent prolongeable à  $\hat{G}_1$ ).

(ii) Si l'on définit de la même façon  $\Omega'$ ,  $\mu'$ ,  $\pi'$ ,  $\pi'$  est quasi-équivalente à  $\pi$  si et seulement si  $\mu$  et  $\mu'$  induisent sur  $\Omega \cap \Omega'$  des mesures proportionnelles et non nulles.

(iii) Toute classe de quasi-équivalence de représentations factorielles normales relativement à  $A'$ , telle que la classe de mesures correspondante sur  $\hat{G}_1$  vérifie la condition (\*), s'obtient de cette façon.

*Démonstration.* — (i) Soit  $\mu$  une mesure positive invariante (non nécessairement ergodique) définie sur un ouvert invariant  $\Omega$ ; l'espace  $H = L^2(G_0) \otimes L^2(\Omega, \mu)$  est somme hilbertienne d'espaces  $H_a (a \in G_0)$ , images de  $L^2(\Omega, \mu)$  par des isomorphismes évidents; pour  $a \in G_0$  soient  $U_a$  l'opérateur unitaire dans  $L^2(\Omega, \mu)$  défini par

$$(U_a \varphi)(\chi) = \varphi(a^{-1}\chi)$$

et  $\tilde{U}_a$  l'opérateur unitaire dans  $H$  représenté par la matrice

$$(U_a)_{a_1, a_2} = \begin{cases} U_a & \text{si } a_1 a_2^{-1} = a \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour  $f \in L^\infty(\Omega, \mu)$  soient  $T_f$  l'opérateur de multiplication par  $f$  dans  $L^2(\Omega, \mu)$  et  $\tilde{T}_f$  l'opérateur analogue dans  $H$ . L'opérateur  $\pi(a, b)$  de l'énoncé n'est autre que  $\tilde{T}_{(\chi, b)} \tilde{U}_a$  et on vérifie immédiatement que  $\pi$  est une représentation de  $G$  dans  $H$ . L'ensemble  $\pi(G)$  engendre la même algèbre de von Neumann, soit  $\alpha$ , que les  $\tilde{U}_a (a \in G_0)$  et les  $T_f (f \in L^\infty(\Omega, \mu))$ . D'après [4], ch. 1, § 9, prop. 1 (ou encore [29], lemme 12-4-3) il existe une trace  $\text{Tr}$ , normale, fidèle et semi-finie sur  $\alpha$  telle que, si  $T \in \alpha^+$  est représenté par une matrice  $T_{a_1, a_2} = T_{a_1 a_2^{-1}}$  et si  $T_{e_0}$  est l'opérateur de multiplication par  $f \in L^\infty(\Omega, \mu) (f \geq 0)$ , on ait

$$\text{Tr } T = \mu(f);$$

pour  $x \in A'$ ,  $\pi(x)$  est représenté par la matrice

$$(\pi(x))_{a_1, a_2} = T_{\mathcal{F}x a_1 a_2^{-1}} U_{a_1 a_2^{-1}}$$

et cette propriété s'étend par continuité à tout  $x \in A$ ; on a donc, pour  $x \in A^+$ :

$$\text{Tr } \pi(x) = \mu(Fx_{e_0} | \Omega).$$

Supposons maintenant que  $\mu$  soit ergodique et vérifie la condition (\*); d'après [4], p. 134,  $\alpha$  est un facteur, et  $\pi$  est factorielle et normale relativement à  $A'$  (et même relativement à  $A^{\circ}$ ). L'assertion relative au type de  $\pi$  résulte de [4], ch. I, § 9, prop. 3 (ou encore de [29], lemme 13-1-2) dans le cas où  $\mu$  est diffuse, et de [29], lemme 13-1-1 dans le cas où  $\mu$  est atomique.

(ii) Définissons de même  $\Omega', \mu', \pi'$ ; si  $\mu$  et  $\mu'$  induisent sur  $\Omega \cap \Omega'$  des mesures proportionnelles et non nulles,  $\Omega \cap \Omega'$  est de complémentaire négligeable pour  $\mu$  et  $\mu'$  et  $\pi'$  est équivalente à  $\pi$ .

Réciproquement supposons  $\pi$  et  $\pi'$  quasi-équivalentent  $\Omega \cap \Omega'$  est de complémentaire négligeable pour  $\mu$  et  $\mu'$ , car si par exemple  $\Omega \cap \Omega'$  était  $\mu$ -négligeable  $\Omega'$  ne rencontrerait pas le support de  $\mu$ ; de plus les mesures induites sur  $\Omega \cap \Omega'$  sont proportionnelles puisque  $\text{Tr}' \pi'(x)$  est proportionnel à  $\text{Tr} \pi(x)$  pour tout  $x \in A$ .

(iii) Soient  $\pi'$  une représentation possédant les propriétés de l'énoncé,  $H'$  son espace  $\alpha'$  l'algèbre de von Neumann engendrée par  $\pi'(A)$ ,  $\text{Tr}'$  la trace canonique sur  $\alpha'$ ,  $m'$  son idéal de définition,  $C'$  la classe de mesures sur  $\hat{G}_1$  associée à  $\pi'|_{G_1}$ ,  $F'$  son support.

D'après le lemme 2, si  $m_0 = m' \cap \pi'(A^{\circ})$ , on a  $m_0 \neq 0$ ; soit  $E'$  le sous-ensemble fermé de  $F'$ , invariant par  $G_0$ , correspondant à  $\bar{m}_0$ ;  $E'$  est  $C'$ -négligeable puisque  $C'$  est ergodique; d'après [24], 25 D,  $m_0$  contient les  $T_f$  tels que  $f \in \mathfrak{K}(F' - E')$  et il existe une mesure positive invariante non nulle  $\mu_0$  sur  $F' - E'$  telle que

$$\text{Tr}' T_f = \mu_0(f) \quad \text{pour toute} \quad f \in \mathfrak{K}(F' - E').$$

Montrons que  $\mu_0 \in C'|F' - E'$  (classe des mesures induites sur  $F' - E'$ );  $C'|F'$  étant la classe des mesures basiques pour  $\pi'(A^{\circ})$  (cf. [4], ch. I, § 7), cela revient à démontrer que,  $g$  étant un élément fixé de  $\mathfrak{K}^+(F' - E')$ , pour  $h \in \mathfrak{K}^+(F' - E')$  et  $h \leq g$  on a

$$\text{Tr}' T_h \rightarrow 0 \iff (T_h \xi | \xi) \rightarrow 0 \quad \text{pour tout} \quad \xi \in H'.$$

Implication  $\implies$  : considérons  $m'^{\frac{1}{2}}$  comme une algèbre hilber-



tienne partout dense dans un espace hilbertien  $L$ ;  $T_h^{\frac{1}{2}}$  est de la forme  $U_\eta$  avec  $\eta \in L$  et on a  $\text{Tr}' T_h = (\eta|\eta)$ ; donc  $\eta \rightarrow 0$  et, pour tout  $\eta' \in m^{\frac{1}{2}}$ , on a

$$U_\eta \eta' = \eta \eta' \rightarrow 0;$$

comme  $\|U_\eta\|$  est bornée,  $U_\eta$  tend fortement vers 0 et  $T_h$  tend faiblement vers 0.

Implication  $\Leftarrow$ : il existe une suite  $(\xi_i)$  d'éléments de  $H'$  telle que pour tout  $T \in \alpha'^+$  on ait

$$\text{Tr}' T = \sum_i (T \xi_i | \xi_i)$$

et l'assertion résulte du fait que l'on a

$$(T_h \xi_i | \xi_i) \leq (T_g \xi_i | \xi_i)$$

et

$$\sum_i (T_g \xi_i | \xi_i) = \text{Tr}' T_g < +\infty.$$

Par conséquent  $\mu_0$  est ergodique et vérifie la condition (\*) et en la prolongeant par 0 dans  $\hat{G}_1 - F'$  on obtient une mesure  $\mu$  sur  $\Omega = \hat{G}_1 - E'$  satisfaisant à toutes les conditions de l'énoncé (i).

Remarquons que l'on a

$$\text{Tr}' \pi'(y) = \mu(\mathcal{F}y_{e_0} | \Omega)$$

pour tout élément  $y$  positif de  $A^{e_0}$ ; en effet soit  $M$  l'ensemble des  $\varphi \in \mathcal{K}(F' - E')$  tels que  $0 \leq \varphi \leq \mathcal{F}y_{e_0}$ ; on a

$$\begin{aligned} \text{Tr}' \pi'(y) &= \text{Tr}' T_{\mathcal{F}y_{e_0}} = \sup_{\varphi \in M} \text{Tr}' T_\varphi \\ \mu(\mathcal{F}y_{e_0} | \Omega) &= \sup_{\varphi \in M} \mu_0(\varphi) \end{aligned}$$

et

$$\text{Tr}' T_\varphi = \mu_0(\varphi)$$

d'après la définition de  $\mu_0$ .

On a alors, en vertu du lemme 2 :

$$\text{Tr}' \pi'(x) = \mu(\mathcal{F}x_{e_0} | \Omega)$$

pour tout  $x \in A'^+$ .

Soit maintenant  $\pi$  la représentation obtenue à partir de

$\mu$  et  $\text{Tr}$  la trace canonique sur le facteur engendré par  $\pi(A)$ ; on a, pour tout  $x \in A'^+$ :

$$\text{Tr } \pi(x) = \mu(\mathcal{F}x_0 | \Omega) = \text{Tr}' \pi'(x)$$

et  $\pi'$  est quasi-équivalente à  $\pi$  d'après la prop. 5 (ch. 1, § 1).

*Remarque 1.* — Soit  $\rho$  la représentation de  $G_1$  dans  $L^2(\Omega, \mu)$  définie par

$$(\rho(b)\psi)(\chi) = \langle \chi, b \rangle \psi(\chi);$$

la représentation  $\pi$  de la prop. 1 est équivalente à la représentation  $\tilde{\rho}$  induite par  $\rho$ . En effet  $\tilde{\rho}$  agit dans l'espace des applications  $F$  de  $G$  dans  $L^2(\Omega, \mu)$  vérifiant

$$F(a, b'b)(\chi) = \langle \chi, b' \rangle F(a, b)(\chi)$$

et

$$\sum_a \|F(a, b)\|^2 < + \infty$$

(ce nombre est indépendant de  $b$ );  $\tilde{\rho}$  est définie par

$$(\tilde{\rho}(a, b)F)(a', b') = F(a'a, b'.a'b)$$

et on obtient un opérateur d'entrelacement en associant à toute  $F$  l'élément  $\varphi$  de  $L^2(G_0) \otimes L^2(\Omega, \mu)$  défini par

$$\varphi(a, \chi) = F(a^{-1}, e_1)(a^{-1}\chi).$$

*Remarque 2.* — La représentation  $\pi$  de la prop. 1 est normale relativement à  $L^1(G)$ . Soient en effet  $\chi$  un point du support de  $\mu$  et  $U$  un voisinage ouvert relativement compact de  $\chi$  dans  $\Omega$ ; il existe ([24], 36 D) un élément  $x$  de  $L^1(G_1)$  tel que  $\mathcal{F}x$  soit égale à 1 en  $\chi$  et en 0 en dehors de  $U$ ; alors  $(xx^*)^{e_0} \in L^1(G)$  et on a

$$0 < \text{Tr } \pi((xx^*)^{e_0}) = \mu(|\mathcal{F}x|^2) < + \infty.$$

**THÉORÈME 1.** — *Supposons que toute mesure positive, quasi-invariante, ergodique et à support infini sur  $\hat{G}_1$  vérifie la condition (\*); alors la formule*

$$(\pi(a, b)\varphi)(a', \chi) = \langle \chi, b \rangle \varphi(a^{-1}a', a^{-1}\chi)$$

établit une correspondance biunivoque entre

a) l'ensemble des mesures positives, invariantes, ergodiques, diffuses et normées sur  $\hat{G}_1$ ;

b) l'ensemble des classes de quasi-équivalence de représentations factorielles de type  $II_1$  de  $G$ .

Résulte immédiatement de la prop. 1.

### 3. Représentations irréductibles telles que $\pi(A^{e_0})$ soit de rang fini.

PROPOSITION 2. — (i) Soient  $\mathcal{C}$  une trajectoire finie dans  $\hat{G}_1$ ,  $\chi_0$  un élément de  $\mathcal{C}$ ,  $S$  le stabilisateur de  $\chi_0$  dans  $G_0$ ,  $\rho$  une représentation irréductible de  $S$ ,  $\tilde{\rho}$  la représentation de  $S.G_1$  définie par

$$\tilde{\rho}(a, b) = \langle \chi_0, b \rangle \rho(a);$$

la représentation  $\pi$  de  $G$  induite par  $\tilde{\rho}$  est irréductible et  $\pi(A^{e_0})$  est de rang fini.

(ii) Supposons  $\mathcal{C}'$ ,  $\chi'_0$ ,  $S'$ ,  $\rho'$ ,  $\pi'$  définis de la même façon; pour que  $\pi'$  soit équivalente à  $\pi$  il faut et il suffit que  $\mathcal{C}' = \mathcal{C}$  et que,  $a_0$  étant un élément de  $G_0$  transformant  $\chi_0$  en  $\chi'_0$ , les représentations  $a \rightarrow \rho'(a)$  et  $a \rightarrow \rho(a_0^{-1}aa_0)$  de  $S'$  soient équivalentes.

(iii) Toute classe de représentations irréductibles de  $G$  telle que  $\pi(A^{e_0})$  soit de rang fini s'obtient de cette façon.

Démonstration. — (i) et (ii) résultent facilement de [27], p. 131-132.

(iii) : soit  $\pi$  une représentation irréductible de  $G$  telle que  $\pi(A^{e_0})$  soit de rang fini; l'ensemble  $F$  (cf. début du n° 1) est une partie finie de  $\hat{G}_1$ , invariante par  $G_0$ , qui est le support d'une mesure ergodique et par suite se réduit à une trajectoire finie; l'assertion résulte alors de [27], p. 131-132.

COROLLAIRE. — Si  $G_0$  est abélien, toute représentation irréductible  $\pi$  telle que  $\pi(A^{e_0})$  soit de rang fini est de dimension finie.

Remarque 1. — Calcul du caractère de  $\pi$ ,  $G_0$  étant supposé abélien.

La représentation  $\rho$  est alors un caractère  $\theta$  de  $S$ ;  $\pi$  agit dans  $L^2(\mathcal{C})$  et si  $a \in S$ ,  $\pi(a, b)$  permute effectivement les éléments de la base canonique de  $L^2(\mathcal{C})$ , donc est de trace nulle; reste à calculer  $\text{Tr } \pi(a, b)$  pour  $a \in S$ ; en vertu de [27] th. 7.1, la restriction de  $\pi$  à  $S.G_1$  est somme directe des représentations

$$(a, b) \rightarrow \langle \theta, a \rangle \langle a_0 \gamma_0, b \rangle$$

où  $a_0$  parcourt l'ensemble des classes à gauche modulo  $S$ ; on a donc, en notant  $p$  le nombre d'éléments de  $\mathcal{C}$  :

$$\text{Tr } \pi(a, b) = \begin{cases} \frac{1}{p} \langle \theta, a \rangle \sum_{\chi \in \mathcal{C}} \langle \chi, b \rangle & \text{si } a \in S \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

*Remarque 2.* — Supposons toujours  $G_0$  abélien; soit  $\mathcal{C}$  une trajectoire finie fixée dans  $\hat{G}_1$ ; pour tout  $\theta \in \hat{S}$  soit  $\pi_\theta$  la représentation de  $G$  obtenue à partir de  $\mathcal{C}$  et de  $\theta$ , et soit  $I_\theta$  son noyau dans  $A$ ;  $\Pi(I_\theta)$  — ensemble des  $x$  de  $A_1$  tels que  $\mathcal{F}x$  soit nulle sur  $\mathcal{C}$  — est indépendant de  $\theta$ , notons-le  $J$ ; on a

$$\Pi'(J) \subset I_\theta$$

pour tout  $\theta$  (mais pas l'égalité, puisque, les  $\pi_\theta$  étant deux à deux non équivalentes, les  $I_\theta$  sont deux à deux distincts).

On va montrer que  $\Pi'(J) = \bigcap_{\theta \in \hat{S}} I_\theta$ .

Soit  $\psi_\theta$  le caractère de  $\pi_\theta$  dans  $G$ ; on a

$$\psi_\theta(a, b) = \begin{cases} \frac{1}{p} \langle \theta, a \rangle \sum_{\chi \in \mathcal{C}} \langle \chi, b \rangle & \text{si } a \in S \\ 0 & \text{sinon;} \end{cases}$$

soit  $\lambda_\theta$  la forme linéaire positive correspondante sur  $A$ ; posons

$$\varphi(b) = \frac{1}{p} \sum_{\chi \in \mathcal{C}} \langle \chi, b \rangle \quad \text{pour } b \in G_1;$$

soit  $\alpha$  la forme linéaire positive correspondante sur  $A_1$  :

$$\alpha(y) = \frac{1}{p} \sum_{\chi \in \mathcal{C}} \mathcal{F}y(\chi) \quad \text{pour } y \in A_1;$$

posons

$$\psi(a, b) = \begin{cases} \varphi(b) & \text{si } a = e_0 \\ 0 & \text{sinon;} \end{cases}$$

soit  $\lambda$  la forme linéaire positive correspondante sur  $A$ ; on a

$$\lambda(x) = \alpha(x_{e_0})$$

pour  $x \in L^1(G)$ , puisqu'alors

$$\lambda(x) = \sum_{a, b} \psi(a, b) x(a, b) = \sum_b \varphi(b) x(e_0, b)$$

et, par continuité, pour tout  $x$  de  $A$ .

D'autre part pour  $(a, b) \in G$

$$\psi(a, b) = \int \psi_\theta(a, b) d\theta$$

d'où, pour  $x \in L^1(G)$  :

$$\lambda(x) = \sum_{a, b} \psi(a, b)x(a, b) = \int \sum_{a, b} \psi_\theta(a, b)x(a, b) d\theta = \int \lambda_\theta(x) d\theta;$$

soit maintenant  $x \in A$  et soit  $x_n \rightarrow x$  où  $x_n \in L^1(G)$ ; on a  $\lambda_\theta(x_n) \rightarrow \lambda_\theta(x)$  pour tout  $\theta \in \hat{S}$  et  $|\lambda_\theta(x_n)| \leq \|x_n\|$ , donc

$$\lambda(x) = \lim \lambda(x_n) = \lim \int \lambda_\theta(x_n) d\theta = \int \lambda_\theta(x) d\theta.$$

Soit alors  $x \in \bigcap_{\theta \in \hat{S}} I_\theta$ ; on a  $\lambda_\theta(xx^*) = 0$  pour tout  $\theta$ , d'où  $\lambda(xx^*) = 0$  et  $\alpha((xx^*)_{e_a}) = 0$ ; mais on a pour tout  $a$  (§ 1, n° 1) :

$$x_a x_a^* \leq (xx^*)_{e_a};$$

par conséquent pour tout  $a$

$$\begin{aligned} \alpha(x_a x_a^*) &= 0 \\ \sum_{\chi \in \mathcal{C}} |\mathcal{F}x_a(\chi)|^2 &= 0 \end{aligned}$$

autrement dit  $x \in \Pi'(J)$ .

#### 4. Représentations irréductibles normales de $A$ .

Soient  $\mu$  une mesure positive quasi-invariante sur  $\hat{G}_1$  et  $r_a$  (pour tout  $a \in G_0$ ) une fonction localement intégrable telle que

$$d\mu(a\chi) = r_a(\chi) d\mu(\chi);$$

la formule

$$(\pi(a, b)\varphi)(\chi) = r_{a^{-1}}(\chi)^{\frac{1}{2}} \langle \chi, b \rangle \varphi(a^{-1}\chi)$$

définit une représentation  $\pi$  de  $G$  dans  $L^2(\hat{G}_1, \mu)$ ; le spectre de  $\pi(A^{e_0})$  s'identifie au support de  $\mu$  qui appartient à la classe  $C$  associée à  $\pi$ ;  $\pi$  est irréductible si et seulement si  $\mu$  est ergodique (cf. [36], th. 4.1).

Dans tout ce numéro on supposera  $\mu$  concentrée sur une trajectoire  $\mathcal{C}$ ;  $\mathcal{C}$  étant dénombrable, chacun de ses points a une masse  $> 0$ ;  $\pi$  est irréductible et sa classe d'équivalence, qui ne dépend que de  $\mathcal{C}$ , sera désignée par  $\pi_{\mathcal{C}}$ .

Si le stabilisateur dans  $G_0$  de tout élément de  $\mathcal{C}$  se réduit à  $\{e_0\}$ ,  $\pi_{\mathcal{C}}$  est induite par la représentation  $b \rightarrow \langle \chi, b \rangle$  de  $G_1$  où  $\chi$  est un élément quelconque de  $\mathcal{C}$ .

LEMME 3. — *Si  $\mathcal{C}$  est discrète (en tant que sous-espace topologique de  $\hat{G}_1$ ),  $\pi_{\mathcal{C}}$  est normale; la réciproque est vraie si les stabilisateurs des éléments de  $\mathcal{C}$  dans  $G_0$  sont des sous-groupes distingués (et par conséquent identiques).*

Supposons d'abord  $\mathcal{C}$  discrète;  $\pi(A^c)$  contient l'opérateur (de rang 1) de multiplication par une fonction  $\varphi \in L_{\infty}(\hat{G}_1)$  différente de 0 en un seul point de  $\mathcal{C}$ , et par suite  $\pi$  est normale.

Supposons maintenant  $\pi$  normale; soit  $\chi_0$  un point de  $\mathcal{C}$ ; pour tout point  $\chi$  de  $\mathcal{C}$  notons  $\varphi_{\chi}$  l'élément de  $L^2(\hat{G}_1, \mu)$  égal à 1 en  $\chi$  et à 0 ailleurs; l'algèbre  $\pi(A)$  contient tous les opérateurs compacts dans  $L^2(\hat{G}_1, \mu)$  (cf. ch. I, § 1, n° 2) et en particulier l'opérateur P de projection sur la droite contenant  $\varphi_{\chi_0}$ ; pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe donc un élément  $x$  de A tel que  $x_a = 0$ , sauf pour un nombre fini de valeurs de  $a$  et que l'on ait

$$\|\pi(x) - P\| \leq \varepsilon;$$

pour tout  $\psi \in L^2(\hat{G}_1, \mu)$  on a

$$\begin{aligned} (\pi(x)\psi)(\chi) &= \sum_a r_{a^{-1}}(\chi)^{\frac{1}{2}} \mathcal{F}x_a(\chi) \psi(a^{-1}\chi) \\ ((\pi(x) - P)\varphi_{\chi_0})(\chi) &= \begin{cases} \sum_a r_{a^{-1}}(\chi)^{\frac{1}{2}} \mathcal{F}x_a(\chi) & \text{si } \chi \neq \chi_0 \\ \sum_a r_{a^{-1}}(\chi)^{\frac{1}{2}} \mathcal{F}x_a(\chi) - 1 & \text{si } \chi = \chi_0 \end{cases} \end{aligned}$$

(la somme est prise pour  $a\chi_0 = \chi$ ) et, pour  $\chi_1 \neq \chi_0$ :

$$((\pi(x) - P)\varphi_{\chi_1})(\chi) = \sum_a r_{a^{-1}}(\chi)^{\frac{1}{2}} \mathcal{F}x_a(\chi)$$

(la somme étant prise pour  $a\chi_1 = \chi$ ).

On obtient donc, en tenant compte du fait que  $r_{a^{-1}}(\chi) = \mu(a^{-1}\chi)/\mu(\chi)$ :

$$(1) \quad \varepsilon^2 \mu(\chi_0) \geq \|(\pi(x) - P)\varphi_{\chi_0}\|^2 \geq \mu(\chi_0) |\sum_a \mathcal{F}x_a(\chi_0) - 1|^2$$

(la somme étant prise pour  $a\chi_0 = \chi_0$ ) et

$$(2) \quad \varepsilon^2 \mu(\chi_1) \geq \|(\pi(x) - P)\varphi_{\chi_1}\|^2 \geq \mu(\chi_1) |\sum_a \mathcal{F}x_a(\chi_1)|^2$$

(la somme étant prise pour  $a\chi_1 = \chi_1$ ).

Si on suppose identiques les stabilisateurs dans  $G_0$  des éléments de  $\mathcal{C}$  on a

$$\sum_{\alpha\lambda_\alpha=\lambda_0} \mathcal{F}x_\alpha = \sum_{\alpha\lambda_\alpha=\lambda_1} \mathcal{F}x_\alpha;$$

cette fonction étant continue, les inégalités (1) et (2) entraînent que  $\lambda_0$  est un point isolé de  $\mathcal{C}$ , donc que  $\mathcal{C}$  est discrète.

LEMME 4. — *Supposons  $\mathcal{C}$  discrète; alors  $\pi_{\mathcal{C}}(A)$  est identique à l'algèbre des opérateurs compacts si et seulement si  $\mathcal{C}$  est fermée.*

Si  $\mathcal{C}$  n'est pas fermée, il existe une suite  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  de points distincts de  $\mathcal{C}$  convergeant vers un point  $\lambda'$  de  $\hat{G}_1$  et un élément  $x$  de  $A_1$  tel que  $x(\lambda) = 1$  pour  $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \dots$  et  $\lambda'$ ; alors  $\pi(x^{e_0})$  n'est pas compact.

Supposons maintenant  $\mathcal{C}$  fermée; pour montrer que  $\pi(x)$  est compact pour tout  $x$  de  $A$  il suffit de le vérifier pour les éléments  $\pi(y^a)$  où  $y \in A_1$  et, en vertu de la formule (4') du § 1, n° 2, pour les éléments  $\pi(y^{e_0})$  où  $y \in A_1$ ; mais alors  $\pi(y^{e_0}) = T\mathcal{F}$ , et  $\mathcal{F}y$  est limite uniforme de fonctions  $\varphi$  de  $\mathcal{K}(\hat{G})$ ; et pour une telle  $\varphi$ ,  $T_\varphi$  est compact puisque le support de  $\varphi$  ne contient qu'un nombre fini de points de  $\mathcal{C}$ .

PROPOSITION 3. — *On suppose que le stabilisateur dans  $G_0$  de tout élément de  $\hat{G}_1$  dont la trajectoire est infinie se réduit à  $\{e_0\}$ . Alors la construction du début du numéro met en correspondance biunivoque.*

a) les trajectoires infinies discrètes  $\mathcal{C}$  dans  $\hat{G}_1$ .

b) les classes d'équivalence de représentations irréductibles normales  $\pi$  telles que  $\pi(A^{e_0})$  soit de rang infini et dont le noyau  $I$  vérifie  $\Pi'\Pi(I) = I$ ; l'algèbre  $\pi(A)$  est identique à l'algèbre des opérateurs compacts si et seulement si  $\mathcal{C}$  est fermée.

La dernière assertion a déjà été démontrée (lemme 4).

Si  $\mathcal{C}$  est une trajectoire infinie discrète,  $\pi$  est irréductible (cf. début du numéro) et  $\pi(A^{e_0})$  a pour spectre l'adhérence de  $\mathcal{C}$ , donc est de rang infini; si  $I$  est le noyau de  $\pi$  dans  $A$  on a  $\Pi'\Pi(I) = I$  en vertu du lemme 1 et de l'hypothèse faite sur les stabilisateurs; enfin la classe d'équivalence de  $\pi$  ne dépend que de  $\mathcal{C}$  et la détermine entièrement.

Soit maintenant  $\rho$  une représentation irréductible normale telle que  $\rho(A^{e_0})$  soit de rang infini et dont le noyau  $J$  vérifie

$\Pi'\Pi(J) = J$ ; le sous-ensemble fermé invariant  $F$  de  $\hat{G}_1$  qui s'identifie au spectre de  $\rho(A^{e_0})$  est infini et est le support d'une mesure ergodique;  $F$  est donc (cf. [21], p. 29) l'adhérence d'une trajectoire  $\mathcal{C}$ ; si  $I$  est le noyau de  $\pi_{\mathcal{C}}$  on a  $I = \Pi'\Pi(I)$  et de plus  $\Pi(I) = \Pi(J)$  (= ensemble des  $x \in A_1$  tels que  $\mathcal{F}x$  soit nulle sur  $F$ ); par conséquent  $I = J$  et comme  $\rho$  est normale,  $\rho$  est équivalente à  $\pi_{\mathcal{C}}$  (cf. [12], dém. du th. 1, à 5  $\implies$  a 6); enfin  $\mathcal{C}$  est discrète en vertu du lemme 3.

*Remarque.* — Si  $G_1$  est discret,  $\hat{G}_1$  est compact et  $\pi_{\mathcal{C}}(A)$  contient toujours *strictement* l'algèbre des opérateurs compacts.

**THÉORÈME 2.** — *Supposons que toute mesure positive sur  $\hat{G}_1$ , quasi-invariante, ergodique et à support infini vérifie la condition (\*); alors l'application  $\mathcal{C} \rightarrow \pi_{\mathcal{C}}$  est une bijection de l'ensemble des trajectoires infinies discrètes de  $G_0$  dans  $\hat{G}_1$  sur l'ensemble des classes d'équivalence de représentations irréductibles normales  $\pi$  telles que  $\pi(A^{e_0})$  soit de rang infini; le caractère  $\lambda$  de  $\pi_{\mathcal{C}}$  dans  $A$  est donné par*

$$\lambda(x) = \sum_{\chi \in \mathcal{C}} \mathcal{F}x_{e_0}(\chi) \quad \text{pour tout } x \in A^+;$$

*enfin l'algèbre  $\pi_{\mathcal{C}}(A)$  est identique à l'algèbre des opérateurs compacts si et seulement si  $\mathcal{C}$  est fermée.*

L'hypothèse de la prop. 3 est vérifiée puisque toute trajectoire infinie porte une mesure positive, quasi-invariante, ergodique et à support infini; mise à part l'assertion relative au caractère, le théorème résulte donc de la prop. 3 et du lemme 1. Calculons maintenant le caractère de  $\pi_{\mathcal{C}}$ . Celle-ci est factorielle et normale relativement à  $A^{e_0}$  (cf. dém. du lemme 3) et *a fortiori* relativement à  $A'$ ; elle est donc quasi-équivalente à une représentation  $\pi$  construite par la méthode de la prop. 1 à partir d'une mesure  $\mu$  sur un ouvert  $\Omega$ ;  $\pi$  étant de type I,  $\mu$  est concentrée sur une trajectoire infinie  $\mathcal{C}_1$ ;  $\pi$  et  $\pi_{\mathcal{C}}$  ayant même noyau,  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}_1$  ont même adhérence; supposons  $\mathcal{C} \neq \mathcal{C}_1$ ; soit  $\chi$  un point de  $\mathcal{C}$ ; il existe une suite  $\chi_n$  de points de  $\mathcal{C}_1$  convergeant vers  $\chi$ ; comme chaque  $\chi_n$  est limite d'une suite de points de  $\mathcal{C}$  différents de  $\chi$ , il en est de même de  $\chi$ , ce qui contredit le fait que  $\mathcal{C}$  est discrète; on a donc  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1$ . La formule résulte alors de la prop. 1.



**PROPOSITION 4.** — *Supposons, en plus de l'hypothèse du th. 2, que  $G_0$  soit abélien; soit  $V$  l'adhérence de la réunion des trajectoires non discrètes dans  $\hat{G}_1$  et soit  $N$  l'idéal bilatère fermé des  $x \in A$  pour lesquels  $\mathcal{F}x_a$  est nulle sur  $V$  pour tout  $a$ ;  $N$  est le plus grand idéal GCR de  $A$ .*

Il s'agit de démontrer que

a)  $N$  est GCR, ou encore que si  $\pi$  est une représentation irréductible de  $A$  non nulle sur  $N$ ,  $\pi(N)$  contient un opérateur compact non nul; ce fait étant trivial si  $\pi$  est de dimension finie, nous supposerons  $\pi$  de dimension infinie; soient  $I$  le noyau de  $\pi$  et  $E$  le sous-ensemble fermé invariant de  $\hat{G}_1$  qui s'identifie au spectre de  $\pi(A^\circ)$ ; on a  $E \not\subset V$  car dans le cas contraire on aurait  $\Pi(N) \subset \Pi(I)$  et

$$N = \Pi' \Pi(N) \subset \Pi' \Pi(I) \subset I.$$

D'après le corollaire de la proposition 2,  $E$  est infini;  $E$  est l'adhérence d'une trajectoire  $\mathcal{C}$  infinie contenue dans  $\hat{G}_1 - V$ , donc discrète; d'après le lemme 1 on a  $I = \Pi' \Pi(I)$ ;  $\pi$  et  $\pi_{\mathcal{C}}$  ont même noyau et,  $\pi_{\mathcal{C}}$  étant normale, sont équivalentes; il reste à voir que  $\pi_{\mathcal{C}}(N)$  contient un opérateur compact non nul; soit  $\chi$  un point de  $\mathcal{C}$ ; il existe  $x \in A_1$  tel que  $\mathcal{F}x$  soit égale à 1 en  $\chi$  et nulle sur  $\mathcal{C} - \{\chi\}$  et sur  $V$ ; on a alors  $x^\circ \in N$  et  $\pi_{\mathcal{C}}(x^\circ)$  est un projecteur de rang 1.

b)  $A/N$  est NGCR, ou encore ([12], th. 1) : pour tout  $x \in A - N$  il existe une représentation irréductible non normale de  $A$  telle que

$$\pi(N) = \{0\}, \quad \pi(x) \neq 0;$$

or il existe un  $a \in G_0$  tel que  $\mathcal{F}x_a$  soit non identiquement nulle sur  $V$ , donc sur une trajectoire non discrète  $\mathcal{C}$ ;  $\pi_{\mathcal{C}}$  est non normale (lemme 3), nulle sur  $N$  et non nulle en  $x$ .

**COROLLAIRE.** — *Les hypothèses étant celles de la prop. 4.*

(i)  $A$  est GCR si et seulement si toutes les trajectoires de  $G_0$  sont discrètes;

(ii)  $A$  est CCR si et seulement si toutes les trajectoires sont discrètes et fermées;

(iii)  $A$  est NGCR si et seulement si la réunion des trajectoires non discrètes est partout dense dans  $\hat{G}_1$ .

5. Idéaux primitifs de A.

La prop. 2 ramène l'étude des idéaux primitifs I pour lesquels  $\Pi(I)$  est de codimension finie à l'étude des trajectoires finies dans  $\hat{G}$  et des représentations irréductibles de certains sous-groupes de  $G_0$ . Nous étudions ici les autres idéaux primitifs de A.

**THÉORÈME 3.** — *Supposons que toute mesure positive, quasi-invariante, ergodique et à support infini sur  $\hat{G}_1$  vérifie la condition (\*); soit F l'adhérence d'une trajectoire infinie  $\mathcal{C}$  dans  $\hat{G}_1$ ; le noyau de  $\pi_{\mathcal{C}}$  ne dépend que de F et est l'ensemble des  $x \in A$  tels que  $\mathcal{F}x_a$  soit nulle sur F pour tout a; nous le noterons  $I_F$ ; l'application  $F \rightarrow I_F$  est une bijection de l'ensemble des adhérences des trajectoires infinies dans  $\hat{G}_1$  sur l'ensemble des idéaux primitifs I de A tels que  $\Pi(I)$  soit de codimension infinie. Elle est décroissante;  $I_F$  est un idéal bilatère fermé maximal si et seulement si toute trajectoire contenue dans F est partout dense dans F.*

Si F est l'adhérence d'une trajectoire infinie  $\mathcal{C}$ , le noyau de  $\pi_{\mathcal{C}}$  est (lemme 1) l'ensemble des  $x \in A$  tels que  $\mathcal{F}x_a$  soit nulle sur  $\mathcal{C}$ , ou, ce qui est équivalent, sur F, pour tout a; et  $\Pi(I_F)$  est de codimension infinie.

Réciproquement soit I un idéal primitif de A tel que  $\Pi(I)$  soit de codimension infinie; I est de la forme  $I_F$  d'après la démonstration de la prop. 3. L'application  $F \rightarrow I_F$  est évidemment décroissante; elle est injective, car si  $I_{F_1} = I_{F_2}$ , on a en particulier  $\Pi(I_{F_1}) = \Pi(I_{F_2})$ , c'est-à-dire que pour  $y \in A_1$

$$\mathcal{F}y = 0 \text{ sur } F_1 \iff \mathcal{F}y = 0 \text{ sur } F_2.$$

Supposons que  $I_F$  soit un idéal bilatère fermé maximal et montrons que toute trajectoire  $\mathcal{C}'$  contenue dans F est partout dense dans F; supposons  $\mathcal{C}'$  non partout dense;  $\mathcal{C}'$  est nécessairement finie d'après ce qui précède; soit I' le noyau d'une représentation construite à partir de  $\mathcal{C}'$  (prop. 2); on a

$$\begin{aligned} \Pi(I') \supset \Pi(I_F) \\ I' \supset \Pi' \Pi(I') \supset \Pi' \Pi(I_F) = I_F \end{aligned}$$

d'où contradiction.

Supposons maintenant que toute trajectoire contenue dans

$F$  soit partout dense dans  $F$  et montrons que  $I_F$  est maximal dans l'ensemble des idéaux bilatères fermés de  $A$ ; supposons le contraire:  $I_F$  est strictement contenu dans un idéal primitif  $I'$  et  $\Pi(I')$  est nécessairement de codimension finie d'après ce qui précède;  $I'$  est le noyau d'une représentation irréductible construite à partir d'une trajectoire finie  $\mathcal{C}'$  et on a  $\Pi(I') \supset \Pi(I_F)$  d'où  $\mathcal{C}' \subset F$  ce qui est contradictoire.

*Remarque 1.* — On peut donner à propos de  $A/I_F$  des renseignements analogues à ceux, relatifs à  $A$ , qui sont énoncés dans la prop. 4 et son corollaire.

*Remarque 2.* — Considérons sur  $\hat{G}_1$  la relation d'équivalence  $R$  suivante:  $R(\chi, \chi')$  si et seulement si les trajectoires  $\mathcal{C}_\chi$  et  $\mathcal{C}_{\chi'}$  de  $\chi$  et  $\chi'$  ont même adhérence; soit  $Q$  la réunion des trajectoires infinies; l'application  $\chi \rightarrow I_{\overline{\mathcal{C}_\chi}}$  définit une bijection  $\Lambda$  de  $Q/R$  sur l'ensemble  $W$  des idéaux primitifs  $I$  tels que  $\Pi(I)$  soit de codimension infinie.

L'application  $\Lambda$  est un homéomorphisme si on munit  $Q/R$  de la topologie quotient de la topologie sur  $Q$  induite par celle de  $\hat{G}$  et  $W$  de la topologie de Jacobson.

*Démonstration.* — Pour tout  $\gamma \in Q/R$  on notera  $F_\gamma$  l'adhérence de la trajectoire d'un élément quelconque de  $\gamma$ ; on a alors  $\Lambda(\gamma) = I_{F_\gamma}$ ; on a aussi  $\bar{\gamma} = F_\gamma$  car d'une part  $\gamma$ , et par suite  $\bar{\gamma}$ , est contenu dans  $F_\gamma$ ; mais par ailleurs tout point de  $F_\gamma$  est limite de transformés de points de  $\gamma$ , donc limite de points de  $\gamma$ ; en définitive on a

$$\Lambda(\gamma) = I_{F_\gamma} = I_{\bar{\gamma}}.$$

Soit maintenant  $\Gamma$  une partie quelconque de  $Q/R$ ; posons

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma \\ \mathcal{E} &= \Lambda(\Gamma) = \text{ensemble des } I_{\bar{\gamma}} \text{ pour } \gamma \in \Gamma \\ \mathcal{J} &= \text{intersection des éléments de } \mathcal{E}. \end{aligned}$$

On a  $\overline{\mathcal{C}} = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \overline{\gamma}$  et  $\mathcal{J}$  est l'ensemble des  $x \in A$  tels que  $\mathcal{F}x_a$  soit nulle sur  $\mathcal{C}$  pour tout  $a$ .

Les propriétés suivantes sont alors équivalentes :

- $\Gamma$  est fermé dans  $Q/R$
  - $\mathcal{G}$  est fermé dans  $Q$
  - $\bar{\mathcal{G}} = Q \cap \bar{\mathcal{G}}$
  - pour tout  $\chi \in Q$  :  $\chi \in \bar{\mathcal{G}} \implies \chi \in \mathcal{G}$
  - $\gamma \in Q/R$  :  $\gamma \in \bar{\mathcal{G}} \implies \gamma \in \Gamma$
  - —  $\bar{\gamma} \in \bar{\mathcal{G}} \implies \gamma \in \Gamma$
  - —  $I_{\bar{\gamma}} \supset J \implies \gamma \in \Gamma$
  - —  $\Lambda(\gamma) \in \bar{\mathcal{E}} \implies \Lambda(\gamma) \in \mathcal{E}$
- $\mathcal{E}$  est fermé dans  $W$ .

*Remarque 3.* — Toute mesure positive ergodique définie sur un ouvert invariant de  $\hat{G}_1$  est concentrée sur une classe d'équivalence selon  $R$ .

Tout d'abord, pour toute partie fermée  $F$  de  $\hat{G}_1$ , l'ensemble  $A_F$  des  $\chi$  tels que  $\bar{\mathcal{C}}_\chi \subset F$  est fermé car

$$\chi \in A_F \iff a\chi \in F \quad \text{pour tout} \quad a \iff \chi \in \bigcap_a a^{-1}F;$$

par suite pour tout ouvert  $U$  l'ensemble  $B_U$  des  $\chi$  tels que  $\bar{\mathcal{C}}_\chi$  rencontre  $U$  est ouvert; soit  $(U_n)$  une base d'ouverts de  $\hat{G}_1$ ; posons  $B_n = B_{U_n}$ ; les  $B_n$  sont ouverts et saturés pour  $R$ ; ils séparent les classes d'équivalence selon  $R$ , car si  $\bar{\mathcal{C}}_{\chi_1} \neq \bar{\mathcal{C}}_{\chi_2}$ , il existe un indice  $n_0$  tel que

$$\bar{\mathcal{C}}_{\chi_1} \subset U_{n_0} \neq \emptyset \quad \text{et} \quad \bar{\mathcal{C}}_{\chi_2} \cap U_{n_0} = \emptyset,$$

donc

$$\chi_1 \in B_{n_0} \quad \text{et} \quad \chi_2 \notin B_{n_0}.$$

Soit maintenant  $\mu$  ergodique définie sur  $\Omega$ ; pour tout  $n$ ,  $B_n \cap \Omega$  est négligeable ou de complémentaire négligeable; posons

$$D_n = \begin{cases} \Omega - B_n \cap \Omega & \text{dans le premier cas;} \\ B_n \cap \Omega & \text{dans le second;} \end{cases}$$

$D = \bigcap_n D_n$  est de complémentaire négligeable et ne peut rencontrer plus d'une classe d'équivalence selon  $R$ , puisque les  $B_n$  séparent ces classes.

### § 3. Étude d'un exemple.

Prenons pour  $G_0$  le groupe  $Z$  (discret) des entiers, pour  $G_1$  le groupe discret des nombres rationnels dyadiques et comme opération  $a.b$  le produit ordinaire de  $2^a$  par  $b$ ; les hypothèses générales du § 2 sont satisfaites.

Toutes les classes d'éléments conjugués distinctes de  $\{e\}$  étant infinies, la représentation régulière gauche de  $G$  est factorielle et de type  $II_1$  (cf. [30], § 8, n° 5) et  $A$  est NGCR cor. du lemme 12 de [11]).

#### 1. Étude de $\hat{G}_1$ .

Le groupe  $G_1$  étant limite inductive de sous-groupes isomorphes à  $Z$ ,  $\hat{G}_1$  est limite projective de groupes isomorphes au tore  $T$ ; plus précisément, pour tout  $n \in Z$  soit  $Z_n$  le sous-groupe de  $G_1$  formé des éléments de la forme  $l/2^n$  ( $l \in Z$ ) et soit  $\Lambda_n$  l'homomorphisme de  $\hat{G}_1$  sur  $\hat{Z} = T$  défini par

$$\langle \Lambda_n(\chi), l \rangle = \langle \chi, l/2^n \rangle;$$

$\Lambda_n$  a pour noyau le sous-groupe orthogonal de  $Z_n$  et on a

$$\Lambda_{n-1}(\chi) = \Lambda_n\left(\frac{1}{2}\chi\right) = 2\Lambda_n(\chi).$$

Représentant les éléments de  $T$  par leurs développements binaires normalisés on peut écrire, pour tout  $\chi \in \hat{G}_1$

$$\begin{aligned} \Lambda_0(\chi) &= 0, a_1 a_2 \dots \\ \Lambda_n(\chi) &= 0, a_{-n+1} a_{-n+2} \dots; \end{aligned}$$

tout élément  $\chi$  de  $\hat{G}_1$  est ainsi représenté par un développement  $(a_n)_{n \in Z}$  avec  $a_n = 0$  ou  $1$  et  $a_n = 0$  pour une infinité d'indices positifs; chaque  $a_n$  est fonction borélienne de  $\chi$ .

On obtient un système fondamental de voisinages d'un élément  $\chi = (a_n)$  de la façon suivante :

a) si  $a_n = 1$  pour une infinité d'indices positifs, on prend  $q \in Z$ ,  $p \in Z^+$  et l'ensemble des  $\gamma' = (a'_i)$  vérifiant  $a'_i = a_i$  pour  $i = q, q+1, \dots, q+p$ ;

b) si  $a_{m-1} = 1$  et  $a_j = 0$  pour  $j \geq m$ , on prend  $q \leq m - 2$ ,  $p \geq m - q$  et l'ensemble des  $\chi' = (a'_n)$  vérifiant

ou bien  $a'_i = a_i$  pour  $i = q, q + 1, \dots, q + p$   
 ou bien  $a'_i = a_i$  pour  $i = q, q + 1, \dots, m - 2$ ,  $a'_{m-1} = 0$   
 et  $a'_j = 1$  pour  $j = m, m + 1, \dots, q + p$ .

Pour toute suite finie de 0 et de 1, soit  $S = (b_1, \dots, b_u)$ , on notera  $K_S$  l'ensemble des  $\chi = (a_n)$  vérifiant

$$a_1 = b_1, \dots, a_u = b_u;$$

tout ensemble ouvert dans  $\hat{G}_1$  est réunion d'ensembles  $K_S$  ou de transformés de tels ensembles par des éléments de  $G_0$ .

Si  $\chi = (a_n)$ , on a  $2^r \chi = (b_n)$  avec  $b_n = a_{-r+n}$ ; le stabilisateur de  $\chi$  dans  $G_0$  est non nul si et seulement si la suite  $(a_n)$  est périodique; si  $p$  est sa période, ce stabilisateur est  $p \cdot \mathbb{Z}$  et la trajectoire de  $\chi$  contient  $p$  éléments; si la suite  $(a_n)$  est non périodique, la trajectoire de  $\chi$  est infinie.

LEMME 1. — *Toute mesure positive  $\mu$  sur  $\hat{G}_1$  n'ayant de masse en aucun point à développement périodique vérifie la condition (\*) du § 2, n° 2.*

Soient  $r$  un entier non nul et  $E$  une partie  $\mu$ -mesurable non négligeable de  $\hat{G}_1$ ; pour tout entier  $i$  notons  $B_i$  (resp.  $B'_i$ ) l'ensemble  $\mu$ -mesurable des  $\chi = (a_n)$  vérifiant

$$a_i = 0 \quad \text{et} \quad a_{i-r} = 1 \quad (\text{resp. } a_i = 1 \text{ et } a_{i-r} = 0);$$

si  $\chi$  appartient au complémentaire de la réunion des  $B_i$  et des  $B'_i$ , son développement admet la période  $r$ ; ce complémentaire est donc  $\mu$ -négligeable et il existe un indice  $i$  tel que  $E \cap B_i$  ou  $E \cap B'_i$  soit non négligeable; or

$$2^r B_i \cap B_i = 2^r B'_i \cap B'_i = \emptyset.$$

## 2. Représentations factorielles de type II normales relativement à $A'$ .

PROPOSITION 1. — *Soit  $\mu$  une mesure positive, invariante, ergodique et diffuse définie sur une partie ouverte invariante  $\Omega$  de  $\hat{G}_1$ ; la formule*

$$(\pi(a, b)\varphi)(a', \chi) = \langle \chi, b \rangle \varphi(a^{-1}a', a^{-1}\chi)$$

défini une représentation de  $G$  dans  $L^2(G_0) \otimes L^2(\Omega, \mu)$ , facto-

rielle, de type II et normale relativement à  $A'$ ; elle est de type  $II_1$  si et seulement si  $\mu$  est bornée, i.e. prolongeable à  $\hat{G}_1$ ; son noyau est l'ensemble des  $x \in A$  tels que  $\mathcal{F}x_a$  soit nulle sur le support de  $\mu$  pour tout  $a$ ; son caractère est donné par

$$\lambda(x) = \mu(\mathcal{F}x_{e_0} | \Omega) \quad \text{pour tout } x \in A^+;$$

si on définit de la même façon  $\Omega'$ ,  $\mu'$ ,  $\pi'$ ,  $\pi$  et  $\pi'$  sont quasi-équivalentes si et seulement si  $\mu$  et  $\mu'$  induisent sur  $\Omega \cap \Omega'$  des mesures proportionnelles et non nulles; enfin toute classe de quasi-équivalence de représentations factorielles de type II normale relativement à  $A'$  s'obtient par ce procédé.

Résulte de la prop. 1 du § 2 et du lemme 1.

*Notations.* — Pour toute partie finie de  $Z$ :  $\delta = \{i_1, i_2, \dots, i_u\}$  avec  $i_1 < i_2 \dots < i_u$  et toute suite  $S = (b_1, \dots, b_u)$  d'éléments égaux à 0 ou à 1, on désignera par  $K_{\delta, S}$  l'ensemble des  $\gamma = (a_n)$  vérifiant

$$a_{i_i} = b_1, \dots, a_{i_u} = b_u.$$

LEMME 2. — Soit  $E$  la réunion d'une suite finie d'ensembles de la forme  $K_{\delta, S}$ ; alors  $E$  est la réunion d'une suite finie d'ensembles de cette forme deux à deux disjoints.

Soit  $E = \bigcup_{i=1}^n K_{\delta_i, S_i}$ ; posons  $\delta = \cup \delta_i$ ; soit  $p$  le nombre d'éléments de  $\delta$ ; quand  $S$  parcourt l'ensemble des suites de  $p$  éléments égaux à 0 ou à 1, les ensembles  $K_{\delta, S}$  forment une partition de  $\hat{G}_1$ ; chaque ensemble  $K_{\delta_i, S_i}$  étant réunion de certains ensembles  $K_{\delta, S}$ , il en est de même de  $E$ ; d'où le lemme.

LEMME 3. — Soient  $\mu$  une mesure positive sur  $\hat{G}_1$ ,  $U$  un ouvert dans  $\hat{G}_1$  et  $\varepsilon > 0$ ; il existe des ensembles  $K_{\delta_i, S_i}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) deux à deux disjoints, contenus dans  $U$  et tels que leur réunion  $E$  vérifie  $\mu(U - E) \leq \varepsilon$ .

D'après le n° 1,  $U$  est réunion d'ensembles de la forme  $\alpha.K_S$ , donc d'une suite  $K_{\delta_j, S_j}$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) et il existe une sous-suite finie dont la réunion  $B$  vérifie  $\mu(U - B) \leq \varepsilon$ ; le lemme résulte alors du précédent.

PROPOSITION 2. — L'algèbre  $A$  admet une famille non dénombrable de représentations factorielles de type  $II_1$ , fidèles et deux à deux non quasi-équivalentes.

Il suffit (prop. 1) de construire des mesures invariantes ergodiques sur  $\hat{G}_1$ , de support  $\hat{G}_1$  et deux à deux non proportionnelles.

Pour tout entier  $n$  soient  $X_n$  l'ensemble  $\{0, 1\}$  et  $\nu_n$  la mesure sur  $X_n$  définie par les masses  $\alpha$  en 0 et  $1 - \alpha$  en 1 ( $0 < \alpha < 1$ ); posons

$$X = \prod_{n \in \mathbb{Z}} X_n \quad \text{et} \quad \nu = \bigotimes_{n \in \mathbb{Z}} \nu_n;$$

le sous-ensemble  $X'$  de  $X$  formé des suites  $(x_n)$  telles que  $x_n$  soit nul pour une infinité d'indices positifs est de complémentaire  $\nu$ -négligeable; d'autre part on a une bijection continue évidente  $\Phi$  de  $X'$  sur  $\hat{G}_1$ ; prolongée arbitrairement sur  $X - X'$ ,  $\Phi$  devient une application  $\nu$ -mesurable de  $X$  sur  $\hat{G}_1$  et on peut considérer la mesure  $\mu$  sur  $\hat{G}_1$ , image de  $\nu$  par  $\Phi$  ([1], ch. 5, § 6, n° 1).

Pour tout ensemble  $K_{\delta, s}$  où  $S$  contient  $s$  fois 0 et  $t$  fois 1 on a

$$(K_{\delta, s}) = \alpha^s (1 - \alpha)^t > 0$$

et par suite  $\mu$  a pour support  $\hat{G}_1$ ; d'autre part  $\mu$  est évidemment invariante par  $G_0$ ; reste à voir que  $\mu$  est ergodique; cela résulte d'un théorème de Théorie des Probabilités ([23], 30.4), mais nous allons en donner une démonstration directe, d'ailleurs inspirée de celle de [20], p. 29.

Soit  $E$  une partie  $\mu$ -mesurable presque invariante par tout  $a \in G_0$  et soit  $\varepsilon > 0$ ; il existe un ouvert  $U$  tel que

$$E \subset U \quad \text{et} \quad \mu(U - E) \leq \varepsilon;$$

puis il existe (lemme 3) des ensembles  $K_{\delta_i, s_i}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) deux à deux disjoints, contenus dans  $U$  et dont la réunion  $B$  vérifie  $\mu(U - B) \leq \varepsilon$ . On a alors

$$(1) \quad \mu(|E - B|) \leq 2\varepsilon$$

( $|E - B|$  désigne la différence symétrique), d'où

$$\mu(|E - a.B|) \leq 2\varepsilon$$

et

$$(2) \quad \mu(|E - B \cap aB|) \leq 4\varepsilon$$

pour tout  $a \in G_0$ . Mais  $a.B$  est réunion d'ensembles de la forme



$K_{\sigma_i, s_i}$  où  $\sigma_i$  se déduit de  $\delta_i$  par une certaine translation, et on a

$$(B \cap aB) = \sum_{i,j} (K_{\delta_i, s_i} \cap K_{\sigma_j, s_j}).$$

Mais si  $a$  est suffisamment grand on a

$$\begin{aligned} \mu(K_{\delta_i, s_i} \cap K_{\sigma_j, s_j}) &= \mu(K_{\delta_i, s_i}) \mu(K_{\sigma_j, s_j}) \\ &= \mu(K_{\delta_i, s_i}) \mu(K_{\delta_j, s_j}) \end{aligned}$$

pour tout  $i$  et tout  $j$  égaux à  $1, 2, \dots, n$  et par suite

$$\mu(B \cap a.B) = \sum_{i,j} \mu(K_{\delta_i, s_i}) \mu(K_{\delta_j, s_j}) = (\mu(B))^2.$$

Étant donné l'arbitraire de  $\varepsilon$  et de  $a$ , et en vertu de (1) et (2), on en déduit que  $\mu(E) = (\mu(E))^2$  d'où  $\mu(E) = 0$  ou  $1$ .

*Remarque.* — On voit sur cet exemple que la propriété « toute représentation irréductible normale est déterminée à une équivalence près par la donnée de son noyau » ne se généralise pas aux représentations factorielles, même en remplaçant l'équivalence par la quasi-équivalence.

### 3. Représentations irréductibles de dimensions finies.

**PROPOSITION 3.** — Soient  $\mathcal{C}$  une trajectoire finie dans  $\hat{G}_1$ ,  $p$  le nombre de ses éléments,  $\chi_0$  un de ses éléments,  $\theta$  un élément du tore  $T$ ,  $\rho$  la représentation de  $pZ.G_1$  définie par

$$\rho(kp, b) = \exp(2\pi i k \theta) \langle \chi_0, b \rangle;$$

la représentation  $\pi$  de  $G$  induite par  $\rho$  est irréductible et de dimension  $p$ ; son caractère sur  $G$  est donné par

$$\psi(a, b) = \begin{cases} \frac{1}{p} \exp\left(2\pi i \frac{a}{p} \theta\right) \sum_{\chi \in \mathcal{C}} \langle \chi, b \rangle & \text{si } p \text{ divise } a, \\ 0 & \text{sinon;} \end{cases}$$

la classe d'équivalence de  $\pi$  ne dépend que du couple  $(\mathcal{C}, \theta)$  et le détermine entièrement; enfin toute classe de représentations irréductibles de dimension finie s'obtient de cette façon.

Résulte du § 2, n° 3 (prop. 2, cor. de la prop. 2 et rem. 1).

**COROLLAIRE.** — L'algèbre  $A$  admet un système complet de représentations irréductibles de dimensions finies.

En vertu de la rem. 2 du § 2, n° 3, il suffit de remarquer que la réunion des trajectoires finies, i.e. l'ensemble des éléments à développements périodiques, est partout dense dans  $\hat{G}_1$ .

*Remarque.* — Ceci résoud par la négative une conjecture de G. W. Mackey ([28], p. 154); en effet A admet un système complet de représentations irréductibles normales au sens de [14], mais  $\hat{A}$  n'est pas « lisse » puisque A n'est pas GCR (cf. [6], th. 1).

4. Représentations irréductibles normales de dimension infinie.

PROPOSITION 4. — Soit  $\mathcal{C}$  une trajectoire infinie discrète dans  $\hat{G}_1$ ; la formule

$$(\pi(a, b)\varphi)(\gamma) = \langle x, b \rangle \varphi(a^{-1}\gamma)$$

définit une représentation irréductible normale de G dans  $L^2(\mathcal{C})$ ; son caractère dans A est donné par

$$\lambda(x) = \sum_{\gamma \in \mathcal{C}} \mathcal{F}x_\gamma(\gamma) \quad \text{pour tout } x \in A^+;$$

le noyau de  $\pi$  dans A est l'ensemble des x tels que  $\mathcal{F}x_a$  soit nulle sur  $\mathcal{C}$  pour tout a; la classe d'équivalence de  $\pi$  est déterminée de façon biunivoque par la donnée de  $\mathcal{C}$ ; toute classe d'équivalence de représentations irréductibles normales de dimension infinie s'obtient ainsi; enfin  $\pi(A)$  contient toujours strictement l'algèbre des opérateurs compacts dans  $L^2(\mathcal{C})$ .

Résulte du th. 2 du § 2 et du lemme 1.

COROLLAIRE 1. — L'intersection des idéaux de définition des caractères de type I de A est nulle.

Il suffit pour le voir de prouver que, pour tout ouvert  $U \subset \hat{G}_1$ , il existe une trajectoire infinie discrète  $\mathcal{C}$  telle que  $U \cap \mathcal{C}$  soit infini; or U contient un  $\gamma$  ayant un développement périodique de la forme

$$\dots 0 \ c_1 c_2 \dots c_u \ 0 \ c_1 c_2 \dots c_u \dots$$

et un tel  $\gamma$  est adhérent à la trajectoire infinie discrète définie par le développement

$$\dots 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ \underbrace{\dots 1}_{u+1} \ 0 \ c_1 \dots c_u \ 0 \ c_1 \dots c_u \dots$$

**COROLLAIRE. 2.** — *L'algèbre A admet un système complet de représentations irréductibles normales de dimension infinie.*

*Remarque 1.* — Un raisonnement analogue à celui du lemme 4 du § 2 montre que  $\pi(x)$  n'est pas compact pour tous les  $x \in L^1(G)$ ; il en résulte, en vertu de [14], p. 77 que  $\pi$  n'est pas normale au sens de [14]; les seules représentations irréductibles de G normales au sens de [14] sont celles dont la dimension est finie.

*Remarque 2.* — Il est facile de donner des exemples de représentations irréductibles *non normales* de A : toute représentation construite, comme il est indiqué au début du n° 4 du § 2, à partir d'une trajectoire non discrète dans  $\hat{G}_1$ ; or on a vu que la représentation régulière gauche  $\rho$  de G est factorielle; comme la classe de mesures qui lui correspond sur  $\hat{G}_1$  est celle de la mesure de Haar, celle-ci est ergodique; il résulte alors de [21], p. 29 que pour presque tout  $\chi \in \hat{G}_1$  (pour la mesure de Haar) la trajectoire de  $\chi$  est partout dense dans  $\hat{G}_1$ , et par suite non discrète; on montre en outre que  $\rho$  est l'intégrale sur  $\hat{G}_1$  de représentations irréductibles qui sont presque toutes fidèles et non normales sur A.

Il existe encore des représentations irréductibles non normales d'un type tout à fait différent (voir par exemple [26], th. 11).

*Remarque 3.* — Exemple de représentation irréductible normale relativement à A, mais *non relativement à  $\mathcal{K}(G)$* .

Soit  $\mathcal{C}$  la trajectoire infinie discrète définie par le développement

$$\dots 0 0 0 0 1 0 1 0 0 1 0 0 0 1 0 0 0 0 1 \dots;$$

les points de  $\bar{\mathcal{C}} - \mathcal{C}$  sont l'élément neutre et tous les points de la trajectoire  $\mathcal{C}'$  définie par le développement

$$\dots 0 0 0 0 1 0 0 0 0 \dots;$$

nous noterons  $\dots \chi_{-1}, \chi_0, \chi_1 \dots$  les points de  $\mathcal{C}'$ ,  $\chi_r$  étant représenté par un développement  $(a_n)$  où  $a_n = 0$  sauf pour  $n = r$ .

Soit  $y$  un élément de  $\mathcal{K}(G)$  tel que, en posant  $x = yy^*$ , on ait

$$\sum_{\chi \in \mathcal{C}} \mathcal{F}x_{e_0}(\chi) < +\infty;$$

soient  $l_i/2^m$  ( $i = 1, 2, \dots, p$ ) les points du support de  $x_{e_0}$  et  $\alpha_i$  les valeurs correspondantes de  $x_{e_0}$ ; on a alors

$$\mathcal{F}x_{e_0}(\chi) = \sum_j \alpha_j \langle \chi, l_j/2^m \rangle \geq 0;$$

pour tout  $\theta \in T$  posons

$$\psi(\theta) = \sum_j \alpha_j \exp(2\pi i l_j \theta);$$

on a

$$\mathcal{F}x_{e_0}(\chi) = \sum_j \alpha_j \langle \Lambda_m(\chi), l_j \rangle = \psi(\Lambda_m(\chi)).$$

Mais  $\mathcal{F}x_{e_0}$  doit être nulle en tout point de  $\bar{\mathcal{C}} - \mathcal{C}$ , donc

$$0 = \mathcal{F}x_{e_0}(\chi_r) = \psi(\Lambda_m(\chi_r)) = \psi(2^{-r-m})$$

pour tout entier  $r$ ; étant donnée la forme de  $\psi$  il en résulte  $\psi = 0$ ,  $\mathcal{F}x_{e_0} = 0$ ,  $x_{e_0} = 0$  et enfin  $x = 0$  d'après le lemme 1 du § 1.

On voit donc que la représentation irréductible, normale relativement à  $A$ , associée à  $\mathcal{C}$ , n'est pas normale relativement à  $\mathcal{K}(G)$ ; son caractère ne peut pas être défini par une fonction sur  $G$ , ce qui redémontre en particulier que la notion de caractère utilisée ici est plus générale que celle de [14].

### 5. Idéaux primitifs de $A$ .

DÉFINITION. — *Étant donné un développement  $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  et une suite finie de 0 et de 1 :  $S = (b_1, \dots, b_n)$ , on dira que  $S$  est contenue dans  $(a_n)$  s'il existe un entier  $i$  tel que*

$$b_1 = a_i, \quad \dots \quad b_n = a_{i+n-1}.$$

LEMME 4. — *Soit  $\mathcal{C}$  une trajectoire dans  $\hat{G}_1$  non partout dense; il existe une trajectoire  $\mathcal{C}'$  telle que*

$$\bar{\mathcal{C}} \subsetneq \bar{\mathcal{C}}' \quad \text{et} \quad \bar{\mathcal{C}}' \neq \hat{G}_1.$$

Soit  $\chi = (a_n)$  un élément de  $\mathcal{C}$ ; on peut évidemment supposer  $\chi$  différent de l'élément neutre; comme  $\mathcal{C}$  n'est pas partout

dense dans  $\hat{G}_1$  il existe une suite finie  $S = (b_1, \dots, b_u)$  non contenue dans  $(a_n)$ ; définissons  $\gamma' = (a'_n)$  de la façon suivante :

$$\begin{cases} a'_n = a_n & \text{pour tout } n \leq 0 \\ \Lambda_0(\gamma') = 0, & b_1 \dots b_u a_{-u} a_{-u+1} \dots a_u a_{-u-1} a_{-u} \dots a_{u+1} \dots \end{cases}$$

On va montrer que la trajectoire  $\mathcal{C}'$  de  $\gamma'$  répond à la question; d'abord toute suite finie contenue dans  $(a_n)$  étant aussi contenue dans  $(a'_n)$ ,  $\gamma$  est adhérent à  $\mathcal{C}'$  et on a  $\bar{\mathcal{C}} \subset \bar{\mathcal{C}'}$ ; ensuite  $\gamma'$  n'est pas adhérent à  $\mathcal{C}$  puisqu'on a  $a'_n = 1$  pour une infinité de  $n > 0$  et que  $(b_1, \dots, b_u)$  n'est pas contenue dans  $(a_n)$ ; on a donc  $\bar{\mathcal{C}'} \neq \bar{\mathcal{C}}$ .

Montrons enfin que  $\mathcal{C}'$  n'est pas partout dense; posons

$$S' = (b_1, \dots, b_u, b_1, \dots, b_u, b_1, \dots, b_u);$$

$S'$  n'est pas contenue dans  $(a'_n)$  car dans le cas contraire l'une des trois suites  $(b_1, \dots, b_u)$  qui constituent  $S'$  serait contenue soit dans  $(\dots, a_{-2} a_{-1} a_0)$ , soit dans  $(a_{-u}, a_{-u+1}, \dots, a_u)$ , soit dans  $(a_{-u-1}, a_{-u}, \dots, a_{u+1})$ , etc., ce qui contredirait le choix de  $S$ . Définissons  $\gamma'' = (a''_n)$  de la façon suivante :

$$\begin{cases} a''_n = 0 & \text{pour tout } n \leq 0 \\ \Lambda_0(\gamma'') = 0, & b_1 \dots b_u b_1 \dots b_u b_1 \dots b_u 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ \dots; \end{cases}$$

$\gamma''$  n'est pas adhérent à  $\mathcal{C}'$  puisqu'on a  $a''_n = 1$  pour une infinité de  $n > 0$  et que  $(b_1 \dots b_u b_1 \dots b_u b_1 \dots b_u)$  n'est pas contenue dans  $(a'_n)$ .

**LEMME 5.** — Soit  $S = (b_1, \dots, b_u)$  une suite finie contenant 0; soit  $L_S$  l'ensemble des  $\gamma_n = (a_n)$  pour lesquels il existe un entier  $j$  ( $0 \leq j \leq u$ ) tel que pour tout entier  $k$  et tout entier  $l = 1, 2, \dots, u$  on ait

$$a_{j+k(u+1)+l} = b_l.$$

L'ensemble  $L_S$  est invariant et fermé.

Il est évidemment invariant; démontrons qu'il est fermé; soit  $\gamma' = (a'_n)$  un point adhérent à  $L_S$ ; comme, pour tout  $\gamma = (a_n)$  de  $L_S$ ,  $(a_n)$  ne contient pas plus de  $u$  chiffres 1 consécutifs, pour tout entier  $m > 0$  il existe un élément  $\gamma^m = (a_n^m)$  de  $L_S$  tel que

$$a'_{-m} = a_{-m}^m, \dots, a'_m = a_m^m;$$

par suite pour tout  $m$  il existe un entier  $j^m = 0, \dots, u$  tel que l'on ait

$$a'_{j^m+k(u+1)+l} = b_l$$

pour tout entier  $k$  et tout  $l = 1, 2, \dots, u$  vérifiant

$$-m \leq j^m + k(u+1) + l \leq m;$$

quand  $m$  parcourt  $\mathbb{Z}^+$ ,  $j^m$  prend pour une infinité d'indices  $m$ , une certaine valeur  $j_0$  ( $0 \leq j_0 \leq u$ ); on a donc

$$a'_{j_0+k(u+1)+l} = b_l$$

pour tout entier  $k$  et tout  $l = 1, 2, \dots, u$  vérifiant

$$-m_i \leq j_0 + k(u+1) + l \leq m_i$$

donc finalement pour tout entier  $k$  et tout  $l = 1, 2, \dots, u$ ; autrement dit on a  $\chi' \in L_S$ .

LEMME 6. — Soient  $S = (b_1, \dots, b_u)$  une suite finie de 0 et de 1 et  $(c_n)$  un développement périodique de période  $p \leq u$ ; il existe  $d$  égal à 0 ou à 1 tel que la suite  $(b_1, \dots, b_u, d)$  ne soit pas contenue dans  $(c_n)$ .

Si  $S$  n'est pas contenue dans  $(c_n)$  on peut choisir  $d$  arbitrairement; supposons maintenant  $S$  contenue dans  $(c_n)$  et numérotions les  $c_n$  de façon que

$$b_1 = c_1, \dots, b_u = c_u;$$

posons  $d = 1 - c_{u+1}$ ;  $(b_1, \dots, b_u, d)$  n'est pas contenue dans  $(c_n)$ : en effet supposons qu'au contraire il existe un entier  $i$  tel que

$$b_1 = c_i, \dots, b_u = c_{i+u-1}, d = c_{i+u};$$

on aurait en particulier

$$c_1 = c_i, \dots, c_p = c_{p+i-1}$$

d'où

$$i - 1 = 0 \quad \text{modulo } p$$

et

$$d = c_{i+u} = c_{u+1} = 1 - c_{u+1}$$

ce qui est absurde.

LEMME 7. — Il existe une partie fermée invariante non vide de  $\hat{G}_1$  qui ne contient aucune trajectoire finie.

Numérotions les trajectoires finies de telle façon que leurs nombres d'éléments aillent en croissant :  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots$ ; on va construire par récurrence des suites  $S_r$  ( $r = 1, 2, \dots$ ) contenant 0, telles que  $L_{S_r}$  ne contienne pas  $\mathcal{C}_r$  et que l'on ait  $L_{S_{r+1}} \subset L_{S_r}$ ; alors les  $L_{S_r}$  seront des ensembles fermés invariants (lemme 5) décroissants et non vides; leur intersection sera un ensemble fermé, invariant, non vide (puisque  $\hat{G}_1$  est compact) et ne contenant aucune trajectoire finie.

Posons  $S_1 = (1, 0)$ ; supposons  $S_r$  construite :  $S_r = (b_1, \dots, b_u)$ ; soient  $p$  le nombre des éléments de  $\mathcal{C}_{r+1}$  et  $\chi = (c_n)$  un de ces éléments; soit  $q$  un entier positif tel que  $q(u + 1) \geq p$ ; choisissons arbitrairement des nombres  $a_1, \dots, a_q$  et posons

$$S'_{r+1} = (b_1, \dots, b_u, a_1, b_1, \dots, b_u, a_2, b_1, \dots, b_u, a_q, b_1, \dots, b_u)$$

il existe (lemme 6) un  $d$  tel que la suite  $(S'_{r+1}, d)$  ne soit pas contenue dans  $(c_n)$ ; posons

$$S_{r+1} = (S'_{r+1}, d, b_1, \dots, b_u);$$

alors  $L_{S_{r+1}} \subset L_{S_r}$  et  $L_{S_{r+1}}$  ne contient pas  $\mathcal{C}_{r+1}$ .

**PROPOSITION 5.** — (i) *Les idéaux primitifs de codimension finie de  $A$  sont les noyaux  $I_{\mathcal{C}, \theta}$  des représentations  $\pi_{\mathcal{C}, \theta}$  de la prop. 3; ce sont des idéaux bilatères fermés maximaux; leur intersection est nulle.*

(ii) *Pour toute partie  $F$  de  $\hat{G}_1$ , adhérence d'une trajectoire infinie, soit  $I_F$  l'ensemble des  $x \in A$  tels que  $\mathcal{F}x_a$  soit nulle sur  $F$  pour tout  $a$ ; l'application  $F \rightarrow I_F$  est une bijection de l'ensemble des adhérences des trajectoires infinies dans  $\hat{G}_1$  sur l'ensemble des idéaux primitifs de codimension infinie de  $A$ ; le quotient  $A/I_F$  n'est jamais CCR.*

(iii) *Il existe un idéal bilatère fermé maximal de  $A$  à quotient NGCR.*

(iv) *L'idéal nul est primitif; tout idéal primitif non nul contient strictement un idéal primitif non nul.*

*Démonstration.* — (i) est une conséquence immédiate de la prop. 3 et de son corollaire.

(ii) résulte du th. 3 du § 2 et du lemme 1.

(iii) : soit  $F$  un ensemble fermé invariant non vide dans  $\hat{G}_1$  ne contenant aucune trajectoire finie (lemme 7); l'idéal  $I$  des

$x \in A$  pour lesquels  $\mathcal{F}x_a$  est nulle sur  $F$  pour tout  $a$  est contenu (puisque  $A$  admet une unité) dans un idéal bilatère formé maximal  $J$ ;  $J$  ne peut être de codimension finie car il serait alors de la forme  $I_{\mathcal{C}, \theta}$ ,  $\mathcal{C}$  étant une trajectoire finie et on aurait

$$\Pi(I) \subset \Pi(I_{\mathcal{C}, \theta}) \quad \text{et} \quad \mathcal{C} \subset F$$

ce qui est contradictoire;  $J$  est donc de codimension infinie et  $A/J$  est simple et non CCR, donc NGCR.

(iv): l'idéal nul est primitif puisque la représentation régulière gauche de  $G$  est factorielle et fidèle sur  $A$ . La dernière assertion résulte du lemme 4.

*Remarque.* — Il résulte des précédentes assertions (i) et (iv) et du lemme 4 de [5] que l'espace des idéaux primitifs de  $A$  (pour la topologie de Jacobson) ne contient aucune partie ouverte séparée non vide.

### 6. Topologie de l'espace des caractères partout définis sur $A$ .

Pour toute suite finie de 0 et de 1:  $S = (b_1, \dots, b_u)$ , tout entier  $p > 0$  et tout  $\chi = (a_n) \in \hat{G}_1$  on désigne par  $\varphi_{s,p}(\chi)$  le quotient par  $p$  du nombre d'indices  $i$  tels que

$$1 \leq i \leq p \quad \text{et} \quad a_i = b_1, \dots, a_{i+u-1} = b_u;$$

LEMME 8. — Soit  $\mu$  une mesure positive sur  $\hat{G}_1$ , invariante, ergodique et normée; pour presque tout  $\chi$  (pour  $\mu$ ) on a pour toute  $S$

$$\mu(K_S) = \lim \varphi_{s,p}(\chi) \quad \text{pour} \quad p \rightarrow +\infty.$$

L'ensemble des  $S$  étant dénombrable, il suffit de démontrer cette égalité pour une  $S$  fixée; soit  $f$  la fonction caractéristique de  $K_S$ ; on a, pour tout  $\chi$  et tout  $p$

$$\varphi_{s,p}(\chi) = \frac{1}{p} (f(\chi) + f(2^{-1}\chi) + \dots + f(2^{-p+1}\chi))$$

et ceci tend vers  $\mu(f) = \mu(I_S)$  pour presque tout  $\chi$  d'après un théorème ergodique (cf. par exemple [20], p. 31).

LEMME 9. — Soient  $\mu_1$  et  $\mu_2$  deux mesures positives sur  $\hat{G}_1$ , invariantes, ergodiques et normées et  $s_1$  et  $s_2$  deux entiers  $> 0$ ; la mesure

$$\mu = \frac{s_1\mu_1 + s_2\mu_2}{s_1 + s_2}$$



est limite vague de mesures positives, invariantes, ergodiques et normées.

Pour  $i = 1, 2$  soit  $\chi_i = (a_{i,n})$  tel que pour toute  $S$ ,  $\varphi_{s,p}(\chi_i)$  tende vers  $\mu_i(K_S)$  quand  $p \rightarrow +\infty$  (lemme 8). Pour tout entier  $r > 0$  soit  $\mathcal{C}_r$  la trajectoire finie représentée par un développement périodique ayant pour période

$$(1) \quad \underbrace{a_{1,1} \dots a_{1,r} \dots a_{1,1} \dots a_{1,r}}_{s_1 \text{ fois}} \underbrace{a_{2,1} \dots a_{2,r} \dots a_{2,1} \dots a_{2,r}}_{s_2 \text{ fois}}$$

soit  $\nu_r$  la mesure positive invariante ergodique normée portée par  $\mathcal{C}_r$ ; on va montrer que pour toute  $S$ :  $\nu_r(K_S) \rightarrow \mu(K_S)$  quand  $r \rightarrow +\infty$ .

Si  $S = (b_1, \dots, b_u)$  avec  $u \leq r$ ,  $\nu_r(K_S)$  est égal au quotient par  $r(s_1 + s_2)$  du nombre de fois que  $S$  est contenue dans la suite (1) augmentée à droite de  $a_{1,1}, \dots, a_{1,u-1}$ ; on a donc

$$\nu_r(K_S) = (r(s_1 + s_2))^{-1} ((r - u + 1)(s_1 \varphi_{s, r-u+1}(\chi_1) + s_2 \varphi_{s, r-u+1}(\chi_2)) + k)$$

où  $k$  est un entier positif au plus égal à  $(u - 1)(s_1 + s_2)$ ; et quand  $r \rightarrow +\infty$

$$\nu_r(K_S) \rightarrow (s_1 + s_2)^{-1} (s_1 \mu_1(K_S) + s_2 \mu_2(K_S)) = \mu(K_S).$$

Montrons enfin que  $\nu_r$  tend vaguement vers  $\mu$  quand  $r \rightarrow +\infty$ ; pour toute suite  $S = (c_1, \dots, c_{2u})$  de 0 et de 1,  $2^{-u}K_S$  est l'ensemble des  $\chi = (a_n)$  tels que

$$a_{1-u} = c_1, \dots, a_u = c_{2u}.$$

Pour tout entier  $u > 0$  notons  $S_1, \dots, S_{2^{2u}}$  les suites de  $2u$  éléments; les ensembles  $2^{-u}K_{S_i}$  ( $i = 1, \dots, 2^{2u}$ ) forment une partition de  $\hat{G}_1$ ; soit  $\chi_i$  un élément quelconque de  $2^{-u}K_{S_i}$ .

Soit  $f$  une fonction continue positive sur  $\hat{G}_1$  et soit  $f_u$  la fonction égale à  $f(\chi_i)$  dans  $2^{-u}K_{S_i}$  pour tout  $i$ ; on a  $\nu_r(f) \rightarrow \mu(f)$  parce que  $f$  est limite uniforme de  $f_u$  pour  $u \rightarrow +\infty$ , que  $\nu_r(f_u) \rightarrow \mu(f_u)$  pour tout  $u$  quand  $r \rightarrow +\infty$  et que  $\nu_r$  est bornée en norme <sup>(1)</sup>.

(1) Le lemme s'étend de façon évidente au cas d'un nombre quelconque (fini) de mesures.

LEMME 10. — *Toute mesure  $\mu$  sur  $\hat{G}_1$ , positive, invariante, ergodique et normée est limite vague de mesures positives, invariantes, ergodiques, normées et diffuses.*

Soit  $\zeta = (b_n) \in \hat{G}_1$  tel que pour toute  $S$ ,  $\varphi_{S,p}(\zeta)$  tende vers  $\mu(K_S)$  quand  $p \rightarrow +\infty$  (lemme 8). Soit  $n$  un entier  $> 0$ ; pour tout  $\chi = (a_m)$  soit  $\Phi_{n,0}(\chi)$  l'élément représenté par le développement

$$\dots a_{-1}b_1 \dots b_n a_0 b_1 \dots b_n a_1 b_1 \dots b_n a_2 b_1 \dots b_n a_3 \dots$$

où l'élément  $a_1$  est mis à la place d'indice 1; posons

$$\begin{aligned} \Phi_{n,1}(\chi) &= 2\Phi_{n,0}(\chi) \dots \\ \Phi_{n,n}(\chi) &= 2^n \Phi_{n,0}(\chi). \end{aligned}$$

Soit  $\lambda$  une des mesures sur  $\hat{G}_1$  construites à la prop. 2.

Les applications  $\Phi_{n,i}$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) sont continues en tout point  $\chi = (a_m)$  tel que  $a_m = 1$  pour une infinité de  $m > 0$ ; ces points formant un ensemble de complémentaire  $\lambda$ -négligeable,  $\Phi_{n,i}$  est  $\lambda$ -mesurable et on peut considérer les mesures

$$\nu_{n,i} = \Phi_{n,i}(\lambda)$$

et

$$\nu_n = (n + 1)^{-1}(\nu_{n,0} + \dots + \nu_{n,n}).$$

La mesure  $\nu_n$  est diffuse; montrons qu'elle est invariante: pour toute fonction continue  $f$  sur  $\hat{G}_1$  on a

$$\begin{aligned} \int f(2\chi) d\nu_n(\chi) &= (n + 1)^{-1} \sum_i \int f(2\Phi_{n,i}(\chi)) d\lambda(\chi) \\ &= (n + 1)^{-1} \left( \sum_{i=1}^n \int f(\Phi_{n,i}(\chi)) d\lambda(\chi) + \int f(\Phi_{n,0}(2\chi)) d\lambda(\chi) \right) \\ &= \int f(\chi) d\nu_n(\chi). \end{aligned}$$

Montrons maintenant que  $\nu_n$  est ergodique: soit  $f$  une fonction  $\nu_n$ -mesurable, bornée et telle que  $f(2\chi) = f(\chi)$ ; comme les mesures  $\nu_{n,i}$  sont deux à deux étrangères,  $f$  est  $\nu_{n,i}$ -mesurable pour tout  $i$ ; alors  $f \circ \Phi_{n,i}$  est  $\lambda$ -mesurable et on a

$$(f \circ \Phi_{n,i})(2\chi) = f(2^{n+1}\Phi_{n,i}(\chi)) = (f \circ \Phi_{n,i})(\chi)$$

donc  $f \circ \Phi_{n,i}$  est égale  $\lambda$ -presque partout à une constante  $k_i$ ; mais on a, pour  $i = 0, \dots, n - 1$ .

$$(f \circ \Phi_{n,i})(\chi) = f(2\Phi_{n,i}(\chi)) = f(\Phi_{n,i+1}(\chi))$$

par suite les  $k_i$  sont égaux et  $f$  est égale  $\nu_n$ -presque partout

à une constante. Il reste à montrer que  $\nu_n$  tend vaguement vers  $\mu$  quand  $n \rightarrow +\infty$ , et il suffit, en vertu d'un raisonnement fait au lemme 9, de montrer que  $\nu_n(K_S) \rightarrow \mu(K_S)$  pour toute suite  $S = (c_1, \dots, c_u)$ ; soit  $g$  la fonction caractéristique de  $K_S$ ; on a :

$$\nu_n(K_S) = (n+1)^{-1} \int (g(\Phi_{n,0}(\gamma)) + \dots + g(\Phi_{n,n}(\gamma))) d\lambda(\gamma).$$

Si  $u < n$  on a donc

$$\nu_n(K_S) = (n+1)^{-1} \int ((n-u+1)\varphi_{S, n-u+1}(\zeta) + h(\gamma)) d\lambda(\gamma)$$

ou  $h(\gamma)$  est un entier positif au plus égale à  $u$ ; d'où l'assertion.

**PROPOSITION 6.** — *L'espace des caractères partout définis sur  $A$  et de norme 1 n'est pas localement compact pour la topologie de la convergence simple.*

Soient  $C_{f,1}$  cet espace et  $D$  l'espace des formes linéaires positives centrales de norme  $\leq 1$ ; il suffit de construire une suite d'éléments de  $D - C_{f,1}$ , adhérents à  $C_{f,1}$  et convergeant vers un élément de  $C_{f,1}$ .

Soient  $\nu_1$  et  $\nu_2$  des mesures positives, invariantes, ergodiques, normées, diffuses et différentes sur  $\hat{G}_1$  et  $\alpha$  un nombre rationnel vérifiant  $0 < \alpha < 1$ ; d'après les lemmes 9 et 10, la mesure  $\alpha\nu_1 + (1-\alpha)\nu_2$  est limite vague de mesures  $\mu_n$  invariantes, ergodiques, normées et diffuses; considérons les caractères sur  $A$  (cf. prop. 1) :

$$\left. \begin{array}{ll} \lambda_i(x) = \nu_i(\mathcal{F}x_{e_0}) & \text{où } i = 1, 2 \\ \theta_n(x) = \mu_n(\mathcal{F}x_{e_0}) & \text{où } n = 1, 2, \dots \end{array} \right\} x \in A^+$$

La forme linéaire  $\alpha\lambda_1 + (1-\alpha)\lambda_2$  appartient à  $D$ ; elle est limite de  $\theta_n$  donc adhérente à  $C_{f,1}$ ; elle n'est pas dans  $C_{f,1}$ ; enfin elle converge vers  $\lambda_1$  quand  $\alpha \rightarrow 1$ .

### 7. Structures boréliennes.

Soit  $\mu$  une mesure positive, invariante et ergodique définie sur une partie ouverte invariante  $\Omega$  de  $\hat{G}_1$ ; pour toute fonction continue positive  $f$  sur  $\hat{G}_1$  nous poserons

$$\tilde{\mu}(f) = \mu(f|\Omega);$$

nous noterons  $M$  l'ensemble des applications de  $\mathcal{C}^+(\hat{G}_1)$  dans

$[0, +\infty]$  ainsi obtenues et le munirons de la structure borélienne la moins fine rendant boréliennes toutes les fonctions

$$\tilde{\mu} \rightarrow \tilde{\mu}(f) \quad \text{pour} \quad f \in \mathcal{C}^+(\hat{G}_1).$$

Nous noterons enfin  $M_0$  l'ensemble des  $\tilde{\mu}$  pour lesquelles  $\mu$  n'a pas de masse en aucun point  $\gamma$  à développement périodique.

LEMME 11. — *Soit  $Z$  un espace localement compact à base dénombrable; l'espace  $\mathbb{M}_+(Z)$  des mesures positives sur  $Z$  est standard pour la structure borélienne sous-jacente à la topologie vague.*

Dans le cas où  $Z$  est compact, l'assertion résulte du fait que pour tout entier  $n$  la boule de rayon  $n$  est borélienne dans  $\mathbb{M}_+(Z)$  et standard (cf. [2], ch. III, § 3, prop. 6).

Supposons maintenant  $Z$  non compact;  $Z$  est réunion d'une suite croissante de compacts  $K_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ); pour  $n < m$  soit  $\varphi_{m,n}$  l'application de  $\mathbb{M}_+(K_m)$  sur  $\mathbb{M}_+(K_n)$  qui associe à toute mesure sur  $K_m$  la mesure qu'elle induit sur  $K_n$ ; montrons que  $\varphi_{m,n}$  est borélienne; il suffit de prouver que pour toute fonction continue positive  $g$  sur  $K_n$ ,  $\varphi_{m,n}(\mu)(g)$  est fonction borélienne de  $\mu$ ; or soit  $g'$  la fonction sur  $K_m$  prolongée de  $g$  par 0 sur  $K_m - K_n$ ; on a

$$\varphi_{m,n}(\mu)(g) = \mu(g')$$

et l'application  $\mu \rightarrow \mu(g')$  est semi-continue supérieurement et par conséquent borélienne.

Considérons l'espace borélien standard  $Y = \prod_n \mathbb{M}_+(K_n)$  et son sous-ensemble borélien  $Y'$  formé des suites  $(\mu_n)$  telles que

$$\mu_n = \varphi_{m,n}(\mu_m) \quad \text{pour} \quad n < m;$$

soit  $\Lambda$  l'application de  $Y'$  dans  $\mathbb{M}_+(Z)$  définie de la façon suivante :

soit  $\alpha = (\mu_n) \in Y'$  et soit  $f \in \mathcal{K}(Z)$ ; le support de  $f$  est contenu dans un  $K_n$  et on pose

$$\Lambda(\alpha)(f) = \mu_n(f|K_n)$$

ce qui ne dépend pas de l'entier  $n$  choisi; alors  $\mu_n$  est la mesure induite par  $\Lambda(\alpha)$  sur  $K_n$ , ce qui prouve que  $\Lambda$  est injective; d'autre part on vérifie immédiatement que  $\Lambda$  est surjective et bicontinue pour la topologie produit sur  $Y'$  et la topologie vague sur  $\mathbb{M}_+(Z)$ .

LEMME 12. — Soit  $\Omega$  une partie ouverte invariante de  $\hat{G}_1$ ; l'ensemble des mesures positives, invariantes, ergodiques sur  $\Omega$ , n'ayant de masse en aucun point  $\gamma$  développement périodique est borélien dans  $\mathfrak{M}_+(\Omega)$ .

Tout d'abord l'ensemble  $N$  des mesures invariantes est fermé et l'ensemble  $N'$  des mesures invariantes n'ayant de masse en aucun point à développement périodique est borélien, puisque ces points forment un ensemble dénombrable; il reste à montrer que le sous-ensemble  $N''$  de  $N$  formé des mesures ergodiques est borélien dans  $N'$ .

Soit  $\mu$  un élément de  $N'$ ; la construction de la prop. 1 du § 2 fournit une représentation  $\pi_\mu$  de  $A$  dans  $L^2(G_0) \otimes L^2(\Omega, \mu)$ ; pour  $x \in A$ ,  $\pi_\mu(x)$  est représenté par la matrice

$$(\pi_\mu(x))_{a_1, a_2} = T_{\mathcal{F}x_{a_1, a_2^{-1}}} U_{a_1 a_2^{-1}};$$

soient  $\alpha$  l'algèbre de von Neumann engendrée par  $\pi_\mu(A)$ ,  $\text{Tr}$  la trace normale fidèle semi-finie sur  $\alpha$  construite dans [4], ch. 1, § 9, prop. 1 et  $m$  son idéal de définition;  $\pi_\mu^{-1}(m^{\frac{1}{2}})$  est l'ensemble des  $x \in A$  tels que  $\mathcal{F}(xx^*)_{e_0}$  soit  $\mu$ -intégrable et par suite contient l'idéal autoadjoint  $I$  de  $A$  engendré par les  $x$  tels que  $\mathcal{F}(xx^*)_{e_0}$  ait son support contenu dans  $\Omega$ .

Montrons que la forme  $\sigma_\mu(x, y) = \text{Tr} \pi_\mu(xy^*)$  est une trace sur  $I$ ; les axiomes (i) ... (iv) des traces sont trivialement vérifiés; démontrons (v') : la restriction de  $\pi_\mu$  à  $I$  est non dégénérée puisque  $\pi_\mu(I)$  contient tous les opérateurs de multiplication par des éléments de  $\mathcal{K}(\Omega)$ ; si  $(u_n)$  est une unité approchée de  $I$  on a

$$\sigma_\mu(u_n x, x) = \text{Tr} \pi_\mu(u_n x x^*)$$

et  $\pi_\mu(u_n)$  tend fortement vers 1, donc

$$\sigma_\mu(u_n x, x) \rightarrow \sigma_\mu(x, x).$$

Définissant  $X(I)$  et  $B(I)$  comme au lemme 2, ch. 1, § 2, nous avons donc une application borélienne  $\mu \rightarrow \sigma_\mu$  de  $N'$  dans  $X(I)$ ; il en résulte, en vertu du lemme cité, une application borélienne  $\Pi$  de  $N'$  dans  $A_{\text{rep}}$ .

Si  $\mu$  est ergodique,  $\pi_\mu$  est factorielle (§ 2, prop. 1),  $\sigma_\mu$  est la restriction d'un caractère et  $\Pi(\mu) \in A_{\text{fac}}$ ; réciproquement si  $\Pi(\mu) \in A_{\text{fac}}$ ,  $\sigma_\mu$  est la restriction d'un caractère,  $\pi_\mu$  est facto-

rielle et  $\mu$  est ergodique; le lemme résulte donc du fait que  $A_{\text{fac}}$  est borélien dans  $A_{\text{rep}}$  ([8], th. 1).

LEMME 13. — Soit  $\mu$  une mesure invariante définie sur une partie ouverte invariante de  $\hat{G}_1$ ; l'ensemble ouvert invariant

$$\Omega_{\tilde{\mu}} = \cup f^{-1}(R_+^*) \quad (f \in \mathcal{C}^+(\hat{G}_1), \tilde{\mu}(f) < +\infty)$$

( $R_+^*$ ) = ensemble des nombres réels strictement positifs) est le plus grand ouvert  $U$  possédant la propriété suivante: si une fonction continue positive  $g$  sur  $\hat{G}_1$  a son support contenu dans  $U$ , alors  $\tilde{\mu}(g) < +\infty$ .

Soit d'abord  $g \in \mathcal{C}^+(\hat{G}_1)$  avec  $K = \text{support } g \subset \Omega_{\tilde{\mu}}$ ;  $K$  est contenu dans une réunion finie  $\bigcup_i f_i^{-1}(R_+^*)$  avec  $\tilde{\mu}(f_i) < +\infty$ ; posons

$$f = \sum_i f_i \quad \text{et} \quad \alpha = \inf_{\chi \in K} f(\chi);$$

on a  $\alpha > 0$ ; posons  $\beta = \sup g(\chi)$ ; on a  $g \leq \frac{\beta}{\alpha} f$  et par suite  $\tilde{\mu}(g) < +\infty$ .

Soit maintenant  $U$  possédant la propriété de l'énoncé et soit  $\chi \in U$ ; il existe une fonction continue positive  $g$  telle que

$$\text{support } g \subset U \quad \text{et} \quad g(\chi) = 1;$$

alors  $\tilde{\mu}(g) < +\infty$  et  $\chi \in \Omega_{\tilde{\mu}}$ .

Remarque. — Dans la suite  $\mu$  sera considérée comme une mesure sur  $\Omega_{\tilde{\mu}}$ .

LEMME 14. — Soit  $U$  une partie ouverte invariante de  $\hat{G}_1$ ; l'ensemble  $M_U$  des  $\tilde{\mu} \in M$  tels que

$$\Omega_{\tilde{\mu}} \supset U \quad \text{et} \quad \mu(U) \neq 0$$

est borélien dans  $M$ ; l'application  $P : \tilde{\mu} \rightarrow \mu|_U$  est un isomorphisme borélien de  $M_U$  sur l'ensemble des mesures invariantes ergodiques non nulles sur  $U$ .

Soit  $(f_n)$  une suite croissante d'éléments de  $\mathcal{C}^+(\hat{G}_1)$  telle que

$$\begin{aligned} &\text{support } f_n \subset U \text{ pour tout } n \\ &f_n(\chi) \rightarrow 1 \text{ pour tout } \chi \in U; \end{aligned}$$

alors, pour  $\tilde{\mu} \in M$ , on a  $\Omega_{\tilde{\mu}} \supset U$  si et seulement si  $\tilde{\mu}(f_n) < +\infty$

pour tout  $n$  et  $\mu(U) \neq 0$  si et seulement si  $\tilde{\mu}(f_n) \neq 0$  pour au moins un  $n$ ; d'où la première assertion.

Soit  $\tilde{\mu} \in M_U$ ;  $\mu|U$  est évidemment invariante, ergodique et non nulle;  $\Omega_{\tilde{\mu}} - U$  est  $\mu$ -négligeable, donc pour  $f \in \mathcal{C}^+(\hat{G}_1)$  on a

$$\tilde{\mu}(f) = \mu(f|_{\Omega_{\tilde{\mu}}}) = P(\tilde{\mu})(f|U)$$

ce qui prouve que  $P$  est injective;  $P$  est surjective car si  $\nu$  est invariante, ergodique et non nulle sur  $U$ , on a  $P(\tilde{\nu}) = \nu$ ;  $P$  est borélienne car si  $g \in \mathfrak{K}^+(U)$  et si  $g'$  est la prolongée de  $g$  par 0 dans  $\hat{G}_1 - U$ , on a

$$P(\tilde{\mu})(g) = \tilde{\mu}(g')$$

qui est fonction borélienne de  $\tilde{\mu}$ ;  $P^{-1}$  est borélienne car si  $f \in \mathcal{C}^+(\hat{G}_1)$  on a

$$\tilde{\mu}(f) = P(\tilde{\mu})(f|U)$$

qui est fonction borélienne de  $P(\tilde{\mu})$ .

**LEMME 15.** — *L'espace  $M_0$  est standard et admet une section borélienne pour la relation de proportionnalité.*

Soit  $(0_n)$  une base d'ouverts de  $\hat{G}_1$ ; pour tout  $n$  soit  $U_n = G_0 \cdot 0_n$ : c'est un ouvert invariant et tout ouvert invariant est la réunion des  $U_n$  qu'il contient; si donc  $\tilde{\mu} \in M$  il existe  $n$  tel que

$$\Omega_{\tilde{\mu}} \supset U_n \quad \text{et} \quad \mu(U_n) \neq 0,$$

i.e.  $\tilde{\mu} \in M_{U_n}$ ; on a donc  $M = \bigcup_n M_{U_n}$ ; puis  $M_0 \cap M_{U_n}$  est borélien dans  $M_0$  et isomorphe (lemme 14) à l'espace des mesures invariantes ergodiques non nulles sur  $U_n$  n'ayant de masse en aucun point à développement périodique;  $M_0 \cap M_{U_n}$  est donc standard (lemme 12) et il en est de même de  $M_0$ .

Soit maintenant  $(f_n)$  une suite d'éléments de  $\mathcal{C}^+(\hat{G}_1)$  contenant pour chaque  $m$  une suite partout dense dans  $\mathfrak{K}^+(U_m)$ ; pour tout  $n$  soit  $B_n$  l'ensemble borélien des  $\tilde{\mu} \in M_0$  tels que

$$\tilde{\mu}(f_j) = \begin{cases} 0 & \text{ou} & +\infty & \text{pour} & j < n \\ 1 & & & \text{pour} & j = n; \end{cases}$$

l'ensemble  $B = \bigcup_n B_n$  est borélien; deux éléments proportionnels de  $B$  sont égaux; enfin tout élément de  $M_{U_n}$  (et par conséquent de  $M_0$ ) est proportionnel à un élément de  $B$ .

*Notations.* — L'espace borélien  $C$ , ses sous-espaces  $C_f, C_{f,1}, C_I$  et son quotient  $C^0$  sont définis comme au ch. 1, § 2; on désignera en outre par  $C'$  l'ensemble des caractères correspondant à des représentations factorielles normales relativement à  $A'$ .

PROPOSITION 7. — (i) *L'espace  $C'$  est standard.*

(ii) *Le sous-ensemble  $\Sigma$  de  $\tilde{A}$  formé des éléments normaux relativement à  $A'$  est borélien dans  $\tilde{A}$  et standard.*

(iii) *L'application canonique  $\Psi^0$  de  $C^0$  dans  $\tilde{A}$  induit un isomorphisme borélien du quotient de  $C'$  sur  $\Sigma$ .*

Démontrons (i). On sait (ch. 1, § 2, th. 1) que  $C_{f,1}$  est boréliennement isomorphe à  $\tilde{A}_f$ ; il résulte alors de [6] que  $C_{f,1} \cap C_I$  est borélien dans  $C_{f,1}$  et par suite standard. Puis  $C_f \cap C_I$  est l'image de l'espace standard  $R_+^* \times (C_{f,1} \cap C_I)$  par l'application injective borélienne (et même continue)  $(\alpha, \lambda) \rightarrow \alpha\lambda$ ; par conséquent  $C_f \cap C_I$  est borélien dans  $C_f$  et standard ([28], th. 3.2). Puis,  $C_f$  étant borélien dans  $C$  (ch. 1, § 2, cor. 1 de la prop. 2) et contenu dans  $C'$ ,  $C_f \cap C_I$  est borélien dans  $C'$  et standard; on va montrer que l'ensemble  $C'_0 = C' - C_f \cap C_I$  est aussi standard, d'où il résultera que  $C'$  est standard; d'après la prop. 1 du § 2  $C'_0$  est mis en correspondance biunivoque avec  $M_0$  par la formule

$$\lambda(x) = \tilde{\mu}(\mathcal{F}x_{e_n}), \quad \text{où } \lambda \in C'_0, \quad \tilde{\mu} \in M_0, \quad x \in A^+;$$

cette correspondance est visiblement un isomorphisme borélien et l'assertion résulte du lemme 15; (i) est ainsi démontré.

Puis il existe une section borélienne  $S$  dans  $C'$  pour la relation de proportionnalité: la réunion d'une section évidente dans  $C_f \cap C_I$  et d'une section dans  $C'_0$  dont l'existence est assurée par le lemme 15. Il résulte alors de [28], th. 3.2 que l'application canonique de  $C'$  sur son quotient induit un isomorphisme borélien de  $S$  sur ce quotient.

Reprenons d'autre part les  $f_n$  du lemme 15 et posons

$$\begin{aligned} y_n &= \mathcal{F}^{-1}(f_n) \in A_1, \\ x_n &= (y_n)^{e_0} \in A, \\ I_n &= \text{idéal autoadjoint engendré par } x_n; \end{aligned}$$

soit  $E_n$  le sous-ensemble de  $C'_0$  formé des  $\lambda$  dont l'idéal de définition contient  $I_n$  et qui ne sont pas identiquement nuls



sur  $I_n$ ; on voit immédiatement que  $E_n$  est borélien dans  $C'_0$  et que  $C'_0$  est la réunion des  $E_n$ ; un raisonnement calqué sur celui du th. 1, ch. I, § 2 montre que l'application canonique  $\Psi$  de  $C$  dans  $\hat{A}$  induit un isomorphisme borélien de  $S \cap E_n$  pour tout  $n$  sur son image et de  $C_{f,1} \cap C_I$  sur son image, et par conséquent de  $S$  sur son image  $\Sigma$ ; enfin  $\Psi^0$  induit un isomorphisme borélien du quotient de  $C'$  sur  $\Sigma$ , et  $\Sigma$  est borélien dans  $\hat{A}$ , ce qui démontre (ii) et (iii).

**PROPOSITION 8.** — *Sur  $\hat{A}_{\text{nor}}$  les deux structures boréliennes identiques du th. 2, ch. I, § 2, sont standard.*

En vertu de [6],  $\hat{A}$  est boréliennement isomorphe à  $\hat{A}_I$ , lequel est borélien dans  $\hat{A}$ ; par cet isomorphisme  $\hat{A}_{\text{nor}}$  correspond à  $\hat{A}_I \cap \Sigma$  qui est donc borélien dans  $E$ , et standard d'après la prop. 7.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] N. BOURBAKI, Intégration, *Act. Sc. Ind.*, n° 1175 et 1244, Paris, Hermann, 1952 et 1956.
- [2] N. BOURBAKI, Espaces vectoriels topologiques, *Act. Sc. Ind.*, n° 1189 et 1229, Paris, Hermann, 1953 et 1955.
- [3] P. J. COHEN, Factorization in group algebras, *Duke Math. J.*, t. 26, 1959, pp. 199-205.
- [4] J. DIXMIER, Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien, *Cahiers Scientifiques*, fasc. 25, Paris, Gauthier-Villars, 1957.
- [5] J. DIXMIER, Sur les  $C^*$ -algèbres, *Bull. Soc. Math. France*, t. 88, 1960, pp. 95-112.
- [6] J. DIXMIER, Sur les structures boréliennes du spectre d'une  $C^*$ -algèbre, *Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math.*, n° 6, 1960.
- [7] J. DIXMIER, Dual et quasi-dual d'une algèbre de Banach involutive (à paraître).
- [8] J. A. ERNEST, A decomposition theory for unitary representations of locally compact groups (à paraître).
- [9] J. M. G. FELL, The dual spaces of  $C^*$ -algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 94, 1960, pp. 365-403.
- [10] J. M. G. FELL,  $C^*$ -algebras with smooth duals, *Illinois J. Math.*, t. 4, 1960, pp. 221-230.
- [11] J. GLIMM, A STONE-Weierstrass theorem for  $C^*$ -algebras, *Ann. Math.*, t. 72, 1960, pp. 216-244.
- [12] J. GLIMM, Type I  $C^*$ -algebras, *Ann. Math.*, t. 73, 1961, pp. 572-612.
- [13] R. GODEMENT, Sur la théorie des représentations unitaires, *Ann. Math.*, t. 53, 1951, pp. 68-124.

- [14] R. GODEMENT, Théorie des caractères II, *Ann. Math.*, t. 59, 1954, pp. 63-85.
- [15] A. GUICHARDET, Une caractérisation des algèbres de von Neumann discrètes, *Bull. Soc. Math. France.*, t. 89, 1961, pp. 77-101.
- [16] A. GUICHARDET, Sur les représentations factorielles des  $C^*$ -algèbres, *C. R. Acad. Sc.*, t. 252, 1961, pp. 1088-1089.
- [17] A. GUICHARDET, Sur les caractères des algèbres de Banach à involution, *C. R. Acad. Sc.*, t. 252, 1961, pp. 2800-2802.
- [18] A. GUICHARDET, Représentations unitaires de certains produits semi-directs, *C. R. Acad. Sc.*, t. 253, 1961, pp. 48-50.
- [19] A. GUICHARDET, Sur les structures boréliennes du dual et du quasi-dual d'une  $C^*$ -algèbre, *C. R. Acad. Sc.*, t. 253, 1961, pp. 2030-2032.
- [20] P. R. HALMOS, Lectures on ergodic theory, *Math. Soc. Japan*, 1956.
- [21] E. HOPF, Ergodentheorie, Berlin, J. Springer, 1937.
- [22] I. KAPLANSKY, The structure of certain operator algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 70, 1951, pp. 219-255.
- [23] M. LOËVE, Probability theory, Van Nostrand Company 1955.
- [24] L. H. LOOMIS, An introduction to abstract harmonic analysis, Van Nostrand Company, 1953).
- [25] G. W. MACKEY, Imprimitivity for representations of locally compact groups, I. *Proc. Nat. Acad. Sc.*, t. 35, 1949, pp. 537-545.
- [26] G. W. MACKEY, On induced representations of groups, *Amer. J. Math.*, t. 73, 1951, pp. 576-592.
- [27] G. W. MACKEY, Induced representations of locally compact groups, *Ann. Math.*, t. 55, 1952, pp. 101-139.
- [28] G. W. MACKEY, Borel structures in groups and their duals, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 85, 1957, pp. 134-165.
- [29] F. J. MURRAY and J. von NEUMANN, On rings of operators, *Ann. Math.*, t. 37, 1936, pp. 116-229.
- [30] N. A. NAIMARK, Normed rings, Groningen, Noordhoff, 1959.
- [31] M. A. NAIMARK, Factor representations of a locally compact group, *Soviet Math. Doklady*, 1960, pp. 1064-1066.
- [32] N. NAKAMURA, The two-sided representations of an operator algebra, *Proc. Japan. Acad.*, t. 27, 1951, pp. 172-176.
- [33] L. PUKANSZKY, Some examples of factors, *Publ. Math.*, t. 4, 1956, pp. 135-156.
- [34] C. E. RICKART, General theory of Banach algebras, Van Nostrand Company, 1960.
- [35] I. E. SEGAL, An extension of Plancherel's formula to separable unimodular groups, *Ann. Math.*, t. 52, 1950, pp. 272-292.
- [36] I. E. SEGAL, A class of operator algebras which are determined by groups, *Duke Math. J.*, t. 18, 1951, pp. 221-265.
- [37] O. TAKENOUCHI, Sur une classe de fonctions continues de type positif sur un groupe localement compact, *Math. J. Okayama Univ.*, t. 4, 1955, pp. 143-173.
- [38] T. TURUMARU, Crossed-product of operator algebras, *Tôhoku Math. J.*, t. 10, 1958, pp. 355-365.

(Thèse, Fac. Sciences, Paris, 1962.)