ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

H. DILLINGER
E. DELABAERE
FRÉDÉRIC PHAM

Résurgence de Voros et périodes des courbes hyperelliptiques

Annales de l'institut Fourier, tome 43, nº 1 (1993), p. 163-199
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1993__43_1_163_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
43, 1 (1993), 163–199

RÉSURGENCE DE VOROS ET PÉRIODES DES COURBES HYPERELLIPTIQUES

par E. DELABAERE,
H. DILLINGER
et F. PHAM

Dédié à Heisuke Hironaka pour son soixantième anniversaire.

0. INTRODUCTION

Cet article est une introduction à la *résurgence de Voros.* Son but est de formuler de façon compacte, accessible à un géomètre, l'idée maîtresse de Voros dans [V] : les solutions de l'équation de Schrödinger stationnaire à une dimension, à potentiel polynomial, sont codées exactement *dans le domaine complexe* par leurs *développements BKW* (développements formels, divergents, en puissances de la constante de Planck $\hbar$), d'une façon *entièrement lisible dans la géométrie des périodes* de la forme $p\,\mathrm{d}q$ (avec $q =$ variable de position et $p =$ impulsion classique).

En fait, les obstructions à la sommabilité de Borel des séries BKW sont gouvernées par des *relations finitaires qui se lisent dans la géométrie des périodes.* D'abord baptisées par Voros du terme « analytic bootstrap », ces relations se sont avérées (voir [E]) être un magnifique exemple de ce qu'Écalle appelle *relations de résurgence.*

Précisons un peu les termes du problème.

Il s'agit d'étudier, dans le domaine complexe, l'équation différentielle dépendant d'un « grand » paramètre x (par exemple $x = 1/\hbar$)

$$\frac{\mathrm{d}^2\Psi}{\mathrm{d}q^2} = x^2 W(q)\Psi, \tag{0}$$

Mots-clés : Développements semi-classiques – Résurgence – Monodromie.
Classification A.M.S. : 34E20 – 14H30.

où W est un polynôme unitaire de degré m. Les zéros de ce polynôme, supposés simples, seront notés $q_1, ..., q_m$ et appelés *points de transition.* Localement sur

$$\dot{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \setminus \{q_1, \cdots, q_m\},$$

l'équation (0) admet une solution formelle dite BKW (Brillouin, Kramer, Wentzel), de la forme

$$\dot{\varphi} = \varphi\, \mathrm{e}^{-xS(q)}, \qquad \varphi \in \mathcal{O}_{\dot{\mathbb{C}}}[[x^{-1}]],$$

où S est une primitive de $p(q) = W(q)^{1/2}$. Une fois choisie la détermination de la racine, cette solution est *unique à un facteur de normalisation près*, c'est-à-dire à multiplication près par un élément inversible

$$\dot{a} \in \mathbb{C}[[x^{-1}]]^*\, \mathrm{e}^{-x\omega}, \qquad \omega \in \mathbb{C}.$$

Les physiciens ont pris l'habitude de considérer que les vraies solutions de l'équation (0) sont « données par » les combinaisons linéaires de deux solutions BKW correspondant à deux déterminations opposées de p. Mais que signifie « données par » ?

Contrairement au point de vue courant selon lequel les objets formels que sont les solutions BKW n'en fourniraient que des *approximations*, la théorie de la résurgence permet de les considérer comme un codage exact des vraies solutions (idée déjà pressentie par de nombreux physiciens, et sur laquelle Dingle [D] a toujours insisté). Cette façon de voir permet de faire des *prolongements analytiques*, ce que permet mal le point de vue asymptotique de « l'analyse moderne » (comment prolonger analytiquement des approximations ?). Lors de ces prolongements analytiques le codage subit des discontinuités appelés *phénomènes de Stokes*, dont l'étude est l'objet principal de la théorie de la résurgence.

Les phénomènes de Stokes ont fait couler beaucoup d'encre, et suscité de nombreuses controverses dues notamment à un malentendu entre les physiciens, intuitivement attachés à l'idée que leurs séries asymptotiques représentent vraiment des fonctions, et les mathématiciens que leur souci de rigueur a conduits depuis Poincaré à considérer les séries asymptotiques comme des *classes d'équivalence* de fonctions. La théorie de la résurgence donne raison aux physiciens, et fournit les outils nécessaires pour rendre leur point de vue accessible à ceux que Poincaré appelait « les géomètres » (voir [P], t. II, chap. VIII).

La « résurgence de Voros » en est une belle illustration, qui donne une description complète des phénomènes de Stokes pour les solutions de l'équation (0) en termes de *géométrie des périodes de la courbe hyperelliptique* $p^2 - W(q) = 0$.

Outre le recours systématique au langage et aux techniques de la résurgence (pour lequel nous sommes redevables à J. Écalle de nous avoir communiqué ses brouillons et manuscrits), notre exposé se distingue de celui de Voros par le caractère géométrique *intrinsèque* de ses énoncés, formulés en termes *d'homologie de la courbe hyperelliptique* (les choix arbitraires de *coupures* de Voros équivalant au choix d'une base de l'homologie). Cette approche géométrique nous permettra de mieux comprendre comment les relations de résurgence de Voros varient avec les coefficients du polynôme W, ce qui fera apparaître un lien profond avec *la théorie de Picard-Lefschetz,* qui décrit la variation de l'homologie.

Dans un article ultérieur [DDP], nous appliquerons ces résultats à l'étude du spectre de l'opérateur de Schrödinger, comme annoncé dans notre note [DDP_0].

Structure de l'article. — Les deux premiers paragraphes introduisent les invariants fondamentaux de la monodromie formelle (*coefficients de Voros*) et expliquent leurs propriétés géométriques (que tout géomètre devrait pouvoir comprendre sans rien connaître de la résurgence). Le § 3, qui est le cœur de l'article, décrit les propriétés de résurgence de ces invariants : demandant au lecteur d'admettre les deux énoncés de base (théorèmes 3.0 et 3.1), on en déduit les autres énoncés par le jeu du *calcul différentiel étranger* tel qu'il est expliqué dans les *Premiers pas...* [CNP_0].

Enfin le § 4 complète le § 3 en décrivant la structure résurgente des *solutions formelles* de l'équation de Schrödinger (et pas seulement de leurs invariants de monodromie formelle) ; plus difficile car tous ses raisonnements mêlent propriétés de monodromie et propriétés de résurgence, ce paragraphe est nécessaire à qui veut comprendre d'où sort le théorème 3.1 admis au § 3 (ce théorème est un corollaire du théorème 4.1 démontré au § 4).

Au total, notre article se veut un exposé à la fois progressif et self-contenu de la résurgence de Voros, accessible à tout géomètre ayant étudié les *Premiers pas...*, avec des démonstrations complètes *modulo un unique théorème qu'on demande au lecteur d'admettre* : le théorème 4.0 dont le théorème 3.0 est un cas particulier, et dont la démonstration due à Écalle utilise des outils non géométriques assez différents de ceux utilisés ici.

1. MONODROMIE FORMELLE DES SYMBOLES BKW

Nous appellerons désormais *symboles BKW élémentaires* les solutions formelles évoquées ci-avant, et *symboles BKW* leurs combinaisons linéaires. Objets formels définis localement sur $\dot{\mathbb{C}}$, les symboles BKW élémentaires sont associés au choix d'une détermination de $p(q) = W(q)^{1/2}$, et peuvent ainsi être considérés comme des objets locaux sur $\dot{\mathbb{C}}_2$, surface de Riemann de la fonction $p(q) = W(q)^{1/2}$ (revêtement à deux feuillets de $\dot{\mathbb{C}}$) : c'est ce que nous ferons désormais.

Nous nous proposons dans ce paragraphe de décrire la monodromie des symboles BKW élémentaires, c'est-à-dire la façon dont ils se comportent par prolongement analytique le long de cycles de $\dot{\mathbb{C}}_2$. Nous entendons par *cycle* un chemin de $\dot{\mathbb{C}}_2$ dont l'origine et l'extrémité coïncident. Puisque les symboles BKW élémentaires ne diffèrent localement sur $\dot{\mathbb{C}}_2$ que par leur normalisation, le groupe des (classes d'homotopie de) cycles agit sur eux de façon commutative. *L'action d'un cycle ne dépend donc que de sa classe d'homologie dans* $H_1(\dot{\mathbb{C}}_2)$, ce qui permet d'oublier le point base, et justifie notre appellation cycles.

1.1. Structure de la monodromie.

Soit $\mathcal{L}$ la courbe algébrique affine d'équation $p^2 = W(q)$ (c'est-à-dire $\dot{\mathbb{C}}_2$ complété par l'ajout des points de ramification du revêtement).

PROPOSITION (cf. appendice A.2). — *Le prolongement analytique d'un symbole BKW élémentaire le long d'un cycle γ de $\dot{\mathbb{C}}_2$ ne dépend que des deux données suivantes :*

(1) *la classe d'homologie $\boldsymbol{\gamma}$ de ce cycle dans $\mathcal{L}$;*

(2) *sa signature*

$$\operatorname{sgn}(\gamma) = \tfrac{1}{2} n(\gamma) \pmod 2,$$

où $n(\gamma)$ est l'indice (évidemment pair) de la projection de γ dans $\dot{\mathbb{C}}$.

Plus précisément on a pour tout symbole BKW élémentaire $\dot{\varphi}$

$$\gamma\dot{\varphi} = (-)^{\operatorname{sgn}(\gamma)}\, \dot{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{\gamma}}\dot{\varphi},$$

où $\boldsymbol{\gamma} \mapsto \dot{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{\gamma}}$ désigne une représentation du groupe d'homologie $H_1(\mathcal{L})$ dans le groupe multiplicatif $\mathbb{C}[[x^{-1}]]^*\, \mathrm{e}^{-x\Omega}$ (où Ω est le réseau des *périodes* $\omega_{\boldsymbol{\gamma}} = \int_{\boldsymbol{\gamma}} p\, \mathrm{d}q$).

Ce groupe d'homologie est libre de rang $(m-1)$ et peut être engendré par $\boldsymbol{\gamma}_{12}, \boldsymbol{\gamma}_{13}, \cdots, \boldsymbol{\gamma}_{1m}$, où $\boldsymbol{\gamma}_{ij}$ désigne un *cycle élémentaire*, cycle faisant un aller-retour entre les points de transition q_i et q_j en changeant de feuillet.

La figure 1 représente quatre cycles de $\dot{\mathbb{C}}_2$ ayant pour image un même cycle élémentaire $\boldsymbol{\gamma}$ de $\mathcal{L}$; leurs monodromies diffèrent par le signe, qui dépend de leurs signatures.

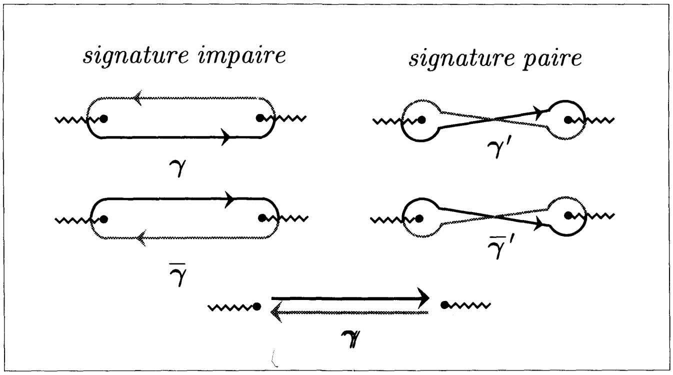


Figure 1. Quelques cycles remarquables. (Les lignes ondulées sont des coupures destinées à rendre lisibles les changements de feuillets.)

1.2. Symboles élémentaires et coefficients de Voros.

Précisons la structure des $\dot{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{\gamma}}$ introduits ci-dessus, les *symboles élémentaires de Voros.* Chacun d'entre eux s'écrit comme un produit

$$\dot{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{\gamma}}\, \mathrm{e}^{-x\omega_{\boldsymbol{\gamma}}}$$

où $\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{\gamma}} \in \mathbb{C}[[x^{-1}]]^*$ est le *coefficient de Voros* et $\omega_{\boldsymbol{\gamma}} = \int_{\boldsymbol{\gamma}} p\,\mathrm{d}q$ est la *période* du cycle $\boldsymbol{\gamma}$.

Comme le savent les spécialistes (cf. appendice A.1), les coefficients $\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{\gamma}}$ sont définis à l'aide d'intégrales sur $\boldsymbol{\gamma}$ qui convergent à l'infini. On en déduit la :

PROPOSITION 1.2.1. — *La représentation $\boldsymbol{a} : \boldsymbol{\gamma} \mapsto \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{\gamma}}$ de $H_1(\mathcal{L})$ dans $\mathbb{C}[[x^{-1}]]^*$ se factorise à travers une représentation a de $H_1^F(\mathcal{L})$, homologie à supports fermés de $\mathcal{L}$:*

$$\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{\gamma}} = a_\gamma \quad (\textit{où } \gamma \textit{ est l'image de } \boldsymbol{\gamma} \textit{ dans } H_1^F(\mathcal{L})).$$

Dual de $H_1(\mathcal{L})$ par la dualité de Poincaré, $H_1^F(\mathcal{L})$ peut être engendré par des chemins sans fin λ_i (avec $i = 1, 2, \cdots, m$ et liés par une relation $\lambda_1 + \cdots + \lambda_m = 0$) faisant l'aller-retour de l'infini à q_i en changeant de feuillet. Par un calcul immédiat d'indices d'intersection (des $\boldsymbol{\gamma}_{1j}$ entre eux et avec les λ_i) on démontre la :

Proposition 1.2.2. — *L'homomorphisme canonique*

$$\begin{aligned} v : H_1(\mathcal{L}) &\longrightarrow H_1^F(\mathcal{L}) \\ \boldsymbol{\gamma} &\longmapsto \gamma \end{aligned}$$

est un isomorphisme pour m impair, tandis que pour m pair son noyau et son conoyau sont libres de rang 1 : *le noyau est engendré par la classe d'un grand cycle entourant tous les points de transition, et le conoyau par n'importe lequel des λ_i.*

Pour des raisons qui apparaîtront au paragraphe suivant, le noyau de v sera appelé *homologie invariante*, et noté $\mathrm{Inv}(\mathcal{L})$.

Exemple. — Lorsque $m = 4$, pour W générique, le réseau des périodes Ω est engendré par trois périodes indépendantes (rang $H_1(\mathcal{L}) = 3$). Mais comme l'image de $H_1(\mathcal{L})$ dans $H_1^F(\mathcal{L})$ est de rang 2, le groupe des coefficients de Voros $\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{\gamma}}$ n'a que deux générateurs indépendants. On obtiendra un troisième générateur indépendant en étendant la notion de coefficients de Voros aux cycles non compacts (chemins sans fin de $\mathcal{L}$), comme nous y autorise la proposition 1.2.1 :

Définition. — *Nous appellerons désormais groupe de Voros $\mathcal{V}$ (ou groupe des coefficients de Voros) le groupe des a_λ (avec $\lambda \in H_1^F(\mathcal{L})$).*

1.3. Extension de l'homomorphisme des périodes.

De même que nous venons d'étendre la notion de coefficients de Voros, nous aimerions étendre aux cycles λ non compacts la notion de symbole élémentaire de Voros, en écrivant

$$\dot{a}_\lambda = a_\lambda \,\mathrm{e}^{-x\omega_\lambda}$$

pour des ω_λ convenablement définis.

Le problème — qui ne se pose que dans le cas m pair — est donc *d'étendre* l'homomorphisme des périodes ω (précédemment défini comme homomorphisme de $H_1(\mathcal{L})$ dans $\mathbb{C}$).

Mais attention : la période d'un $\boldsymbol{\gamma} \in \operatorname{Ker} v$ (cycle invariant) n'a aucune raison d'être nulle ! Nous allons donc étendre ω non pas à $H_1^F(\mathcal{L})$ mais à un *groupe d'homologie relative* $H_1^{\mathrm{rel}}(\mathcal{L})$ (lemme ci-après) dont $H_1(\mathcal{L})$ et $H_1^F(\mathcal{L})$ sont des facteurs directs.

Homologie à supports fermés et homologie relative. — Par un argument bien connu de déformation-rétraction, on sait que l'homologie à supports fermés $H_1^F(\mathcal{L})$ est canoniquement isomorphe à l'homologie relative $H_1(\mathcal{L}, \underline{\mathcal{L}}^\infty)$, où $\underline{\mathcal{L}}^\infty$ désigne un voisinage convenable de l'infini dans $\mathcal{L}$ (par exemple la partie de $\dot{\mathbb{C}}_2$ se projetant à l'extérieur d'un grand disque de $\mathbb{C}$). Dans le cas m pair, $\underline{\mathcal{L}}^\infty$ a deux composantes connexes homéomorphes au complémentaire du disque.

Soient b_1 et b_2 deux points arbitrairement choisis dans chacune de ces composantes connexes, et posons

$$H_1^{\mathrm{rel}}(\mathcal{L}) := H_1\big(\mathcal{L}, \{b_1, b_2\}\big)$$

(l'oubli de b_1, b_2 dans la notation se justifie par le fait que *tous ces groupes sont canoniquement isomorphes*).

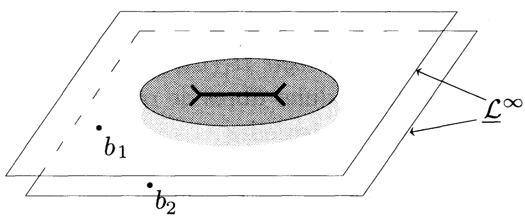


Figure 2. *Représentation de $\mathcal{L}$ pour $m = 2$.*

LEMME. — *$H_1^{\mathrm{rel}}(\mathcal{L})$ est libre de rang m et admet $H_1(\mathcal{L})$ comme sous-groupe et $H_1^F(\mathcal{L})$ comme groupe quotient.*

La preuve de ce lemme est un exercice facile d'homologie.

Homomorphisme des périodes étendu. — Pour $\boldsymbol{\lambda} \in H_1^{\mathrm{rel}}(\mathcal{L})$ on posera :

$$\underline{\omega}_{\boldsymbol{\lambda}} = \int_{\boldsymbol{\lambda}} p \, \mathrm{d}q.$$

On obtient ainsi un homomorphisme $\underline{\omega} : H_1^{\mathrm{rel}}(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathbb{C}$, qui ne dépend du choix des points b_1, b_2 qu'à *l'addition d'une constante près.*

Extension des symboles élémentaires de Voros. — Pour $\boldsymbol{\lambda} \in H_1^{\mathrm{rel}}(\mathcal{L})$ on posera

$$\dot{a}_{\boldsymbol{\lambda}} = a_\lambda e^{-x\underline{\omega}_{\boldsymbol{\lambda}}},$$

où λ désigne l'image de $\boldsymbol{\lambda}$ dans $H_1^F(\mathcal{L})$. Les symboles élémentaires de Voros $\dot{a}_{\boldsymbol{\lambda}}$ forment un groupe : *le groupe de Voros* $\dot{\mathcal{V}}^{\mathrm{el}}$.

2. VARIATION DE LA GÉOMÉTRIE DES PÉRIODES AVEC LES COEFFICIENTS DU POLYNÔME

On notera $\mathbb{W} = \mathbb{C}^{m-1}$ l'espace des polynômes W unitaires de degré m :

$$\begin{aligned} W &= q^m + w_{m-2}q^{m-2} + \cdots + w_1 q + w_0 \\ &= (w_0, w_1, \cdots, w_{m-2}) \in \mathbb{C}^{m-1} \end{aligned}$$

et $\mathbb{W}^* = \mathbb{W} \setminus \mathbb{D}$ le sous-espace des polynômes n'ayant que des zéros simples (complémentaire du lieu discriminant $\mathbb{D}$).

Pour un W fixé, on désignera par $\mathcal{L}_W$ la courbe algébrique d'équation

$$p^2 = W(q).$$

2.1. Universalité du réseau des périodes.

Le réseau de groupes d'homologie $H_1(\mathcal{L}_W)$, avec W variant dans $\mathbb{W}^*$, forme un système local de $\mathbb{Z}$-modules libres de rang $(m-1)$ sur $\mathbb{W}^*$, noté $H_1(\mathcal{L})_{\mathbb{W}^*}$. L'homomorphisme des périodes

$$\boldsymbol{\gamma} \mapsto \omega_{\boldsymbol{\gamma}} = \int_{\boldsymbol{\gamma}} p\,\mathrm{d}q$$

peut être considéré comme un homomorphisme

$$\omega : H_1(\mathcal{L})_{\mathbb{W}^*} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{W}^*}$$

du système local d'homologie dans le faisceau des fonctions holomorphes sur $\mathbb{W}^*$.

A chaque section multiforme $\boldsymbol{\gamma}$ de $H_1(\mathcal{L})$ sur $\mathbb{W}^*$ est associée une fonction $\omega_{\boldsymbol{\gamma}}$ analytique multiforme sur $\mathbb{W}^*$, localement bornée au voisinage de $\mathbb{D}$, et l'on montre par des arguments désormais classiques (cf. Leray [L]) que les singularités de cette fonction au voisinage des points génériques de $\mathbb{D}$ sont du type $D \operatorname{Log} D$ (où D est une équation locale de $\mathbb{D}$). De plus, si l'on s'approche de $\mathbb{D}$ de façon que le cycle $\boldsymbol{\gamma}$ soit évanescent, la fonction $\omega_{\boldsymbol{\gamma}}$ n'est pas singulière et s'annule *simplement* sur $\mathbb{D}$, c'est-à-dire qu'elle peut être prise comme équation locale de $\mathbb{D}$.

PROPOSITION. — *Soit $\boldsymbol{\gamma}_1, \ldots, \boldsymbol{\gamma}_{m-1}$ une base de sections multiformes de $H_1(\mathcal{L})$ sur $\mathbb{W}^*$. Alors l'application des périodes (définie sur le revêtement universel $\widetilde{\mathbb{W}}^*$ de $\mathbb{W}^*$)*

$$\omega_{\boldsymbol{\gamma}} = (\omega_{\boldsymbol{\gamma}_1}, \cdots, \omega_{\boldsymbol{\gamma}_{m-1}}) : \widetilde{\mathbb{W}}^* \longrightarrow \mathbb{C}^{m-1}$$

est un isomorphisme local.

Preuve. — Par des arguments à la Leray-Guelfand (voir [L] ou [AVG]), on montre que :

$$\partial_{w_i} \omega_{\boldsymbol{\gamma}_j} = \int_{\boldsymbol{\gamma}_j} q^i \, \frac{\mathrm{d}q}{2p}.$$

Soient M la matrice jacobienne $(\partial_{w_i} \omega_{\boldsymbol{\gamma} j})_{\substack{i=0,\ldots,m-2 \\ j=1,\ldots,m-1}}$ et $J = \det M$; la proposition découle alors du :

LEMME. — *J est holomorphe non nulle sur $\mathbb{W}$, et même constante.*

C'est un résultat connu des géomètres, qu'on trouve par exemple dans [AVG]. Nous rappelons ici les grandes lignes de la démonstration, avec quelques simplifications dans notre cas.

Première étape : J est univalué. — Il suffit de remarquer que $\pi_1(W^*)$ est engendré par des *lacets simples* (cf. 2.2 ci-après) dont l'action sur la matrice M consiste (formule de Picard-Lefschetz) à rajouter aux colonnes des multiples de l'une d'entre elles (celle indexée par le cycle évanescent).

Deuxième étape : J est borné au voisinage des points génériques de $\mathbb{D}$. Les points génériques du discriminant sont ceux pour lesquels $\mathcal{L}$ acquiert un point double ordinaire; on peut supposer qu'en un tel point $\boldsymbol{\gamma}_1$ est évanescent, et que son indice d'intersection avec $\boldsymbol{\gamma}_i$ vaut 1 si $i = 2$ et 0 sinon; alors, toujours d'après Picard-Lefschetz (voir [L] ou [AVG])

$$\partial_{w_i} \omega_{\boldsymbol{\gamma}_2} = (\partial_{w_i} \omega_{\boldsymbol{\gamma}_1}) \operatorname{Log} D + \operatorname{hol}(D),$$

où D est une équation locale de $\mathbb{D}$, tandis que les autres $\partial_{w_i} \omega_{\boldsymbol{\gamma}_j}$ restent holomorphes; on conclut facilement.

Troisème étape : J est une constante non nulle. — On utilise un argument de quasi-homogénéité; en affectant à q et w_i les poids respectifs 1 et $(m-i)$, il apparaît que J est quasi-homogène de poids 0 et en particulier constant le long de l'axe des w_0 ; on s'assure que cette constante n'est pas nulle, de sorte que J est non nul dans un voisinage de l'origine, et on conclut par quasi-homogénéité.

2.2. Variation de l'homomorphisme des périodes étendu.

Revenons à l'homomorphisme canonique

$$v : H_1(\mathcal{L}) \longrightarrow H_1F(\mathcal{L})$$

en le considérant maintenant comme homomorphisme de systèmes locaux sur $\mathbb{W}^*$.

LEMME. — *$\operatorname{Ker} v = \operatorname{Inv}(\mathcal{L})$ est l'ensemble des $\boldsymbol{\gamma} \in H_1(\mathcal{L})$ qui sont invariants sous l'action de $\pi_1(\mathbb{W}^*)$.*

Preuve. — Par dualité, les $\boldsymbol{\gamma} \in \operatorname{Ker} v$ sont caractérisés par la propriété d'avoir un indice d'intersection nul avec tous les éléments de $H_1(\mathcal{L})$, ce qui équivaut à la propriété d'invariance d'après Lefschetz (cf. les *formules de Picard-Lefschetz* rappelées plus loin).

COROLLAIRE. — *La période d'un cycle invariant est holomorphe sur tout $\mathbb{W}$.*

En effet cette période est une fonction univaluée sur $\mathbb{W}^*$, bornée au voisinage de $\mathbb{D}$ comme on l'a vu en 2.1.

Notre objectif est maintenant de reprendre la construction 1.3 en la faisant dépendre analytiquement de $W \in \mathbb{W}^*$.

PROPOSITION. — *Pour tout compact $\underline{\mathbb{W}}$ « assez régulier » de $\mathbb{W}$ (par exemple toute boule de centre 0) on peut effectuer la construction* 1.3 *de façon à ce qu'elle dépende analytiquement de $W \in \underline{\mathbb{W}}^* = \underline{\mathbb{W}} \setminus \mathbb{D}$, définissant ainsi un homomorhisme de systèmes locaux :*

$$\underline{\omega} : H_1^{\mathrm{rel}}(\mathcal{L})_{\underline{\mathbb{W}}^*} \longrightarrow \mathcal{O}_{\underline{\mathbb{W}}^*}.$$

Cet homomorphisme est unique à l'addition près d'une fonction holomorphe (arbitraire) sur $\underline{\mathbb{W}}$.

Preuve. — Cette proposition résultera immédiatement du fait que les points b_1 et b_2 dans la construction 1.3, peuvent être choisis de façon à dépendre analytiquement de W dans tout $\underline{\mathbb{W}}$.

Plus précisément, pour tout compact $\underline{\mathbb{W}}$ assez régulier de $\mathbb{W}$, on peut identifier le système local $H_1^F(\mathcal{L})_{\underline{\mathbb{W}}^*}$ à un système local d'homologie relative $H_1(\mathcal{L}, \underline{\mathcal{L}}^\infty)_{\underline{\mathbb{W}}^*}$, où $\underline{\mathcal{L}}^\infty$ est un voisinage convenable de l'infini dans $\mathcal{L}$ (disons $\underline{\mathcal{L}}^\infty W = \{(p,q) \in \mathcal{L}_W \ ; \ |q| > R\}$ avec R assez grand pour que tous les points de transition $q_i(W)$ restent dans le disque $|q| < R$ pour tout W dans $\underline{\mathbb{W}}$).

De plus la paire $(\mathcal{L}, \underline{\mathcal{L}}^\infty)$ est fibrée (localement triviale) au-dessus de $\underline{\mathbb{W}}^*$, *la fibration du deuxième terme de la paire s'étendant même en un fibré trivial sur tout* $\underline{\mathbb{W}}$. On peut ainsi définir b_1 et b_2 comme deux sections sur $\underline{\mathbb{W}}$ du fibré $\underline{\mathcal{L}}^\infty$, à valeurs dans les deux composantes connexes de ce fibré. Ces sections peuvent évidemment être choisies holomorphes (par exemple en les choisissant constantes en projection sur le plan des q).

Commentaire : lien avec la théorie de Picard-Lefschetz. — Notre introduction du système local $H_1^{\mathrm{rel}}(\mathcal{L})$ permet de réinterpréter la théorie classique de Picard-Lefschetz comme décrivant la *monodromie de ce système local*, c'est-à-dire l'action de $\pi_1(\underline{\mathbb{W}}^*, W_0)$ sur $H_1^{\mathrm{rel}}(\mathcal{L}_{W_0})$: soit $\rho \in \pi_1(\underline{\mathbb{W}}^*, W_0)$ un *lacet simple* de $\mathbb{W}^*$ (lacet de base W_0 commençant par s'approcher d'un point générique de $\mathbb{D}$ puis rebroussant chemin après un petit tour dans le sens direct autour de $\mathbb{D}$) ; l'action d'un tel lacet sur une classe d'homologie relative $\boldsymbol{\lambda} \in H_1^{\mathrm{rel}}(\mathcal{L}_{W_0})$ est donnée par la « formule de Picard-Lefschetz »

$$\rho(\boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{\lambda} + (\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\lambda})\boldsymbol{\gamma}$$

où $\boldsymbol{\gamma}$ est le cycle évanescent associé au lacet ρ et où $\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\lambda}$ désigne *l'indice d'intersection* (nombre d'intersections, supposées transverses, comptées positivement ou négativement selon que les tangentes orientées à $\boldsymbol{\gamma}$ et $\boldsymbol{\lambda}$, dans cet ordre, forment un repère direct ou non). En particulier $\boldsymbol{\gamma}$ est invariant par ρ (car $\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma} = 0$).

Remarquons que la monodromie de $H_1^{\mathrm{rel}}(\mathcal{L})$ contient davantage d'information que les monodromies de $H_1(\mathcal{L})$ et $H_1^F(\mathcal{L})$: par exemple dans le cas $m = 2$ les monodromies de $H_1(\mathcal{L})$ et $H_1^F(\mathcal{L})$ ($\approx \mathbb{Z}$) sont toutes les deux triviales (car $v = 0$), alors que la formule de Picard-Lefschetz n'est pas triviale.

Conclusion. — A tout compact $\underline{\mathbb{W}}$ assez régulier de $\mathbb{W}$ notre construction permet d'associer un système local de groupes commutatifs sur $\underline{\mathbb{W}}^*$, le *groupe de Voros* $\dot{\mathcal{V}}^{\mathrm{el}}$ dont les éléments, indexés par les classes d'homologie relatives $\boldsymbol{\lambda} \in H_1^{\mathrm{rel}}(\mathcal{L})$, sont de la forme

$$\dot{a}_{\boldsymbol{\lambda}} = a_\lambda \,\mathrm{e}^{-x\underline{\omega}_{\boldsymbol{\lambda}}},$$

où $a_{\boldsymbol{\lambda}} \in \mathcal{O}_{\underline{\mathbb{W}}^*}[[x^{-1}]]^*$ et $\underline{\omega}_{\boldsymbol{\lambda}} \in \mathcal{O}_{\underline{\mathbb{W}}^*}$.

3. RÉSURGENCE DES COEFFICIENTS DE VOROS

Rappelons que par *coefficients de Voros* nous entendons désormais leur extension aux cycles non compacts :

$$a_\lambda \in \mathbb{C}[[x^{-1}]]^*, \qquad \lambda \in H_1^F(\mathcal{L}).$$

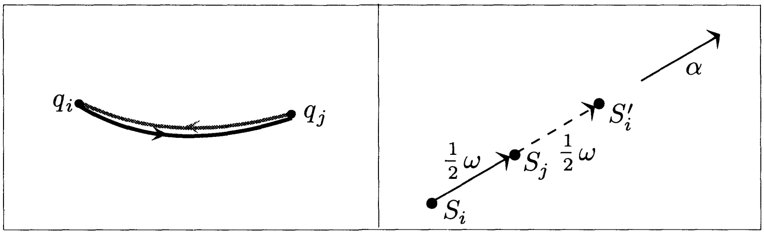
Cycles géodésiques et directions critiques. — Soit S une primitive de $p\,dq$. On pourra la considérer comme une application $S : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{C}$, où la surface de Riemann $\mathcal{S}$ de S est un revêtement galoisien de $\mathcal{L}$, de groupe structural $H_1(\mathcal{L})$. On peut voir $\mathcal{S}$ comme une surface immergée dans $\mathcal{L} \times \mathbb{C}$, le deuxième facteur $\mathbb{C}$ étant le plan des valeurs de la primitive « plan des S », plan sur lequel le groupe structural $H_1(\mathcal{L})$ agit par translation (*translations par le réseau des périodes*). La projection $S : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{C}$ fait de $\mathcal{S}$ un *revêtement ramifié* de $\mathbb{C}$, dont les points de ramification sont d'ordre 3 (au voisinage d'un point de transition q_j, il est possible de choisir p comme coordonnée locale et on a $S = \text{Cte} + p^3 \cdot$ *fct. hol.*).

Notons le caractère inhabituel (pour un géomètre algébriste) de ce « revêtement ramifié » : bien que la ramification soit d'un type très simple si on la considère *localement* sur $\mathcal{S}$, l'ensemble des points de ramification sera en général dense en projection dans le plan des S (tout point de ramification S_j donnant naissance à une infinité d'autres qui s'en déduisent par l'action du réseau des périodes).

On appellera *géodésique* une courbe de $\mathcal{L}$ dont le relèvement dans $\mathcal{S}$ a pour projection par S un segment de droite. La direction α de ce segment (orienté) sera appelée *direction de la géodésique.* Un *cycle géodésique* est une géodésique qui est en même temps un cycle (compact) de $\mathcal{L}$ (cf. figure 3). Le nombre de cycles géodésiques, compte non tenu de l'orientation, est au plus égal à $m(m-1)/2$ (autant que de paires de points de transition), ce maximum étant atteint par exemple quand le coefficient w_0 du polynôme W est grand devant tous les autres (de sorte que les points de transition sont les sommets d'un polygône presque régulier à m côtés).

On appelle *directions critiques* les directions des cycles géodésiques. Remarquons que pour toute direction critique la direction opposée est aussi critique, correspondant au cycle parcouru en sens inverse.

THÉORÈME 3.0 (J. Écalle). — *Les a_λ sont des fonctions résurgentes (sommables) de x, dépendant analytiquement des coefficients du polynôme W ; leurs directions singulières sont les directions critiques.*



Cycle géodésique vu dans le plan des q. Les points de ramification q_i et q_j sont des points de ramification d'ordre 2 ; on passe du segment de courbe en trait foncé au segment en trait pâle en « changeant de feuillet » par un tour complet autour d'un point de transition.

Le même cycle dans le plan des S. Les points S_i, S_j, S_i (qui diffèrent par une demi-période $\omega/2$) sont des points de ramification d'ordre 3 ; on passe du segment en trait plein au segment en tiret par trois demi-tours autour du point de ramification S_j.

Figure 3.

Remarque. — La dépendance analytique en les coefficients reste vraie même pour les valeurs qui rendent singulière la courbe algébrique $\mathcal{L}$ (valeurs de confluence des points de transition), sous réserve que le chemin λ puisse être déformé continûment, c'est-à-dire ne soit pas « pincé » par la confluence des points de transition.

Commentaire. — Pour un exposé succinct des concepts de base de la théorie d'Écalle [E$_0$], voir [CNP$_0$]. On retiendra avant tout du théorème 3.0 que les coefficients de Voros sont sommables de Borel dans toutes les directions du plan complexe sauf un nombre fini d'entre elles, les directions critiques. Le chapitre suivant va expliciter l'action des *automorphismes de passage*, indexés par les directions α critiques [CNP$_0$], § 3, qui décrivent les « phénomènes de Stokes » [CNP$_0$], § 5.

3.1. Action des automorphismes de passage dans le cas générique.

HYPOTHÈSE. — *Il n'existe pas deux cycles géodésiques de même direction.*

(Cette hypothèse est générique d'après la proposition 2.1.)

THÉORÈME.

(i) *Les singularités vues de a_λ sont les périodes des cycles géodésiques $\boldsymbol{\gamma}$ tels que $\boldsymbol{\gamma} \cdot \lambda \neq 0$.*

(ii) *Pour toute direction critique* α, *l'automorphisme de passage* $\underline{\mathfrak{S}}_\alpha$ *est donné par*

$$\underline{\mathfrak{S}}_\alpha = \mathfrak{S}_{\boldsymbol{\gamma}(\alpha)},$$

où $\boldsymbol{\gamma}(\alpha)$ *désigne l'unique cycle géodésique de direction* α, *et* $\mathfrak{S}_{\boldsymbol{\gamma}}$ *est défini par :*

$$\mathfrak{S}_{\boldsymbol{\gamma}} \dot{a}_{\boldsymbol{\lambda}} = (1 + \dot{a}_{\boldsymbol{\gamma}})^{\boldsymbol{\gamma}\cdot\lambda} \dot{a}_{\boldsymbol{\lambda}}.$$

Tous les ingrédients de la preuve de ce théorème (cf. § 4.2) peuvent être trouvés dans Voros [V] (modulo le théorème 3.0, qu'il admet implicitement). Notre formulation s'inspire de celle d'Écalle [E], et ne s'en distingue que par le remplacement de la combinatoire algébrique par la géométrie.

Le groupe $\overset{\circ}{\mathbb{V}}$ *des symboles de Voros.* — Nous appellerons *symbole de Voros* tout symbole déduit d'un symbole élémentaire $\dot{a}_{\boldsymbol{\lambda}}$ par application itérée d'opérateurs $\mathfrak{S}_{\boldsymbol{\gamma}}$, les $\boldsymbol{\gamma}$ étant des cycles géodésiques. Les symboles de Voros se présentent comme des fractions dont numérateur et dénominateur sont dans $\mathbb{N}[\dot{\mathcal{V}}^{\text{el}}]$ (combinaisons linéaires de symboles de Voros élémentaires, à coefficients entiers naturels). Ils forment un *groupe à automorphismes* que nous noterons $\overset{\circ}{\mathbb{V}}$: il s'agit d'un groupe multiplicatif muni d'un groupe $\operatorname{Aut}\overset{\circ}{\mathbb{V}}$ *d'automorphismes de passage*, sous-groupe du groupe de tous les automorphismes.

Traduction du théorème 3.1 en termes de dérivations étrangères. — Si l'on préfère travailler sur l'algèbre des fonctions résurgentes au lieu de celle des symboles résurgents, on remplacera les automorphismes de passage par les dérivations étrangères d'Écalle [CNP$_0$], § 4 : indexées par les $\omega \in \mathbb{C}^*$ (plan de Borel), les dérivations étrangères sont des dérivations de l'algèbre des fonctions résurgentes, obtenues en décomposant en composantes élémentaires les dérivations $\underline{\Delta}_\alpha = \operatorname{Log}(\underline{\mathfrak{S}}_\alpha)$ de l'algèbre des symboles résurgents.

Dans notre cas on obtient ainsi la traduction suivante du théorème 3.1 :

THÉORÈME 3.1′. — *Le groupe* $\mathcal{V}$ *des coefficients de Voros est stable sous l'action des dérivations étrangères (à multiplication près par des constantes rationnelles), les seules dérivations étrangères à agir non trivialement étant celles indexées par les multiples des périodes des cycles* *géodésiques : si $\omega_{\boldsymbol{\gamma}}$ est la période du cycle géodésique $\boldsymbol{\gamma} \in H_1(\mathcal{L})$, l'action de $\Delta_{n\omega}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$, est donnée par :*

$$\Delta_{n\omega}\, a_\lambda = \frac{(-1)^{n-1}}{n}(\boldsymbol{\gamma} \cdot \lambda) a_{\lambda+n\gamma}.$$

Cet énoncé condense dans le langage résurgent d'Écalle toute l'idée du « bootstrap analytique » de Voros : dans l'interprétation des dérivées étrangères en termes de singularités dans le plan de Borel [CNP$_0$], § 4, il montre comment les éléments du groupe de Voros « resurgissent » en leurs singularités.

Preuve. — La formule du théorème 3.1$'$ se déduit facilement de celle du théorème 3.1 dans les cas particuliers $\boldsymbol{\gamma} \cdot \lambda = 0$ (cas trivial) et $\boldsymbol{\gamma} \cdot \lambda = 1$ (cf. [CNP$_0$], exemple 4.3). Le cas général s'en déduit en remarquant que par dualité tout cycle λ s'écrit comme une combinaison $\lambda = N\mu + \nu$ (où $N = \boldsymbol{\gamma} \cdot \lambda$) de cycles μ et ν tels que $\boldsymbol{\gamma} \cdot \mu = 1$, $\boldsymbol{\gamma} \cdot \nu = 0$. On obtient la formule annoncée en appliquant à $a_\lambda = a_\mu^N a_\nu$ la règle de dérivation d'un produit.

3.2. Rencontre de deux directions critiques.

Partant de la situation générique 3.1, le type le plus simple de dégénérescence est *la rencontre de deux directions critiques*, c'est-à-dire le cas où deux cycles géodésiques $\boldsymbol{\gamma}_1$, $\boldsymbol{\gamma}_2$ viennent à avoir la même direction α. Deux cas sont alors possibles :

(i) $\boldsymbol{\gamma}_2 \cdot \boldsymbol{\gamma}_1 = 0$; alors $\underline{\mathfrak{S}}_\alpha = \mathfrak{S}_{\boldsymbol{\gamma}_2} \mathfrak{S}_{\boldsymbol{\gamma}_1} = \mathfrak{S}_{\boldsymbol{\gamma}_1} \mathfrak{S}_{\boldsymbol{\gamma}_2}$.

(ii) $\boldsymbol{\gamma}_2 \cdot \boldsymbol{\gamma}_1 = 1$; alors $\underline{\mathfrak{S}}_\alpha = \mathfrak{S}_{\boldsymbol{\gamma}_2} \mathfrak{S}_{\boldsymbol{\gamma}_1} = \mathfrak{S}_{\boldsymbol{\gamma}_1} \mathfrak{S}_{\boldsymbol{\gamma}_1+\boldsymbol{\gamma}_2} \mathfrak{S}_{\boldsymbol{\gamma}_2}$.

Ces « relations de commutation » entre les $\mathfrak{S}_{\boldsymbol{\gamma}}$ se vérifient aisément en complétant $\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2$ en une base de $H_1(\mathcal{L})$ et en faisant agir les automorphismes $\mathfrak{S}_{\boldsymbol{\gamma}}$ sur la base duale $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$: ainsi par exemple pour le deuxième cas, on trouve que $\dot{a}_{\boldsymbol{\lambda}_1}$ est multiplié par $(1 + \dot{a}_{\boldsymbol{\gamma}_1} + \dot{a}_{\boldsymbol{\gamma}_1+\boldsymbol{\gamma}_2})$, tandis que $\dot{a}_{\boldsymbol{\lambda}_2}$ est multiplié par $(1 + \dot{a}_{\boldsymbol{\gamma}_2})$.

Plus intéressante est la question de prouver que les produits indiqués des $\mathfrak{S}_{\boldsymbol{\gamma}}$ donnent bien $\underline{\mathfrak{S}}_\alpha$. Dans le deuxième cas (le seul délicat), l'idée est de déformer un peu les coefficients du polynôme pour se mettre dans la situation générique 3.1. L'automorphisme de passage $\underline{\mathfrak{S}}_\alpha$ se décompose alors en un produit d'automorphismes $\underline{\mathfrak{S}}_{\alpha_1}$, $\underline{\mathfrak{S}}_{\alpha_2}$, et éventuellement $\underline{\mathfrak{S}}_{\alpha_3}$ comme l'indique la figure 4 et son commentaire.

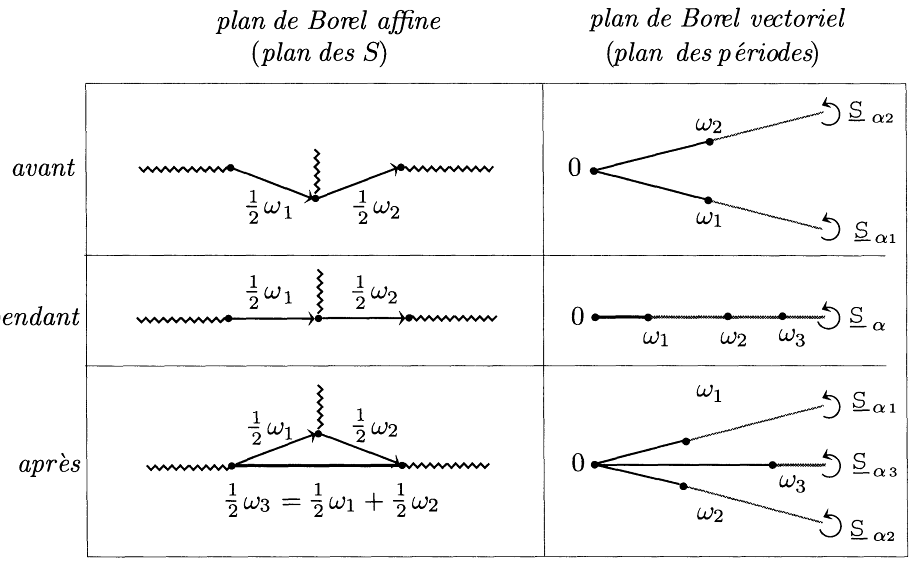


Figure 4. *La rencontre de deux directions critiques donne naissance à une troisième* (ω_i = *période du cycle géodésique* $\boldsymbol{\gamma}_i$).

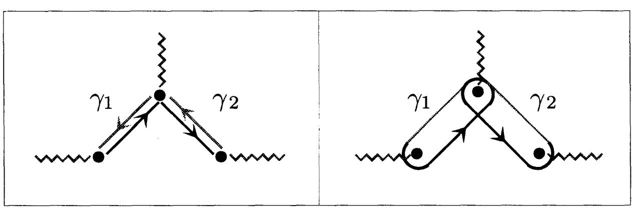


Figure 4 *bis. Intersection de deux cycles géodésiques de même direction : on vérifie sur le dessin que* $\boldsymbol{\gamma}_2 \cdot \boldsymbol{\gamma}_1 = 1$.

Commentaire de la figure 4 : naissance ou disparition d'un cycle géodésique. — Cette figure illustre la façon dont génériquement peut naître ou disparaître un cycle géodésique. On a représenté à gauche les images dans le « plan des S » de cycles géodésiques ; pour alléger les figures seules ont été dessinées les moitiés de ces cycles situées dans le « premier feuillet » (cf. la figure 3 pour le dessin des moitiés manquantes) : un demi-cycle géodésique apparaît ainsi comme un segment rectiligne du plan des S joignant deux points de ramification *dans le premier feuillet*; la disposition des coupures sur la figure montre comment apparaît le cycle de période

$\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$. La relation de commutation donnée ci-dessus (deuxième cas) se lit en composant les automorphismes de passage représentés sur la figure de droite (plan des périodes).

Il résulte de cette relation de commutation, qui peut encore s'écrire

$$\mathfrak{S}_{\boldsymbol{\gamma}_1+\boldsymbol{\gamma}_2} = \mathfrak{S}_{\boldsymbol{\gamma}_1}^{-1}\mathfrak{S}_{\boldsymbol{\gamma}_2}\mathfrak{S}_{\boldsymbol{\gamma}_1}\mathfrak{S}_{\boldsymbol{\gamma}_2}^{-1},$$

que même lorsque le cycle $\boldsymbol{\gamma}_3 = \boldsymbol{\gamma}_1 + \boldsymbol{\gamma}_2$ cesse d'être géodésique, l'automorphisme $\mathfrak{S}_{\boldsymbol{\gamma}_1+\boldsymbol{\gamma}_2}$ n'en continue pas moins d'appartenir au groupe $\operatorname{Aut} \mathring{\mathbb{V}}$. On obtient ainsi la :

PROPOSITION. — *Le groupe à automorphismes $\mathring{\mathbb{V}}$ des symboles de Voros peut être considéré comme un système local sur $\underline{\mathbb{W}}^*$.*

3.3. Traversée du lieu discriminant.

Si ρ est l'automorphisme de monodromie associé à un lacet simple, dont $\boldsymbol{\gamma}$ désigne le cycle évanescent, on a les relations :

$$(\rho) \qquad \rho = \mathfrak{S}_{\boldsymbol{\gamma}}\mathfrak{S}_{-\boldsymbol{\gamma}} = \mathfrak{S}_{-\boldsymbol{\gamma}}\mathfrak{S}_{\boldsymbol{\gamma}}.$$

Ces relations se vérifient aisément par calcul explicite de l'action sur un $\dot{a}_{\boldsymbol{\lambda}}$: si $\boldsymbol{\gamma}\cdot\lambda = 0$ l'action est triviale, tandis que si $\boldsymbol{\gamma}\cdot\lambda = 1$ l'action se déduit de la formule de Picard-Lefschetz,

$$\rho\, \dot{a}_{\boldsymbol{\lambda}} = \dot{a}_{\rho(\boldsymbol{\lambda})} = \dot{a}_{\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\gamma}} = \dot{a}_{\boldsymbol{\lambda}}\dot{a}_{\boldsymbol{\gamma}}$$

et consiste donc à multiplier par

$$\dot{a}_{\boldsymbol{\gamma}} = (1+\dot{a}_{\boldsymbol{\gamma}})(1+\dot{a}_{-\boldsymbol{\gamma}})^{-1}.$$

COROLLAIRE. — *Le groupe de monodromie du système local des symboles de Voros est un sous-groupe de* $\operatorname{Aut}\mathring{\mathbb{V}}$.

Les relations ci-dessus admettent une belle interprétation géométrique en termes de « structure de Stokes » au voisinage du discriminant $\mathbb{D}$: plaçons-nous au voisinage d'un point générique de $\mathbb{D}$, de telle façon que le cycle $\boldsymbol{\gamma}$ soit évanescent ; on peut alors prendre $\omega_{\boldsymbol{\gamma}} =: D$ comme équation locale de $\mathbb{D}$; ayant choisi une direction de sommation α_0 (disons par exemple la direction réelle positive), considérons au voisinage de $\mathbb{D}$ la « cloison de Stokes » L_+ (resp. L_-), ensemble des W pour lesquels $\alpha(\boldsymbol{\gamma}) = \alpha_0$ (resp. $\alpha(-\boldsymbol{\gamma}) = \alpha_0$), où $\alpha(\boldsymbol{\gamma})$ est la direction du cycle $\boldsymbol{\gamma}$:

$$L_+ = \{W \mid \arg D(W) = 0\} \quad \text{et} \quad L_- = \{W \mid \arg D(W) = \pi\}.$$

Si partant du demi-espace $\operatorname{Im} D > 0$, le point W franchit la cloison L_+ (resp. L_-) un observateur — regardant dans la direction critique (mobile) $\alpha(\boldsymbol{\gamma}(W))$ (resp. $\alpha(-\boldsymbol{\gamma}(W))$) — verra la direction (fixe) α_0 balayer l'axe de son regard dans le sens direct (resp. rétrograde), de sorte que l'automorphisme de passage de la cloison de Stokes L_+ (resp. L_-) sera donné par $\mathfrak{S}_{\boldsymbol{\gamma}}$ (resp. $\mathfrak{S}_{-\boldsymbol{\gamma}}^{-1}$). Autrement dit la fonction $\mathcal{A}(W)$ définie dans le demi-espace $\operatorname{Im} D(W) > 0$ par $\mathcal{A}(W) = \dot{s}_{\alpha_0}(\dot{a})$ (somme de Borel d'un symbole de Voros $\dot{a}$) admet pour prolongement analytique dans le demi-espace $\operatorname{Im} D(W) < 0$ la fonction $\dot{s}_{\alpha_0}(\mathfrak{S}_{\boldsymbol{\gamma}}\dot{a}_+)$ (resp. $\dot{s}_{\alpha_0}(\mathfrak{S}_{-\boldsymbol{\gamma}}^{-1}\dot{a})$), où l'on a désigné par $\dot{a}_+$ (resp. $\dot{a}_-$) le symbole défini dans le demi-espace $\operatorname{Im} D < 0$ par le prolongement analytique de $\dot{a}$ à travers L_+ (resp. L_-). Comme $\dot{a}_- = \rho\dot{a}_+$, la relation (ρ) peut donc s'interpréter ainsi : *la fonction analytique $\mathcal{A}(W)$ est univaluée dans $\underline{\mathbb{W}}^*$.*

Par ailleurs il est facile de montrer que les $\dot{a}_{\boldsymbol{\gamma}}$ sont localement bornés au voisinage de $\mathbb{D}$, de sorte que la fonction $\mathcal{A}(W)$ l'est aussi dans tout $\underline{\mathbb{W}}$. Par le théorème d'extension de Riemann, nous obtenons ainsi la :

PROPOSITION. — *Avec les notations de la proposition* 2.2, *soient $W_0 \in \underline{\mathbb{W}}^*$ et α_0 une direction non critique pour $\mathcal{L}_{W_0}$; alors l'homomorphisme s_{α_0} de sommation de Borel dans la direction α_0, pour W voisin de W_0, transforme le groupe des symboles de Voros en un groupe (multiplicatif) de fonctions de (x, W) prolongeables holomorphiquement sur tout $\underline{\mathbb{W}}$.*

Un exemple d'une telle fonction est la *fonction spectrale de Jost*, que nous étudierons en détail dans [DDP]. C'est d'ailleurs la propriété d'holomorphie de cette fonction qui nous a inspiré les présentes considérations.

4. RÉSURGENCE DES SYMBOLES BKW

Objets formels en x dépendant analytiquement de q, les symboles BKW élémentaires $\dot{\varphi}(q,x) = \varphi(q,x)\,\mathrm{e}^{-x\cdot S(q)}$ ne sont définis qu'à un facteur de normalisation près et leurs propriétés de résurgence dépendent du choix de cette normalisation. Or les coefficients de Voros, dont les propriétés de résurgence ont été énoncées au paragraphe précédent, sont essentiellement des facteurs de « changement de normalisation » des symboles BKW (cf. appendice A.1.2) ; leurs propriétés de résurgence découlent donc de celles que nous allons énoncer maintenant pour les symboles BKW : les théorèmes 3.0 et 3.1 résulteront des théorèmes 4.0 et 4.1, complétés par l'appendice B.3.1.

4.0. Les deux types de directions singulières.

THÉORÈME. — *Pour un choix convenable de leur normalisation, les symboles BKW élémentaires $\dot{\varphi}(q,x)$ sont résurgents (sommables) en x, avec un nombre fini de directions singulières :*

(i) *Les directions singulières mobiles (c'est-à-dire dépendantes de q), que nous allons préciser dans l'additif ci-après;*

(ii) *Les directions singulières fixes : il s'agit des directions α (indépendantes de q) qui sont singulières pour le symbole $\dot{\varphi}(q)$ quel que soit q dans un certain ouvert U (sur lequel $\dot{\varphi}$ dépend analytiquement de q).*

Remarque. — Le fait pour une direction fixe α d'être singulière *dépend de la normalisation de $\dot{\varphi}$* (on peut toujours rendre une direction singulière en multipliant $\dot{\varphi}$ par un facteur de normalisation singulier) ; *il dépend aussi de l'ouvert U sur lequel on a choisi de faire varier q.* Ainsi nous verrons en 4.2 qu'il existe des directions fixes dites *critiques* (directions des cycles géodésiques, § 3) qui peuvent cesser d'être singulières ou le devenir lors de la traversée de certaines lignes de $\dot{\mathbb{C}}_2$.

Description des singularités mobiles. — Rappelons que toute géodésique de direction α a pour vis-à-vis sur l'autre feuillet de $\dot{\mathbb{C}}_2$, orientée en sens inverse, une géodésique de même direction α; nous appelons *lacet géodésique d'origine q* un chemin d'origine q qui suit une géodésique jusqu'à un point de transition puis revient en arrière sur l'autre feuillet de $\dot{\mathbb{C}}_2$ (cf. figure 5).

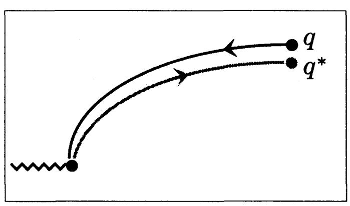


Figure 5. Lacet géodésique d'origine q.
q^* désigne le « vis-à-vis » de q sur $\dot{\mathbb{C}}_2$.

Remarquons que deux lacets géodésiques de même origine q ne peuvent avoir la même direction, car les géodésiques de direction donnée α forment un feuilletage de $\dot{\mathbb{C}}_2$.

Ceci étant dit, nous pouvons énoncer :

ADDITIF AU THÉORÈME. — *Les singularités vues mobiles de $\dot{\varphi}$ sont les périodes des lacets géodésiques d'origine q.*

Nous admettrons le théorème, ainsi que son additif, et nous en préciserons l'énoncé dans l'appendice B. L'idée de la preuve (due à Écalle [E]) repose sur une représentation du mineur de $\dot{\varphi}$ comme somme infinie d'intégrales itérées. La preuve de la convergence (et de la prolongeabilité sans fin) de la somme infinie est la seule partie de notre sujet qui nécessite un travail d'analyse.

Remarque. — Si α est une direction, fixe ou mobile, qui lorsque q varie dans un ouvert U convenable reste une direction singulière isolée de $\dot{\varphi}(q)$ (c'est-à-dire qu'aucune «confluence» ne se produit entre α et une autre direction singulière), *alors le symbole $(\underline{\mathfrak{S}}_\alpha \dot{\varphi})(q)$ est solution dans U de l'équation de Schrödinger.* En effet si $[\alpha_1, \alpha_2]$ désigne un intervalle de directions contenant α comme unique direction singulière (pour tout $q \in U$), les sommations de Borel $\dot{s}_{\alpha_1}, \dot{s}_{\alpha_2}$ sont reliées par $\dot{s}_{\alpha_2} \underline{\mathfrak{S}}_\alpha = \dot{s}_{\alpha_1}$, de sorte que $\underline{\mathfrak{S}}_\alpha$ est un *automorphisme d'algèbres différentielles.*

Il résulte de cette remarque que les composantes élémentaires de $(\underline{\mathfrak{S}}_\alpha \dot{\varphi})(q)$ sont de la forme $\dot{\varphi}_* = \varphi_* \, \mathrm{e}^{-x \cdot S_*(q)}$, où $\mathrm{d}S_*/\mathrm{d}q$ est l'une des deux déterminations de $W(q)^{1/2}$ (détermination appelée *impulsion* de $\dot{\varphi}_*$), avec des S_* alignés dans la direction α. On en déduit en particulier que pour toute direction singulière mobile isolée, les singularités entrevues se réduisent à la seule singularité vue. Plus précisément on obtient ainsi le :

COROLLAIRE.

(i) *Dans le cas d'une direction singulière mobile α isolée, $(\underline{\mathfrak{S}}_\alpha \dot{\varphi})(q)$ n'a que deux composantes élémentaires d'impulsions opposées, et comme une seule singularité est entrevue dans la direction α, on peut écrire*

$$\underline{\mathfrak{S}}_\alpha \dot{\varphi} = \dot{\varphi} + \dot{\Delta}_\omega \dot{\varphi},$$

où $\omega = \omega(q)$ est la période du lacet géodésique correspondant à la direction considérée (pour la définition de la dérivation étrangère pointée $\dot{\Delta}_\omega$, voir [CNP$_0$], § 4).

(ii) *Dans le cas d'une direction singulière fixe α isolée, toutes les composantes élémentaires de $(\underline{\mathfrak{S}}_\alpha \dot{\varphi})(q)$ ont la même impulsion, de sorte qu'elles ne diffèrent de $\dot{\varphi}$ que par un facteur de normalisation. Autrement dit*

$$\underline{\mathfrak{S}}_\alpha \dot{\varphi}(q,x) = \dot{A}(x) \dot{\varphi}(q,x),$$

où $\dot{A}(x)$ est un symbole résurgent (inversible) indépendant de q (localement) appelé facteur de résurgence de $\dot{\varphi}$ dans la direction fixe α.

4.1. Structure résurgente dans une direction singulière mobile.

Remarque. — Les périodes des lacets géodésiques d'origine q sont des fonctions analytiques non constantes de q; il en résulte que pour un choix générique de q *les directions de ces périodes ne coïncident avec aucune direction singulière fixe.*

DÉFINITION. — *Le complémentaire de l'ensemble des directions singulières fixes du symbole $\dot{\varphi}$ sera appelé ensemble des directions génériquement non singulières.*

Par le théorème 4.0 on sait que pour α génériquement non singulière, toute détermination de $\dot{\varphi}(q,x)$ sera sommable de Borel dans la direction α *sauf peut-être pour des valeurs exceptionnelles de q* : celles qui sont origines de géodésiques de direction α aboutissant à un point de transition (cf. figure 6).

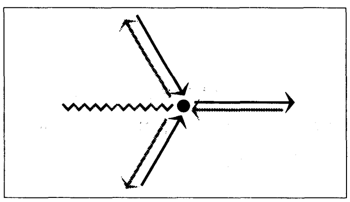


Figure 6. *Allure locale des géodésiques de direction α passant par un point de transition. Il y en a six sur $\dot{\mathbb{C}}_2$ (trois en projection sur $\dot{\mathbb{C}}$), formant entre elles des angles de $\frac{2}{3}\pi$. Les orientations des géodésiques indiquées sur la figure sont celles du paragraphe* 3.0.

Structure de Stokes en q. — Soit α une direction choisie une fois pour toutes. On appellera *lignes de Stokes* (relatives à la direction α) les projections sur $\dot{\mathbb{C}}$ des géodésiques de direction α aboutissant à un point de transition. Il s'agit de courbes lisses de $\dot{\mathbb{C}}$, qui découpent le plan en domaines simplement connexes appelés *régions de Stokes.*

Supposons α *génériquement non singulière*; α est en particulier non critique de sorte que chaque ligne de Stokes connecte l'infini à un point de transition et un seul. Tant que q reste dans une région de Stokes, les symboles BKW sont sommables de Borel dans la direction α. Lorsque q

franchit une ligne de Stokes, *un phénomène de Stokes* (cf. [CNP$_0$], § 5) se produit pour les composantes du symbole qui sont *dominantes* sur la ligne en question : il s'agit des symboles élémentaires dont l'impulsion correspond au feuillet de $\dot{\mathbb{C}}_2$ sur lequel la géodésique de direction α est orientée vers *le point de transition*; la formule de passage pour la traversée de la ligne de Stokes est alors donnée par $\underline{\mathfrak{S}}_\alpha$ ou $\underline{\mathfrak{S}}_\alpha^{-1}$ selon le sens de traversée de la géodésique (cf. figure 7).

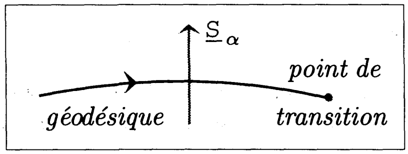


Figure 7. Sens « direct » de traversée de la géodésique, pour lequel la formule de passage est donnée par $\underline{\mathfrak{S}}_\alpha$.

THÉORÈME. — *Soit $\alpha = \alpha(q)$ la direction (mobile) d'un lacet géodésique ℓ d'origine q; alors pour un choix générique de q (au sens de la remarque 4.1),*

$$\underline{\mathfrak{S}}_\alpha \dot{\varphi} = \dot{\varphi} + \ell^+ \dot{\varphi},$$

où ℓ^+ désigne le chemin de prolongement analytique dans $\dot{\mathbb{C}}_2$, consistant à suivre le lacet géodésique ℓ en contournant le point de transition dans le sens positif (cf. figure 8). De même,

$$\underline{\mathfrak{S}}_\alpha^{-1} \dot{\varphi} = \dot{\varphi} + \ell^- \dot{\varphi},$$

où ℓ^- est le chemin de prolongement analytique dans $\dot{\mathbb{C}}_2$ qui suit le lacet géodésique ℓ en contournant le point de transition dans le sens négatif (rappelons que $(\ell^+)^2 = -1$, de sorte que $\ell^- = -\ell^+$).

Remarque : action des itérés de $\underline{\mathfrak{S}}_\alpha$. — En itérant les formules précédentes on prendra garde au fait que $\ell^+\dot{\varphi}$ habite sur l'autre feuillet de $\dot{\mathbb{C}}_2$, de sorte que — sous nos hypothèses génériques — le point q^* où il habite n'est pas l'origine d'un lacet géodésique de direction α, mais de direction opposée α^*. On a donc

$$\underline{\mathfrak{S}}_\alpha(\ell^+\dot{\varphi}) = \ell^+\dot{\varphi},$$

de sorte que

$$\underline{\mathfrak{S}}_\alpha^n(\dot{\varphi}) = \dot{\varphi} + n\ell^+\dot{\varphi}, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Preuve du théorème (adaptée de Voros [V]; voir aussi [Ji]). — Le raisonnement va consister à faire tourner le point q autour du point de transition, et à étudier les phénomènes de Stokes subis par le symbole $\dot\varphi$, la sommation de Borel étant toujours effectuée *dans la même direction* α (correspondant à la valeur initiale de q).

Puisque les vraies solutions de l'équation différentielle sont des fonctions entières de q, les *phénomènes de Stokes devront compenser la monodromie formelle*, et l'on verra que cela suffit à les caractériser.

La figure 8 représente les lignes de Stokes relatives à la direction α. Alors que la lettre α désigne dans la suite du raisonnement une direction fixe (déterminée par la valeur initiale de q), les lettres suivantes désigneront des fonctions (multiformes) de la variable q :

- $\dot\varphi = \dot\varphi(q)$, prolongement analytique du symbole à étudier;
- $S = S(q)$, support de ce symbole;
- $\ell^+ = \ell^+(q)$, lacet géodésique issu du point variable q (représenté sur la figure 6 pour la valeur initiale de q);
- $\omega = \omega(q)$, période de ce lacet.

On rendra ces fonctions uniformes en restreignant leur domaine de définition au moyen de la «coupure» représentée sur la figure 8 (ligne ondulée) :

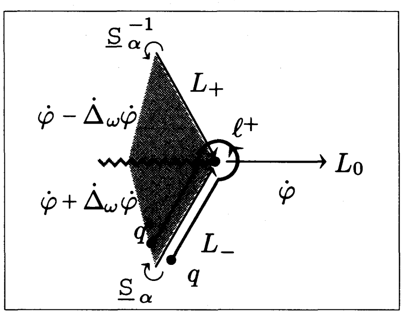


Figure 8. *Formules de passage au voisinage d'un point de transition simple.*

Comme l'indique l'orientation de la géodésique bissectrice de la zone blanche, le symbole $\dot\varphi$ ne subit aucun phénomène de Stokes au passage de la ligne de Stokes L_0. Il en subit en revanche au passage des lignes L_+ et L_-, et les symboles obtenus de l'autre côté de ces lignes sont écrits dans la zone ombrée de la figure. Comme il s'agit des symboles d'une même fonction entière de q, ils doivent se raccorder au passage de la coupure, ce qui se traduit par la « formule de raccordement »

$$\dot{\varphi}_+ - \dot{\Delta}_{\omega+}\dot{\varphi}_+ = \dot{\varphi}_- + \dot{\Delta}_{\omega-}\dot{\varphi}_-,$$

où l'indice $+$ (resp. $-$) désigne la détermination obtenue en abordant la coupure par en haut (resp. en bas). Or les deux déterminations de S de part et d'autre de la coupure diffèrent par la période du lacet géodésique :

$$S_+ - S_- = \omega_+ = -\omega_-.$$

La « formule de raccordement » ci-dessus se décompose donc en deux formules :

- $\dot{\varphi}_+ = \dot{\Delta}_{\omega-}\dot{\varphi}_-$ (égalité des symboles de support S_+).
- $\dot{\Delta}_{\omega+}\dot{\varphi}_+ = -\dot{\varphi}_-$ (égalité des symboles de support S_-).

La première égalité donne bien $\dot{\Delta}_\omega\dot{\varphi} = \ell^+\dot{\varphi}$ (puisque $\dot{\varphi}_+ = \ell^+\dot{\varphi}_-$), tandis que la deuxième égalité peut s'écrire $\dot{\Delta}_\omega\dot{\varphi} = -\ell^-\dot{\varphi}$, où $\ell^- = (\ell^+)^{-1}$. On retrouve ainsi la relation $(\ell^+)^2 = -1$.

Remarquons finalement que notre discussion conduit à la jolie conclusion suivante (comparer à Landau et Lifchitz [LL], § 47) :

la somme de Borel du symbole $\dot{\varphi}$ dans la zone blanche se prolonge en fonction entière de q, dont le symbole dans la zone ombrée se déduit du symbole dans la zone blanche en faisant la somme de ses deux prolongements analytiques à travers les deux bords de la zone ombrée (figure 8 bis).

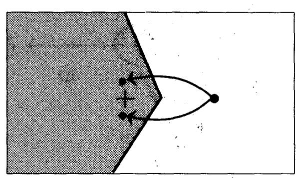


Figure 8 *bis*.

4.2. Structure résurgente dans une direction singulière fixe.

Soit α_0 une direction singulière fixe. Rappelons (corollaire (ii) du § 4.0) que pour q dans une région de Stokes relative à la direction α_0 on a

$$\underline{\mathfrak{S}}_{\alpha_0}\dot{\varphi}(q,x) = \dot{A}(x)\dot{\varphi}(q,x),$$

où $\dot{A}(x)$ est le *facteur de résurgence* de $\dot{\varphi}$ dans la direction α_0. Comme à l'intérieur d'une région de Stokes la direction α_0 ne peut confluer avec aucune des directions singulières mobiles (décrites par l'additif au théorème 4.0), on en déduit la :

PROPOSITION. — *$\dot{A}(x)$ ne dépend que de la région de Stokes et de la détermination de $\dot{\varphi}$ considérée.*

Demandons-nous maintenant comment varie le facteur de résurgence quand on franchit une ligne de Stokes.

THÉORÈME 4.2 (i). — *Le facteur de résurgence ne change pas quand q franchit une « ligne de Stokes simple » (connectant l'infini à un point de transition et un seul).*

Preuve. — Considérons un symbole défini dans la zone blanche du « premier feuillet » de la figure 9, zone partagée en deux portions (notées + et −) par une ligne de Stokes simple de direction α_0.

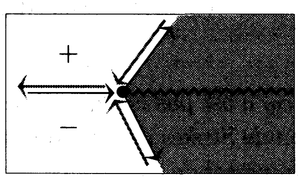


Figure 9. *Régions de Stokes au voisinage d'une ligne de Stokes simple.*

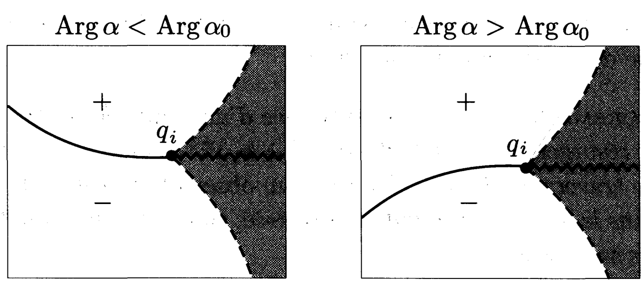


Figure 9 *bis. Déformation de la figure* 6 *quand la direction α varie.*

L'idée, baptisée par Voros « méthode du radar », consiste à comparer dans les deux régions de Stokes '+' et '−' les symboles d'une même solution dans des directions α non critiques mais voisines de α_0 (cf. figure 9 bis). La solution choisie est celle donnée dans la région notée '$-$' de la figure 9 par

$$\Phi = \dot{s}_{\alpha_0 -}\,\dot{\varphi} = \dot{s}_{\alpha_0 +}\dot{A}\,\dot{\varphi},$$

où $\dot{A}$ désigne le facteur de résurgence de $\dot{\varphi}$ dans la direction α_0. Les symboles de Φ sont donc donnés par le tableau suivant, où l'on passe de la première à la deuxième ligne en appliquant le théorème 4.1 :

$\operatorname{Arg}\alpha < \operatorname{Arg}\alpha_0$	$\operatorname{Arg}\alpha > \operatorname{Arg}\alpha_0$
région '$-$' : $\dot{\varphi}$	région '$-$' : $\dot{A}\,\dot{\varphi}$
région '$+$' : $\dot{\varphi} + \ell_i^+\dot{\varphi}$	région '$+$' : $\dot{A}\,\dot{\varphi} + \ell_i^+\dot{A}\dot{\varphi}$
$\uparrow$	$\uparrow$

On a alors dans la région '$+$' :

$$\underline{\mathfrak{S}}_{\alpha_0}(\dot{\varphi} + \ell_i^+\dot{\varphi}) = \underline{\mathfrak{S}}_{\alpha_0}(\dot{\varphi}) + \underline{\mathfrak{S}}_{\alpha_0}(\ell_i^+\dot{\varphi}) = \dot{A}\,\dot{\varphi} + \ell_i^+\dot{A}\dot{\varphi}.$$

Ainsi, en identifiant les symboles de même impulsion et en utilisant le corollaire 4.0 (ii), on en déduit en particulier (symboles marqués d'une flèche) que l'égalité $\underline{\mathfrak{S}}_{\alpha_0}\dot{\varphi} = \dot{A}\,\dot{\varphi}$ reste vraie dans la région '$+$', ce qui prouve le théorème.

COROLLAIRE. — *Si α_0 n'est pas critique, le facteur de résurgence de $\dot{\varphi}$ ne dépend pas de la région de Stokes choisie. Il reste donc constant quand q varie sur le revêtement universel de $\dot{\mathbb{C}}$.*

Considérons à présent le cas d'une «ligne de Stokes double» connectant deux points de transition. La direction α_0 est alors critique et l'on désignera par $\boldsymbol{\gamma}$ le cycle géodésique de direction α_0 qui se projette sur la ligne de Stokes double considérée.

THÉORÈME 4.2 (ii). — *A la traversée d'une ligne de Stokes double, le facteur de résurgence est multiplié par $(1+\dot{a}_{\boldsymbol{\gamma}})^{\pm 1}$, où l'exposant ± 1 dépend du sens de traversée : il est égal à $+1$ si un observateur avançant le long du cycle $\boldsymbol{\gamma}$ dans le feuillet où se fait la traversée, voit la traversée se faire de sa droite vers sa gauche.*

Preuve (adaptée de Voros [V], § 7). — Reprenons l'argumentation de la preuve du théorème précédent et considérons un symbole défini dans la zone blanche du «premier feuillet» de la figure 10, zone partagée en deux portions ($+$ et $-$) par la partie en traits pleins du cycle géodésique $\boldsymbol{\gamma}$. Il s'agit de démontrer que $\dot{A}_+ = (1 + \dot{a}_{\boldsymbol{\gamma}})\dot{A}_-$, où $\dot{A}_+$ (resp. $\dot{A}_-$) désigne le facteur de résurgence de $\dot{\varphi}$ dans la zone $+$ (resp. $-$).

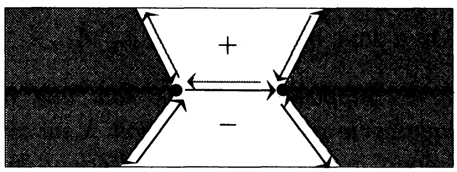


Figure 10. *Régions de Stokes au voisinage d'une ligne de Stokes double.*

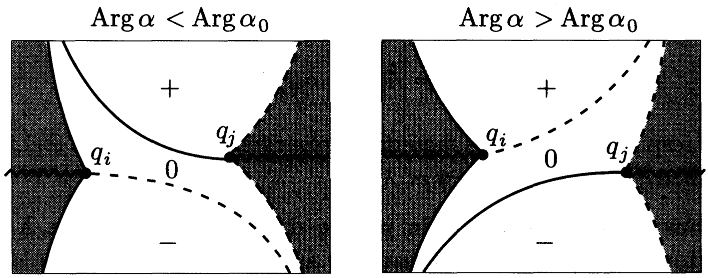


Figure 10 *bis. Déformation de la figure* 10 *quand la direction* α *varie : il se crée une région de Stokes intermédiaire notée* 0. *Seules ont été dessinées (la typographie indiquant sur quel feuillet elles se trouvent) les géodésiques orientées vers un point de transition.*

Choisissons comme solution celle donnée dans la région notée '$-$' de la figure 10 par :

$$\Phi = \dot{s}_{\alpha_0 -} \dot{\varphi} \quad (= \dot{s}_{\alpha_0 +} \dot{A}_- \dot{\varphi}).$$

Par le théorème 4.1, calculons les différents symboles de Φ dans une direction α non critique suffisamment voisine de α_0, et ce dans les diverses régions de Stokes de la figure 10 bis :

$\operatorname{Arg}\alpha < \operatorname{Arg}\alpha_0$	$\operatorname{Arg}\alpha > \operatorname{Arg}\alpha_0$
région '$-$' : $\dot{\varphi}$	région '$-$' : $\dot{A}_-\dot{\varphi}$
région '0' : $\dot{\varphi}$	région '0' : $\dot{A}_-\dot{\varphi} + \ell_j^+ \dot{A}_-\dot{\varphi}$
région '+' : $\dot{\varphi} + \ell_j^+ \dot{\varphi}$	région '+' : $\dot{A}_-\dot{\varphi} + \ell_j^+ \dot{A}_-\dot{\varphi} - \ell_i^+ \ell_j^+ \dot{A}_-\dot{\varphi}$
$\uparrow$	$\uparrow$

La comparaison, dans la dernière ligne du schéma, des symboles ayant même détermination de p que $\dot{\varphi}$ (symboles marqués d'une flèche), donne finalement

$$\underline{\mathfrak{S}}_{\alpha_0} \dot{\varphi} = \dot{A}_-\dot{\varphi} - \ell_i^+ \ell_j^+ \dot{A}_-\dot{\varphi} = (1 - \ell_i^+ \ell_j^+) \dot{A}_-\dot{\varphi} = (1 + \dot{a}_{\boldsymbol{\gamma}}) \dot{A}_-\dot{\varphi}$$

(la dernière égalité résulte de la proposition 1.1, compte tenu de ce que $\mathrm{sgn}(\ell_i^+\ell_j^+) = -1$). On a donc bien $\dot{A}_+ = (1+\dot{a}_{\boldsymbol{\gamma}})\dot{A}_-$.

COROLLAIRE. — *Supposons que α_0 soit une direction critique, direction d'un unique cycle géodésique $\boldsymbol{\gamma}$. Soit λ un chemin de $\dot{\mathbb{C}}_2$ dont l'origine q_0 et l'extrémité q_1 se projettent à l'intérieur de régions de Stokes relative à la direction α_0 considérée. Alors, en notant $\dot{\varphi}_0$ une détermination de $\dot{\varphi}$ en q_0, et $\dot{\varphi}_1$ la détermination en q_1 qui s'en déduit par prolongement analytique le long de λ, on a*

$$\dot{A}_1 = \dot{A}_0(1+\dot{a}_{\boldsymbol{\gamma}})^{\boldsymbol{\gamma}\cdot\lambda},$$

où $\dot{A}_0$ (resp. $\dot{A}_1$) désigne le facteur de résurgence de $\dot{\varphi}_0$ (resp $\dot{\varphi}_1$), et $\boldsymbol{\gamma}\cdot\lambda$ est l'indice d'intersection de $\boldsymbol{\gamma}$ et λ.

Tous les ingrédients de la preuve du théorème 3.1 sont à présent réunis, tout au moins si on se restreint aux cycles compacts : soient γ un cycle de $\dot{\mathbb{C}}_2$ et α_0 une direction singulière fixe d'un symbole BKW $\dot{\varphi}$. En comparant l'action de l'automorphisme $\underline{\mathfrak{S}}_{\alpha_0}$ sur les deux membres de la formule du § 1.1,

$$\gamma\dot{\varphi} = (-)^{\mathrm{sgn}(\gamma)}\dot{a}_{\boldsymbol{\gamma}}\dot{\varphi},$$

on voit que l'action de $\underline{\mathfrak{S}}_{\alpha_0}$ sur le symbole $\dot{a}_{\boldsymbol{\gamma}}$ est de la forme

$$\underline{\mathfrak{S}}_{\alpha_0}\dot{a}_{\boldsymbol{\gamma}} = (\dot{A}_\gamma/\dot{A})\dot{a}_{\boldsymbol{\gamma}}$$

où $\dot{A}$ (resp. $\dot{A}_\gamma$) désigne le facteur de résurgence de $\dot{\varphi}$ (resp. $\gamma\dot{\varphi}$). Si α_0 n'est pas critique, $\dot{A}_\gamma = \dot{A}$ d'après le corollaire 4.2 (i). Sinon il est donné par le corollaire 4.2 (ii) précédent.

L'extension du théorème aux coefficients de Voros pour des cycles λ non compacts doit se traiter différemment car les $a_{\boldsymbol{\lambda}}$ n'apparaissent pas naturellement comme facteurs de monodromie formelle mais en tant *que facteurs de changement de normalisation à l'infini* des symboles BKW (appendice A.1.2). Nous achèverons la preuve à l'appendice B.3.1.

APPENDICE A. NORMALISATION DES SYMBOLES BKW

AVERTISSEMENT. — Les *symboles BKW* présentés ici sont ce que dans le texte nous avons appelés *les symboles BKW élémentaires.*

A.0. Symbole BKW bien normalisé au voisinage d'un point q_0.

On peut fixer la normalisation des symboles BKW en les choisissant de la forme suivante (voir par exemple Bender et Orzag [BO], pages 487 et suivantes) : pour q au voisinage de q_0,

$$\dot{\varphi} = u(q)^{-1/2} \exp\Big[-x \int_{q_0}^{q} u \, \mathrm{d}q'\Big],$$

où u est une série formelle de la forme

$$u(q,x) = p(q) + \sum_{n=1}^{\infty} x^{-2n} u_{2n}(q),$$

avec u_{2n} polynomial en $W'(q), W''(q), \ldots$ et en $p^{-1}(q)$, impair en p, définie comme la partie impaire en x^{-1} de la solution formelle de l'équation de Riccati :

$$\chi^2 + \partial_q \chi = x^2 p^2.$$

Un tel symbole $\dot{\varphi}$, défini sans ambiguïté au choix d'une détermination de $u^{-1/2}$ près, pour q voisin de q_0 sur $\dot{\mathbb{C}}_2$, sera appelé *symbole BKW bien normalisé en* q_0.

A.1. Symbole BKW bien normalisé le long d'un chemin.

A.1.1. — Soit λ un chemin de $\dot{\mathbb{C}}_2$, d'origine q_0 et d'extrémité q. Le prolongement analytique le long de λ du symbole BKW bien normalisé au voisinage de q_0 peut s'écrire

$$\dot{\varphi}_\lambda = \varphi_\lambda \exp\big[-x S_\lambda(q)\big],$$

avec

$$\begin{aligned}
S_\lambda(q) &= \int_\lambda p(q') \, \mathrm{d}q', \\
\varphi_\lambda(q) &= u_\lambda(q)^{-1/2} a_\lambda(q), \\
a_\lambda(q) &= \exp\Big[-x \int_\lambda (u-p)(q') \, \mathrm{d}q'\Big],
\end{aligned}$$

où $u_\lambda(q)^{-1/2}$ désigne le prolongement analytique le long de λ de la détermination de $u^{-1/2}$ en q_0. Le symbole $\dot{\varphi}_\lambda$ sera appelé *symbole BKW bien normalisé le long de* λ.

A.1.2. Cas où λ vient de l'infini (chemin sans fin).

Dans le cas où l'origine q_0 de λ est à l'infini, φ_λ garde un sens car $(u-p)$ est intégrable à l'infini, mais pas S_λ. On continuera d'appeler *symbole BKW bien normalisé le long de* λ un symbole défini par les formules précédentes, où S_λ désigne une quelconque primitive de p le long de λ.

Considérons alors les chemins sans fin λ' et λ'' de même extrémité q et soit $\lambda := \lambda''^{-1} \cdot \lambda'$ le chemin consistant à suivre λ' puis λ''^{-1}. On peut supposer l'égalité des germes $u_{\lambda'}(q)^{-1/2}$ et $u_{\lambda''}(q)^{-1/2}$ de sorte que les symboles BKW $\varphi_{\lambda'}$ et $\varphi_{\lambda''}$ se déduisent l'un de l'autre par la relation :

$$\varphi_{\lambda'}(q,x) = a_\lambda \varphi_{\lambda''}(q,x).$$

Ainsi le coefficient de Voros a_λ, où $\lambda \in H_1^F(\dot{\mathbb{C}}_2)$, s'interprète comme un *facteur de changement de normalisation à l'infini* des symboles BKW.

A.2. Prolongements analytiques et monodromie.

Le prolongement analytique le long du chemin μ de $\dot{\mathbb{C}}_2$, d'origine q et d'extrémité q', d'un symbole BKW bien normalisé le long de λ, sera noté comme une action à gauche

$$\mu \cdot \dot{\varphi}_\lambda = \dot{\varphi}_{\mu\cdot\lambda},$$

où $\mu \cdot \lambda$ désigne le chemin composé parcourant λ puis μ.

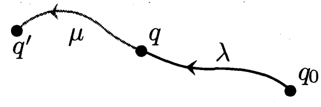


Figure 11.

Nous allons expliciter cette action dans le cas où le chemin de prolongement analytique est un *lacet* de $\dot{\mathbb{C}}_2$: nous entendons par là un chemin de $\dot{\mathbb{C}}_2$ ayant pour extrémité le « vis-à-vis » q^* de son origine q (point de l'autre feuillet, ayant même projection sur $\dot{\mathbb{C}}$).

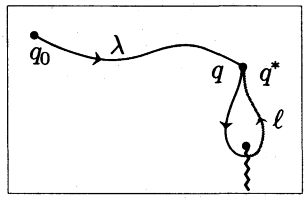


Figure 12. Un exemple de « lacet ».

On en déduira la monodromie des symboles BKW en remarquant qu'un cycle au sens du § 1 est le composé de deux lacets.

A.2.1. Action d'un lacet.

Soit ℓ un lacet d'origine q et d'extrémité q^*. Alors

$$(\ell \cdot \dot{\varphi}_\lambda)(q^*) = (-i)^{n(\ell)} a_\ell(q,x) \dot{\varphi}_\lambda(q)\, \mathrm{e}^{-x\cdot\omega_\ell(q)},$$

où $\omega_\ell(q) = \int_\ell p\, \mathrm{d}q$ est la « période » du lacet et où $n(\ell)$ désigne l'indice de la projection de ℓ dans $\dot{\mathbb{C}}$, c'est-à-dire le « nombre de tours » que fait ℓ autour des points de transition.

A.2.2. Action d'un cycle.

Commençons par le cas où γ consiste en un petit cercle entourant deux fois un point de transition. On peut alors écrire γ comme composé de deux lacets

$$\gamma = \ell^* \cdot \ell$$

où ℓ est un petit cercle entourant une fois le point de transition, et ℓ^* le même cercle dans l'autre feuillet de $\dot{\mathbb{C}}_2$. On vérifie sur la représentation intégrale de a_ℓ que $a_\ell = (a_{\ell^*})^{-1}$, de sorte que $a_\gamma = a_{\ell^*\cdot\ell} = 1$. Comme $n(\ell) = n(\ell^*) = 1$, on en déduit *que la monodromie d'un « double tour » γ autour d'un point de transition est donnée par*

$$\gamma \cdot \dot{\varphi}_\lambda = -\dot{\varphi}_\lambda.$$

Cette assertion, jointe à la description A.2.1 de l'action des lacets, fournit les résultats du § 1.1 sur la monodromie d'un cycle γ quelconque.

APPENDICE B. COMPLÉMENTS SUR LA RÉSURGENCE DES SYMBOLES BKW

Cet appendice complète les énoncés du paragraphe 4 sur la résurgence des symboles BKW élémentaires convenablement normalisés. Deux types de normalisation pour lesquelles le théorème 4.0 s'applique seront étudiés : les « bonnes normalisations » introduites dans l'appendice A, et les « normalisations de Green » introduites au B.3.2 ci-après. Pour ces deux types de normalisation nous préciserons en B.3.1 et B.3.2 la structure résurgente par rapport aux singularités fixes et nous achèverons en B.3.1 la preuve des théorèmes 3.0 et 3.1.

Mais il nous faut tout d'abord mieux exploiter notre connaissance de la structure résurgente par rapport aux singularités mobiles.

B.1. Compléments sur les singularités mobiles.

Soit $\dot{\varphi}(q,x)$ un symbole BKW élémentaire du type étudié au § 4. Traduit en termes de « dérivées étrangères directionnelles », le théorème 4.1 s'écrit encore, pour une direction α génériquement non singulière :

$$\underline{\Delta}_\alpha \dot{\varphi} = \ell^+ \dot{\varphi}.$$

En explicitant comme dans l'appendice A le prolongement analytique de $\dot{\varphi}$ le long de ℓ^+, on obtient la :

Proposition 1.1. — *Soit ω la période du lacet géodésique ℓ d'origine q et de direction α ; alors*

$$\dot{\Delta}_\omega \dot{\varphi} = -i\dot{a}_\ell \dot{\varphi} \quad et \quad \dot{\Delta}_\omega \dot{\Delta}_\omega \dot{\varphi} = 0.$$

Remarque. — On en déduit que (cf. appendice A.2.2) :

$$\dot{\Delta}_{-\omega}\dot{\Delta}_\omega \dot{\varphi} = \ell^* \ell \dot{\varphi} = -\dot{\varphi}.$$

Pour un choix général de normalisation, le symbole $\dot{\varphi}$ est inversible, ce qui permet d'exprimer $\dot{a}_\ell$ comme un quotient

$$\dot{a}_\ell = i(\dot{\Delta}_\omega \dot{\varphi})/\dot{\varphi},$$

d'où il découle que $\dot{a}_\ell$ *est un symbole résurgent en* x, *dépendant analytiquement de* q *et des coefficients du polynôme.* Mieux, on déduit de la proposition et de la remarque précédente que :

$$\dot{\Delta}_\omega \dot{a}_\ell = i\dot{a}_\ell^2 \quad \text{et} \quad \dot{\Delta}_{-\omega}\dot{a}_\ell = -i.$$

La formulation équivalente de ce résultat en termes d'automorphismes de Stokes donne ainsi la :

PROPOSITION 1.2. — *Pour* α *direction génériquement non singulière du lacet géodésique* ℓ *d'origine* q *on a :*

$$\underline{\mathfrak{S}}_\alpha \dot{a}_\ell = \frac{\dot{a}_\ell}{1 - i\dot{a}_\ell}, \quad \underline{\mathfrak{S}}_{-\alpha}\dot{a}_\ell = \dot{a}_\ell - i.$$

Plus généralement, le symbole $\dot{a}_\ell$ admet comme *directions singulières mobiles l'ensemble des directions des lacets géodésiques d'origine ou d'extrémité* q, ce qu'on démontre aisément sur son expression ci-dessus.

B.2. Résurgence de u.

Rappelons (cf. appendice A) que si λ est chemin de $\dot{\mathbb{C}}_2$ d'origine q_0 et d'extrémité q, alors les symboles $\dot{a}_\lambda(q,x)$ et $u(q,x)$ sont liés par la relation :

$$\dot{a}_\lambda(q) = \exp\Big[-x\int_\lambda u(q')\,\mathrm{d}q'\Big].$$

En particulier, pour un quelconque lacet géodésique ℓ d'origine q, on peut exprimer $u(q,x)$ sous la forme :

$$u = \frac{1}{2x}\frac{\mathrm{d}\dot{a}_\ell/\mathrm{d}q}{\dot{a}_\ell} = \frac{1}{2x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}\operatorname{Log}\dot{a}_\ell.$$

Comme $\dot{a}_\ell$ est un symbole résurgent dépendant analytiquement de q, on en déduit que u est une fonction résurgente en x, dépendant analytiquement de q et des coefficients du polynôme.

Précisons sa structure résurgente : $u(q,x)$ étant un objet local en q, ses singularités sont nécessairement mobiles. On a notamment la :

PROPOSITION. — *Les seules dérivations étrangères agissant non trivialement sur* u *sont les* $\Delta_{n\omega}$, *avec* $n \in \mathbb{Z}^*$ *et où* ω *désigne la période d'un quelconque lacet géodésique* ℓ *d'origine* q *:*

$$\dot{\Delta}_{n\omega} u(q) = \frac{(-1)^{n-1}}{n}(i\dot{a}_\ell)^n u(q), \qquad n \in \mathbb{Z}^*.$$

Preuve. — Reprenons l'expression précédente de u en fonction du lacet géodésique ℓ, à savoir :

$$u = \frac{1}{2x}\frac{\mathrm{d}\dot{a}_\ell/\mathrm{d}q}{\dot{a}_\ell} = \frac{1}{2x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}\operatorname{Log}\dot{a}_\ell.$$

Les équations de résurgence de u se déduisent alors de celles de $\dot{a}_\ell$ (proposition B.1.2) par la propriété de commutation de $\underline{\Delta}$ avec tout opérateur différentiel.

Remarque. — Il nous sera utile par la suite d'écrire la proposition sous la forme équivalente suivante : *si α désigne la direction du lacet géodésique ℓ d'origine q, alors* :

$$\underline{\mathfrak{S}}_\alpha u(q) = (1 - i\dot{a}_\ell)^{-1}u(q),$$
$$\underline{\mathfrak{S}}_{-\alpha} u(q) = (1 - i\dot{a}_{-\ell})^{-1}u(q).$$

B.3. Compléments sur les singularités fixes des symboles BKW.

B.3.1. *Symboles BKW bien normalisés.* — Soit $\dot{\varphi}(q,x)$ un symbole BKW élémentaire bien normalisé le long d'un chemin λ de $\dot{\mathbb{C}}_2$, d'origine q_0 et d'extrémité q. L'énoncé du théorème 4.0 peut être précisé ainsi :

THÉORÈME. — *$\dot{\varphi}_\lambda(q,x)$ est un symbole résurgent sommable en x, dépendant analytiquement de q et des coefficients du polynôme*; *ses singularités vues, en nombre fini, sont* :

- *d'une part les périodes des lacets géodésiques d'origine q (singularités mobiles)*;
- *d'autre part (singularités fixes)* :

(i) *les périodes des lacets géodésiques d'origine ou d'extrémité q_0 (si ce point est à distance finie).*

(ii) *les périodes des cycles géodésiques $\boldsymbol{\gamma}$ tels que $\boldsymbol{\gamma}\cdot\lambda \neq 0$.*

En particulier quand l'origine de λ est à l'infini, le symbole $\dot{\varphi}_\lambda$ est sans singularité fixe tant que λ reste dans un voisinage assez petit de l'infini. Si α désigne la direction critique d'un unique cycle géodésique $\boldsymbol{\gamma}$, la formule

$$\underline{\mathfrak{S}}_\alpha\dot{\varphi}_\lambda = \mathfrak{S}_{\boldsymbol{\gamma}}\dot{\varphi}_\lambda = (1 + \dot{a}_{\boldsymbol{\gamma}})^{\boldsymbol{\gamma}\cdot\lambda}\dot{\varphi}_\lambda$$

pour un chemin λ quelconque issu de l'infini s'en déduit grâce au théorème 4.2 (ii). Les propriétés de résurgence de $\dot{a}_{\boldsymbol{\gamma}}$ annoncés dans les théorèmes 3.0 et 3.1 s'en déduisent par la relation $\dot{\varphi}_\lambda = u_\lambda^{-1/2}\dot{a}_\lambda$ (pour tout chemin λ de $\dot{\mathbb{C}}_2$) et en se souvenant que u_λ est une fonction résurgente inversible sans singularité fixe.

PROPOSITION. — *Soit λ un chemin de $\dot{\mathbb{C}}_2$ d'extrémité q. Le coefficient $\dot{a}_\lambda$ admet comme directions singulières mobiles l'ensemble des directions des lacets géodésiques d'origine ou d'extrémité q. De plus si α désigne la direction génériquement non singulière d'un lacet géodésique ℓ d'origine q, on a :*

$$\underline{\mathfrak{S}}_\alpha \dot{a}_\lambda = (1 - i\dot{a}_\ell)^{1/2}\dot{a}_\lambda, \quad \underline{\mathfrak{S}}_{-\alpha}\dot{a}_\lambda = (1 - i\dot{a}_{-\ell})^{-1/2}\dot{a}_\lambda.$$

Preuve. — Le symbole $\dot{\varphi}_\lambda$ bien normalisé le long du chemin λ s'écrit $\dot{\varphi}_\lambda = u_\lambda^{-1/2}\dot{a}_\lambda$, de sorte que le résultat se déduit du théorème 4.1 et de la proposition B.2.

Remarque. — Supposons que l'origine q_0 du chemin λ soit à distance finie. Considérons la direction non critique α_0 d'un lacet géodésique ℓ_0 d'origine q_0 ; on suppose de plus q générique pour α_0 en ce sens qu'il n'existe pas de lacet géodésique d'origine q de direction α_0. Alors en remarquant que $\dot{a}_\lambda = (\dot{a}_{-\lambda})^{-1}$, on déduit de la proposition précédente :

$$\underline{\mathfrak{S}}_{\alpha_0}\dot{a}_\lambda = (1 - i\dot{a}_{\ell_0})^{-1/2}\dot{a}_\lambda, \quad \underline{\mathfrak{S}}_{-\alpha_0}\dot{a}_\lambda = (1 - i\dot{a}_{-\ell_0})^{1/2}\dot{a}_\lambda.$$

Sachant que u_λ n'admet pas de singularités dans la direction α_0 on obtient alors la :

PROPRIÉTÉ. — *Sous les conditions de la remarque précédente,*

$$\underline{\mathfrak{S}}_{\alpha_0}\dot{\varphi}_\lambda = (1 - i\dot{a}_{\ell_0})^{-1/2}\dot{\varphi}_\lambda, \quad \underline{\mathfrak{S}}_{-\alpha_0}\dot{a}_\lambda = (1 - i\dot{a}_{-\ell_0})^{1/2}\dot{\varphi}_\lambda.$$

B.3.2. *Symboles BKW avec normalisation de Green.* — Fixons, pour q voisin de q_0 sur $\dot{\mathbb{C}}_2$, une détermination de $u^{-1/2}$. On appelle *symbole de Green* BKW le symbole BKW élémentaire $\dot{\mathfrak{g}}(q, q_0, x)$, défini de manière unique, pour q voisin de q_0 sur $\dot{\mathbb{C}}_2$, par :

$$\dot{\mathfrak{g}}(q, q_0, x) = u(q_0)^{1/2}u(q)^{-1/2}\exp\Big[-x\int_{q_0}^{q} u\,\mathrm{d}q'\Big].$$

Plus généralement, si λ est un chemin de $\dot{\mathbb{C}}_2$ d'origine q_0 et d'extrémité q, on notera $\dot{\mathfrak{g}}_\lambda(q, q_0, x)$ *le symbole de Green BKW normalisé le long de* λ, donné par l'expression

$$\dot{\mathfrak{g}}_\lambda(q, q_0, x) = u(q_0)^{-1/2} u(q)^{-1/2} \exp\Big[-x \int_\lambda u \, \mathrm{d}q'\Big]$$

où la détermination de $u(q)^{-1/2}$ se déduit de celle de $u(q_0)^{-1/2}$ par prolongement analytique le long du chemin λ.

THÉORÈME. — *Le symbole de Green* $\dot{\mathfrak{g}}_\lambda$ *est résurgent* (*sommable*) *en* x ; *ses singularités vues sont les mêmes que celles du théorème B.3.1, à ceci près qu'il faut remplacer le* (i) *par* :

(i) *Les périodes des lacets géodésiques d'extrémité* q_0 (*si ce point est à distance finie*).

Plus précisément, en supposant q_0 à distance finie, notons α_0 la direction non critique d'un lacet géodésique ℓ_0 d'origine q_0 (de sorte que $-\alpha_0$ est la direction du lacet géodésique $-\ell_0$ d'extrémité q_0) et supposons par ailleurs q générique pour α_0. En écrivant

$$\dot{\mathfrak{g}}_\lambda = u(q_0)^{-1/2} u(q)^{-1/2} \dot{a}_\lambda,$$

et comme $u(q)$ n'admet pas de singularité dans la direction α_0, on obtient par la propriété B.3.1 et la proposition B.2 le résultat suivant :

PROPOSITION. — *Sous les conditions précédentes,*

$$\underline{\mathfrak{S}}_{-\alpha_0} \dot{\mathfrak{g}}_\lambda = (1 - i\dot{a}_{-\ell_0}) \dot{\mathfrak{g}}_\lambda.$$

Conclusion. — Comme on vient de le voir, les énoncés des paragraphes B.3.1 et B.3.2 se déduisent facilement l'un de l'autre. La « bonne normalisation » B.3.1 est celle qu'on obtient naturellement par les constructions d'Écalle. La « normalisation de Green » B.3.2 s'introduit naturellement dans le point de vue de Balian et Bloch [BB], dont les « intégrales de diffusion multiple » devraient pouvoir être utilisées comme substitut aux intégrales itérées d'Écalle, pour démontrer la résurgence.

BIBLIOGRAPHIE

[AVG] V. ARNOLD, A. VARCHENKO, S. GOUSSEIN-ZADE, Singularités des applications différentiables, t.2, Éd. MIR Moscou (traduction française), 1986.

[BB] R. BALIAN, C. BLOCH, Solution of the Schrödinger equation in terms of classical paths, Ann. Phys., 85 (1974), 514–545.

[BO] C.M. BENDER, St.A. ORSZAG, Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers, Mc Graw–Hill Book Inc. Company, 1978.

[CNP] B. CANDELPERGHER, C. NOSMAS, F. PHAM, Approche de la résurgence (Actualités Mathématiques, Hermann, à paraître).

[CNP_0] B. CANDELPERGHER, C. NOSMAS, F. PHAM, Premiers pas en calcul étranger, Ann. Inst. Fourier, 43, 1 (1993).

[D] R.B. DINGLE, Asymptotic Expansions : Their Derivation and Interpretation, Academic Press, London and New–York, 1973.

[DDP] E. DELABAERE, H. DILLINGER, F. PHAM, Exact semi–classical expansions for a one dimensional oscillator (en préparation) ; voir aussi E. Delabaere et H. Dillinger, Thèse de Doctorat, Université de Nice–Sophia–Antipolis, 1991.

[DDP_0] E. DELABAERE, H. DILLINGER, F. PHAM, Développements semi–classiques exacts des niveaux d'énergie d'un oscillateur à une dimension, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 310, Série I, (1990), 141–146.

[E] J. ÉCALLE, Singularités irrégulières et résurgence multiple, dans cinq applications des fonctions résurgentes, preprint 84, t. 62, Orsay.

[E_0] J. ÉCALLE, Les fonctions résurgentes, Publ. Math. Université de Paris–Sud, en plusieurs tomes.

[Ji] A.O. JIDOUMOU, Modèles de résurgence paramétrique, Fonctions d'Airy et cylindro–paraboliques, Thèse de Doctorat, 1990, Université de Nice–Sophia-Antipolis, à paraître dans J. Maths Pures Appl.

[L] J. LERAY, Le calcul différentiel et intégral sur une variété analytique complexe (Problème de Cauchy III), Bull. Soc. Math. France, 87 (1959), 81–180.

[LL] L. LANDAU, E. LIFCHITZ, Mécanique Quantique, Théorie non relativiste, Éd. MIR Moscou, 1966.

[P] H. POINCARÉ, Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, Librairie Albert Blanchard, 1987 (en plusieurs tomes).

[V] A. VOROS, The return of the quartic oscillator (the complex WKB method). Annales Institut H. Poincaré, 29, 3 (1983).

Manuscrit reçu le 13 janvier 1992.

E. DELABAERE, H. DILLINGER ET F. PHAM,
Université de Nice-Sophia-Antipolis
Laboratoire J.A. Dieudonné (URA CNRS n° 168)
Parc Valrose
06108 Nice Cedex 2 (France).