ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JEAN-PAUL BÉZIVIN
FRANÇOIS GRAMAIN

Solutions entières d'un système d'équations aux différences

Annales de l'institut Fourier, tome 43, nº 3 (1993), p. 791-814
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1993__43_3_791_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
43, 3 (1993), 791-814

SOLUTIONS ENTIÈRES D'UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES

par J.-P. BÉZIVIN et F. GRAMAIN

1. Présentation des résultats.

En 1982, à la suite de travaux de M. Mignotte et du second auteur, D.W. Masser ([MAS]) introduisait la notion de *pas récurrent* pour les fonctions entières : on dit que $\alpha \in \mathbb{C}^\times$ est un pas récurrent de la fonction entière f si les translatées $f(z+\alpha n)$, $n \in \mathbb{N}$, sont linéairement dépendantes sur $\mathbb{C}(z)$. Cela revient à dire que f est solution d'une équation aux différences finies à coefficients polynômiaux dans la direction α

$$\sum_{0\leq m\leq M} A_m(z) f(z+\alpha m) = 0,$$

où les $A_m \in \mathbb{C}[z]$ ne sont pas tous nuls.

On montre au paragraphe 2 (lemme 2.5) que les polynômes exponentiels, i.e. les fonctions entières de la forme $f(z) = \sum_{0\leq k\leq K} P_k(z)e^{\omega_k z}$ (où les $\omega_k \in \mathbb{C}$ et les $P_k \in \mathbb{C}[z]$) admettent tout $\alpha \in \mathbb{C}^\times$ comme pas récurrent.

D.W. Masser demandait si une fonction entière ayant deux pas récurrents linéairement indépendants sur $\mathbb{R}$ (voire ayant tout $\alpha \in \mathbb{C}^\times$ comme pas récurrent) est un polynôme exponentiel. Il posait aussi la question analogue pour les fonctions de plusieurs variables. La réponse est négative, comme le montre l'exemple de la fonction entière $f(z) =$

Mots-clés : Equations aux différences – Polynômes exponentiels – Équations différentielles linéaires.
Classification A.M.S. : 39A – 39B – 34A – 33B – 30D.

$(e^z - 1)/z$ qui n'est pas un polynôme exponentiel (regarder par exemple le comportement de f à l'infini) mais vérifie pour tout $\alpha \in \mathbb{C}^\times$ la relation

$$(z+2\alpha)f(z+2\alpha) - (1+e^\alpha)(z+\alpha)f(z+\alpha) + e^\alpha z f(z) = 0.$$

Dans cet article nous montrons que, même si la réponse est négative, elle n'est pas très éloignée d'être positive. Nous étudions les solutions entières f d'un système de deux équations

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{0\le m\le M} A_m(z) f(z+\alpha m) = 0 \\ \displaystyle\sum_{0\le n\le N} B_n(z) f(z+\beta n) = 0, \end{cases}$$

où α et $\beta \in \mathbb{C}^\times$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{R}$, A_m et $B_n \in \mathbb{C}[z]$ (pour m et $n \in \mathbb{N}$, $0 \le m \le M$, $0 \le n \le N$) et $A_M B_N \ne 0$.

Le second auteur a montré récemment ([GRA2]) que, si les coefficients A_m et B_n sont constants, alors f est un polynôme exponentiel, et que ce résultat se généralise au cas de plusieurs variables par le procédé du paragraphe 3 de [GRA1]. Ici nous obtenons une réponse presque complète à la question de D.W. Masser.

THÉORÈME 1. — *Soient α et $\beta \in \mathbb{C}^\times$ avec $\alpha/\beta \notin \mathbb{R}$. Les solutions entières f de presque tout système d'équations aux différences*

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{0\le m\le M} A_m(z) f(z+\alpha m) = \phi \\ \displaystyle\sum_{0\le n\le N} B_n(z) f(z+\beta n) = \psi, \end{cases}$$

où ϕ et ψ sont des polynômes exponentiels et A_m et $B_n \in \mathbb{C}[z]$, sont des polynômes exponentiels.

Si, pour tout m, le polynôme A_m est constant et si $A_M B_N \ne 0$, alors toute solution entière f est un polynôme exponentiel.

Si, pour tout m, le polynôme A_m est de degré ≤ 1 et si $A_M B_N \ne 0$, alors toute solution entière f est le quotient d'un polynôme exponentiel par un polynôme de degré $\le \max_n \deg(B_n)$.

Dans cet énoncé, "presque tout" est à prendre au sens algébrique : la conclusion du théorème est vraie pour tout choix des coefficients des polynômes A_m et B_n dans un ouvert de Zariski non vide de l'espace de ces coefficients. La condition précise à vérifier (non nullité d'un déterminant construit à partir des polynômes A_m et B_n) est donnée au paragraphe 6.

Nous conjecturons que, dans tous les cas, les solutions entières d'un tel système non trivial ($A_M B_N \neq 0$) sont des quotients de polynômes exponentiels par des polynômes.

Récipoquement, il est clair, d'après le lemme 2.5, que tout quotient d'un polynôme exponentiel par un polynôme admet tout $\alpha \in \mathbb{C}^\times$ comme pas récurrent.

Le problème multiplicatif analogue (faisant intervenir $f(q^m z)$ au lieu de $f(z+\alpha m)$) a été résolu par A. Boutabaa et le premier auteur ([BÉBO]) par une méthode très différente de celle présentée ici.

Si β tend vers 0 alors $(f(z+\beta) - f(z))/\beta$ tend vers $f'(z)$, on peut donc considérer comme un cas limite du précédent le résultat suivant.

THÉORÈME 2. — *Soit $\alpha \in \mathbb{C}^\times$, les solutions entières de presque tout système*

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{0 \le m \le M} A_m(z) f(z+\alpha m) = \phi \\ \displaystyle\sum_{0 \le n \le N} B_n(z) f^{(n)}(z) = \psi, \end{cases}$$

où ϕ et ψ sont des polynômes exponentiels et A_m et $B_n \in \mathbb{C}[z]$, sont des polynômes exponentiels.

Si, pour tout m, le polynôme A_m est constant et si $A_M B_N \neq 0$, alors toute solution entière f est un polynôme exponentiel.

Si, pour tout m, le polynôme A_m est de degré ≤ 1 et si $A_M B_N \neq 0$, alors toute solution entière f est le quotient d'un polynôme exponentiel par un polynôme de degré $\le \max_n \deg(B_n)$.

Ce genre de questions a été récemment étudié par J.-P. Ramis ([RAM]).

L'organisation de l'article est la suivante : au paragraphe 2 nous mettons en place le cadre formel utilisé dans les démonstrations. Nous introduisons d'abord des opérateurs différentiels d'ordre infini permettant de représenter les translations $f(z) \mapsto f(z+\alpha)$, ainsi que l'a fait A.O. Gel'fond ([GEL1] et [GEL2]). Ensuite nous définissons un cadre algébrique inspiré de l'article [ZEI] de D. Zeilberger. Cela nous permet de nous ramener au cas où les seconds membres ϕ et ψ sont nuls. Nous avons regroupé au paragraphe 3 la plupart des lemmes techniques utiles aux démonstrations. Le paragraphe 4 est consacré au cas du théorème 1 où les polynômes A_m et B_n sont constants ; nous donnons deux nouvelles preuves de la proposition 1 de [GRA2]. Aux paragraphes 5, 6 et 7 nous démontrons le théorème 1 dont nous donnons des énoncés plus précis (théorèmes 5.1, 6.1 et 7.1). De même le paragraphe 8 contient un énoncé plus précis du théorème 2 et sa démonstration.

Le fondement de ces démonstrations est le procédé un peu paradoxal, inspiré de [ZEI], qui consiste à ajouter aux relations vérifiées par f des relations redondantes obtenues par multiplication par des puissances de z des relations de départ. Rappelons que les énoncés des paragraphes 5 à 8 sont encore vrais si les équations de départ ne sont plus homogènes mais ont pour seconds membres des polynômes exponentiels. Enfin, le paragraphe 9 donne une extension du résultat du paragraphe 5 au cas où la première équation aux différences se réduit à l'affirmation de la périodicité de f et où la seconde a pour coefficients non plus des polynômes mais des fonctions entières de type exponentiel pas trop élevé. Ce paragraphe a été rejeté à la fin de l'article car la technique utilisée est assez différente de celle des paragraphes 5 à 8.

2. Le formalisme utilisé : nouvelles notations.

Si H est l'espace des fonctions entières sur $\mathbb{C}$, on note $D : H \to H$ l'opérateur de dérivation par rapport à la variable complexe, de sorte que $Df = f'$.

Si $f \in H$ et $\alpha \in \mathbb{C}^\times$, la formule de Taylor $f(z+\alpha) = \sum_{n\geq 0} \frac{\alpha^n}{n!} f^{(n)}(z)$ montre que l'opérateur de translation $X : H \to H$ défini par $Xf(z) = f(z+\alpha)$ peut être considéré comme l'opérateur différentiel d'ordre infini à coefficients constants $X = e^{\alpha D} = \sum_{n\geq 0} \frac{\alpha^n}{n!} D^n$.

Plus généralement, si $g \in E$ est une fonction entière de type exponentiel, dont la série de Taylor est $g(t) = \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n!} t^n$, on considère l'opérateur $g(D) = \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n!} D^n$.

LEMME 2.1. — *Si $g \in E$ est une fonction entière de type exponentiel, alors $g(D)$ opère sur l'espace H des fonctions entières.*

Démonstration. — Si $g(t) = \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n!} t^n$ est de type exponentiel δ, on a $\limsup |a_n|^{1/n} \leq \delta$ (voir [BOA] ou [PÓL]), et sa transformée de Laplace-Borel a un développement de Laurent $\sum_{n\geq 0} a_n t^{-n-1}$ qui converge pour $|t| > \delta$. Mais, si $f \in H$, pour tout $z \in \mathbb{C}$ fixé, les inégalités de Cauchy donnent $|f^{(n)}(z)| \leq n! R^{-n} M(f, |z| + R)$, où $M(f, |z| + R) = \max\{|f(\zeta)|\,;\, |\zeta| = |z| + R\}$. Ainsi, pour $|z| \leq \rho$, on a $|\frac{a_n}{n!} f^{(n)}(z)| \leq |a_n| R^{-n} M(f, \rho + R)$ et il suffit de choisir $R > \delta$ pour voir que la série $\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n!} f^{(n)}(z)$ converge normalement sur le disque $\{|z| \leq \rho\}$, donc définit une fonction entière. □

On notera $E_D = \{g(D)\,;\, g \in E\}$ la $\mathbb{C}$-algèbre commutative de ces opérateurs, la multiplication étant en fait la composition. Pour α et $\beta \in \mathbb{C}^\times$, avec $\alpha \neq \beta$, on notera $X = e^{\alpha D}$ et $Y = e^{\beta D}$, et on considèrera $\mathbb{C}[X, Y]$ la sous-algèbre de E_D engendrée par les opérateurs de translation X et Y. On supposera α et β linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$ de sorte que les opérateurs X et Y soient algébriquement indépendants. En effet, si $m\alpha + n\beta = 0$ avec m et n dans $\mathbb{Z}$ non tous deux nuls, alors $X^m Y^n = 1$. Inversement, si l'opérateur $\sum_{i,j} a_{i,j} X^i Y^j \in \mathbb{C}[X, Y]$ est nul, son action sur z^n donne 0 pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il en résulte que l'on a $\sum_{i,j} a_{i,j}(i\alpha + j\beta)^n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si α et β sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$, le déterminant de Vandermonde construit sur les $i\alpha + j\beta$ est non nul, donc tous les $a_{i,j}$ sont nuls.

L'opérateur de multiplication par z, noté $z : H \to H$ et défini par $(zf)(z) = zf(z)$ ne commute pas avec D puisque l'on a $Dz = zD + 1$, où 1 désigne l'identité de H. On note $E_D[z]$ l'anneau engendré sur E_D par la multiplication par z. On vient de voir que cet anneau n'est pas commutatif : si $g(t) = \sum_{n\geq 0} a_n t^n \in E$, alors $g(D)(zf) = \sum_{n\geq 0} a_n D^n(zf) = \sum_{n\geq 0} a_n(zD^n(f) + nD^{n-1}(f))$, ce qui donne la relation de commutation

$$g(D)z = zg(D) + g'(D). \tag{2.2}$$

On définit donc sur $\mathbb{C}[X, Y]$ la dérivation τ par $\tau(a) = 0$ si $a \in \mathbb{C}$, $\tau(X) = \alpha X$ et $\tau(Y) = \beta Y$. Cette dérivation correspond à la dérivation par rapport à la variable complexe t des fonctions de $\mathbb{C}[e^{\alpha t}, e^{\beta t}]$. Ainsi, pour $P \in \mathbb{C}[X]$ et $Q \in \mathbb{C}[Y]$, on a $\tau(PQ) = \alpha XP'Q + \beta YPQ'$ et cette dérivation se prolonge de façon évidente au corps des fractions rationnelles $\mathbb{C}(X, Y)$. Alors la relation de commutation (2.2) se traduit dans l'algèbre $\mathbb{C}[X, Y][z]$

par

$$Rz = zR + \tau R \tag{2.3}$$

si $R \in \mathbb{C}[X,Y]$.

Par itération de la relation (2.2) on obtient immédiatement le

LEMME 2.4. — *Si $g \in E$ et $k \in \mathbb{N}$, on a $g(D)z^k = \sum_{0\leq j\leq k} \binom{k}{j} z^j g^{(k-j)}(D)$.*

Il en résulte qu'une relation fonctionnelle $\sum_{0\leq m\leq M} A_m(z)f(z+m\alpha) = \phi$ avec des $A_m \in \mathbb{C}[z]$ s'écrit

$$\Big(\sum_{0\leq m\leq M} A_m(z)X^m\Big)(f) = \phi$$

et, après commutation,

$$\Big(\sum_{0\leq k\leq s} P_k(X)z^k\Big)(f) = \phi,$$

avec des $P_k \in \mathbb{C}[X]$ et $s = \max(\deg(A_m)$.

De même, la relation $\sum_{0\leq m\leq M} A_m(z)f^{(m)}(z) = \phi$ s'écrit $\Big(\sum_{0\leq k\leq s} Q_k(D)$ $z^k\Big)(f) = \phi$, où les Q_k sont des polynômes à coefficients complexes.

C'est cette forme des relations fonctionnelles que nous utiliserons pour prouver les résultats annoncés au paragraphe 1. Le lemme suivant permet de supposer que les seconds membres des systèmes considérés sont nuls.

LEMME 2.5. — *Si f est un polynôme exponentiel, alors pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$ il existe $P \in \mathbb{C}[X] - \{0\}$ tel que $P(X)(f) = 0$.*

Démonstration. — Soient f et $g \in H$, si $P(X)(f) = Q(X)(g) = 0$, alors pour tout $(\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2$ on a $P(X)Q(X)(\lambda f + \mu g) = 0$, car $P(X)$ et $Q(X)$ commutent. Il suffit donc de prouver le lemme pour tout monôme $f(z) = z^n e^{\omega z}$. On vérifie facilement, par récurrence sur n, que $P(X) = (X - e^{\omega\alpha})^{n+1}$ satisfait à $P(X)(f) = 0$. □

Il en résulte que si l'on a la relation $\Big(\sum_{0\leq k\leq s} P_k(X)z^k\Big)(f) = \phi$, où ϕ est un polynôme exponentiel, il existe $P \in \mathbb{C}[X]-\{0\}$ tel que $P(X)(\phi) = 0$, et on a

$$\Big(\sum_{0\le k\le s} P(X)P_k(X)z^k\Big)(f)=0.$$

On pourra donc remplacer sans perte de généralité les hypothèses du théorème 1 par

$$\sum_{0\le k\le s} P_k(X)z^k(f)=\sum_{0\le l\le t} Q_l(Y)z^l(f)=0.$$

Comme, de plus, l'opérateur de translation $X=e^{\alpha D}$ est inversible, d'inverse $e^{-\alpha D}$, on pourra supposer que les polynômes P_k (resp. Q_l) ne sont pas tous divisibles par X (resp. Y).

Dans le cas du théorème 2, où l'une des équations aux différences est remplacée par une équation différentielle, comme les polynômes exponentiels sont caractérisés par le fait qu'ils sont solutions d'équations différentielles linéaires à coefficients constants, on peut aussi supposer que le second membre est nul.

3. Quelques lemmes techniques.

Afin de clarifier la démarche des démonstrations des théorèmes, nous regroupons ici quelques lemmes.

LEMME 3.1. — *Soit $P\in\mathbb{C}[X]$ tel que $P(0)\neq 0$. L'idéal de $\mathbb{C}[X]$ engendré par l'ensemble des $\tau^j(P)$ ($j\in\mathbb{N}$) est $\mathbb{C}[X]$ tout entier.*

Démonstration. — Si ce n'était pas le cas, l'idéal engendré par les $\tau^j(P)$ serait de la forme $S\,\mathbb{C}[X]$ pour un polynôme S non constant. Soit $x\in\mathbb{C}$ un zéro de S, de sorte que $\tau^j(P)(x)=0$ pour tout j. On a $x\neq 0$ car $P(0)\neq 0$, donc il existe $y\in\mathbb{C}$ tel que $x=e^{\alpha y}$. La fonction entière $\phi(z)=P(e^{\alpha z})$ vérifie $\phi^{(j)}(z)=\tau^j(P)(e^{\alpha z})$, donc $\phi^{(j)}(y)=0$ pour tout $j\in\mathbb{N}$. Il en résulte que ϕ est identiquement nulle, ce qui contredit le fait que P n'est pas le polynôme nul, puisque la fonction $e^{\alpha z}$ est transcendante. □

Comme $\mathbb{C}[X]$ est nœthérien, il résulte du lemme 3.1 qu'il existe un entier k tel que $\mathbb{C}[X]$ soit engendré par $\{\tau^j(P)\,;\,0\le j\le k\}$.

LEMME 3.2. — *Soient $R \in \mathbb{C}[X, Y]$, $f \in H$ et $K \in \mathbb{N}$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) $Rz^k f = 0$ *pour* $0 \le k \le K$

(ii) $(\tau^k R)f = 0$ *pour* $0 \le k \le K$.

Démonstration. — On la fait par récurrence sur K. Pour $K = 0$, c'est clair. Le passage de K à $K+1$ se fait en remarquant que la propriété (i) à l'ordre $K+1$ est la conjonction des propriétés (i) à l'ordre K pour les fonctions f et zf. Mais la relation de commutation (2.3) montre que

$$(\tau^K R)(zf) = z(\tau^K R)f + (\tau^{K+1} R)f.$$

Il y a donc équivalence avec la propriété (ii) à l'ordre $K+1$ pour f.□

LEMME 3.3. — *Soient $P \in \mathbb{C}[X, Y]$, $Q \in \mathbb{C}[X, Y]$ et $f \in H$. Si, pour tout $l \in \mathbb{N}$, on a $\tau^n(PQ^l)f = 0$ pour tout entier n tel que $0 \le n \le l$, alors $(\tau^k P)Q^{k(k+1)/2} f = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.*

Démonstration. — On fait une récurrence sur k. Pour $k = 0$ c'est la relation de l'hypothèse avec $n = l = 0$. Pour passer de k à $k+1$, on utilise le fait que τ est une dérivation, donc vérifie la formule de Leibniz

$$\tau^{k+1}(PQ^{k+1}) = (\tau^{k+1}P)Q^{k+1} + \sum_{0 \le j \le k} \binom{k+1}{j} (\tau^j P)(\tau^{k+1-j} Q^{k+1}).$$

En appliquant cet opérateur à $Q^{k(k+1)/2} f$, on obtient au premier membre

$$\tau^{k+1}(PQ^{k+1})Q^{k(k+1)/2} f = 0,$$

car $\tau^{k+1}(PQ^{k+1})f = 0$, d'après l'hypothèse avec $n = l = k+1$. Au second membre, chaque terme de la somme $\sum$ est nul, car $(\tau^j P)Q^{k(k+1)/2} f = 0$ par hypothèse de récurrence. On obtient donc

$$((\tau^{k+1}P)Q^{k+1})Q^{k(k+1)/2} f = 0,$$

ce qui est le résultat cherché. □

LEMME 3.4. — *Soient $A(D, z) \in E_D[z] - \{0\}$ et $f \in H$ tels que $A(D, z)f = 0$. Alors, pour tout $g \in E - \{0\}$, il existe $B(D, z) \in E_D[z] - \{0\}$ tel que $B(D, z)g(D)f = 0$.*

Si, de plus, $A(D,z) \in \mathbb{C}[Y][z]$ et $g \in \mathbb{C}[Y]$, l'opérateur $B(D,z)$ peut être choisi dans $\mathbb{C}[Y][z]$.

Démonstration. — On montre en fait que, si $\deg_z(A(D,z)) = s$, alors $g(D)^{s+1}A(D,z) = B(D,z)g(D)$, où $B(D,z) \in E_D[z]$. Le cas où $s = 0$ est trivial car E_D est commutatif, donc $g(D)A(D) = A(D)g(D)$. Pour ramener le cas du degré $s+1$ à celui du degré s, il suffit de montrer que si $a \in E$, alors $g(D)a(D)z^{s+1} = a(D)z^{s+1}g(D) + A_1(D,z)$ avec $A_1 \in E_D[z]$ et $\deg_z(A_1) \leq s$. Comme $g(D)$ et $a(D)$ commutent, c'est ce que donne le lemme 2.4 avec $k = s+1$. Il est clair que $B(D,z) \neq 0$ puisque $g(D)^{s+1}A(D,z) \neq 0$. De plus, si g et les coefficients de $A(D,z)$ sont dans $\mathbb{C}[Y]$, le calcul précédent se fait dans $\mathbb{C}[Y][z]$, donc fournit un $B(D,z) \in \mathbb{C}[Y][z]$. □

LEMME 3.5. — *Soient $A \in \mathbb{C}[X]$ et $B \in \mathbb{C}[Y]$. Il existe une suite double $\gamma_{i,j} \in \mathbb{N}$ vérifiant $\gamma_{i,i} = 1$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\gamma_{0,j} = 0$ pour tout $j \geq 1$, et $\gamma_{i,j} = 0$ pour tout $i > j$, telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on ait*

$$\tau^k(AB) = \sum_{h+j\leq k}\ \sum_{h\leq i\leq k-j} \binom{k}{i}\gamma_{h,i}\gamma_{j,k-i}\alpha^i\beta^{k-i}X^hY^jA^{(h)}(X)B^{(j)}(Y).$$

Démonstration. — La formule de Leibniz s'écrit

$$\tau^k(AB) = \sum_{0\leq i\leq k}\binom{k}{i}(\tau^iA)(\tau^{k-i}B).$$

Il suffit donc de vérifier, par une récurrence facile, la formule

$$\tau^iA = \alpha^i\sum_{0\leq h\leq i}\gamma_{h,i}X^hA^{(k)}(X)$$

pour tout $i \in \mathbb{N}$, et la formule analogue pour $\tau^{k-i}B$. □

LEMME 3.6. — *Soient A un anneau commutatif et $a,b,c \in A$. Pour i et $j \in \mathbb{N}$, avec $0 \leq i,j \leq n$, on pose $a_{0,j} = \binom{n}{j}a^{n-j}b^j$, $a_{i,i-1} = 1$ et $a_{i,i} = c$ pour $i \geq 1$, $a_{i,j} = 0$ pour $j \notin \{i-1,i\}$. Alors $\det(a_{i,j})_{0\leq i,j\leq n} = (ac-b)^n$.*

Démonstration. — Le développement de ce déterminant suivant la première ligne et la formule du binôme donnent le résultat. □

LEMME 3.7. — *Soient $J \geq 1$ et K des entiers naturels et $\Phi = \sum_{1\leq j\leq J} A_jB_j$, où $A_j \in \mathbb{C}[X]$ et $B_j \in \mathbb{C}[Y]$ pour $1 \leq j \leq J$. On suppose* *que α/β est irrationnel. S'il existe une fonction y algébrique sur $\mathbb{C}(X)$ et non constante vérifiant $\tau^k\Phi(X,y) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, $0 \le k \le K$, alors elle vérifie*

$$\sum_{1\le j\le J} A_j^{(m)}(X)B_j^{(n)}(y) = 0$$

pour tout couple $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $m+n \le K$.

Démonstration. — Elle se fait par récurrence. Pour $K = 0$, il n'y a rien à démontrer. Pour passer de K à $K+1$, on utilise le lemme 3.5 qui donne

$$\tau^{K+1}\Phi(X,y) = \sum_{0\le h\le K+1} \binom{K+1}{h} (\alpha X)^h (\beta y)^{K+1-h} \sum_{1\le j\le J} A_j^{(h)}(X)B_j^{(K+1-h)}(y) = 0$$

car, d'après l'hypothèse de récurrence, tous les autres termes donnés par le lemme 3.5 ont une somme nulle au point (X,y). D'autre part, l'hypothèse de récurrence donne $\sum\limits_{1\le j\le J} A_j^{(h)}(X)B_j^{(K-h)}(y) = 0$ pour $0 \le h \le K$. La dérivation par rapport à X (qui se prolonge de manière unique à la clôture algébrique de $\mathbb{C}(X)$, la dérivée de y étant notée y') de ces $K+1$ identités fournit les $K+1$ relations

$$\sum_{1\le j\le J} A_j^{(h+1)}(X)B_j^{(K-h)}(y) + y' \sum_{1\le j\le J} A_j^{(h)}(X)B_j^{(K+1-h)}(y) = 0.$$

Ces dernières relations jointes à la relation $\tau^{K+1}\Phi(X,y) = 0$ peuvent être considérées comme un système linéaire homogène de $K+2$ équations en les $K+2$ inconnues $\sum\limits_{1\le j\le J} A_j^{(h)}(X)B_j^{(K+1-h)}(y)$ dont le déterminant est $(\alpha Xy' - \beta y)^{K+1}$, d'après le lemme 3.6 (avec $a = \alpha X$, $b = \beta y$, $c = y'$). Or $\alpha/\beta \notin \mathbb{Q}$ et y est algébrique sur $\mathbb{C}(X)$, donc $\alpha Xy' - \beta y \neq 0$, car y n'est pas constante. Le système considéré n'a donc que la solution nulle, et le lemme est démontré. □

LEMME 3.8. — *Soient $P(X,z) = \sum\limits_{0\le m\le s} P_m(X)z^m \in \mathbb{C}[X][z] - \{0\}$ un polynôme de degré s en z et f une fonction telle que $P(X,z)f = 0$. Alors, pour tout $\Delta \in \mathbb{C}[z]$, il existe $R(X,z) \in \mathbb{C}[X][z] - \{0\}$ de degré $\le s$ en z tel que la fonction $\Delta(z)f(z)$ vérifie $R(X,z)\Delta f = 0$.*

Démonstration. — Quitte à décomposer Δ en produit de facteurs du premier degré et à faire une récurrence sur le degré de Δ, on peut supposer que $\Delta(z) = z - \lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$. La relation $P(X,z)f = 0$ multipliée par z s'écrit, après commutation,

$$P_s(X)z^{s+1}f + \sum_{1\leq m\leq s-1} (P_m(X) - \tau P_{m+1}(X))z^{m+1}f - \tau P_0(X)f = 0.$$

En développant $z^m = (z-\lambda+\lambda)^m$ par la formule du binôme, cette relation devient

$$P_s(X)(z-\lambda)^{s+1}f + \sum_{0\leq m\leq s} S_m(X)(z-\lambda)^m f = 0, \tag{3.9}$$

où les $S_m \in \mathbb{C}[X]$. De la même façon, la relation $P(X,z)f = 0$ s'écrit

$$P_s(X)(z-\lambda)^s f + \sum_{1\leq m\leq s-1} T_m(X)(z-\lambda)^m f + \Big(\sum_{0\leq m\leq s} \lambda^m P_m(X)\Big) f = 0. \tag{3.10}$$

Si $\sum_{0\leq m\leq s} \lambda^m P_m(X) = 0$, la relation (3.10) est de la forme $R(X,z)(z-\lambda)f = 0$, avec $\deg_z(R) = s-1$. Sinon, la relation $\Big(\sum_{0\leq m\leq s} \lambda^m P_m(X)\Big)(3.9) - S_0(X)(3.10)$ est de la forme $R(X,z)(z-\lambda)f = 0$ avec $\deg_z(R) = s$, le coefficient dominant de R étant $P_s(X) \sum_{0\leq m\leq s} \lambda^m P_m(X) \neq 0$. $\square$

Remarque. — Le point important de ce lemme est que l'équation aux différences vérifiée par $\Delta(z)f(z)$ est de degré au plus égal à celui de l'équation aux différences vérifiée par f. Ce résultat n'est pas obtenu par le calcul naïf suivant : si $\sum_{0\leq n\leq N} A_n(z)f(z+\alpha n) = 0$ alors $\Big(\prod_{0\leq n\leq N} (z+n\alpha-\lambda)\Big) \sum_{0\leq n\leq N} A_n(z)f(z+\alpha n) = 0$ est une relation du même type vérifiée par la fonction $(z-\lambda)f(z)$.

4. Le cas des équations aux différences à coefficients constants.

Il s'agit de montrer que si $f \in H$ vérifie les deux équations aux différences

$$P(X)f = Q(Y)f = 0,$$

où $X = e^{\alpha D}$ et $Y = e^{\beta D}$ avec α et $\beta \in \mathbb{C}^\times$ et $\alpha/\beta \notin \mathbb{R}$ et où P et $Q \in \mathbb{C}[t] - \{0\}$, alors f est un polynôme exponentiel. Le paragraphe 2 montre que l'on peut supposer $P(0)Q(0) \neq 0$.

Sous ces hypothèses, nous allons utiliser un théorème de J. Kelleher et B.A. Taylor ([KETA]) rappelé ici sous le nom de lemme 4.1.

LEMME 4.1. — *L'idéal de l'anneau E des fonctions entières de type exponentiel engendré par les fonctions $f_1, \dots, f_n$ est E tout entier si et seulement si il existe deux constantes c_1 et c_2 positives telles que, pour tout $z \in \mathbb{C}$ on ait*

$$\sum_{1\leq i\leq n} |f_i(z)| \geq c_1 e^{-c_2|z|}.$$

LEMME 4.2. — *Soient P et $Q \in \mathbb{C}[t]$ tels que $P(0)Q(0) \neq 0$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^\times$ avec $\alpha/\beta \notin \mathbb{R}$. Il existe $C > 0$ et $R > 0$ tels que $|P(e^{\alpha z})| + |Q(e^{\beta z})| \geq C$ pour tout z tel que $|z| \geq R$.*

Démonstration. — Il est clair que l'on peut supposer P et Q non constants. Il suffit alors de démontrer que supposer l'existence d'une suite de nombres complexes $z_n \in \mathbb{C}$ telle que $|z_n|$ tende vers l'infini, et $P(e^{\alpha z_n})$ et $Q(e^{\beta z_n})$ tendent vers zéro, conduit à une contradiction. Les polynômes P et Q n'ayant qu'un nombre fini de zéros, quitte à extraire une sous-suite des z_n, on peut supposer que la suite des $e^{\alpha z_n}$ (resp. $e^{\beta z_n}$) tend vers un zéro a de P (resp. un zéro b de Q). Par hypothèse a et b ne sont pas nuls ; il existe donc des déterminations $\log a$ et $\log b$ des logarithmes de a et b et des entiers j_n et $k_n \in \mathbb{Z}$ tels que $\alpha z_n - \log a + 2i\pi j_n$ et $\beta z_n - \log b + 2i\pi k_n$ tendent vers zéro quand n tend vers l'infini. Il en résulte que $|j_n|$ et $|k_n|$ tendent vers l'infini, car il en est ainsi de $|z_n|$, et que j_n/k_n tend vers α/β. C'est la contradiction cherchée, puisque α/β n'est pas réel. □

Nous pouvons alors montrer le théorème 1 dans le cas particulier des équations à coefficients constants : le lemme 4.2 montre que les fonctions entières $P(e^{\alpha z})$ et $Q(e^{\beta z})$ n'ont qu'un nombre fini de zéros communs, de sorte qu'il existe un polynôme $\Delta \in \mathbb{C}[z]$ tel que les fonctions entières de type exponentiel $f_1(z) = P(e^{\alpha z})/\Delta(z)$ et $f_2(z) = Q(e^{\beta z})/\Delta(z)$ n'ont pas de zéro commun. Par conséquent, en utilisant encore le lemme 4.2, il existe des constantes c_1 et c_2 positives telles que

$$|f_1(z)| + |f_2(z)| \geq c_1 e^{-c_2|z|}$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$. Alors le lemme 4.1 montre l'existence de g_1 et $g_2 \in E$ telles que $g_1 f_1 + g_2 f_2 = 1$. On a donc $g_1(D)P(X) + g_2(D)Q(Y) = \Delta(D)$. Comme $P(X)f = Q(Y)f = 0$, il en résulte que f est solution de l'équation différentielle linéaire à coefficients constants $\Delta(D)f = 0$, donc que f est un polynôme exponentiel. $\square$

On peut aussi donner une preuve de ce résultat à partir d'un théorème de Gelf'ond ([GEL2], chapitre 5, paragraphe 7, n^o 2, théorème 1, p. 347). Ce théorème, dont la preuve repose sur la transformation de Laplace-Borel, montre que si f et $\phi \in E$ sont des fonctions entières de type exponentiel telles que $\phi(D)f = 0$, alors f est un polynôme exponentiel. Il suffit alors de remarquer, comme dans la démonstration de la proposition 1 de [GRA2], que, si la fonction entière f vérifie $P(X)f = Q(Y)f = 0$, alors $f \in E$, pour appliquer le théorème de Gel'fond à $\phi(z) = P(e^{\alpha z})$ ou à $\psi(z) = Q(e^{\beta z})$. Le résultat de Gel'fond permet même de dire que $f(z) = \sum_\theta T_\theta(z)e^{\theta z}$, où θ décrit l'ensemble des racines communes à ϕ et ψ et T_θ est un polynôme de degré inférieur (strictement) à l'ordre de θ comme zéro de ϕ et de ψ.

5. Le cas où l'une des équations aux différences est à coefficients constants.

Dans ce paragraphe, nous démontrons le cas particulier suivant du théorème 1.

THÉORÈME 5.1. — *Soient α et $\beta \in \mathbb{C}^\times$ avec $\alpha/\beta \notin \mathbb{R}$, $X = e^{\alpha D}$ et $Y = e^{\beta D}$, et $f \in H$ vérifiant*

$$\begin{cases} P(X)f = 0 & (5.2) \\ \displaystyle\sum_{0 \le j \le t} Q_j(Y) z^j f = 0, & (5.3) \end{cases}$$

où $P \in \mathbb{C}[X]$ et $P(0) \neq 0$, $Q_j \in \mathbb{C}[Y]$ pour $0 \le j \le t$, et $Q_t \neq 0$.

Alors f est un polynôme exponentiel.

Démonstration. — Le paragraphe 4 prouvait ce résultat dans le cas où $t = 0$. On suppose donc $t \geq 1$. On ajoute au système d'équations (5.2) et (5.3), considéré comme un système "linéaire" en les inconnues $f, zf, ..., z^t f$, d'autres relations, de manière à le rendre carré : plus précisément, on ajoute la relation (5.2) multipliée par z^j pour $1 \le j \le t-1$ et la relation (5.3) multipliée par z^k pour $1 \le k \le l-1$, où $l \geq 1$ est un entier naturel. La relation de commutation (2.3) montre, par exemple, que la relation $z(5.2)$ s'écrit

$$zP(X)f = P(X)zf - \tau P(X)f = 0$$

et la relation $z^2(5.2)$

$$z^2P(X)f = P(X)z^2f - 2\tau P(X)zf + \tau^2 P(X)f = 0.$$

On obtient ainsi un système triangulaire de $t+l$ relations

$$\left\{\begin{array}{lllllr} Q_t(Y)z^{t+l-1}f+ & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots = 0 \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots = 0 \\ & & Q_t(Y)z^t f+ & \dots & \dots & Q_0(Y)f = 0 \\ & & & P(X)z^{t-1}+ & \dots & \dots = 0 \\ & & & & \dots & \dots = 0 \\ & & & & & P(X)zf - \tau P(X)f = 0 \\ & & & & & P(X)f = 0 \end{array}\right.$$

dont le déterminant $Q_t(Y)^l P(X)^t$ est non nul. Il résulte de la théorie des déterminants que l'on a $Q_t(Y)^l P(X)^t z^k f = 0$ pour tout entier k vérifiant $0 \leq k \leq l + t - 1$. Le lemme 3.2 montre donc que l'on a $\tau^k(Q_t(Y)^l P(X)^t)f = 0$ pour les mêmes valeurs de k, et le lemme 3.3 donne alors $(\tau^k(P(X)^t))Q_t(Y)^{k(k+1)/2}f = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Comme $P(0)^t \neq 0$, le lemme 3.1 montre l'existence d'un entier k et de polynômes $U_j \in \mathbb{C}[X]$, $0 \leq j \leq k$, tels que $\sum_{0\leq j\leq k} U_j\tau^j(P^t) = 1$. On a donc

$$Q_t(Y)^{k(k+1)/2}f = \sum_{0\leq j\leq k} U_j(X)\tau^j(P(X)^t)Q_t(Y)^{k(k+1)/2}f = 0$$

et la fonction entière f est solution du système $P(X)f = Q_t(Y)^{k(k+1)/2}f = 0$ de deux équations aux différences à coefficients constants : le paragraphe 4 montre que f est un polynôme exponentiel. □

6. Le cas général des équations aux différences.

Le résultat précis démontré dans cette partie est le suivant :

THÉORÈME 6.1. — *Soient α et $\beta \in \mathbb{C}^\times$ avec $\alpha/\beta \notin \mathbb{R}$, $X = e^{\alpha D}$ et $Y = e^{\beta D}$, et f une fonction entière vérifiant*

$$\left\{\begin{array}{l} \sum_{0\leq m\leq s} P_m(X)z^m f = 0 \\ \sum_{0\leq n\leq t} Q_n(Y)z^n f = 0, \end{array}\right.$$

où $P_m \in \mathbb{C}[X], (0 \leq m \leq s)$, $Q_n \in \mathbb{C}[Y], (0 \leq n \leq t)$, $P_s Q_t \neq 0$, X *ne divise pas tous les* P_m *et* Y *ne divise pas tous les* Q_n. *On pose, pour* $1 \leq i, j \leq s + t$

$$a_{i,j} = \begin{cases} \sum\limits_{0 \leq m \leq s} (-1)^{m-s+j-i} \binom{t-i}{m-s+j-i} \tau^{m-s+j-i} P_m(X) & \text{si } 1 \leq i \leq t \\ \sum\limits_{0 \leq n \leq t} (-1)^{n+j-i} \binom{s+t-i}{n+j-i} \tau^{n+j-i} Q_n(Y) & \text{si } t+1 \leq i \leq s+t. \end{cases}$$

Si $\det(a_{i,j}) \in \mathbb{C}[X, Y]$ *est non nul, alors* f *est un polynôme exponentiel.*

On peut vérifier que la spécialisation au point $(0, 0)$ de $\det(a_{i,j}) \in \mathbb{C}[X, Y]$ est le résultant (de Sylvester) des polynômes

$$\sum_{0 \leq m \leq s} P_m(0) Z^m \quad \text{et} \quad \sum_{0 \leq n \leq t} Q_n(0) Z^n \in \mathbb{C}[Z].$$

Il en résulte qu'en général, l'hypothèse $\det(a_{i,j}) \neq 0$ est vérifiée. Plus précisément, cette hypothèse est vérifiée sur un ouvert de Zariski non vide de l'espace des coefficients des polynômes P_m et Q_n.

Remarquons aussi que $\det(a_{i,j})$ s'interprète comme le résultant de deux polynômes dans un anneau non commutatif, suivant la présentation de [ZEI]. Notons T l'opérateur de multiplication par z. L'anneau d'opérateurs avec lequel nous travaillons est alors $\mathbb{C}[X, Y, T]$, avec les relations de commutation $XY = YX$, $XT = TX + \alpha X$, $YT = TY + \beta Y$. Pour $P \in \mathbb{C}[X, Y]$ et τ la dérivation déja introduite sur $\mathbb{C}[X, Y]$, on a donc $PT = TP + \tau P$. Posons $P(T) = \sum\limits_{0 \leq m \leq M} P_m(X) T^m$ et $Q(T) = \sum\limits_{0 \leq n \leq N} Q_n(Y) T^m$. Le système que nous étudions s'écrit alors $P(T)f = Q(T)f = 0$, et il est naturel de chercher à éliminer la variable T entre P et Q. Le procédé d'élimination décrit dans [ZEI] p. 347-350 conduit à un résultant $R(P, Q)$ qui n'est autre que le déterminant $\det(a_{i,j})$.

Démonstration du théorème 6.1. — Le procédé ressemble à celui du paragraphe précédent. On suppose s et $t \geq 1$ et on complète le système des deux équations en y ajoutant la première multipliée par z^j pour $1 \leq j \leq t - 1$ et la seconde multipliée par z^k pour $1 \leq k \leq s - 1 + l$, où l est un entier naturel arbitraire. On obtient ainsi les $s + t + l$ relations

$$z^j \sum_{0 \leq m \leq s} P_m(X) z^m f = z^k \sum_{0 \leq n \leq t} Q_n(Y) z^n f = 0$$

(avec $0 \leq j \leq t - 1$ et $0 \leq k \leq s - 1 + l$) que l'on peut considérer comme un système linéaire en les inconnues $f, zf, ..., z^{s+t+l-1} f$, après avoir fait commuter les opérateurs z^j et $P_m(X)$ (resp. z^k et $Q_n(Y)$) grâce à la relation (2.3). L'inversion de la formule du lemme 2.4 dans le cas où $g(D) = R(X,Y)$ donne

$$z^k R(X,Y) = \sum_{0\leq j\leq k} (-1)^j \binom{k}{j} \tau^j R(X,Y) z^{k-j},$$

donc le déterminant du système obtenu est $\Phi_l(X,Y) = Q_t(Y)^l \Phi(X,Y)$, où $\Phi(X,Y)$ est le déterminant des $a_{i,j}$ définis dans l'énoncé du théorème. Il en résulte, comme au paragraphe 5, que $\Phi_l(X,Y) z^k f = 0$ pour $0 \leq k \leq s+t+l-1$, et le lemme 3.2 montre que $\tau^k \Phi_l(X,Y) f = 0$ pour $0 \leq k \leq s+t+l-1$.

Nous allons montrer que, pour un l suffisamment grand, les zéros $y \in \overline{\mathbb{C}(X)}$ (clôture algébrique de $\mathbb{C}(X)$) communs à tous ces $\tau^k \Phi_l(X,Y)$ sont des constantes. Comme $\Phi_l \in \mathbb{C}[X,Y]$, il peut s'écrire $\Phi_l(X,Y) = \sum_{1\leq j\leq J} A_j(X) B_j(Y)$, où $A_j \in \mathbb{C}[X]$ et $B_j \in \mathbb{C}[Y]$ pour $1 \leq j \leq J$.

Considérons une telle écriture avec J minimal. Alors les A_j sont $\mathbb{C}$-linéairement indépendants; sinon, en remplaçant l'un des A_j par une combinaison linéaire des autres, on obtient une écriture du même type avec seulement $J-1$ termes, ce qui contredit la minimalité de J. De plus, J est indépendant de l; en effet, une écriture minimale de $\Phi(X,Y)$ fournit par multiplication des B_j par Q_t^l une écriture de Φ_l; inversement, si $a \in \mathbb{C}$ et $Y-a$ divise $\Phi_l(X,Y)$, alors $Y-a$ divise tous les B_j car sinon $\sum_{1\leq j\leq J} B_j(a) A_j(X) = 0$ est une relation de dépendance linéaire non triviale entre les A_j.

Soit donc $y \in \overline{\mathbb{C}(X)}$ vérifiant $y' \neq 0$ et $\tau^k \Phi_l(X,y) = 0$ pour $0 \leq k \leq s+t+l-1$. D'après le lemme 3.7, on a $\sum_{1\leq j\leq J} A_j^{(m)}(X) B_j^{(n)}(y) = 0$ pour tout couple $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $m+n \leq s+t+l-1$. Si l'on choisit l'entier $l \geq J-(s+t)$, on a donc $\sum_{1\leq j\leq J} A_j^{(m)}(X) B_j(y) = 0$ pour $0 \leq m \leq J-1$. Or les $B_j(Y)$ sont tous non nuls (car J est minimal) et y n'est pas constante, donc les $B_j(y)$ sont toutes non nulles. Le système linéaire dont la matrice est formée des $A_j^{(m)}(X)$ admet donc une solution non nulle, par suite son déterminant, qui n'est autre que le wronskien des A_j, est nul. Cela contredit le fait que les A_j sont $\mathbb{C}$-linéairement indépendants.

Ainsi les zéros communs $y \in \overline{\mathbb{C}(X)}$ aux $\tau^k \Phi_l(X,Y)$ pour $0 \leq k \leq K = J-1$ sont en fait dans $\mathbb{C}$; ils sont donc en nombre fini. Soit $Q \in \mathbb{C}[Y]$ le polynôme unitaire dont les racines sont ces zéros communs comptés avec leurs multiplicités, de sorte que $\tau^k\Phi_l(X,Y) = Q(Y)\Psi_k(X,Y)$, où les $\Psi_k(X,Y) \in \mathbb{C}[X][Y]$, pour $0 \leq k \leq K$, sont premiers entre eux dans leur ensemble dans $\mathbb{C}(X)[Y]$. Le théorème de Bézout montre alors l'existence de polynômes $P \in \mathbb{C}[X] - \{0\}$ et $U_k \in \mathbb{C}[X][Y]$, $0 \leq k \leq K$, tels que

$$\sum_{0\leq k\leq K} U_k(X,Y)\tau^k\Phi_l(X,Y) = Q(Y)P(X).$$

Mais on a $\tau^k\Phi_l(X,Y)f = 0$ pour $0 \leq k \leq K$, donc $P(X)Q(Y)f = 0$. Alors la fonction $g = Q(Y)f$ vérifie $P(X)g = 0$, et le lemme 3.4 joint à la deuxième relation de l'hypothèse du théorème montre que g vérifie aussi une équation aux différences à coefficients polynômiaux dans la direction β. Mais f étant entière, il en est de même de g et l'équation aux différences $P(X)g = 0$ est à coefficients constants. Le paragraphe 5 montre donc que $g = Q(Y)f$ est un polynôme exponentiel. Ainsi $P(X)f$ et $Q(Y)f$ sont deux polynômes exponentiels. Alors le théorème 1 dans le cas des équations à coefficients constants (paragraphe 4) et la remarque suivant le lemme 2.5 montrent que f est un polynôme exponentiel, ce qui achève la preuve du théorème 6.1. □

7. Le cas où l'une des équations a des coefficients polynômiaux de degré ≤ 1.

Dans ce cas, on sait conclure même si le déterminant introduit au paragraphe 6 est nul.

THÉORÈME 7.1. — *Soient α et $\beta \in \mathbb{C}^\times$ avec $\alpha/\beta \notin \mathbb{R}$, $X = e^{\alpha D}$, $Y = e^{\beta D}$, et f une fonction entière vérifiant*

$$\begin{cases} P_1(X)zf + P_0(X)f = 0 & (7.2) \\ \displaystyle\sum_{0\leq n\leq t} Q_n(Y)z^n f = 0, & (7.3) \end{cases}$$

où P_0 et $P_1 \in \mathbb{C}[X]$, $Q_n \in \mathbb{C}[Y] (0 \leq n \leq t)$ et $P_1Q_t \neq 0$. Alors il existe un polynôme $\Delta \in \mathbb{C}[z] - \{0\}$, de degré $\leq t$ tel que $\Delta(z)f(z)$ soit un polynôme exponentiel.

Démonstration. — Comme on l'a remarqué au paragraphe 2, on peut supposer que $P_0(0)$ et $P_1(0)$ ne sont pas nuls tous les deux. On fait alors une récurrence sur t. Le cas $t = 0$ ayant été résolu au paragraphe

5, nous supposons d'abord $t = 1$. Alors le déterminant introduit au paragraphe 6 est $\Phi(X,Y) = P_1(X)Q_0(Y) - P_0(X)Q_1(Y)$. On a vu que, si $\Phi(X,Y) \neq 0$, alors f est un polynôme exponentiel. Si $\Phi(X,Y) = 0$, alors $\dfrac{P_0(X)}{P_1(X)} = \dfrac{Q_0(Y)}{Q_1(Y)} \in \mathbb{C}(X) \cap \mathbb{C}(Y) = \mathbb{C}$. Soit donc $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $Q_0 = \lambda Q_1$ et $P_0 = \lambda P_1$; le système d'équations aux différences vérifié par f s'écrit

$$\begin{cases} P_1(X)(z+\lambda)f = 0 \\ Q_1(Y)(z+\lambda)f = 0 \end{cases}$$

et la fonction entière $(z+\lambda)f$ est un polynôme exponentiel d'après le paragraphe 4.

Supposons maintenant $t \geq 2$ et considérons le système associé construit au paragraphe 6 pour $l = 0$. On peut supposer que son déterminant $\Phi(X,Y) = 0$. Ce système comprend l'équation (7.3) et l'équation (7.2) multipliée par les z^j, $0 \leq j \leq t-1$. Si l'une de ces dernières s'écrit

$$H_k(X)z^k f + H_{k-1}(X)z^{k-1}f + \ldots + H_0(X)f = 0,$$

la suivante est

$$H_k(X)z^{k+1}f + (H_{k-1}(X) - \tau H_k(X))z^k f \\ + \ldots + (H_0(X) - \tau H_1(X))zf - \tau H_0(X)f = 0.$$

Mais, pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, on a $\tau(P)(0) = 0$; il en résulte qu'en posant $a = P_1(0)$ et $b = P_0(0)$, on a $\Phi(0,Y) = \det(a_{i,j}(0,Y))$, où $a_{i,i}(0,Y) = a$ et $a_{i,i+1}(0,Y) = b$ pour $1 \leq i \leq t$, et $a_{t+1,j}(0,Y) = Q_{t+1-j}(Y)$ pour $1 \leq j \leq t+1$, tous les autres coefficients étant nuls. On a supposé $\Phi(X,Y) = 0$, donc $\Phi(0,Y) = 0$ et le développement de ce déterminant suivant la dernière ligne donne

$$\sum_{0 \leq n \leq t} (-1)^n a^n b^{t-n} Q_{t-n}(Y) = 0.$$

Comme $Q_t \neq 0$, il est exclu que $a = 0$ car alors $b = 0$; il en résulte que $\lambda = -b/a$ vérifie $\sum\limits_{0 \leq n \leq t} \lambda^n Q_n(Y) = 0$.

Mais, si $Q \in \mathbb{C}[Y]$ et k et $l \in \mathbb{N}$, on a $Q(Y)(\lambda^k(z-\lambda)^l f) = \lambda^k Q(Y)(z-\lambda)^l f$; en développant $z^n = (z-\lambda+\lambda)^n$ par la formule du binôme, on peut écrire la relation (7.3) vérifiée par f sous la forme

$$\sum_{0 \leq n \leq t} Q_n^*(Y)(z-\lambda)^n f = 0,$$

où les $Q_n^* \in \mathbb{C}[Y]$, $Q_t^* = Q_t$ et $Q_0^* = \sum_{0 \leq n \leq t} \lambda^n Q_n = 0$. Ainsi la fonction entière $g(z) = (z - \lambda)f(z)$ vérifie une relation du type de (7.3) mais de degré $t - 1$ en z au lieu de t. Le lemme 3.8 montre que g vérifie aussi une relation du type de (7.2) de degré ≤ 1 en z ; alors l'hypothèse de récurrence montre qu'il existe un polynôme de degré au plus $t-1$ dont le produit avec g est un polynôme exponentiel, ce qui achève la preuve du théorème. □

Remarque. — Dans cette démonstration, il était inutile de traiter à part le cas $t = 1$, mais on peut penser que son examen aide à la compréhension de la situation.

8. Le cas où l'une des équations est une équation différentielle.

Pour établir le théorème 2, nous utilisons le même formalisme que précédemment, mais dans une situation un peu différente. Sans perte de généralité, on peut supposer que l'équation aux différences est dans la direction réelle ($\alpha = 1$) ; on travaille donc avec $\mathbb{C}[X, D]$, où $X = e^D$, au lieu de $\mathbb{C}[X, Y]$. Il faut remarquer que X et D sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{C}$: si $\phi(e^D, D) = \sum_{i,j} a_{i,j} D^i e^{jD} \in \mathbb{C}[X, D]$ est l'opérateur nul, alors pour tout $x \in \mathbb{C}$ on a

$$\phi(e^D, D)(e^{xz}) = \sum_{i,j} a_{i,j} D^i e^{x(z+j)} = \left(\sum_{i,j} a_{i,j} x^i e^{jx} \right) e^{xz} = 0.$$

Il en résulte que $\sum_{i,j} a_{i,j} x^i e^{jx} = 0$ pour tout $x \in \mathbb{C}$; la fonction exponentielle étant transcendante, les $a_{i,j}$ sont donc tous nuls.

On considère donc l'algèbre de polynômes $\mathbb{C}[X, D]$ munie de la dérivation τ définie par $\tau(\mathbb{C}) = \{0\}$, $\tau X = X$ et $\tau D = 1$, qui correspond à la dérivation usuelle d/dz sur $\mathbb{C}[e^z, z]$. Ainsi la relation de commutation (2.3) est encore valable dans l'algèbre $\mathbb{C}[X, D][z]$ et le lemme 3.2 est encore vrai si $R \in \mathbb{C}[X, D]$.

On a alors les outils pour démontrer le

THÉORÈME 8.1. — *Soit $X = e^D$ et f une fonction entière vérifiant*

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{0\le m\le s} P_m(X) z^m f = 0 & (8.1) \\ \displaystyle\sum_{0\le n\le t} Q_m(D) z^n f = 0, & (8.2) \end{cases}$$

où $P_m \in \mathbb{C}[X](0 \le m \le s)$, $Q_n \in \mathbb{C}[D](0 \le n \le t)$ et $P_s Q_t \ne 0$.

On pose, pour $1 \le i, j \le s+t$

$$a_{i,j} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{0\le m\le s} (-1)^{m-s+j-i} \binom{t-i}{m-s+j-i} \tau^{m-s+j-i} P_m(X) & \text{si } 1 \le i \le t \\ \displaystyle\sum_{0\le n\le t} (-1)^{n+j-i} \binom{s+t-i}{n+j-i} Q_n^{(n+j-i)}(D) & \text{si } t+1 \le i \le s+t. \end{cases}$$

Si $\det(a_{i,j}) \in \mathbb{C}[X, D]$ est non nul, alors f est un polynôme exponentiel.

Démonstration. — Comme dans la preuve du théorème 6.1, on considère le système formé de la relation (8.1) multipliée par z^j pour $0 \le j \le t-1$ et de la relation (8.2) multipliée par z^k pour $0 \le k \le s-1+l$, où $l \in \mathbb{N}$.

Le déterminant de ce système est $\Phi_l(X, D) = Q_t(D)^l \Phi(X, D)$ où $\Phi(X, D) = \det(a_{i,j})$. Si $\Phi(X, D) \ne 0$, alors $\Phi_l(X, D) \ne 0$ pour tout $l \in \mathbb{N}$.

Si $\phi_l(z) = \Phi_l(e^z, z)$, la théorie des déterminants montre que $\phi_l(D) z^n f = 0$ pour $0 \le n \le s+t+l-1$. La variante du lemme 3.2 évoquée juste avant l'énoncé du théorème 8.1 permet d'en déduire que $\phi_l^{(n)}(D) f = 0$ pour $0 \le n \le s+t+l-1$.

Mais la fonction $\phi_l(z)$ est un polynôme exponentiel que l'on peut écrire

$$\phi_l(z) = \sum_{k\in I} T_k(z) e^{kz},$$

où les $T_k(z) \in \mathbb{C}[z] - \{0\}$ quand k décrit un ensemble fini I formé de r entiers naturels. On a $\phi_l^{(n)}(z) = \sum_{k\in I} T_{k,n}(z) e^{kz}$, où les $T_{k,n}$ sont les polynômes tels que $T_{k,n}(z) e^{kz}$ est la dérivée n-ième de $T_k(z) e^{kz}$.

Soit V l'espace vectoriel engendré sur $\mathbb{C}(z)$ par les $\phi_l^{(n)}(z)$, $n \in \mathbb{N}$. L'espace V est contenu dans l'espace vectoriel engendré par les fonctions e^{kz} $(k \in I)$, donc sa dimension est au plus égale à $r = \operatorname{card}(I)$. En fait, cette dimension est exactement r, car le système des $\phi_l^{(n)}(z)$ $(0 \le n \le r-1)$ est libre ; s'il n'en était pas ainsi, ϕ_l serait solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre $\leq r-1$ à coefficients polynômiaux $\sum_{0\leq n\leq r-1} A_n(z)\phi_l^{(n)}(z) = 0$. L'expression de $\phi_l^{(n)}(z)$ et le fait que les fonctions e^{kz} $(k \in I)$ sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{C}(z)$ (la fonction exponentielle est transcendante) montrent alors que, pour tout $k \in I$, on a $\sum_{0\leq n\leq r-1} A_n(z)T_{k,n}(z) = 0$. Il en résulte que $\sum_{0\leq n\leq r-1} A_n(z)T_{k,n}(z)e^{kz} = 0$, c'est-à-dire que les r fonctions $T_k(z)e^{kz}$, qui sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{C}$, sont solutions de l'équation différentielle vérifiée par ϕ_l. C'est la contradiction attendue, l'espace des solutions de cette équation différentielle étant de dimension au plus $r-1$.

Comme V est de dimension r, il est égal à l'espace engendré sur $\mathbb{C}(z)$ par les e^{kz} $(k \in I)$. Il en résulte que, si $k \in I$ est fixé, il existe des $H_n \in \mathbb{C}(z)$ telles que $e^{kz} = \sum_{0\leq n\leq r-1} H_n(z)\phi_l^{(n)}(z)$. Si I est réduit à $\{0\}$, alors ϕ_l est un polynôme. Sinon l'identité ci-dessus montre l'existence de constantes c_1 et c_2 positives telles que

$$\sum_{0\leq n\leq r-1} |\phi_l^{(n)}(z)| \geq c_1 e^{-c_2|z|}$$

pour tout z de module assez grand. Le lemme 4.1 utilisé comme au paragraphe 4 montre alors l'existence de fonctions $u_n \in E$ et d'un polynôme $M \in \mathbb{C}[z] - \{0\}$ tels que

$$M(z) = \sum_{0\leq n\leq r-1} u_n(z)\phi_l^{(n)}(z).$$

On a bien sûr une telle égalité si I est réduit à $\{0\}$.

Comme ϕ_l est le produit de $\phi = \phi_0$ par un polynôme non nul, il est clair que r est indépendant de l. On choisit alors l suffisamment grand pour que $s+t+l-1 \geq r-1$, de sorte que $\phi_l^{(n)}(D)f = 0$ pour $0 \leq n \leq r-1$. On a donc

$$M(D)f = \sum_{0\leq n\leq r-1} u_n(D)\phi_l^{(n)}(D)f = 0$$

et f, solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants, est un polynôme exponentiel. □

COROLLAIRE 8.2. — *Si la fonction entière f est solution d'une équation aux différences à coefficients constants $P(X)f = 0$, où $P \in \mathbb{C}[X] - \{0\}$, et d'une équation différentielle $\sum_{0\leq n\leq t} Q_n(D)z^n f = 0$, où $Q_n \in \mathbb{C}[D]$ $(0 \leq n \leq t)$ et $Q_t \neq 0$, alors f est un polynôme exponentiel.*

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate du théorème 8.1, car dans ce cas on a $\Phi(X, D) = P(X)^t Q_t(D) \neq 0$. □

COROLLAIRE 8.3. — *Sous les hypothèses du théorème 8.1, hormis l'hypothèse sur le déterminant de $(a_{i,j})$, qui peut être nul, si $s = 1$, il existe un polynôme $\Delta \in \mathbb{C}[z] - \{0\}$, de degré $\leq t$ tel que $\Delta(z)f(z)$ soit un polynôme exponentiel.*

Démonstration. — Elle est analogue à celle du théorème 7.1. □

9. Le cas des fonctions périodiques.

Le premier auteur a montré (voir la preuve dans [GRA1]) le résultat suivant, que l'on peut comparer au résultat du paragraphe 4 : si f est une fonction entière, périodique de période $\alpha \in \mathbb{C}^\times$, et vérifie une équation aux différences à coefficients constants $Q(e^{\beta D})f = 0$ avec $\beta \in \mathbb{C}^\times$ et $\alpha/\beta \notin \mathbb{Q}$, alors f est un polynôme exponentiel de la forme $\sum\limits_{-K \leq k \leq K} a_k q^{kz}$ où $\log q = 2i\pi/\alpha$.

Ce résultat se généralise de la façon suivante, où, sans perte de généralité, on a supposé $\beta = 1$ et α irrationnel.

THÉORÈME 9.1. — *Soit f une fonction entière périodique de période $T \notin \mathbb{Q}$. Si f vérifie une équation aux différences finies $\sum\limits_{0 \leq m \leq s} \phi_m(z) f(z + m) = 0$, où les $\phi_m \in E$ sont des fonctions entières de type exponentiel $< \pi/|T|$, avec $\phi_o \phi_s \neq 0$, alors f est un polynôme exponentiel de la forme $\sum\limits_{-K \leq k \leq K} a_k q^{kz}$, où les $a_k \in \mathbb{C}$ et $\log q = 2i\pi/T$.*

Démonstration. — Soit $q \in \mathbb{C}^\times$ tel que $\log q = 2i\pi/T$, par exemple $q = e^{2i\pi/T}$. L'hypothèse $T \notin \mathbb{Q}$ se traduit par le fait que q n'est pas une racine de l'unité. La fonction holomorphe $z \mapsto q^z$ étant localement inversible, on définit une fonction g holomorphe sur $\mathbb{C}^\times$ en posant $g(q^z) = f(z)$. La relation fonctionnelle vérifiée par f se traduit en $\sum\limits_{0 \leq m \leq s} \phi_m(z) g(q^m q^z) = 0$.

Mais la périodicité de f permet d'écrire $\sum\limits_{0 \leq m \leq s} \phi_m(z + lT) f(z + m) = 0$ pour tout $l \in \mathbb{Z}$, donc $\sum\limits_{0 \leq m \leq s} \phi_m(z + lT) g(q^m q^z) = 0$. En notant log la détermination principale du logarithme, on a donc

$$\Psi_u(l) = \sum_{0\leq n\leq s} \phi_m(\log u/\log q + lT)g(q^m u) = 0$$

pour tout $u \in \mathbb{C}-]-\infty, 0]$ et pour tout $l \in \mathbb{Z}$. Pour tout u fixé, la fonction $z \mapsto \Psi_u(z)$ est une fonction entière de type exponentiel $< \pi$ et elle est nulle en tout point de $\mathbb{Z}$, donc elle est identiquement nulle ([WAL] Satz 3.1, ou [GRA2] lemme 1). Soit alors $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $\phi_0(z_0)\phi_s(z_0) \neq 0$ et, pour tout $u \in \mathbb{C}-]-\infty, 0]$, choisissons z tel que $\log u/\log q + zT = z_0$; l'identité

$$\Psi_u(z) = \sum_{0\leq m\leq s} \phi_m(z_0)g(q^m u) = 0$$

est vraie pour tout $u \notin]-\infty, 0]$ donc pour tout $u \in \mathbb{C}$, d'après le principe du prolongement analytique. Ainsi la fonction f est solution de l'équation aux différences à coefficients constants $\sum_{0\leq m\leq s} \phi_m(z_0)f(z+m) = 0$, et le résultat rappelé au début de ce paragraphe (qui utilise le fait que q n'est pas une racine de l'unité) montre que f est un polynôme exponentiel. La périodicité de f lui impose alors la forme indiquée dans l'énoncé du théorème (lemme 3.1 de [GRA1]). □

La borne $\pi/|T|$ pour le type exponentiel des ϕ_m est optimale, comme le montre l'exemple suivant.

Pour $q \in \mathbb{C}^\times$, avec $|q| > 1$, la fonction $g(u) = \prod_{n\geq 0}(1 - u/q^n)(1 - u^{-1}q^{-n-1})$ est analytique sur $\mathbb{C}^\times$ et on vérifie immédiatement que $g(qu) + qug(u) = 0$. La fonction $f(z) = g(q^z)$ est entière et périodique de période $T = 2i\pi/\log q$, où $\log q$ est la détermination du logarithme de q qui a permis de définir q^z. La période T est irrationnelle car $|q| > 1$, et f n'est pas un polynôme exponentiel car g n'est pas un polynôme. Enfin la relation fonctionnelle vérifiée par g se traduit par $q^{-z/2}f(z+1) + q^{1+z/2}f(z) = 0$, où $\phi_1(z) = q^{-z/2}$ et $\phi_0(z) = q^{1+z/2}$ sont de type exponentiel $|\log q|/2 = \pi/|T|$.

BIBLIOGRAPHIE

[BÉBO] J.-P. BÉZIVIN et A. BOUTABAA, Sur les équations fonctionnelles p-adiques aux q-différences, preprint.

[BOA] R.P. BOAS Jr., Entire functions, Academic Press, New-York, 1954.

[GEL1] A.O. GEL'FOND, Linear differential equations of infinite order with constant coefficients and asymptotic periods of entire functions, Amer. Math. Soc. Translation, 84 (1953).

[GEL2] A.O. GEL'FOND, Calcul des différences finies, Dunod, Paris, 1963.

[GRA1] F. GRAMAIN, Fonctions entières d'une ou plusieurs variables complexes prenant des valeurs entières sur une progression géométrique. Cinquante ans de polynômes. M. Langevin et M. Waldschmidt eds, Lecture Notes in Math., 1415 (1990), 123-137, Springer-Verlag, Berlin.

[GRA2] F. GRAMAIN, Equations aux différences et polynômes exponentiels, C. R. Acad. Sciences Paris, 313 (1991), 131-134.

[KETA] J. KELLEHER and B.A. TAYLOR, An application of the corona theorem to some rings of entire functions, Bull. Amer. Math. Soc., 73 (1967), 246-249.

[MAS] D.W. MASSER, On certain functional equations in several variables. Approximations diophantiennes et nombres transcendants, Luminy 1982, D. Bertrand et M. Waldschmidt eds, Progress in Math. 31, 1983, 173-190. Birkhäuser, Boston.

[PÓL] G. PÓLYA, Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen, Math. Zeit., 29 (1929), 549-640.

[RAM] J.-P. RAMIS, About the growth of entire functions solutions of linear algebraic q-difference equations, Ann. Fac. Sci. Toulouse (à paraître).

[WAL] R. WALLISSER, Verallgemeinerte ganze ganzwertige Funktionen vom Exponentialtypus, J. reine angew. Math., 235 (1969), 189-206.

[ZEI] D. ZEILBERGER, A holonomic systems approach to special functions identities, J. Comp. Appl. Math., 32 (1990), 321-368.

Manuscrit reçu le 15 juillet 1992,
révisé le 29 mars 1993.

J.-P. BÉZIVIN,
Université de Caen
Mathématiques
Esplanade de la Paix
F-14032 Caen Cedex
&
F. GRAMAIN,
Université de Saint-Etienne
Mathématiques
23, Rue du Docteur Paul Michelon
F-42023 St-Etienne Cedex 2.