ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

D Barlet

H.-M. Maire

Asymptotique des intégrales-fibres

Annales de l'institut Fourier, tome 43, nº 5 (1993), p. 1267-1299

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1993__43_5_1267_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
43, 5 (1993), 1267-1299

ASYMPTOTIQUE DES INTÉGRALES-FIBRES

par D. BARLET et H.-M. MAIRE

INTRODUCTION

Le but que nous nous étions fixé dans la première phase de l'élaboration de ce travail était de décrire (autant que possible) les transformées de Mellin (complexes) des fonctions sur $\mathbb{C}^2$ obtenues au voisinage de l'origine par intégration dans les fibres d'une application holomorphe $(f,g) : \mathbb{C}^{n+2} \longrightarrow \mathbb{C}^2$ vérifiant $df \wedge dg = 0 \implies fg = 0$ sur un voisinage U de l'origine de $\mathbb{C}^{n+2}$. Sous cette hypothèse, il est clair que si φ est une $(n,n)-$forme C^∞ à support compact dans U, la fonction, appelée *intégrale-fibre*,

$$(s,t) \mapsto \int_{f=s,\ g=t} \varphi$$

est C^∞ au voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^2$ en dehors des axes $\{st = 0\}$ et elle est bornée (voir [1]). L'idée d'étudier ses singularités le long des axes par transformation de Mellin est alors naturelle, celle-ci ayant déjà fait ses preuves dans le cas d'une fonction $f : \mathbb{C}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{C}$ (voir [4]).

Au fur et à mesure que nos investigations avançaient, il nous est apparu que le cadre complexe introduisait des complications techniques inessentielles sur le fond, mais rendait l'écriture beaucoup trop lourde et nous avons conclu qu'il valait mieux nous placer dans le cadre réel

Le second auteur remercie l'Université de Nancy I de ses invitations successives qui ont permis la réalisation de ce travail.
Mots-clés : Développements asymptotiques – Singularités – Transformations intégrales.
Classification A.M.S. : 32C30 – 32S – 41A60 – 44A10.

qui est suffisant pour mettre en évidence les phénomènes nouveaux qui apparaissent.

Commençons par expliquer pourquoi nous étudions les transformées de Mellin de ces fonctions plutôt que les fonctions elles-mêmes. Dans le cas d'une fonction $f : \mathbb{C}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{C}$, les propriétés de la transformation de Mellin ne font que retraduire, en terme de prolongement méromorphe, le développement asymptotique de l'intégrale-fibre à l'origine. La situation "à deux fonctions" est assez différente : il n'est plus question d'espérer expliquer en terme de développements asymptotiques le comportement des intégrales-fibres obtenues mais la transformation de Mellin permet de lire assez directement des propriétés a priori cachées. Donnons un exemple très simple.

Soient $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ et $\sigma \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$; la fonction $\varphi(s,t) = \rho(s/t)\sigma(s,t)$ définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ a un comportement un peu compliqué à décrire au voisinage de l'origine; c'est en fait une fonction C^∞ sur l'éclaté donné par $s = uv$ et $t = v$. Sa transformée de Mellin

$$\mathcal{M}_\varphi(\lambda,\mu) = \int_{(\mathbb{R}_+)^2} s^\lambda t^\mu \rho(s/t)\sigma(s,t)\frac{ds}{s}\frac{dt}{t}$$

devient après le changement de variables $u = s/t,\ v = t$

$$\mathcal{M}_\varphi(\lambda,\mu) = \int_{(\mathbb{R}_+)^2} u^\lambda v^{\lambda+\mu} \rho(u)\sigma(uv,v)\frac{du}{u}\frac{dv}{v}$$

ce qui met en évidence les droites polaires obliques d'équations $\lambda+\mu+j=0$, $j \in \mathbb{N}$ qui reflètent directement sur l'étude du prolongement méromorphe de $\mathcal{M}_\varphi$ l'importance de l'éclatement considéré dans la compréhension des singularités de φ.

La méthode que nous utilisons est très naïve en ce sens que nous appliquons le théorème d'Hironaka [7] pour tenter de donner une "forme normale" à l'application $(f,g) : \mathbb{C}^{n+2} \longrightarrow \mathbb{C}^2$ considérée. Malheureusement, ceci se heurte à une difficulté que nous n'avons pas su résoudre, ce qui nous empêche d'obtenir une description complète des transformées de Mellin des intégrales-fibres sous nos hypothèses.

Pour expliquer la difficulté rencontrée, le plus simple est de suivre notre démarche : le théorème d'Hironaka permet de rendre le diviseur $(fg = 0)$ à croisements normaux; dans un système de coordonnées convenable d'un éclaté, on a donc :

$$f(x) = h_1(x)x^a \quad \text{et} \quad g(x) = h_2(x)x^b$$

où $a, b \in \mathbb{N}^{n+2}$ et h_1, h_2 sont inversibles au voisinage de l'origine. Si le rang du couple $(a,\ b)$ est 2, on peut éliminer les deux inversibles h_1 et h_2 par un changement de coordonnées et arriver à la forme normale principale

$$f(x) = x^a \quad \text{et} \quad g(x) = x^b, \operatorname{rg}(a,\ b) = 2.$$

La caractérisation complète des transformées de Mellin des fonctions intégrales-fibres pour lesquelles cette forme normale est disponible sera donnée au chapitre 1 (Théorème (1.2)). En fait, ces considérations montrent que les couples (f, g) définis par la propriété très simple suivante :

$$\text{(DR)} \qquad \begin{array}{l} \forall \varphi \in C_c^\infty(U) \text{ le prolongement méromorphe de} \\ \displaystyle\int_{f>0,g>0} f^\lambda g^\mu \varphi(x) dx \text{ est à décroissance rapide verticale pour} \\ (\operatorname{Re}\lambda, \operatorname{Re}\mu) \text{ dans un compact de } \mathbb{R}^2 \end{array}$$

mériterait une étude plus approfondie (qu'il vaudrait probablement mieux commencer dans le cadre complexe certainement plus simple que le cadre réel formulé ici). Par exemple, le résultat de F. Loeser [8] (voir aussi l'appendice [10] à "Proximité evanescente II" de C. Sabbah) montre que l'hypothèse géométrique de non-éclatement en codimension 0 pour le morphisme $(f, g) : \mathbb{C}^{n+2} \longrightarrow \mathbb{C}^2$ entraîne la condition (DR) dans le cadre complexe. Plus généralement, il serait intéressant de décrire directement les rationnels p/q qui, pour (f, g) donné correspondent à un défaut de décroissance verticale quand $\operatorname{Im}(p\lambda + q\mu) \to \pm\infty$ pour $\int f^\lambda g^\mu$. $\square$

On remarquera que l'on peut déjà examiner pour quels couples $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$, p et q premiers entre eux, le prolongement méromorphe de $\displaystyle\int \left(\frac{f^p}{g^q}\right)^\lambda \square$ n'est pas à décroissance rapide quand $|\operatorname{Im}\lambda| \to +\infty$.

Si maintenant le rang de (a, b) est égal à 1, on peut écrire $a = p\alpha$ et $b = q\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{N}^{n+2}$ et éliminer l'inversible h_1 par changement de coordonnées. Ceci conduit à une écriture locale :

$$f(x) = (x^\alpha)^p \quad \text{et} \quad g(x) = (x^\alpha)^q h_3(x).$$

On utilise alors à nouveau le théorème d'Hironaka pour rendre le diviseur $(h_3(x) = h_3(0))$, à croisements normaux, sans détruire les croisements normaux pour le diviseur $(fg = 0)$; ceci est possible d'après [5] par exemple. On obtient alors, localement sur un éclaté convenable, une situation de la forme

$$f(x) = (x^a)^p \quad \text{et} \quad g(x) = (x^a)^q e^{C + x^b h(x)}$$

où C est une constante, a et b appartiennent à $\mathbb{N}^{n+2}$, p et $q \in \mathbb{N}$, $p \neq 0$ et h est inversible au voisinage de l'origine.

A nouveau deux cas se présentent :

Si $\operatorname{rang}(a,b) = 2$, on peut absorber l'inversible h et arriver à la deuxième forme normale

$$f(x) = (x^a)^p \quad \text{et} \quad g(x) = (x^a)^q e^{C+x^b}, \ \operatorname{rg}(a,b) = 2.$$

Les transformées de Mellin des intégrales-fibres dans ce cas seront caractérisées au chapitre 2 (Proposition (2.3)).

Si $\operatorname{rang}(a,b) = 1$, on peut alors écrire

$$f(x) = (x^a)^p \quad \text{et} \quad g(x) = (x^a)^q e^{C+(x^a)^r h(x)}$$

quitte à changer la définition de a, p, q avec $r \in \mathbb{N}^*$. On ne peut pas, dans ce cas se débarrasser de l'inversible h. Nous étudierons les transformées de Mellin des intégrales-fibres dans ce dernier cas au chapitre 2 sans avoir recours à une forme normale plus élaborée (Proposition (2.5)). Il est clair que si l'on souhaite arriver à une forme normale, on devrait continuer à éclater pour décrire le nouvel inversible. Nous ne savons pas démontrer que le processus s'arrête.

PROBLÈME. — *On suppose $df \wedge dg = 0 \implies fg = 0$. Existe-t-il une modification propre X de $\mathbb{C}^{n+2}$ $(n \geq 1)$ sur laquelle on puisse écrire* localement

$$f(x) = (x^a)^p \quad \textit{et} \quad g(x) = (x^a)^q e^{P(x^a)+x^{Na+b}}$$

avec $\operatorname{rg}(a,b) = 2$ *et* $P \in \mathbb{C}[s]$, $\deg P \leq N$ *?*

Il est probablement équivalent de demander une écriture locale du type

$$f(x) = (x^a)^p \quad \text{et} \quad g(x) = (x^a)^q (P(x^a) + x^{Na+b}), \quad P(0) \neq 0,$$

qui a l'avantage d'être algébrique mais est moins bien adaptée à la transformation de Mellin!

Evidemment, modulo une réponse positive à ce problème, l'étude complète des transformées de Mellin des intégrales-fibres que nous considérons se ramène à celle des intégrales

$$\int_{(\mathbb{R}_+)^2} s^\nu e^{\mu(P(s)+s^N t)} ds dt \int_{x^a=s, x^b=t} \varphi(x) \frac{dx}{d(x^a) \wedge d(x^b)}, \quad \operatorname{rg}(a,b) = 2$$

avec $\nu = p\lambda + q\mu$, où les fonctions $g(s,t) = \displaystyle\int_{x^a=s,x^b=t} \varphi(x) \frac{dx}{d(x^a) \wedge d(x^b)}$ sont complètement caractérisées via leurs transformées de Mellin au chapitre 1.

Précisons le plan de cet article :

Chapitre 0
1. La classe $\mathbf{ML}(\mathbb{C})$ et l'inversion de Mellin correspondante
2. Applications

Chapitre 1
Transformées de Mellin des intégrales-fibres. Le premier cas : la classe $\mathbf{M}(\mathbb{C}^2)$

Chapitre 2
Transformées de Mellin des intégrales-fibres. Le cas général : la classe $\mathbf{ML}(\mathbb{C}^2)$

CHAPITRE 0

1. La classe ML($\mathbb{C}$) et l'inversion de Mellin correspondante.

Commençons par fixer quelques notations.

(0.1) NOTATIONS. — *Soient* $c \in [0, +\infty]$ *et* $\varepsilon \in \{-1, +1\}$. *Si* $c = 0$ *imposons* $\varepsilon = 1$ *et définissons* $x(\varepsilon) = x$. *On a donc* $x(\varepsilon) \to 0^+$ *ssi* $x \to 0^+$.

Si $0 < c < +\infty$ *et* $\varepsilon = \pm 1$ *posons* $x(\varepsilon) = \varepsilon \cdot (x - c)$. *Donc* $x(\varepsilon) \to 0^+$ *ssi* $x \to c + \varepsilon 0$.

Si $c = +\infty$ *imposons* $\varepsilon = -1$ *et définissons* $x(\varepsilon) = \dfrac{1}{x}$. *On a alors* $x(\varepsilon) \to 0^+$ *ssi* $x \to \infty$.

Pour $r \in \mathbb{R}$ *et* $k \in \mathbb{N}$, *soit*

$$\chi_{r,l}^{c+\varepsilon 0}(x) = x(\varepsilon)^r (\log x(\varepsilon))^l \rho(x(\varepsilon)) Y(x(\varepsilon))$$

où $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ *vaut 1 dans un voisinage de 0 et* Y *est la fonction de Heaviside.*

Soit φ une fonction C^∞ sur un intervalle admettant $c + \varepsilon 0$ comme borne (inférieure si $\varepsilon = +1$, supérieure si $\varepsilon = -1$). Nous dirons que φ admet un *développement asymptotique standard normalisé* en $c + \varepsilon 0$ s'il existe un ensemble fini $R_c^\varepsilon \subset \mathbb{Q} \cap [0, 1[$, $n_c^\varepsilon \in \mathbb{N}$ et des $b_{r,l}^\varepsilon \in \mathbb{C}$ tels que

$$\varphi(x) \approx \sum_{r,l} b_{r,l}^\varepsilon x(\varepsilon)^r (\log x(\varepsilon))^l, \quad x(\varepsilon) \to 0^+$$

avec $r \in R_c^\varepsilon + \mathbb{N}$, et $l \in [0, n_c^\varepsilon]$. Le symbole $\approx$ signifie que le développement asymptotique est indéfiniment dérivable terme à terme.

S'il existe $k_c^\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $x(\varepsilon)^{k_c^\varepsilon}\varphi$ vérifie la condition précédente, on dira que φ admet en $c + \varepsilon 0$ un *développement asymptotique standard* (en précisant éventuellement l'ensemble R_c^ε, les entiers n_c^ε et k_c^ε correspondants).

Remarque. — Pour $0 < c < +\infty$, un choix équivalent de la coordonnée $x(\varepsilon)$ consiste à poser $\tilde{x}(\varepsilon) = \varepsilon \log \dfrac{x}{c}$; cependant, la dérivation terme à terme des développements asymptotiques est plus pénible avec cette convention.

(0.2) DÉFINITION. — *Nous dirons que la fonction φ est dans la classe $\mathcal{A}$ s'il existe un ensemble fini $\Gamma = \Gamma(\varphi) \subset [0, +\infty]$ tel que φ soit C^∞ sur $[0, +\infty] \setminus \Gamma$ et tel que, $\forall c \in \Gamma$, $\forall \varepsilon$, la fonction φ admet en $c + \varepsilon 0$ un développement asymptotique standard.*
Si $\Gamma(\varphi)$ est réduit à $\{0, \infty\}$, nous dirons que φ appartient à $\mathcal{A}_0$.

Exemple. — Soit $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\})$; alors φ est dans la classe $\mathcal{A}$ si, et seulement si, il existe un ensemble fini $R \subset \mathbb{Q} \cap [0, 1[$, $n \in \mathbb{N}$ et des nombres complexes $b_{r,l}^0$, $b_{r,l}^{1,\varepsilon}$, $b_{r,l}^\infty$ tels que $\forall K \in \mathbb{N}^*$ la différence

$$\varphi - \sum_{r \in R+\mathbb{N}, r \leq K, l \in [0,n]} b_{r,l}^0 \chi_{r,l}^0 + b_{r,l}^{1,\varepsilon} \chi_{r,l}^{1+\varepsilon 0} + b_{r,l}^\infty \chi_{r,l}^\infty$$

soit de classe C^K sur $[0, \infty]$ et C^K−plate en 0, 1 et $+\infty$.

L'objectif de ce paragraphe est de donner une caractérisation des transformées de Mellin des fonctions de la classe $\mathcal{A}$ qui sont continues sur $]0, +\infty[$. Commençons donc par définir la transformée de Mellin dans ce cadre.

(0.3) PROPOSITION–DÉFINITION. — *Soit φ une fonction continue sur $]0, +\infty[$ qui est dans la classe $\mathcal{A}$. Supposons que $u > 0$ vérifie $\Gamma(\varphi) \cap]0, +\infty[\subset]u, 1/u[$ et choisissons $\rho_i \in C^\infty([0, +\infty])$, $i = 1, 2, 3$, vérifiant*

$$\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = 1 \quad \text{et} \quad \begin{array}{l} \operatorname{supp} \rho_1 \subset [0, u[, \\ \operatorname{supp} \rho_2 \subset]u/2, 2/u[, \\ \operatorname{supp} \rho_3 \subset]1/u, \infty]. \end{array} \tag{1}$$

Alors, pour chaque $i = 1, 2, 3$, l'intégrale

$$\mathcal{M}_i \varphi(\lambda) = \int_0^\infty x^{\lambda - 1} \varphi(x) \rho_i(x) dx$$

converge pour λ *dans un ouvert non vide de* $\mathbb{C}$ *(respectivement* $\{\operatorname{Re}\lambda > k_0\}$, $\mathbb{C}$, $\{\operatorname{Re}\lambda < -k_\infty\}$*) et admet un prolongement méromorphe à* $\mathbb{C}$ *tout entier.*

La fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$

$$\mathcal{M}\varphi(\lambda) := \mathcal{M}_1\varphi(\lambda) + \mathcal{M}_2\varphi(\lambda) + \mathcal{M}_3\varphi(\lambda)$$

ne dépend pas du choix des fonctions ρ_i *vérifiant (1) ni du choix de* u. *On l'appelle la* transformée de Mellin de φ.

Remarque. — Au lieu de la continuité de φ, on aurait pu demander $\varphi \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^*_+)$ pour garantir la convergence de l'intégrale donnant $\mathcal{M}_i\varphi$.

Démonstration. — Les prolongements de $\mathcal{M}_1\varphi$ et de $\mathcal{M}_3\varphi$ sont classiques sous nos hypothèses (voir [4]) et $\mathcal{M}_2\varphi$ est une fonction entière. Le seul point à vérifier est donc l'indépendance du choix des $(\rho_i)_{i=1,2,3}$ satisfaisant (1).

Prenons un autre choix $(\tilde\rho_i)_{i=1,2,3}$ et posons $\sigma_i = \tilde\rho_i - \rho_i$. Alors $\displaystyle\int_0^\infty x^{\lambda-1}\varphi(x)\sigma_i(x)dx$ est entière pour $i = 1,2,3$ car le support de $\varphi\sigma_i$ est compact dans $]0,+\infty[$. Comme on a $\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3 = 0$, le résultat est démontré. □

Remarque. — Quand $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^*_+)$, la transformation que nous venons de définir se réduit à la transformation de Mellin usuelle :

$$\mathcal{M}\varphi(\lambda) = \int_0^\infty x^{\lambda-1}\varphi(x)dx.$$

(0.4) DÉFINITION DE $\mathbf{ML}(\mathbb{C})$ ET $\mathbf{M}(\mathbb{C})$. — *Nous dirons qu'une fonction méromorphe* F *sur* $\mathbb{C}$ *est dans la classe* $\mathbf{ML}(\mathbb{C})$ *si les conditions suivantes sont satisfaites :*

i) *il existe un ensemble fini* $R \subset \mathbb{Q} \cap [0,1[$ *et* $n \in \mathbb{N}$ *tels que les pôles de* F *soient d'ordre au plus* $n+1$ *et contenus dans* $R+\mathbb{Z}$*;*

ii) *il existe un ensemble fini* $\Gamma' \subset]0,+\infty[$ *tel que la fonction* F *admet un double développement asymptotique de la forme*

$$(2)\quad F(\lambda) \sim \sum_{c\in\Gamma',\, r\in R+\mathbb{N},\, l\in[0,n]} a^{c,\varepsilon}_{r,l}\, c^\lambda \frac{(\log\lambda)^l}{\lambda^{r+1}}, \quad \varepsilon \operatorname{Im}\lambda \to +\infty, \qquad \varepsilon = \pm 1,$$

dans le sens que, pour tout $K > 0$,

$$F(\lambda) - \sum_{c\in\Gamma',\, r+1\le K,\, l\in[0,n]} a^{c,\varepsilon}_{r,l}\, c^\lambda \frac{(\log\lambda)^l}{\lambda^{r+1}} = o(|\operatorname{Im}\lambda|^{-K}), \quad \varepsilon \operatorname{Im}\lambda \to +\infty$$

uniformément quand $\operatorname{Re}\lambda$ *est borné;*

iii) *si* r *est entier, alors* $a^{c,+}_{r,0} = a^{c,-}_{r,0}$ *et* $a^{c,\varepsilon}_{0,l} = 0, \forall c \in \Gamma', \forall \varepsilon, \forall l > 0$.

Si tous les coefficients $a^{c,\varepsilon}_{r,l}$ *sont nuls, i. e.,* F *est à décroissance rapide en* $|\operatorname{Im}\lambda|$, *uniformément quand* $|\operatorname{Re}\lambda|$ *est borné, nous dirons que* F *est dans la classe* $\mathbf{M}(\mathbb{C})$.

Remarque. — On suppose ici $\lambda \notin \mathbb{R}_-$ et on prend la détermination principale du logarithme sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$.

(0.5) THÉORÈME. — *La transformation de Mellin définie plus haut est une bijection des fonctions continues* $\varphi :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$ *qui sont dans la classe* $\mathcal{A}$ *sur la classe* $\mathbf{ML}(\mathbb{C})$. *Elle induit une bijection de* $\mathcal{A}_0$ *sur* $\mathbf{M}(\mathbb{C})$.

La preuve de ce théorème va occuper le reste du paragraphe.

(0.6) LEMME. — *Soient* $K > 0$ *et* m *entier* > 0.

a) *Si* $\varphi \in C^m(\mathbb{R}^*_+)$ *satisfait pour* $0 \le j \le m$

$$(3)\qquad \begin{aligned} (x\partial_x)^j \varphi(x) &= O(x^K), \quad x \to 0^+,\\ (x\partial_x)^j \varphi(x) &= O(x^{-K}), \quad x \to \infty, \end{aligned}$$

alors $\mathcal{M}\varphi$ *est holomorphe dans la bande* $\{|\operatorname{Re}\lambda| < K\}$ *et, pour tout* $K' < K$

$$\sup_{|\operatorname{Re}\lambda| \le K'} |\lambda|^m |\mathcal{M}\varphi(\lambda)| < \infty.$$

b) *Si* F *est une fonction holomorphe au voisinage de la bande* $\{|\operatorname{Re}\lambda| \le K\}$ *qui satisfait*

$$\sup_{|\operatorname{Re}\lambda| \le K} |\lambda|^{m+2} |F(\lambda)| < \infty$$

alors F *est transformée de Mellin d'une fonction* φ *de classe* C^m *qui vérifie* (3).

Preuve. — Adapter celle du lemme 3 de [4] à la présente situation. □

(0.7) PROPOSITION. — *Pour* $\mu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $\varepsilon = \pm 1$, $r \in \mathbb{R}^*_+$, $l \in \mathbb{N}$ *et* $\rho \in C^\infty_c(\mathbb{R})$ *qui vaut 1 près de 0, on a :*

$$\int_{\varepsilon\mathbb{R}_+} e^{-\mu x} |x|^{r-1} (\log|x|)^l \rho(x)\, dx \sim \partial^l_r \frac{\Gamma(r)}{(\varepsilon\mu)^r}\ , \quad |\operatorname{Im}\mu| \to \infty,$$

où $\sim$ signifie que la différence est à décroissance rapide uniforme lorsque $|\operatorname{Re}\mu|$ est borné, quand $|\operatorname{Im}\mu| \to \infty$.

Preuve. — On intègre par parties en utilisant une méthode de Erdelyi [6]. Pour $x \in \mathbb{R}_+$, soit

$$g_r(x,\mu) = -\frac{1}{\mu^r}\int_0^\infty e^{-(\mu x+t)}(\mu x+t)^{r-1}dt.$$

Quand x est positif, on peut dériver sous le signe somme et obtenir

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_r}{\partial x}(x,\mu) &= -\frac{1}{\mu^r}\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x}(e^{-(\mu x+t)}(\mu x+t)^{r-1})dt\\ &= -\frac{1}{\mu^r}\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t}(e^{-(\mu x+t)}(\mu x+t)^{r-1})\mu dt = e^{-\mu x}x^{r-1}.\end{aligned}$$

Donc, en posant $G_r(\mu) = \displaystyle\int_0^\infty g_r(x,\mu)\rho'(x)dx$, on a

$$\int_0^\infty e^{-\mu x}x^{r-1}\rho(x)dx = \frac{\Gamma(r)}{\mu^r} + G_r(\mu),$$

puisque $g_r(0,\mu) = -\dfrac{1}{\mu^r}\displaystyle\int_0^\infty e^{-t}t^{r-1}dt$.

En dérivant par rapport à r maintenant

$$\int_0^\infty e^{-\mu x}x^{r-1}(\log x)^l\rho(x)dx = \partial_r^l\int_0^\infty e^{-\mu x}x^{r-1}\rho(x)dx;$$

pour montrer la formule avec $\varepsilon = +1$, il reste à vérifier que $\partial_r^l G_r$, est à décroissance rapide uniforme quand $|\operatorname{Im}\mu| \to \infty$. Mais en posant $\tilde g_r(x,\mu) = e^{\mu x}g_r(x,\mu)$, on remarque que

$$G_r(\mu) = \int_0^\infty e^{-\mu x}\tilde g_r(x,\mu)\rho'(x)dx$$

est la transformée de Laplace d'une fonction C^∞ à support compact qui dépend de μ. Le contrôle de la dépendance en μ donnant la décroissance rapide de G_r et de ses dérivées découle de l'affirmation suivante :

AFFIRMATION. — *Pour $s \in \mathbb{R}$, $x \in [\alpha,\beta] \subset \mathbb{R}_+^*$, $|\operatorname{Im}\mu| \geq 1$ et $\arg\mu \in [\pi/4, 3\pi/4]$, on a :*

$$\sup_{x,\mu}\int_0^\infty |e^{-t}(x+t/\mu)^s(\log(x+t/\mu))^l|dt < \infty.$$

Le cas $\varepsilon = -1$ se ramène à $\varepsilon = +1$ par changement de variable. □

(0.8) COROLLAIRE. — *Pour* $c \in \mathbb{R}_+^*$, $\varepsilon = \pm 1$, $r \in \mathbb{R}_+$, $l \in \mathbb{N}$ *on a :*

$$\mathcal{M}\chi_{r,l}^{c+\varepsilon 0}(\lambda) \sim c^\lambda \partial_r^l \frac{\Gamma(r+1)}{(-\varepsilon\lambda)^{r+1}}, \quad |\operatorname{Im}\lambda| \to +\infty.$$

(0.9) LEMME. — *Soit F une fonction définie dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Alors F admet un double développement asymptotique*

$$F(\lambda) \sim \sum_{c\in\Gamma',\, r\in R+\mathbb{N}, l\in[0,n]} a_{r,l}^{c,\delta} c^\lambda \frac{(\log\lambda)^l}{\lambda^{r+1}}, \quad \delta \operatorname{Im}\lambda \to +\infty\ , \quad \delta = \pm 1,$$

avec $a_{r,0}^{c,+} = a_{r,0}^{c,-}$ quand $r \in \mathbb{N}$ si, et seulement si, F admet un développement asymptotique

$$F(\lambda) \sim \sum_{c\in\Gamma', \varepsilon\in\{\pm1\},\, r\in R+\mathbb{N},\, l\in[0,n]} b_{r,l}^{c,\varepsilon} c^\lambda \partial_r^l \frac{\Gamma(r+1)}{(-\varepsilon\lambda)^{r+1}}, \quad |\operatorname{Im}\lambda| \to +\infty.$$

Dans ce cas, pour r entier on a :

$$(4) \qquad \begin{gathered} a_{r,l}^{c,+} = a_{r,l}^{c,-} = 0,\ \forall l > 0 \iff b_{r,l}^{c,+} = b_{r,l}^{c,-} = 0,\ \forall l > 0 \\ \textit{et} \\ \big((-1)^{r+1} b_{r,0}^{c,+} + b_{r,0}^{c,-}\big)\Gamma(r+1) = a_{r,0}^{c,+} = a_{r,0}^{c,-}. \end{gathered}$$

Preuve. — Introduisons les fonctions de comparaison suivantes :

$$G_{r,l}^{c,\delta}(\lambda) = \begin{cases} c^\lambda \frac{(\log\lambda)^l}{\lambda^{r+1}} & \text{si } \delta \operatorname{Im}\lambda > 0\ , \\ 0 & \text{si } \delta\operatorname{Im}\lambda < 0, \end{cases}$$

$$H_{r,l}^{c+\varepsilon 0}(\lambda) = c^\lambda \partial_r^l \frac{\Gamma(r+1)}{(-\varepsilon\lambda)^{r+1}}, \quad \operatorname{Im}\lambda \neq 0.$$

Les fonctions $G_{r,l}^{c,\delta}$ sont linéairement indépendantes. En effet, de

$$\sum_{c,\delta,r,l} a_{r,l}^{c,\delta} G_{r,l}^{c,\delta} = 0,$$

on déduit, en faisant successivement $\operatorname{Im}\lambda > 0$ et $\operatorname{Im}\lambda < 0$, que

$$\sum_{c,r,l} a_{r,l}^{c,\delta} G_{r,l}^{c,\delta} = 0, \quad \forall\delta;$$

grâce à la relation $G_{r,l}^{c,\delta}(\lambda) = o(G_{r',l'}^{c,\delta}(\lambda))$, $\delta\operatorname{Im}\lambda \to +\infty$, pour $r > r'$ ou $r = r'$ et $l < l'$, cette égalité entraîne

$$\sum_c a_{r,l}^{c,\delta} G_{r,l}^{c,\delta} = 0, \quad \forall\delta, \forall r, \forall l,$$

donc
$$a_{r,l}^{c,\delta} = 0, \quad \forall c, \forall \delta, \forall r, \forall l,$$
puisque les exponentielles sont indépendantes.

Pour c et r donnés, posons
$$\mathcal{G}_r^c = \left\{ \sum_{\delta,l} a_{r,l}^{c,\delta} G_{r,l}^{c,\delta} \mid a_{r,l}^{c,\delta} \in \mathbb{C} \text{ et } a_{r,0}^{c,+} = a_{r,0}^{c,-} \text{ si } r \in \mathbb{N} \right\}$$
et
$$\mathcal{H}_r^c = \left\{ \sum_{\varepsilon,l} b_{r,l}^{c,\varepsilon} H_{r,l}^{c+\varepsilon 0} \mid b_{r,l}^{c,\varepsilon} \in \mathbb{C} \right\}.$$
Il est clair que $\mathcal{H}_r^c$ est contenu dans $\mathcal{G}_r^c$ et que $\dim \mathcal{G}_r^c = 2n+1$ si $r \in \mathbb{N}$, $= 2n+2$ si $r \notin \mathbb{N}$.

Montrons que $\mathcal{H}_r^c = \mathcal{G}_r^c$. Il suffit de voir que $\mathcal{H}_r^c$ et $\mathcal{G}_r^c$ ont la même dimension. Supposons donc
$$\sum_{\varepsilon,l} b_{r,l}^{c,\varepsilon} H_{r,l}^{c+\varepsilon 0} = 0. \tag{5}$$
Puisque $\mathcal{M}\chi_{r,l}^{c+\varepsilon 0}(\lambda) \sim H_{r,l}^{c,\varepsilon}(\lambda)$ quand $|\operatorname{Im}\lambda| \to +\infty$ (corollaire (0.8)), la relation (5) et le lemme (0.6) donnent
$$\sum_{\varepsilon,l} b_{r,l}^{c,\varepsilon} \chi_{r,l}^{c+\varepsilon 0} \in C^\infty(\mathbb{R}_+^*).$$
Par conséquent,
$$\varphi(y) = \begin{cases} \sum_l b_{r,l}^{c,+} y^r (\log y)^l & \text{si } \ y > 0 \\ \sum_l b_{r,l}^{c,-} |y|^r (\log |y|)^l & \text{si } \ y < 0 \end{cases}$$
définit une fonction φ sur $\mathbb{R}^*$ qui admet un prolongement C^∞ à $\mathbb{R}$. Ceci entraîne que
$$b_{r,l}^{c,\varepsilon} = 0 \text{ si } r \notin \mathbb{N} \text{ ou } l > 0 \text{ et } b_{r,0}^{c,+} = (-1)^r b_{r,0}^{c,-} \text{ si } r \in \mathbb{N}.$$
L'affirmation sur la dimension en découle.

La vérification de (4) est immédiate. □

Démonstration du théorème (0.5). — Si $\varphi \in \mathcal{A}$, par définition, il existe des coefficients $b_{r,l}^{c,\varepsilon} \in \mathbb{C}$ tels que, $\forall K > 0$
$$\varphi - \sum_{c,\varepsilon,r \le K,l} b_{r,l}^{c,\varepsilon} \chi_{r,l}^{c+\varepsilon 0}$$
est de classe C^K sur $[0, +\infty]$ et C^K–plate en 0 et $+\infty$. D'après la partie a) du lemme (0.6), on en déduit que
$$\mathcal{M}\varphi(\lambda) - \sum_{c,\varepsilon,r \le K,l} b_{r,l}^{c,\varepsilon} \mathcal{M}\chi_{r,l}^{c+\varepsilon 0} = O(|\operatorname{Im}\lambda|^{-K-1}), \quad |\operatorname{Im}\lambda| \to +\infty.$$

Grâce au corollaire (0.8) et au lemme (0.9), on a vérifié que $\mathcal{M}\varphi$ satisfait i), ii) et la première partie de iii) dans la définition (0.4). La continuité de φ oblige $b_{0,l}^{c,\varepsilon} = 0$ pour $l > 0$ et $b_{0,0}^{c,+} = b_{0,0}^{c,-}$. D'après (4), la seconde partie de iii) est vérifiée et donc $\mathcal{M}\varphi$ appartient à $\mathbf{ML}(\mathbb{C})$.

Réciproquement, soit $F \in \mathbf{ML}(\mathbb{C})$. On veut se ramener au lemme (0.6) après avoir soustrait à F une combinaison linéaire de $\mathcal{M}\chi_{r,l}^{c+\varepsilon 0}$ avec $c \in [0, +\infty]$. Commençons par les pôles. On sait que $\mathcal{M}\chi_{r,l}^{0}$ a un unique pôle d'ordre $l+1$ en $-r$ et est à décroissance rapide uniforme quand $|\operatorname{Im}\lambda| \to +\infty$. Il existe donc $b_{r,l}^{0}$ et $b_{r,l}^{\infty}$ pour $r \leq K$ tels que

$$G := F - \sum b_{r,l}^{0}\mathcal{M}\chi_{r,l}^{0} - \sum b_{r,l}^{\infty}\mathcal{M}\chi_{r,l}^{\infty}$$

soit holomorphe dans $\{|\operatorname{Re}\lambda| \leq K\}$. Le comportement asymptotique vertical de $\mathcal{M}\psi$ est le même que celui de $\mathcal{M}\varphi$. L'existence d'un développement asymptotique (2) pour G garantit, via le lemme (0.9) et le corollaire (0.8), l'existence de coefficients $b_{r,l}^{c,\varepsilon} \in \mathbb{C}$ tels que

$$G(\lambda) - \sum b_{r,l}^{c,\varepsilon}\mathcal{M}\chi_{r,l}^{c+\varepsilon 0}(\lambda) = O(|\operatorname{Im}\lambda|^{-K-2}), \quad |\operatorname{Im}\lambda| \to +\infty.$$

Soit $\psi_K \in C^K(\mathbb{R}_+)$ la fonction C^K-plate telle que $\mathcal{M}\psi = G - \sum b_{r,l}^{c,\varepsilon}\mathcal{M}\chi_{r,l}^{c+\varepsilon 0}$ du lemme (0.6). Alors $\varphi = \sum b_{r,l}^{0}\chi_{r,l}^{0} + \sum b_{r,l}^{\infty}\chi_{r,l}^{\infty} + \sum b_{r,l}^{c,\varepsilon}\chi_{r,l}^{c+\varepsilon 0} + \psi_K$ satisfait $\mathcal{M}\varphi = F$; elle est donc indépendante de K à cause de l'injectivité de la transformation de Mellin et appartient par conséquent à $\mathcal{A}$. La continuité de φ découle de (4). □

2. Applications.

L'objet du présent paragraphe est de donner quelques compléments, utiles pour le cas à deux paramètres, sur des exemples de fonctions appartenant aux classes à un paramètre étudiées précédemment.

Fixons nos notations :
Soient $p \in \mathbb{N}$ un entier, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^{n+2}$ et $\gamma \in \mathbb{N}^{n+2}$. On suppose que
1) $\alpha \neq 0$;
2) $|\gamma| = \sum_{0}^{n+1} \gamma_i \leq p$;
3) $\forall i \in [0, n+1]$, on a $0 < \operatorname{Re}\lambda < 1 \implies \alpha_i \operatorname{Re}\lambda + \beta_i > -1$.

Pour $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n+2})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ vérifiant $0 < \operatorname{Re}\lambda < 1$, on définit

$$F_{\alpha,\beta,\gamma}^{\varphi} = \int_{(\mathbb{R}_+)^{n+2}} x^{\alpha\lambda+\beta}(\log x)^\gamma \varphi(x)dx \tag{1}$$

avec la convention $(\log x)^{\gamma} = \prod_{i=0}^{n+1} (\log x_i)^{\gamma_i}$.

(0.10) PROPOSITION. — *Sous les hypothèses précisées ci-dessus, la fonction* $F^{\varphi}_{\alpha,\beta,\gamma}$ *est holomorphe pour* $0 < \operatorname{Re}\lambda < 1$ *et admet un prolongement méromorphe à* $\mathbb{C}$ *tout entier avec des pôles éventuels d'ordre* $\leq n+2+p$ *aux points* $\lambda = -(\beta_i + k)\alpha_i$, $i \in [0, n+1]$, $\alpha_i \neq 0$ *et* $k \in \mathbb{N}^*$. *De plus, on a décroissance rapide verticale (en* $|\operatorname{Im}\lambda|$*) uniforme sur toute bande* $-K \leq \operatorname{Re}\lambda \leq K$.

Remarque. — Si $\alpha_i = 0$ pour $i \in [0, k-1]$ on se ramène à un problème analogue sur $\mathbb{R}^{n-k+2}$ en intégrant d'abord en $x_0, \ldots, x_{k-1}$, d'où une majoration sur l'ordre des pôles éventuels par $n - k + 2$.

La démonstration de la proposition repose sur l'identité de Bernstein élémentaire suivante.

(0.11) LEMME. — *Pour* $k \in \mathbb{N}$, $x > 0$ *et* $\lambda \in \mathbb{C}$, *on a*

(2)
$$\Big(\sum_{j=0}^{k} (\lambda+1)^{k-j}(\lambda - x\frac{d}{dx})^j\Big)\frac{d}{dx}[x^{\lambda}(\log x)^k/k!] = (\lambda+1)^{k+1}x^{\lambda}(\log x)^k/k!.$$

Preuve. — Le lecteur vérifiera cette identité facilement en posant $v_j(x) = x^{\lambda}(\log x)^j/j!$ pour $j \geq 0$, $v_{-1} = 0$ et en remarquant que $\Big(x\dfrac{d}{dx} - \lambda\Big)\, v_j = v_{j-1}$ pour $j \geq 0$. □

Démonstration de la proposition (0.10). — Soit $\tilde{\alpha} \in \mathbb{N}^{n+2}$ l'élément défini par $\tilde{\alpha}_i = 1$ si $\alpha_i \neq 0$ et $\tilde{\alpha}_i = 0$ si $\alpha_i = 0$. Fixons $K > 1$ et choisissons $N \in \mathbb{N}$ assez grand en fonction de K (ce choix sera précisé plus loin). Pour $i \in [0, n+1]$ tel que $\alpha_i \neq 0$ l'identité (2) écrite sous la forme

$$P_{\gamma_i}\Big(\mu, x_i, \frac{\partial}{\partial x_i}\Big)x_i^{\mu+1}(\log x_i)^{\gamma_i} = (\mu+1)^{\gamma_i+1}x_i^{\mu}(\log x_i)^{\gamma_i}$$

nous donnera avec $\mu = \alpha_i\lambda + \beta_i$

$$\Big[\prod_{j=1}^{N}(\alpha_i\lambda + \beta_i + j - 1)\Big]^{\gamma_i+1} x_i^{\alpha_i\lambda+\beta_i}(\log x_i)^{\gamma_i}$$
$$= \Big[\prod_{j=1}^{N} P_{\gamma_i}(\alpha_i\lambda + \beta_i + j, x_i, \partial_i)\Big] x_i^{\alpha_i\lambda+\beta_i+N}(\log x_i)^{\gamma_i}$$

et en posant

$$(3)\qquad \begin{aligned} Q_N(\lambda) &= \prod_{i=0,\ \alpha_i\neq 0}^{n+1}\Big[\prod_{j=1}^{N}(\alpha_i\lambda+\beta_i+j-1)\Big]^{\gamma_i+1}\\ P_N\Big(\lambda,x,\frac{\partial}{\partial x}\Big) &= \prod_{i=0,\ \alpha_i\neq 0}^{n+1}\prod_{j=1}^{N}P_{\gamma_i}\Big(\alpha_i\lambda+\beta_i+j,x_i,\frac{\partial}{\partial x_i}\Big)\end{aligned}$$

on arrive à

$$(4)\qquad Q_N(\lambda)x^{\alpha\lambda+\beta}(\log x)^{\gamma} = P_N\Big(\lambda,x,\frac{\partial}{\partial x}\Big)x^{\alpha\lambda+\beta+N\tilde{\alpha}}(\log x)^{\gamma}.$$

Choisissons N de manière que l'on ait, disons pour $N\geq N(K)$:

$$(5)\qquad -|\alpha_i|K+\beta_i+N>-1,\quad \forall i\in[0,n+1].$$

On aura alors, pour $-K<\operatorname{Re}\lambda<K$:

$$(6)\qquad Q_N(\lambda)F^{\varphi}_{\alpha,\beta,\gamma}(\lambda)=\int_{(\mathcal{R}_+)^{n+2}} x^{\alpha\lambda+\beta+N\tilde{\alpha}}(\log x)^{\gamma}P_N^*(\varphi)(x)dx$$

où P_N^* désigne l'adjoint formel de P_N; la condition (5) assure alors l'holomorphie du membre de droite de (6) pour $N\geq N(K)$ et $-K<\operatorname{Re}\lambda<K$. Ceci donne le prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$ de $F^{\varphi}_{\alpha,\beta,\gamma}$, les informations annoncées sur les pôles éventuels se déduisant de l'expression de Q_N en (3). De plus, la formule (6) pour $N\geq N(K+1)$ montre l'inégalité

$$|Q_N(\lambda)F^{\varphi}_{\alpha,\beta,\gamma}(\lambda)|\leq C_Ne^{A|\operatorname{Re}\lambda|}$$

valable sur $-K\leq\operatorname{Re}\lambda\leq K$, ce qui établit la décroissance rapide verticale annoncée, car $\deg Q_N = N|\tilde{\alpha}|\geq N$ puisque $\alpha\neq 0$. Ceci achève la démonstration de la proposition (0.10). □

Remarque. — Les conditions 3) imposées à α et β qui font que $F^{\varphi}_{\alpha,\beta,\gamma}$ est a priori holomorphe sur l'ouvert $\{0<\operatorname{Re}\lambda<1\}$ sont artificielles; il suffit que l'intégrale donnant $F^{\varphi}_{\alpha,\beta,\gamma}$ soit holomorphe sur n'importe quelle bande $\{s<\operatorname{Re}\lambda<t\}$ non vide pour que l'on ait la conclusion de la proposition (0.10). On peut même généraliser à α et β complexes.

(0.12) COROLLAIRE. — *Sous les hypothèses de la proposition (0.10), il existe une unique fonction $\rho\in C^{\infty}(]0,+\infty[)$ admettant en 0^+ et $+\infty$ des développements asymptotiques standards, donc $\rho\in\mathcal{A}_0$, et vérifiant :*

i) *$\rho(x)=O(x(\log x)^{n+p+1})$ quand $x\to 0^+$ et $\rho(x)=O((\log x)^{n+p+1}/x)$ quand $x\to\infty$;*

ii) $\displaystyle\int_0^\infty x^\lambda \rho(x)\frac{dx}{x} = F^\varphi_{\alpha,\beta,\gamma}(\lambda)$ *pour* $0 < \operatorname{Re}\lambda < 1$.

Les exposants du développement asymptotique de ρ *en* 0^+ *sont de la forme* $(\beta_i + k)/\alpha_i$ *avec* $\alpha_i > 0$, $k \in \mathbb{N}^*$; *ceux en* $+\infty$ *sont de la forme* $-(\beta_i + k)/\alpha_i$ *avec* $\alpha_i < 0$, $k \in \mathbb{N}^*$. *Les puissances des* log *sont majorées par* $n + p + 1$ *dans les deux cas.*

Preuve. — Ceci résulte de la proposition et du théorème (0.5). □

(0.13) COROLLAIRE. — *Soit* $(f, g) : \mathbb{R}^{n+2} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *une application analytique sur un voisinage ouvert* U *de l'origine vérifiant* $f(0) = g(0) = 0$. *Pour* $\alpha \in \mathbb{Q}^+$, $k \in \mathbb{N}$, *et* $\varphi \in C^\infty_c(U)$, *considérons la fonction*

$$F(s) = \int_{f=s} |g(x)|^\alpha (\log|g(x)|)^k \varphi(x)\frac{dx}{df}$$

définie pour $s > 0$ *assez petit. Alors il existe un ensemble fini* $\{r_1, \ldots, r_J\} \subset \mathbb{Q}_+$ *indépendant du choix de* φ *tels que l'on ait, pour* $s > 0$ *assez petit*

$$F(s) = \sum_{j=1}^{J}\sum_{h=0}^{n+k+1} s^{r_j}(\log s)^h \psi_{j,h}(s)$$

où les fonctions $\psi_{j,h}$ *sont* C^∞ *au voisinage de* $s = 0$ *dans* $\mathbb{R}$.

Preuve. — Il suffit de rendre le diviseur $(fg = 0)$ à croisements normaux et d'utiliser la transformation de Mellin pour ramener ce corollaire à la proposition (0.10), l'inversible gênant étant incorporé à φ. □

Une variante complexe un peu plus élaborée peut s'énoncer de la façon suivante (voir [3] pour la definition d'une fonction de type trace).

(0.14) COROLLAIRE. — *Soit* $f : \mathbb{C}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{C}$ *une fonction holomorphe non constante sur un voisinage ouvert connexe* U *de l'origine vérifiant* $f(0) = 0$. *Soient* θ *une fonction de type trace sur* U *à monodromie quasi-unipotente et* $\varphi \in C^\infty_c(U)$. *Alors la fonction*

$$F(s) = \int_{f=s} \theta(x)\varphi(x)\frac{dx}{df} \wedge \overline{\frac{dx}{df}}$$

peut s'écrire sous la forme

$$F(s) = \sum_{j=1}^{J}\sum_{h=0}^{n+k} |s|^{2r_j}(\log|s|)^h \psi_{j,h}(s)$$

où les $\psi_{j,k}$ *sont* C^∞ *au voisinage de 0 dans* $\mathbb{C}$ *et où les* r_j *sont des rationnels ne dépendant que de* f *et* θ. *L'entier* k *correspond à l'ordre de nilpotence* *de la monodromie de la connexion associée à θ. (Voir les propriétés vi) et vii), p. 49 de* [3].*)*

On remarquera que si g est holomorphe sur U et $\alpha \in \mathbb{Q}_+$, le cas particulier où

$$\theta(x) = |g(x)|^{2\alpha}(\log |g(x)|)^k$$

donne l'analogue complexe du corollaire (0.13).

La preuve du corollaire (0.13) se ramène à la variante complexe de la proposition (0.10) grâce à une désingularisation du diviseur $(f = 0)$ et du lieu polaire de la connexion méromorphe associée à la fonction de type trace θ. En effet, dans ce cas, le théorème de développement asymptotique pour θ (cf. [3], proposition 4 et 4bis) et l'inversion de la transformation de Mellin complexe (*cf.* [4]) réduisent les assertions du corollaire aux conclusions de la proposition (0.10), variante complexe.

(0.15) PROPOSITION. — *Un entier p étant fixé, soient $\alpha \in (\mathbb{R}_+)^{n+2}$, $b \in \mathbb{N}^{n+2}$ et $\gamma \in \mathbb{N}^{n+2}$ vérifiant $|\gamma| \leq p$. Pour $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n+2})$ et $\mu \in \mathbb{C}$, posons*

$$G^\varphi_{\alpha,b,\gamma}(\mu) = \int_{(\mathbb{R}_+)^{n+2}} x^\alpha (\log x)^\gamma e^{\mu x^b} \varphi(x) dx.$$

Alors $G^\varphi_{\alpha,b,\gamma}$ est entière. C'est la transformée de Laplace d'une fonction $\rho \in C^\infty(]0,+\infty[)$ à support borné et qui admet en 0^+ un développement asymptotique standard dont les puissances des logarithmes sont majorées par $n+p+1$ et dont les exposants sont indépendants de φ (et rationnels si $\alpha \in (\mathbb{Q}_+)^{n+2}$).

Démonstration. — On a

$$G^\varphi_{\alpha,b,\gamma}(\mu) = \int_0^\infty e^{\mu t} f(t) dt \quad \text{où} \quad f(t) = \int_{x^b = t} x^\alpha (\log x)^\gamma \varphi(x) \frac{dx}{d(x^b)}.$$

Il suffit donc de prouver que la fonction f vérifie les propriétés annoncées. Pour ce faire, d'après le théorème (0.5), il suffit de prouver les propriétés correspondantes de sa transformée de Mellin :

$$\mathcal{M}f(\xi) = \int_0^\infty t^{\xi-1} f(t) dt = \int_{(\mathbb{R}_+)^{n+2}} x^{b\xi - b + \alpha} (\log x)^\gamma \varphi(x) dx.$$

Celles-ci résultent alors immédiatement de la proposition (0.10) avec $\lambda = \xi - 1$. □

CHAPITRE 1

Transformées de Mellin des intégrales-fibres. Le premier cas : la classe $\mathbf{M}(\mathbb{C}^2)$.

(1.1) DEFINITION. — *Une fonction méromorphe F sur $\mathbb{C}^2$ appartient à la classe $\mathbf{M}(\mathbb{C}^2)$ si elle vérifie les conditions suivantes :*

1) *il existe un ensemble fini de couples (p_i, q_i), $i \in I$, dans $\mathbb{N}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tel que les pôles éventuels de F soient sur les droites d'équations*

$$p_i\lambda + q_i\mu + j = 0, \quad j \in \mathbb{N};$$

2) *il existe un entier n_0 tel que l'ordre des pôles de F soit majoré par n_0;*

3) *les parties polaires de F le long de chacune des droites polaires sont dans la classe $\mathbf{M}(\mathbb{C})$;*

4) *pour tout $K > 0$ le produit*

$$\prod_{i\in I, j\leq(a_i+b_i)K} (a_i\lambda + b_i\mu + j)^{n_0} F(\lambda, \mu)$$

est à décroissance rapide verticale uniforme sur le domaine $\{|\operatorname{Re}\lambda| \leq K\} \times \{|\operatorname{Re}\mu| \leq K\}$.

Remarque. — Les parties polaires de F sur la droite $\{p\lambda+q\mu+j = 0\}$ sont des fonctions méromorphes dont les pôles éventuels se trouvent aux intersections de cette droite avec les autres droites polaires de F. Ils sont donc contenus dans un ensemble fini de rationnels modulo $\mathbb{Z}$ que l'on prenne λ ou μ (quand c'est possible) comme paramètre sur cette droite. Ces ensembles sont indépendants de j. Ceci montre que les développements asymptotiques en 0^+ et en $+\infty$ des transformées de Mellin inverses de ces parties polaires ont leurs exposants dans un ensemble fini de rationnels modulo $\mathbb{Z}$.

L'objet de ce chapitre est de prouver le résultat suivant :

(1.2) THÉORÈME. — *Soient a et b dans $\mathbb{N}^{n+2}$ vérifiant $\operatorname{rg}(a,b) = 2$. Pour $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n+2})$ la fonction définie pour $s > 0$ et $t > 0$ par*

$$f(s,t) = \int_{x^a=s, x^b=t} \varphi(x) \frac{dx}{d(x^a) \wedge d(x^b)}$$

a une transformée de Mellin

$$F(\lambda,\mu)=\int_{(\mathbb{R}_+)^2} s^\lambda t^\mu f(s,t)\frac{ds}{s}\wedge\frac{dt}{t}$$

qui appartient à $\mathbf{M}(\mathbb{C}^2)$.

Réciproquement, toute fonction de $\mathbf{M}(\mathbb{C}^2)$ *est la transformée de Mellin d'une fonction obtenue par intégration dans les fibres d'une application* $(f,g):\mathbb{C}^{2n+2}\longrightarrow\mathbb{C}^2$ *vérifiant* $df\wedge dg=0 \implies fg=0$, *restreinte à* $(\mathbb{R}_+)^{2n+2}$ *(où* $n=n_0$ *de la condition 2) dans la définition (1.2)).*

Comme on le verra au chapitre suivant, les fonctions obtenues par intégration dans les fibres n'ont pas toujours une transformée de Mellin dans $\mathbf{M}(\mathbb{C}^2)$, sous nos hypothèses.

Nous commençons par énoncer une proposition qui établit la partie directe du théorème (1.2).

Pour a,b fixés dans $\mathbb{N}^{n+2}$ vérifiant $\mathrm{rg}(a,b)=2$ et $K>0$ donné, définissons l'entier $j(K)$ par

(1) $1+\sup\{j\in\mathbb{N}\mid \exists i\in[0,n+1],\ \{a_i\lambda+b_i\mu+j=0\}$ rencontre $\mathcal{F}_K\}$

où $\mathcal{F}_K=\{(\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2\mid \operatorname{Re}\lambda\geq -K$ et $\operatorname{Re}\mu\geq -K\}$. Posons ensuite

$$P_K(\lambda,\mu)=\prod_{i=0}^{n+1}\prod_{j=0}^{j(K)-1}(a_i\lambda+b_i\mu+j). \tag{2}$$

(1.3) PROPOSITION. — *Avec les notations ci-dessus, considérons pour* $\varphi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n+2})$, $\operatorname{Re}\lambda$ et $\operatorname{Re}\mu>0$

$$F_\varphi(\lambda,\mu)=\int_{(\mathbb{R}_+)^{n+2}} x^{a\lambda+b\mu}\varphi(x)\frac{dx}{x} \tag{3}$$

où on a posé $\dfrac{dx}{x}=\displaystyle\bigwedge_{i=0}^{n+1}\frac{dx_i}{x_i}$. *Alors* F_φ *appartient à* $\mathbf{M}(\mathbb{C}^2)$.

Plus précisément, les droites polaires de F_φ *sont de la forme* $\{a_i\lambda+b_i\mu+j=0\}$ *avec* $j\in\mathbb{N}$ *et* $(a_i,b_i)\neq(0,0)$. *L'ordre des pôles de la partie polaire d'ordre* p *de* F_φ *(sur toute droite polaire) est majoré par* $n+2-p\leq n+1$. *Pour* $K>0$, *la fonction* P_KF_φ *est holomorphe au voisinage de* $\mathcal{F}_K$ *et vérifie l'estimation suivante :*

$\exists A$ *tel que* $\forall N\in\mathbb{N}$

$$|P_K(\lambda,\mu)F_\varphi(\lambda,\mu)|\leq\frac{C_N(K)e^{A(\operatorname{Re}\lambda+\operatorname{Re}\mu)}}{(1+|\operatorname{Im}\lambda|+|\operatorname{Im}\mu|)^N},\quad\forall(\lambda,\mu)\in\mathcal{F}_K \tag{4}$$

ce qui précise la décroissance rapide verticale (uniforme) de F_φ.

Démonstration. — Par intégration par parties, on obtient, avec $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$:

$$P_K(\lambda,\mu)F_\varphi(\lambda,\mu) = \int_{(\mathbb{R}_+)^{n+2}} x^{a\lambda+b\mu+j(K)\mathbf{1}}\varphi_K(x)\frac{dx}{x} \tag{5}$$

où $\varphi_K(x) = (-1)^{(n+2)j(K)}\Big(\dfrac{\partial^{n+2}}{\partial_{x_0}\cdots\partial_{x_{n+1}}}\Big)^{j(K)}\varphi(x)$ et le membre de droite de (5) converge pour $(\lambda,\mu) \in \mathcal{F}_K$ puisque, par définition de $j(K)$, on a $\forall i \in [0, n+1]$:

$$\mathcal{F}_K \subset \{\operatorname{Re}(a_i\lambda + b_i\mu + j(K)) \geq 0\}.$$

Ceci donne évidemment le prolongement méromorphe de F_φ à $\mathbb{C}^2$ avec des pôles d'ordre $\leq n+1$ sur les droites $\{a_i\lambda + b_i\mu + j = 0\}$ où $i \in [0, n+1]$ et $j \in \mathbb{N}$. En effet, l'hypothèse $\operatorname{rg}(a,b) = 2$ interdit de trouver $(n+2)$ fois le même facteur dans P_K.

Supposons maintenant que F_φ ait un pôle d'ordre a priori $p_0 \in [1, n+1]$ sur la droite $a_0\lambda + b_0\mu + j_0 = 0$ (ce qui signifie que ce facteur apparaît exactement p_0 fois dans P_K, pour K assez grand). Sans restreindre la généralité on peut supposer que $b_0 \neq 0$. Posons

$$\xi = a_0\lambda + b_0\mu + j_0$$

et choisissons $K > 0$ assez grand pour avoir la condition suivante réalisée :

$$\begin{gathered}\forall\lambda \in \mathbb{C} \text{ vérifiant } 0 \leq \operatorname{Re}\lambda \leq 1 \text{ et } \forall i \in [0, n+1] \\ \text{on a } \operatorname{Re}\Big(\Big(a_i - \frac{a_0}{b_0}b_i\Big)\lambda - \frac{j_0}{b_0}b_i + j(K)\Big) > 0.\end{gathered} \tag{6}$$

On peut alors écrire

$$P_K(\lambda,\mu)F_\varphi(\lambda,\mu) = \xi^{p_0}\tilde{P}_K(\lambda,\xi)\tilde{F}_\varphi(\lambda,\xi)$$

avec $\tilde{P}_K(\lambda, 0) \not\equiv 0$ et $\tilde{F}_\varphi(\lambda,\xi) = F_\varphi(\lambda,\mu)$. On aura donc

$$\xi^{p_0}\tilde{P}_K(\lambda,\xi)\tilde{F}_\varphi(\lambda,\xi) = \int_{(\mathbb{R}_+)^{n+2}} x^{a\lambda+\frac{b}{b_0}(\xi-a_0\lambda-j_0)+j(K)\mathbf{1}}\varphi_K(x)\frac{dx}{x} \tag{7}$$

qui sera holomorphe au voisinage de $\xi = 0$ pour $0 < \operatorname{Re}\lambda < 1$ grâce à (6). Pour $p \leq p_0$, soit $q = p_0 - p$. D'après (7), il vient :

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^q}{\partial\xi^q}\xi^{p_0}\tilde{P}_K(\lambda,\xi)\tilde{F}_\varphi(\lambda,\xi)\big|_{\xi=0} \\ &\quad= \sum_{c\in\mathbb{N}^{n+2},|c|=q}\int_{(\mathbb{R}_+)^{n+2}}\Big(\frac{b}{b_0}\log x\Big)^c x^{(a-\frac{a_0}{b_0}b)\lambda-\frac{b}{b_0}-\frac{j_0}{b_0}b+j(K)\mathbf{1}}\varphi_K(x)\frac{dx}{x}\end{aligned}$$

où $\left(\frac{b}{b_0}\log x\right)^c = \prod_{i=0}^{n+1}\left(\frac{b_i}{b_0}\log x_i\right)^{c_i}$. Ceci donne la structure polaire annoncée. En effet, la présence du facteur $(a_0\lambda + b_0\mu + j_0)^{p_0}$ dans $P_K(\lambda,\mu)$ montre qu'il existe

$0 = i_1 < i_2 < \cdots < i_{p_0} \leq n+1$ tels que $a_0 b_{i_h} - b_0 a_{i_h} = 0$ *pour* $1 \leq h \leq p_0$

et donc le $(n+2)$−uple $a - \frac{a_0}{b_0}b$ a au plus $n+2-p_0$ composantes non nulles, d'où la majoration $n+2-p_0+q$ sur l'ordre des pôles de la partie polaire d'ordre p (*cf.* la proposition (0.10) et la remarque qui la suit).

Passons à la preuve de l'estimation (4). Supposons par exemple $a_0b_1 - a_1b_0 \neq 0$ et posons

$$V = \frac{1}{a_0b_1 - a_1b_0}(b_1x_0\partial_0 - b_0x_1\partial_1),\ W = \frac{1}{a_1b_0 - a_0b_1}(a_1x_0\partial_0 - a_0x_1\partial_1).$$

On vérifie immédiatement les relations suivantes :

$$\frac{1}{\lambda}Vx^{a\lambda+b\mu} = x^{a\lambda+b\mu},\quad \frac{1}{\mu}Wx^{a\lambda+b\mu} = x^{a\lambda+b\mu}.$$

Si V^* et W^* sont les adjoints formels de V et W, on aura pour $N \in \mathbb{N}$ fixé :

$$\lambda^N\mu^N P_K(\lambda,\mu)F_\varphi(\lambda,\mu) = \int_{(\mathbb{R}_+)^{n+2}} x^{a\lambda+b\mu}(V^*W^*)^N(x^{(j(K)-1)\mathbf{1}}\varphi_K(x))dx.$$

L'estimation (4) en découle car $(V^*W^*)^N(x^{(j(K)-1)\mathbf{1}}\varphi_K(x))$ est dans $x^{(j(K)-1)\mathbf{1}}C_c^\infty(\mathbb{R}^{n+2})$ et P_KF_φ n'a pas de pôle sur $\{\lambda\mu = 0\}$ pour $K > 0$. La proposition (1.3) est démontrée. □

(1.4) Exemple. — Prenons $n = 2$, $a = (2,1,1,1)$, $b = (1,1,1,1)$ et calculons pour $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^4)$ les parties polaires de

$$F_\varphi(\lambda,\mu) = \int_{(\mathbb{R}_+)^4} x_0^{2\lambda+\mu}(x_1x_2x_3)^{\lambda+\mu}\varphi(x)\frac{dx}{x}$$

le long de la droite polaire $\{\lambda + \mu = 0\}$.

Pour $K = 1$, on a $j(K) = 4$ et donc

$$P_1(\lambda,\mu) = \prod_{j=0}^{3}(2\lambda+\mu+j)(\lambda+\mu+j)^3.$$

Posons $\lambda + \mu = \xi$ et $P_1(\lambda,\mu) = \xi^3\tilde{P}_1(\lambda,\xi)$, comme plus haut. Soit

$$\xi^3\tilde{F}_\varphi(\lambda,\xi) = \Pi_0(\lambda) + \Pi_1(\lambda)\xi + \Pi_2(\lambda)\xi^2 + H(\lambda,\xi)\xi^3$$

où H est holomorphe sur $\xi = 0$; alors les parties polaires de $\tilde{F}_\varphi$ sur la droite $\xi = 0$ sont les fonctions Π_0, Π_1 et Π_2. Elles se calculent à partir de l'égalité

$$\tilde{P}_1(\lambda,\xi)\xi^3\tilde{F}_\varphi(\lambda,\xi) = \int_{(\mathbb{R}_+)^4} x_0^{\lambda+\xi+3}(x_1x_2x_3)^{\xi+3}\psi(x)\frac{dx}{x}$$

avec $\psi(x) = \partial_0 \dots \partial_3$ par les identités suivantes :

$$\tilde{P}_1(\lambda,0)\Pi_0(\lambda) = \int_{(\mathbb{R}_+)^4} x_0^\lambda (x_0x_1x_2x_3)^3 \psi(x)\frac{dx}{x}$$

$$\tilde{P}_1(\lambda,0)\Pi_1(\lambda) + \frac{\partial \tilde{P}_1}{\partial \xi}(\lambda,0)\Pi_0(\lambda) = \frac{\partial}{\partial \xi}(\tilde{P}_1(\lambda,\xi)\xi^3\tilde{F}_\varphi(\lambda,\xi))\Big|_{\xi=0}$$

$$= \int_{(\mathbb{R}_+)^4} (\log x_0x_1x_2x_3) x_0^\lambda (x_0x_1x_2x_3)^3 \psi(x)\frac{dx}{x}$$

$$\tilde{P}_1(\lambda,0)\Pi_2(\lambda) + \frac{\partial \tilde{P}_1}{\partial \xi}(\lambda,0)\Pi_1(\lambda) + \frac{\partial^2 \tilde{P}_1}{\partial \xi^2}(\lambda,0)\Pi_0(\lambda) = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}(\dots)\Big|_{\xi=0}$$

$$= \int_{(\mathbb{R}_+)^4} (\log x_0x_1x_2x_3)^2 x_0^\lambda (x_0x_1x_2x_3)^3 \psi(x)\frac{dx}{x}.$$

Le calcul s'achève sans difficulté puisque

$$\tilde{P}_1(\lambda,\xi) = ((\xi+1)(\xi+2)(\xi+3))^3 \prod_{j=0}^{3}(\lambda+\xi+j).$$

□

Pour prouver la seconde partie du théorème (1.2), nous aurons besoin du résultat suivant qui est plus on moins "classique"

(1.5) THÉORÈME. — *Etant donnés $m \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$, on considère l'application monomiale $f : \mathbb{R}^{m+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par*

$$f(x_0,\dots,x_m) = (x_0 \cdots x_m)^p.$$

Soient $\varphi_{j,h} \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, pour $j \in [0,p-1]$ et $h \in [0,m]$, des fonctions telles que $\varphi_{0,h}(0) = 0$ si $h \neq 0$. Alors il existe une $m-$forme C^∞ à support compact ω sur $\mathbb{R}^{m+1}$ vérifiant pour tout $s > 0$

$$\int_{\{f=s\}\cap(\mathbb{R}_+)^{m+1}} \omega = \sum_{j,h} \varphi_{j,h}(s) s^{j/p} (\log s)^h.$$

Remarque. — Le problème est local au voisinage de $s = 0$ car si $\theta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^*)$, il existe une $m-$forme C^∞ à support compact $\tilde{\omega}$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^{m+1}$ telle que

$$\int_{\{f=s\}\cap(\mathbb{R}_+^*)^{m+1}} \tilde{\omega} = \theta(s), \quad \forall s > 0.$$

En effet, si $K = \operatorname{supp}\theta$ et si η est $m-$forme C^∞ sur $(\mathbb{R}_+^*)^{m+1}$ à support $f-$propre et vérifiant

$$\int_{\{f=s\}\cap(\mathbb{R}_+^*)^{m+1}} \eta = g(s) \neq 0, \quad \forall s > 0,$$

il suffira de poser $\tilde{\omega} = f^*(\theta/g) \cdot \eta$, car $g \in C^\infty(]0,+\infty[)$. Pour construire une telle η on peut prendre

$$\eta(x_0,\dots,x_m) = \rho(x_0)\rho(x_1)\cdots\rho(x_m)dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m$$

où $\rho \in C^\infty(\,]0,+\infty[\,)$ est ≥ 0 et égale à 1 sur $[\delta, 1/\delta]$ pour $\delta > 0$ assez petit.

Pour prouver le théorème, il suffit, par linéarité sur $C_c^\infty(\mathbb{R})$ et d'après la remarque ci-dessus de produire, pour chaque (j,h), $j \neq 0$, une forme C^∞ à support f−propre vérifiant

$$\int_{\{f=s\}\cap(\mathbb{R}_+)^{m+1}} \omega_{j,h} = s^{j/p}(\log s)^h$$

$$\text{(respectivement } = s(\log s)^h \text{ pour } j=0,\ h\neq 0,$$
$$\text{et } = 1 \text{ pour } j=0,\ h=0)$$

pour $s > 0$ assez petit. Pour ce calcul, voir [2]. (Le cas réel est plus simple que le cas complexe!)

(1.6) PROPOSITION. — *Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ avec $q \neq 0$. Donnons-nous, pour chaque $j \in \mathbb{N}$ et $h \in [0,n]$, une fonction $A_{j,h} \in \mathbf{M}(\mathbb{C})$ [resp. $\mathbf{M_b}(\mathbb{C})$ (1) si $p = 0$] dont les pôles sont d'ordre $\leq n$ et contenus dans un ensemble fini de rationnels modulo $\mathbb{Z}$. Alors il existe une application monomiale $(f,g) : \mathbb{R}^{2n+2} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ et $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{2n+2})$ telles que la fonction*

$$F_\varphi(\lambda,\mu) = \int_{(\mathbb{R}_+)^{n+2}} f^\lambda(x) g^\mu(x) \varphi(x) \frac{dx}{x}$$

ait le comportement polaire suivant :
les seules droites polaires obliques [resp. non verticales si $p = 0$] sont $\{p\lambda + q\mu + j = 0\}$, $j \in \mathbb{N}$, avec les parties polaires $\sum_{h=0}^{n} \dfrac{A_{j,h}(\lambda)}{(p\lambda+q\mu+j)^{h+1}}$.

Démonstration. — Pour j et h donnés, écrivons

$$A_{j,h}(\lambda) = \mathcal{M}\rho(\lambda) + \mathcal{M}\sigma\Big(-\frac{p}{q}\lambda - \frac{j}{q}\Big) \tag{8}$$

où $\rho \in C^\infty(]0,\infty[)$ est à support borné et admet un développement asymptotique standard en 0 et où $\sigma \in C^\infty(\,]0,\infty[\,)$ est identiquement nulle au voisinage de 0 et admet un développement asymptotique standard à l'infini [resp. $\sigma = 0$ si $p = 0$]. Posons

$$F(\lambda,\mu) = \int_0^\infty u^\lambda \rho(u) \frac{du}{u} \int_0^\infty v^{p\lambda+q\mu+j} (\log v)^h \chi(v) \frac{dv}{v}$$
$$G(\lambda,\mu) = \int_0^\infty u^\mu \rho(u) \frac{du}{u} \int_0^\infty v^{p\lambda+q\mu+j} (\log v)^h \chi(v) \frac{dv}{v}$$

(1) $\mathbf{M_b}(\mathbb{C}) = \{\mathbf{F} \in \mathbf{M}(\mathbb{C}) \mid \mathcal{M}^{-1}\mathbf{F}$ a un support borné$\}$.

où $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ vaut 1 au voisinage de 0.

Ces deux fonctions F et G appartiennent à $\mathbf{M}(\mathbb{C}^2)$. Les droites polaires de F sont soit verticales (de la forme $\{\lambda = -r\}$ où r est un exposant du développement asymptotique de ρ en 0^+) soit l'unique droite oblique $\{p\lambda + q\mu + j = 0\}$ avec comme partie polaire

$$\frac{\mathcal{M}\rho(\lambda)}{(p\lambda + q\mu + j)^{h+1}}.$$

De même, pour $p \neq 0$, la fonction G admet des droites polaires de la forme $\{\mu = -r'\}$ où r' est un exposant du développement asymptotique de σ à l'infini et la droite oblique $\{p\lambda + q\mu + j = 0\}$ avec comme partie polaire

$$\frac{\mathcal{M}\sigma(\mu)}{(p\lambda + q\mu + j)^{h+1}} = \frac{\mathcal{M}\tilde{\sigma}(p\lambda/q + j/q)}{(p\lambda + q\mu + j)^{h+1}} + O((p\lambda + q\mu + j)^{-h})$$

où $\tilde{\sigma}(u) = \sigma(1/u)$. La relation (8) montre alors que $F + G$ admet comme partie polaire principale sur son unique droite polaire oblique [resp. non verticale pour $p = 0$] la quantité prescrite

$$\frac{A_{j,h}(\lambda)}{(p\lambda + q\mu + j)^{h+1}}.$$

Ceci montre déjà que par ce procédé, on pourra construire une fonction de la classe $\mathbf{M}(\mathbb{C}^2)$ ayant une unique droite polaire oblique [resp. non verticale si $p = 0$] avec des parties polaires données.

Nous allons maintenant montrer que les modèles utilisés dans cette construction sont effectivement obtenus par intégration dans les fibres d'applications monomiales.

Considérons sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ les fonctions

$$\varphi : (s,t) \mapsto t^{j/q}\Big(\frac{1}{q}\log t\Big)^h \chi_1(t^{1/q})\rho(st^{-p/q})$$

et, pour $p \neq 0$

$$\psi : (s,t) \mapsto s^{j/p}\Big(\frac{1}{p}\log s)^h \chi_2(s^{1/q}\Big)\sigma(s^{-q/p}t)$$

où χ_1 et $\chi_2 \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ valent identiquement 1 près de l'origine. Les transformées de Mellin de φ et ψ se calculent en posant $u = st^{-p/q}$ et $v = t^{1/q}$ [resp. $u = s^{-q/p}t$ et $v = s^{1/p}$ pour $p \neq 0$] :

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}\varphi(\lambda,\mu) &= \int_{(\mathbb{R}_+)^2} s^\lambda t^\mu \varphi(s,t)\frac{ds}{s}\frac{dt}{t} \\
&= \frac{1}{q}\int_0^\infty u^\lambda \rho(u)\frac{du}{u}\int_0^\infty v^{p\lambda+q\mu+j}(\log v)^h\chi_1(v)\frac{dv}{v} \\
&= \frac{1}{q}\mathcal{M}\rho(\lambda)\mathcal{M}\chi_{1,h}(p\lambda+q\mu+j), \text{ avec } \chi_{1,h}(v) = \chi_1(v)(\log v)^h
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mathcal{M}\psi(\lambda,\mu) &= \int_{(\mathbb{R}_+)^2} s^\lambda t^\mu \psi(s,t)\frac{ds}{s}\frac{dt}{t}\\ &= \frac{1}{p}\int_0^\infty u^\mu \sigma(u)\frac{du}{u}\int_0^\infty v^{p\lambda+q\mu+j}(\log v)^h \chi_2(v)\frac{dv}{v}\\ &= \frac{1}{p}\mathcal{M}\sigma(\mu)\mathcal{M}\chi_{2,h}(p\lambda+q\mu+j), \text{ avec } \chi_{2,h}(v)=\chi_2(v)(\log v)^h.\end{aligned}$$

Montrons maintenant que nos “modèles” φ et ψ sont des intégrales-fibres.

Grâce au théorème (1.5), il existe une application monomiale $\underline{h}$: $\mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ et une $n-$forme ω de classe C^∞ à support compact sur $\mathbb{R}^{n+1}$ qui vérifient :

$$\int_{\{\underline{h}=u\}\cap(\mathbb{R}_+)^{n+1}} \omega = \rho(u), \quad \text{pour } u>0;$$

de même, il existe une application monomiale $\underline{k} : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ et une $n-$forme ω' de classe C^∞ à support compact sur $\mathbb{R}^{n+1}$ telles que :

$$\int_{\{\underline{k}=v\}\cap(\mathbb{R}_+)^{n+1}} \omega' = \chi_1(v)v^j(\log v)^h, \quad \text{pour} \quad v>0.$$

Définissons alors $\xi : \mathbb{R}^2 :\to \mathbb{R}^2$ par

$$\xi(u,v) = (uv^p, v^q).$$

L'application $\xi \circ (\underline{h},\underline{k}) : \mathbb{R}^{2n+2} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est monomiale et on a :

$$\int_{\{\xi\circ(\underline{h},\underline{k})=(u,v)\}\cap(\mathbb{R}_+)^{2n+2}} \omega\wedge\omega' = \varphi(s,t), \quad \text{pour } (s,t)\in(\mathbb{R}_+)^2.$$

Un calcul analogue, dans lequel on remplace ρ par σ quand $p \neq 0$, montre que ψ est une intégrale-fibre.

En fait, on peut traiter d'un seul coup toutes les droites polaires $\{p\lambda+q\mu+j=0\}$, $j\in\mathbb{N}$; il suffit en effet d'appliquer le théorème de Borel “usuel” (c'est-à-dire dans le cadre des développements de Taylor des fonctions C^∞) sur $\mathbb{R}^{2n+2}$ pour construire une $2n-$forme dont l'intégrale sur les fibres de $(\underline{h},\underline{k})$ est une fonction sur $(\mathbb{R}_+)^2$ avec un développement asymptotique du type

$$\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{n} \rho_{j,h}(u)v^j(\log v)^h.$$

Ce développement peut aussi s'écrire

$$\sum \theta_{r,h,l}(u,v)u^r(\log u)^l(\log v)^h$$

où r parcourt l'ensemble des exposants des $\rho_{j,h}$ dans $[0,1[$, l et $h \in [0,n]$ et les fonctions $\theta_{r,h,l}$ sont C^∞ sur $\mathbb{R}^2$.

Par $C^\infty(\mathbb{R}^2)$−linéarité, on est ramené à voir que les fonctions $u^r(\log u)^l$ [resp. $(\log v)^h$] s'obtiennent par intégration dans les fibres de $\underline{h}$ [resp. $\underline{k}$]. Ceci découle du théorème (1.5) et achève la preuve de la proposition (1.6). □

Preuve du théorème (1.2). — Partant de $F \in \mathbf{M}(\mathbb{C}^2)$, on peut supprimer toutes les droites polaires obliques d'après la proposition (1.6), cas $p \neq 0$, puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de couples $(p,q) \in \mathbb{N}^2 \setminus (0,0)$. On supprime ensuite les droites polaires horizontales à l'aide de la proposition (1.6), cas $p = 0$. Il ne reste alors que les droites polaires verticales que l'on traite par la proposition (1.6), cas $p = 0$, mais où p et q sont échangés. On peut donc supposer que F n'a plus de pôles; c'est alors la transformée de Mellin d'une fonction C^∞ sur $(\mathbb{R}_+)^2$ plate sur les axes; comme on peut la prolonger par 0 en une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^2$, c'est évidemment une intégrale-fibre. Le théorème (1.2) est démontré. □

CHAPITRE 2

Transformées de Mellin des intégrales-fibres. Le cas général : la classe $\mathbf{ML}(\mathbb{C}^2)$.

(2.1) DÉFINITION. — *Une fonction méromorphe G sur $\mathbb{C}^2$ sera dans la classe $\mathbf{ML}(\mathbb{C}^2)$ si elle vérifie les propriétés suivantes :*

1) *il existe $(p,q) \in \mathbb{N}^2 \setminus (0,0)$ et $a_0,\dots,a_{n+1} \in \mathbb{N}$ tels que les droites polaires de G soient de la forme $\{a_i(p\lambda+q\mu)+j=0\}$, $j \in \mathbb{N}$ et $i \in [0,n+1]$, $a_i \neq 0$, avec des pôles d'ordre au plus $n+2$;*

2) *les parties polaires de G le long de ces droites polaires sont des fonctions entières de la classe $\mathbf{ML_b}(\mathbb{C})$ [(2)]; la puissance des logarithmes dans leurs développements asymptotiques verticaux est majorée par $2(n+1)$;*

3) *pour tout $\varepsilon > 0$ et tout compact $\mathcal{K}$ de $\mathbb{R}^2$, G est à décroissance rapide verticale uniforme quand*

$$|\operatorname{Im}\mu|,\ |\operatorname{Im}\nu| \to \infty, \quad |\operatorname{Im}\mu| \le \frac{1}{\varepsilon}|\operatorname{Im}\nu| \quad et \quad (\operatorname{Re}\nu, \operatorname{Re}\mu) \in \mathcal{K}$$

(2) $\mathbf{ML_b}(\mathbb{C}) = \{\mathbf{F} \in \mathbf{ML}(\mathbb{C}) \mid \mathcal{M}^{-1}\mathbf{F}$ a un support borné$\}$.

où $\nu = p\lambda + q\mu$ lorsque $p \neq 0$ (si $p = 0$ alors on a $q \neq 0$ et il faut échanger λ et μ);

4) pour ν fixé (non polaire) la fonction $\mu \mapsto G\Big(\dfrac{\nu - q\mu}{p}, \mu\Big)$ est dans la classe $\mathbf{ML_b}(\mathbb{C})$.

Remarque. — La condition 4) donne l'existence de développements asymptotiques verticaux à ν fixé (voir le chapitre 0).

L'objet de ce chapitre est de prouver le résultat suivant :

(2.2) THÉORÈME. — *Soient $a \in \mathbb{N}^{n+2} \setminus (0\ldots,0)$ et $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, $p \neq 0$. Dans un voisinage ouvert U de l'origine dans $\mathbb{R}^{n+2}$, on considère des fonctions analytiques*

$$f(x) = (x^a)^p \quad \text{et} \quad g(x) = (x^a)^q h(x)$$

où h est analytique sur U et inversible ($h(x) \neq 0$, $\forall x \in U$) vérifiant la condition

(1) *$\exists L \in \mathbb{N}^*$ et θ analytique sur U tels que $(x^a)^L dx = \theta \wedge df \wedge dg$ sur U.*

Alors pour toute $\varphi \in C_c^\infty(U)$, la fonction

$$F_\varphi(\lambda,\mu) = \int_U f^\lambda(x) g^\mu(x)\varphi(x)dx$$

qui est holomorphe pour $\operatorname{Re}\lambda$ *et* $\operatorname{Re}\mu > 0$ *se prolonge méromorphiquement à $\mathbb{C}^2$ en un élément de la classe* $\mathbf{ML}(\mathbb{C}^2)$.

Remarques. — 1) Les notations dans l'énoncé du théorème sont bien sûr compatibles avec celles de la définition (2.1).

2) Si $df \wedge dg = 0 \implies fg = 0$ dans le complexe, la condition (1) est vérifiée d'après le Nullstellensatz.

La preuve du théorème (2.2) se subdivise en deux cas qui sont traités dans les propositions (2.3) et (2.5).

(2.3) PROPOSITION. — *Soient a et $b \in \mathbb{N}^{n+2}$ vérifiant* $\operatorname{rg}(a,b) = 2$. *Pour $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n+2})$,* $\operatorname{Re}\nu > 0$ *et $\mu \in \mathbb{C}$, posons*

$$G_\varphi(\nu,\mu) = \int_{(\mathbb{R}_+)^{n+2}} x^{a\nu} e^{\mu x^b} \varphi(x)dx.$$

Alors G_φ est dans la classe $\mathbf{ML}(\mathbb{C}^2)$.

Démonstration. — Posons $\nabla = \prod_{i=0,a_i\neq 0}^{n+1} \frac{\partial}{\partial x_i}$ et soit $\tilde{a} \in \mathbb{N}^{n+2}$ l'élément défini par $\tilde{a}_i = 0$ si $a_i = 0$ et $\tilde{a}_i = 1$ si $a_i \neq 0$. On a

$$\nabla(x^{a\nu+\tilde{a}j}) = \left(\prod_{i=0,a_i\neq 0}^{n+1} (a_i\nu + j)\right) x^{a\nu+\tilde{a}(j-1)}.$$

Pour $k \in \mathbb{N}^*$ soit $P_k(\nu) = \prod_{j=1}^{k} \prod_{i=0,a_i\neq 0}^{n+1} (a_i\nu + j)$. On aura alors

$$P_k(\nu)G_\varphi(\nu,\mu) = \int_{(\mathbb{R}_+)^{n+2}} x^{a\nu+\tilde{a}k}(\nabla^*)^k(e^{\mu x^b}\varphi(x))dx. \tag{2}$$

Comme $(\nabla^*)^k(e^{\mu x^b}\varphi(x)) = e^{\mu x^b}\sum_{h=0}^{k(n+2)} \varphi_{k,h}(x)\mu^h$, où $\varphi_{k,h} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n+2})$, la formule (2) devient :

$$P_k(\nu)G_\varphi(\nu,\mu) = \sum_{h=0}^{k(n+2)} \mu^h \int_{(\mathbb{R}_+)^{n+2}} x^{a\nu+\tilde{a}k} e^{\mu x^b} \varphi_{k,h}(x)dx.$$

Le prolongement méromorphe de G_φ satisfait donc la propriété 1) de la définition (2.1).

Pour $i \in [0, n+1]$ tel que $a_i \neq 0$ et $j \in \mathbb{N}^*$ fixés, nous désirons étudier la partie polaire d'ordre p de G_φ sur la droite $\{a_i\nu + j = 0\}$. Prenons k assez grand, posons $\xi = a_i\nu + j$ et écrivons

$$P_k(\nu) = \xi^{p_0}Q_k(\xi) \quad \text{avec} \quad Q_k(0) \neq 0.$$

En introduisant $\tilde{G}_\varphi(\xi,\mu) = G_\varphi(\nu,\mu)$ on a :

$$\xi^{p_0}Q_k(\xi)\tilde{G}_\varphi(\xi,\mu) = \sum_{h=0}^{k(n+2)} \mu^h \int_{(\mathbb{R}_+)^{n+2}} x^{a(\xi-j)/a_i+\tilde{a}k} e^{\mu x^b} \varphi_{k,h}(x)dx.$$

Par suite, la dérivée $\frac{\partial^q}{\partial\xi^q}\xi^{p_0}Q_k(\xi)\tilde{G}_\varphi(\xi,\mu)\big|_{\xi=0}$ est une combinaison linéaire de termes du type

$$\mu^h \int_{(\mathbb{R}_+)^{n+2}} \left(\frac{a}{a_i}\log x\right)^\gamma x^{a(\xi-j)/a_i+\tilde{a}k} e^{\mu x^b} \varphi_{k,h}(x)dx$$

où $\gamma \in \mathbb{N}^{n+2}$ vérifie $|\gamma| = q$ et k satisfait $k - j\frac{a_l}{a_i} > 0$, $\forall l \in [0, n+1]$. Mais chacune de ces intégrales est une fonction entière de μ qui appartient à la classe $\mathbf{ML_b}(\mathbb{C})$ (voir la proposition (0.15)) et celle-ci est stable par multiplication par μ. En résolvant le système triangulaire qui donne la partie polaire d'ordre $p_0 - q$ le long de la droite $\{\xi = 0\}$ on obtient que les puissances des logarithmes (dans les développements asymptotiques verticaux) sont majorés par $n+1+p_0-p$ (cf. la proposition (1.3)) donc par $2n+2$, puisque $p_0 \leq n+2$ et $p \geq 1$.

Vérifions maintenant la propriété 3) de la définition (2.1). Supposons par exemple que $a_0b_1 - a_1b_0$ est différent de 0; avec $V = \dfrac{1}{a_0b_1 - a_1b_0}(b_1x_0\partial_0 - b_0x_1\partial_1)$, on a

$$V^N(x^{a\nu}) = \nu^N x^{a\nu} \quad \text{et} \quad V(e^{\mu x^b}) = 0.$$

Pour $k \in \mathbb{N}$ fixé et $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n+2})$ on en déduit

$$\int_{(\mathbb{R}_+)^{n+2}} x^{a\nu+\tilde{a}k} e^{\mu x^b} \psi(x)dx = \frac{1}{\nu^N} \int_{(\mathbb{R}_+)^{n+2}} x^{a\nu} e^{\mu x^b} \psi_N(x)dx$$

où $\psi_N \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n+2})$ est définie par $\psi_N(x) = x^{-\tilde{a}k}(V^*)^N(x^{\tilde{a}k}\psi(x))$. Si $|\operatorname{Im}\mu| \leq \dfrac{1}{\varepsilon}|\operatorname{Im}\nu|$, on a $|\operatorname{Im}\nu| + |\operatorname{Im}\mu| \leq \dfrac{1+\varepsilon}{\varepsilon}|\operatorname{Im}\nu|$; par suite, l'estimation suivante a lieu, quand $(\operatorname{Re}\nu, \operatorname{Re}\mu) \in \mathcal{K}$ et k assez grand pour que $x^{a\nu+\tilde{a}k}$ soit localement intégrable :

$$|P_kG_\varphi(\nu,\mu)| \leq \frac{C_N(\varepsilon)(1+|\mu|)^{(n+2)k}\Gamma(\mathcal{K},k,N)}{(1+|\operatorname{Im}\mu|+|\operatorname{Im}\nu|)^N}$$

où la constante $\Gamma(\mathcal{K},k,N)$ majore la somme

$$\sum_{h=0}^{n+2} \int_{(\mathbb{R}_+)^{n+2}} x^{a\operatorname{Re}\nu+\tilde{a}k} e^{\operatorname{Re}\mu x^b} |(\varphi_{k,h})_N(x)|dx.$$

Passons à la propriété 4) de la définition (2.1). Ecrivons

$$G_\varphi(\nu,\mu) = \int_{(\mathbb{R}_+)^2} s^\nu e^{\mu t} g(s,t)dsdt,$$

avec

$$g(s,t) = \int_{\{x^a=s,\, x^b=t\}\cap(\mathbb{R}_+)^{n+2}} \varphi(x)\frac{dx}{d(x^a)\wedge d(x^b)},$$

et remarquons que la transformée de Mellin [(3)] de g a la forme suivante :

$$H_\varphi(\nu,\xi) := \int_{(\mathbb{R}_+)^2} s^\nu t^\xi g(s,t)dsdt = \int_{(\mathbb{R}_+)^{n+2}} x^{a\nu+b\xi}\varphi(x)dx.$$

D'après le théorème (0.5), il suffit de montrer que, pour ν fixé, la fonction

$$\phi_\nu(t) = \int_0^\infty s^\nu g(s,t)ds$$

[(3)] Pour alléger les notations dans les intégrations par parties, nous utiliserons dans ce chapitre la mesure $ds\,dt$ au lieu de $\frac{ds}{s}\frac{dt}{t}$ pour définir la transformation de Mellin. Ceci revient à faire une translation sur les variables.

admet un développement asymptotique standard en 0^+, étant entendu que ce raisonnement n'est justifié que pour $\operatorname{Re}\nu > 0$; pour ν arbitraire, on doit commencer par exhiber le prolongement méromorphe de G_φ (*cf.* la preuve de 1)). Il suffit donc de voir que la transformée de Mellin de ϕ_ν est dans la classe $\mathbf{ML_b}(\mathbb{C})$. Mais ceci résulte directement du théorème (1.2) qui nous dit que H_φ appartient à $\mathbf{M}(\mathbb{C}^2)$ et donc sa restriction à ν fixé (non pôle) est dans $\mathbf{ML_b}(\mathbb{C})$. La preuve de la proposition (2.3) est achevée. $\square$

Remarques. — 1) Il résulte du théorème (1.2) que les pôles à ν fixé de $H_\varphi(\nu,\cdot)$ dépendent de manière affine de ν; il en sera donc de même des exposants du développement asymptotique de ϕ_ν en 0^+ et donc aussi des exposants des développements asymptotiques verticaux de G_φ pour ν fixé. 2) Le calcul des coefficients du développement asymptotique de ϕ_ν en 0^+, qui équivaut au calcul des coefficients des développements asymptotiques verticaux de G_φ à ν fixé, revient à calculer les parties polaires de la transformée de Mellin de H_φ à ν fixé. Ceci est explicite dans le preuve de la proposition (1.3) et la proposition (0.10) montre que ce sont des fonctions de la classe $\mathbf{ML_b}(\mathbb{C})$.

(2.4) *Exemple.* — Prenons $n = 1$, $a = (2,1,1)$, $b = (1,1,1)$ et posons $\square = \dfrac{\partial^2}{\partial x_0^2}\dfrac{\partial}{\partial x_1}\dfrac{\partial}{\partial x_2}$. Alors on obtient

$$2(2\nu+1)(\nu+1)^3 x^{a\nu} = \square(x_0^{2\nu+2}x_1^{\nu+1}x_2^{\nu+1})$$

et donc, pour $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$, la fonction

$$G_\varphi(\nu,\mu) = \int_{(\mathbb{R}_+)^3} x^{a\nu} e^{\mu x^b}\varphi(x)dx$$

vérifie

$$\begin{aligned}2(2\nu+1)(\nu+1)^3 G_\varphi(\nu,\mu) &= \int_{(\mathbb{R}_+)^3} (x_0^2x_1x_2)^{\nu+1}\square(e^{\mu x^b}\varphi(x))dx\\ &= \sum_{h=0}^{4}\mu^h\int_{(\mathbb{R}_+)^3}(x_0^2x_1x_2)^{\xi}e^{\mu x^b}\varphi_h(x))dx\end{aligned}$$

avec $\xi = \nu+1$ et $\varphi_h \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$. On a donc le long de $\xi = 0$ un pôle a priori triple ($p_0 = 3$) et si on cherche la partie polaire d'ordre $p = 1$, elle va faire intervenir la dérivée seconde par rapport à ξ de $2\xi^3(2\xi-1)\tilde{G}_\varphi(\xi,\mu)$ en $\xi = 0$ qui vaut

$$\sum_{h=0}^{4}\mu^h\int_{(\mathbb{R}_+)^3}(\log x_0^2x_1x_2)^2 e^{\mu x^b}\varphi_h(x))dx.$$

Mais la fonction $\int_{\{x^b=t\}\cap(\mathbb{R}_+)^3} (\log x_0^2 x_1 x_2)^2 \varphi_h(x)) \frac{dx}{d(x^b)}$ présente un terme en

$$(\log t)^2 \int_{\{x^b=t\}\cap(\mathbb{R}_+)^3} \varphi_h(x) \frac{dx}{d(x^b)}$$

qui, pour un choix convenable de φ_h (cf. le théorème (1.5)) aura un $(\log t)^4$ dans son développement asymptotique en 0^+. De plus, on a $\varphi_4 = \varphi$, ce qui laisse un choix arbitraire pour φ_4.

On constate ainsi que la borne donnée dans l'énoncé de la définition (2.1) sur les puissances des logarithmes (des parties polaires) est optimale.

(2.5) PROPOSITION. — *Soient $a \in \mathbb{N}^{n+2} \setminus 0$ et h une fonction analytique sur un voisinage ouvert U de l'origine dans $\mathbb{R}^{n+2}$, strictement positive sur U. Supposons qu'il existe une $n-$forme θ de classe C^∞ sur U et un entier $L \in \mathbb{N}$ tels que l'on ait*

$$x^{aL} dx = \theta(x) \wedge d(x^a) \wedge dh(x), \quad \forall x \in U. \tag{3}$$

Pour $\varphi \in C_c^\infty(U)$, $\operatorname{Re}\nu > 0$ et $\mu \in \mathbb{C}$, posons

$$K_\varphi(\nu, \mu) = \int_{(\mathbb{R}_+)^{n+2}} x^{a\nu} h(x)^\nu e^{\mu x^a} \varphi(x) dx.$$

Alors K_φ est dans la classe $\mathbf{ML}(\mathbb{C}^2)$.

Démonstration. — Pour obtenir le prolongement méromorphe de K_φ, on écrit, comme dans la preuve de la proposition (2.3)

$$P_k(\nu) x^{a\nu} = \nabla^k (x^{a\nu + \tilde{a}k}), \quad k \in \mathbb{N};$$

on en déduit

$$\nabla^* \big(h(x)^\nu e^{\mu x^a} \varphi(x)\big) = \sum_{i+j \leq k(n+2)} \nu^i \mu^j h(x)^\nu e^{\mu x^a} \varphi_{k,i,j}(x)$$

avec $\varphi_{k,j,h} \in C_c^\infty(U)$ et, par suite,

$$P_k(\nu) K_\varphi(\nu, \mu) = \sum_{i+j \leq k(n+2)} \nu^i \mu^j \int_{(\mathbb{R}_+)^{n+2}} x^{a\nu + \tilde{a}k} h(x)^\nu e^{\mu x^a} \varphi_{k,i,j}(x) dx.$$

Le prolongement méromorphe de K_φ en découle.

Décrivons la partie polaire d'ordre p sur la droite polaire $\{\xi := a_i \nu + j = 0\}$, où $j \in \mathbb{N}^*$ et $i \in [0, n+1]$ vérifie $a_i \neq 0$. On écrit $P_k(\nu) = \xi^{p_0} Q_k(\xi)$ avec $Q_k(0) \neq 0$ et on calcule

$$\frac{\partial^q}{\partial \xi^q} \xi^{p_0} Q_k(\xi) \tilde{K}_\varphi(\xi, \mu) \Big|_{\xi=0}. \tag{4}$$

Pour k assez grand (qui sera précisé plus loin) cette dérivée s'exprime à l'aide de

$$\frac{\partial^q}{\partial \xi^q}\Big(\int_{(\mathbb{R}_+)^{n+2}} x^{a(\xi-j)/a_i+\tilde{a}k} h(x)^{(\xi-j)/a_i} e^{\mu x^a}\psi(x)dx\Big)\Big|_{\xi=0}$$

pour $q \leq p_0 - 1$, où $\psi \in C_c^\infty(U)$. La dérivée (4) est donc une somme d'intégrales du type

$$\int_{(\mathbb{R}_+)^{n+2}} \Big(\frac{a}{a_i}\log x\Big)^\gamma x^{a(\xi-j)/a_i+\tilde{a}k} e^{\mu x^a}\tilde{\psi}(x)dx$$

où $|\gamma| \leq q$ et $\tilde{\psi} \in C_c^\infty(U)$ est de la forme

$$\tilde{\psi}(x) = \Big(\frac{1}{a_i}\log h(x)\Big)^l h(x)^{-j/a_i}\psi(x)$$

avec $l \in [0, q]$.

On constate que pour que ces intégrales convergent et que la dérivation sous le signe somme soit justifiée, il suffit de choisir k de sorte que $-\dfrac{a_m}{a_i}j + k > -1$, $\forall m \in [0, n+1]$; par exemple k/j assez grand. La fonction K_φ satisfait la propriété 2) de la classe $\mathbf{ML}(\mathbb{C}^2)$ d'après la proposition (0.15).

Vérifions la propriété 3). Commençons par fixer $N \in \mathbb{N}$ et $k_0 \in \mathbb{N}$ puis choisissons $k \in \mathbb{N}$ satisfaisant $\tilde{a}k \geq a(NL + k_0)$. Pour $\nu \in \mathbb{C}$ vérifiant $\operatorname{Re}\nu + k_0 \geq 0$, on sait que $P_k(\nu)K_\varphi(\nu, \mu)$ est une somme d'intégrales

$$\nu^i\mu^j \int_{(\mathbb{R}_+)^{n+2}} x^{a\nu+\tilde{a}k} h(x)^\nu e^{\mu x^a}\psi(x)dx$$

avec $i + j \leq k(n+2)$ et $\psi \in C_c^\infty(U)$. Soit $\tilde{\psi}(x) = x^{\tilde{a}k-a(NL+k_0)}\psi(x)$; alors

$$\begin{aligned}\hat{K}_\varphi(\nu, \mu) &:= \int_{(\mathbb{R}_+)^{n+2}} x^{a\nu+\tilde{a}k} h(x)^\nu e^{\mu x^a}\psi(x)dx \\ &= \int_{(\mathbb{R}_+)^{n+2}} x^{a(NL+k_0+\nu)} h(x)^\nu e^{\mu x^a}\tilde{\psi}(x)dx.\end{aligned}$$

Comme, d'après (3),

$$\begin{aligned}&d\Big(x^{a[(N-1)L+k_0+\nu]}\frac{h^{\nu+1}}{\nu+1}e^{\mu x^a}\tilde{\psi}(x)\theta(x)\wedge d(x^a)\Big) \\ &\quad= (-1)^{n+1}x^{a[(N-1)L+k_0+\nu]}h(x)^\nu e^{\mu x^a}\tilde{\psi}(x)\theta(x)\wedge d(x^a)\wedge dh(x) \\ &\qquad+ x^{a[(N-1)L+k_0+\nu]}\frac{h(x)^{\nu+1}}{\nu+1}e^{\mu x^a} d(\tilde{\psi}(x)\theta(x))\wedge d(x^a),\end{aligned}$$

la formule de Stokes donnera, après N itérations

$$\pm\hat{K}_\varphi(\nu, \mu) = \int_{(\mathbb{R}_+)^{n+2}} x^{a(k_0+\nu)}\frac{h(x)^{\nu+N}}{(\nu+1)\cdots(\nu+N)}e^{\mu x^a}\chi_N(x)dx$$

où $\chi_N \in C_c^\infty(U)$. On en déduit l'estimation, pour $\mathrm{Re}\,\nu + k_0 \geq 0$ et $(\mathrm{Re}\,\nu, \mathrm{Re}\,\mu) \in \mathcal{K}$:

$$|\hat{K}_\varphi(\nu,\mu)| \leq C(\mathcal{K}, N, k_0, \varphi)\frac{1}{|\nu+1|\cdots|\nu+N|}$$

qui, lorsque $|\,\mathrm{Im}\,\mu| \leq \dfrac{1}{\varepsilon}|\,\mathrm{Im}\,\nu|$ donne

$$|P_k(\nu)||K_\varphi(\nu,\mu)| \leq \frac{C(\mathcal{K}, N, k_0, \varphi, \epsilon)}{(1+|\,\mathrm{Im}\,\nu| + |\,\mathrm{Im}\,\mu|)^N}\,, \quad k >> 0.$$

Pour prouver la propriété 4), on écrit $K_\varphi(\nu,\mu)$ sous la forme suivante :

$$K_\varphi(\nu,\mu) = \int_0^\infty s^{k_0+\nu}e^{\mu s}\rho_\nu(s)ds \quad \text{avec} \quad \rho_\nu(s) = \int_{x^a=s} h(x)^\nu\tilde{\psi}(x)\frac{dx}{d(x^a)}.$$

On a supposé ici $\mathrm{Re}\,\nu + k_0 \geq 0$. Il s'agit de montrer que, pour ν fixé, ρ_ν est C^∞ sur $]0,\infty[$, a un support borné et admet un développement asymptotique standard en 0^+. Mais ceci est clair puisque $h^\nu\tilde{\psi} \in C_c^\infty(U)$.

En fait, pour décrire les coefficients de ce développement asymptotique, on peut faire appel à la transformée de Mellin de ρ_ν :

$$\int_0^\infty s^\xi\rho_\nu(s)ds = \int_{(\mathbb{R}_+)^{n+2}} x^{a\xi}h(x)^\nu\tilde{\psi}(x)dx$$

et déterminer ses parties polaires (à ν fixé). Elles sont données par des intégrales du type

$$\int_{(\mathbb{R}_+)^{n+2}} (\log x)^\gamma x^{-al+\tilde{a}k}h(x)^\nu\tilde{\psi}_k(x)dx \tag{5}$$

où $l \in \mathbb{N}$, $-a_il + k > -1$, $\gamma \in \mathbb{N}^{n+2}$ et $\tilde{\psi}_k \in C_c^\infty(U)$. Considées comme fonctions de ν, elles appartiennent à la classe $\mathbf{ML}(\mathbb{C})$ puisque ce sont les transformées de Laplace de fonctions à support compact dans $]0,\infty[$ de classe C^∞ en dehors d'un ensemble fini de points (à savoir les valeurs critiques de h) en lesquels on a un développement asymptotique standard. Ceci se voit en commençant par intégrer sur les fibres de h dans l'intégrale (5). La preuve de la proposition (2.5) est achevée. □

Preuve du théorème (2.2). — Grâce au théorème (8.6) de [5], on peut faire une suite finie d'éclatements pour rendre $\{h(x) = h(0)\}$ à croisements normaux, sans perdre le croisement normal pour le diviseur $\{fg = 0\}$. On remarque que la relation $q\{f = 0\} = p\{g = 0\}$ reste vérifiée le long du transformé de $\{f = g = 0\}$.

Si, localement sur l'éclaté, on a

$$f(x) = (x^a)^p \qquad \text{et} \qquad g(x) = (x^a)^q e^{C+x^b}$$

avec $\operatorname{rg}(a,b) = 2$, on applique la proposition (2.3). Sinon, on aura localement

$$f(x) = (x^a)^p \quad \text{et} \quad g(x) = (x^a)^q e^{C+(x^a)^r k(x)}$$

avec $r \in \mathbb{N}^*$ et k inversible. On choisit alors des coordonnées locales y telles que $y^a = x^a\big(k(x)\big)^{1/r}$ et on pose $x^a = y^a \tilde{h}(y)$ où $\tilde{h}$ est inversible. Quitte à changer a en ra et à poser $\nu = \dfrac{p\lambda + q\mu}{r}$ on aura

$$f(y)^\lambda g(y)^\mu = (y^a)^\nu \big(\tilde{h}(y)\big)^\nu e^{\mu C} e^{\mu y^a};$$

on peut appliquer la proposition (2.5).

On conclut en utilisant une partition de l'unité. □

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. BARLET, Majoration du volume des fibres génériques, Séminaire Lelong 1978/79, Lecture Notes in Math. 822, Springer 1980.

[2] D. BARLET, Développements asymptotiques des fonctions obtenues par intégration dans les fibres, Invent. Math., 68 (1982), 129-174.

[3] D. BARLET, Fonctions de type trace, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 33–2 (1983), 43-76.

[4] D. BARLET et H.-M. MAIRE, Développements asymptotiques, transformation de Mellin complexe et intégration sur les fibres, in Séminaire Lelong 1985/86, Lecture Notes in Math. 1295, Springer 1987.

[5] E. BIERSTONE and P. MILMAN, Uniformization of analytic spaces, J. Amer. Math. Soc., vol. 2, n°4 (1989), 801-836.

[6] A. ERDELYI, Asymptotic expansions, Dover, 1956.

[7] H. HIRONAKA, Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero I, Ann. of Math., 79 (1964), 109-326.

[8] F. LOESER, Fonctions zeta locales d'Igusa à plusieurs variables, intégration dans les fibres et discriminant, Ann. Sc. Ecole Norm. Sup., 22 (1989), 435-471.

[9] C. SABBAH, Proximité evanescente II, équations fonctionnelles pour plusieurs fonctions analytiques, Compositio Math., 64 (1987), 213-241.

[10] C. SABBAH, Appendice à proximité evanescente II, prépublication Ecole Polytechnique, janvier 1988.

D. BARLET,
Université de Nancy I
Institut E. Cartan
CNRS UA 750
Case postale 239
F-54506 Vandoeuvre-les-Nancy.

et

H.-M. MAIRE,
Université de Genève
Section de Mathématiques
2-4, Rue du Lièvre
Case postale 240
CH-1211 Genève 24.