Annales de l'institut Fourier

Stanislas Łojasiewicz

Sur la géométrie semi- et sous- analytique

Annales de l'institut Fourier, tome 43, nº 5 (1993), p. 1575-1595

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1993__43_5_1575_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
43, 5 (1993), 1575-1595

SUR LA GÉOMÉTRIE SEMI- ET SOUS-ANALYTIQUE

par Stanislas ŁOJASIEWICZ

I. Introduction.

1. L'origine de cette géométrie provient de l'analyse d'une solution du *problème de la division* [17], [18], posé par Laurent Schwartz dans sa *Théorie des distributions* [39].

Or, vu le rôle important de la transformation de Fourier dans la théorie des opérateurs différentiels à coefficients constants, il est naturel de considérer la question suivante :

Soit P un polynôme non nul dans $\mathbf{R}^n$ et soit $P(D)$ l'opérateur différentiel qui lui correspond par la transformation de Fourier. Existe-t-il, pour toute distribution tempérée T (sur $\mathbf{R}^n$), une distribution tempérée S vérifiant l'équation

$$P(D)S = T\ ?$$

Cette question équivaut évidemment à la même question pour l'équation

$$PS = T.$$

Suivant une observation élégante de L. Schwartz, si l'on regarde la sphère (différentiable) à n dimensions comme $\Sigma = \mathbf{R}^n \cup \infty$ (après le plongement stéréographique de $\mathbf{R}^n$), alors les distributions tempérées sur $\mathbf{R}^n$ sont précisément celles qui s'étendent (comme distributions) sur Σ.

Mots-clés : Semi-analytique – Sons-analytique – Stratification – Triangulation – Séparation régulière.
Classification A.M.S. : 32B20 – 32B25 – 32C42.

Grâce à cette observation le problème se localise : il se ramène au même problème pour les distributions sur un ouvert (arbitraire) de $\mathbf{R}^n$. En outre, il suffit de le considérer pour les distributions prolongeables sur $\mathbf{R}^n$, c'est-à-dire dans l'espace $\mathcal{D}'_G$ de telles distributions (1).

Il est naturel de se poser la même question en remplaçant le polynôme P par une fonction analytique arbitraire $F \not\equiv 0$ dans G (si F n'est qu'indéfiniment dérivable, la réponse est visiblement négative). Sous cette forme elle a été posée par Laurent Schwartz dans [39] et le problème est connu sous le nom du *problème de la division*. La réponse est positive ; elle a été donnée en 1958, indépendamment, par L. Hörmander [14] — pour les polynômes, et par l'auteur [17] et [18] — pour les fonctions analytiques.

On va présenter maintenant l'idée d'une démonstration de ce résultat – le *théorème de la division*. Elle se fonde sur une analyse du comportement de la fonction F près de l'ensemble de ses zéros. On construit une partition de l'ensemble

$$Z = \{x \in Q \colon F(x) = 0\}$$

pour un voisinage convenable $Q \subset G$ d'un point $a \in G$:

$$(*) \qquad Z = \bigcup_{k=0}^{n-1} \bigcup_i \Gamma_i^k$$

en strates : sous-variétés analytiques Γ_i^k de dimensions $k = n-1, \dots, 1, 0$. Cette partition doit satisfaire à certaines conditions, en particulier – à celle de la stratification : le bord $\partial\Gamma_i^k \cap Q$ de chaque strate Γ_i^k doit être réunion de certaines strates de dimension $< k$ de cette partition.

Une inégalité joue ici un rôle fondamental :

$$(\#) \qquad |F(x)| \geqslant c\rho(x, Z)^N$$

au voisinage d'un point arbitraire $a \in Z$, avec un exposant $N > 0$ et une constante $c > 0$. Elle est valable pour chaque fonction analytique et elle résulte d'une inégalité plus générale, celle de la *séparation régulière* :

$$\rho(x, B) \geqslant c\rho(x, A \cap B)^N \text{ lorsque } x \in A,$$

pour les ensembles (fermés) A, B (elle est toujours satisfaite (localement) dans le cas des ensembles semi-analytiques (2)). En particulier, elle est

(1) Ceci est utile pour des raisons techniques (voir l'idée de la démonstration qui suit).

(2) Ils serons définis dans la suite.

vérifiée pour les adhérences $\overline{\Gamma_i^k}$ des strates de la partition $(*)$, ce qui joue aussi un rôle fondamental dans la démontration du théorème.

Or, soit $T \in \mathcal{P}'_Q$. Il faut donc trouver une solution $S \in \mathcal{P}'_Q$ de l'équation :

$$FS = T. \tag{$\square$}$$

On montre d'abord, en se servant de l'inégalité (#), que

$$(1/F)T \in \mathcal{P}'_{Q\setminus Z},$$

ce qui implique qu'il suffit de résoudre l'équation ($\square$) pour les distributions T de support contenu dans Z. On prouve par récurrence sur k que l'équation ($\square$) admet une solution de support contenu dans l'ensemble

$$Z^k = \bigcup_{k=0}^{k} \bigcup_i \Gamma_i^k,$$

$k = 0, \dots, n-1$. A savoir : Si $k = 0$, vu qu'une distribution portée par l'origine 0 est toujours de la forme

$$\sum a_p D^p \delta,$$

la solution de ($\square$) se ramène à un certain lemme algébrique. Supposons notre assertion vraie si le support du second membre de ($\square$) est contenu dans Z^{k-1} et soit $T \in \mathcal{P}'_Q$ une distribution de support dans Z^k. Grâce à la séparation régulière on montre qu'il existe une distribution $T_i^k \in \mathcal{P}'_Q$ de support dans $\overline{\Gamma_i^k}$, laquelle coïncide avec T au voisinage de la strate Γ_i^k, et ensuite on construit une distribution $S_i^k \in \mathcal{P}'_Q$ satisfaisant à l'équation

$$FS_i^k = T_i^k$$

au voisinage de cette feuille. Il en résulte qu'il suffit de résoudre l'équation ($\square$) avec le second membre

$$T - F\left(\sum_i S_i^k\right),$$

dont le support est déjà contenu dans Z^{k-1}.

Bernard Malgrange a traduit ce théorème, par dualité, dans le langage de l'analyse différentielle : dans l'anneau des fonctions indéfiniment différentiables tout idéal engendré par une fonction analytique est fermé. Il a démontré – une généralisation difficile – que ceci reste vrai pour chaque idéal engendré par un nombre fini des fonctions analytiques [31]. Avec ceci et son fameux théorème de préparation différentiable il a donné un développement important à l'analyse différentielle qu'il a présenté dans son livre "Ideals of differentiable functions" [32]; voir aussi le livre de J.-Cl. Tougeron [44].

***

Conclusion. — Une analyse de la construction de la partition $(*)$ suggère que les strates Γ_i^k sont des ensembles qui peuvent être "décrits" par des inégalités analytiques. Ensuite, la possibilité de "détacher" de la distribution T portée par Z^k sa "partie" portée par $\overline{\Gamma_i^k}$, est assurée par la propriété de la séparation régulière des ensembles de ce genre. Nous allons les définir dans la suite sous le nom de

ensembles semi-analytiques.

On aimerait donc posséder une géométrie de ces ensembles, la

géométrie semi-analytique,

avec les partitions du type $(*)$ et avec la propriété de la séparation régulière.

2. On va présenter encore une situation dans laquelle les ensembles semi-analytiques apparaissent d'une manière naturelle.

Il y a deux beaux théorèmes dans la géométrie analytique complexe :

THÉORÈME I. — *L'adhérence d'une composante connexe de l'ensemble des points lisses d'un ensemble analytique est toujours analytique.*(3)

THÉORÈME II. — *L'ensemble des points singuliers d'un ensemble analytique est aussi analytique.*(4)

Or, dans la géométrie analytique réelle aucun de ces faits ne reste valable, ce que l'on voit sur l'exemple fameux d'un ensemble algébrique dans $\mathbf{R}^3$ nommé le *parapluie de Whitney* :

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \colon x^2 z = y^2\}.$$

En effet, les adhérences de ses composantes connexes sont :

$$V \cap \{x \geqslant 0, z \geqslant 0\}, \qquad V \cap \{x \leqslant 0, z \geqslant 0\} \qquad 0 \times 0 \times (-\infty, 0].$$

(3) Voir p.ex. [27], IV.2.7.

(4) Voir p.ex. [27], IV.2.4.

On voit qu'aucune d'elles n'est analytique. Il en est de même avec l'ensemble de ses points singuliers :

$$V^* = 0 \times 0 \times [0, \infty).$$

Par contre, on prouve que les composantes connexes (et par suite leurs adhérences) aussi bien que l'ensemble des points singuliers d'un ensemble analytique sont toujours semi-analytiques.

II. Géométrie semi-analytique (voir [21] et [30]).

Soit Mune variété analytique réelle à n dimensions.

1. Un sous-ensemble E de M sera appelé *semi-analytique*, si chaque point de M possède un voisinage ouvert U tel que l'ensemble $E \cap U$ soit défini par une famille finie de systèmes finis d'inégalités de la forme $f > 0$ ou $f \geqslant 0$ avec f analytique dans U.

La définition entraîne que la classe des semi-analytiques est stable par les opérations de passage au complémentaire, d'intersection et de réunion localement finie d'ensembles. L'image inverse d'un semi-analytique par une application analytique des variétés analytiques est semi-analytique (5).

2. Afin d'étudier d'une manière plus approfondie la nature et les propriétés des ensembles semi-analytiques on utilise la technique des stratifications normales.

Une *stratification normale* $\mathcal{N}$ dans $\mathbf{R}^n$ est déterminée par un *système normal* des polynômes distingués dans un *voisinage normal* (un certain interval ouvert à n dimensions, centré à l'origine de $\mathbf{R}^n$). C'est une partition de Q en *strates semi-analytiques* : ce sont des sous-variétés analytiques qui sont en même temps des sous-ensembles semi-analytiques. Elle possède des propriétés utiles, en particulier elle satisfait à la condition du bord : pour toute feuille $\Gamma \in \mathcal{N}$ son bord (dans Q) est réunion de feuilles de $\mathcal{N}$ de dimensions strictement inférieures (à celle de Γ).

(Plus précisément, le système normal $\mathcal{N}$ est la matrice triangulaire de polynômes distingués :

(5) Par contre, l'opération de l'image par une application analytique, même propre, ne respecte pas en général la semi-analyticité des ensembles.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & H_n^{n-1} \\ & & & & \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ & & H_{k+1}^k, & \dots, & H_l^k & ,\dots, & H_n^k \\ & H_k^{k-1}, & H_{k+1}^{k-1} & ,\dots, & H_l^{k-1} & ,\dots, & H_n^{k-1} \\ \multicolumn{7}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ H_1^0,\dots,H_k^0, & & H_{k+1}^0, & \dots, & H_l^0 & ,\dots, & H_n^0, \end{array}$$

asujetti à certaines conditions, et ses strates de dimension k sont de la forme :

$$\{x_{k+1} = \phi_{k+1}(x_1,\dots,x_k)\ \dots,\ x_n = \phi_n(x_1,\dots,x_k)\}$$

avec des ϕ_j analytiques et vérifiant

$$H_j^k(x_1,\dots,x_k;\phi_{k+1}(x_1,\dots,x_k)) = 0,\ j = k+1,\dots,n.)$$

Les *stratifications normales en un point* $a \in M$ sont définies comme les images de celles de $\mathbf{R}^n$ par les cartes inverses au point a.

Comme les stratifications normales sont assez compliquées à construire, nous avons défini récemment dans un article avec K. Kurdyka et M. A. Zurro [16] les *stratifications distinguées* qui sont plus commodes.

Le théorème qui suit est fondamental en géométrie semi-analytique :

Théorème de la stratification normale. — *Étant donné des ensembles semi-analytiques $E_1,\dots,E_k$ et un point $a \in M$, il existe une stratification normale au point a d'un voisinage arbitrairement petit U de ce point, laquelle est compatible avec ces ensembles, c'est-à-dire telle que chacun des ensembles $E_i \cap U$ est réunion de strates.*

Pour le démontrer on construit un système normal qui définit la stratification demandée. On obtient les polynômes de ce système par récurrence, en partant des fonctions qui décrivent les ensembles E_i, au moyen de certaines opérations qui sont définies grâce au théorème des fonctions symmétriques.

Ce théorème implique le

Théorème de l'adhérence. — *L'adhérence d'un ensemble semi-analytique est aussi semi-analytique.*

La classe des ensembles semi-analytiques est donc stable par les opérations topologiques élémentaires comme l'adhérence, l'intérieur et la frontière. Observons que ces faits ne résultent pas d'une manière simple de la définition de la semi-analyticité.

On a ensuite :

THÉORÈME DES COMPOSANTES CONNEXES. — *Chaque composante connexe d'un semi-analytique est semi-analytique. La famille des composantes connexes d'un semi-analytique est localement finie.*

La démonstration de ce théorème (elle n'est pas simple) s'appuie sur le :

LEMME DE THOM. — *Soit $P : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ un polynôme de degré $\leqslant k$. L'ensemble :*

$$\left\{t \in \mathbf{R}\colon \frac{d^\nu P}{dt^\nu} \in \Theta_\nu,\ \nu = 0, \ldots, k\right\}$$

où chacun des Θ_ν est égal à un des ensembles

$$(-\infty, 0),\ \{0\}\ \textit{ou}\ (0, \infty)$$

est un intervalle ouvert, l'ensemble vide, ou il se réduit à un point.

3. Un lemme qui se montre très utile est le *"Curve Selecting Lemma"*. Sa version analytique provient de Bruhat, Cartan et Wallace (voir p.ex. [33] p.25, où se trouve sa version algébrique), mais sa place naturelle est dans la géométrie semi-analytique (et sous-analytique).

Définissons d'abord un *arc semi-analytique*. C'est l'image d'une immersion de l'intervalle $(0, 1)$, qui est un sous-ensemble semi-analytique relativement compact, où l'on suppose que les limites en 0 et 1[(6)] – appelées ses *extrémités* – sont distinctes. *Son adhérence est toujours un arc simple de classe C^1*, ce qui est une qualité essentielle des arcs semi-analytiques.

On montre[(7)] un THÉORÈME DE LA PARAMÉTRISATION D'UN ARC SEMI-ANALYTIQUE selon lequel *le germe d'un arc semi-analytique à son extrémité est égal au germe de l'image d'un intervalle $(0, \epsilon)$ par une application analytique non constante de $(-\epsilon, \epsilon)$, et réciproquement – après avoir diminué ϵ.*

(6) Elles existent toujours, ce qui résulte du théorème des composantes connexes.
(7) Au moyen du théorème de Puiseux (voir p.ex. [25] ou [26], II.6.2).

Curve Selecting Lemma. — *Soit $E \subset M$ un semi-analytique et soit a un point non isolé de l'adhérence $\bar{E}$. Alors l'ensemble E contient un arc semi-analytique d'extrémité a.*

(Voir [21] p.103 et [30] II.6.2.)

4. Un point d'un semi-analytique E sera appelé *point régulier de dimension k*, si un voisinage de ce point dans E est une sous-variété analytique de dimension k. Le théorème de la stratification normale entraîne que l'ensemble des points réguliers d'un ensemble semi-analytique est toujours dense dans cet ensemble.

La dimension d'un semi-analytique E est définie comme le maximum des dimensions de ses points réguliers. Citons ici deux propriétés importantes :

1) On a toujours l'inégalité $\dim(\bar{E} \setminus E) < \dim E$, pourvu que $E \neq \varnothing$. En particulier, on a l'inégalité $\dim \partial\Gamma < \dim \Gamma$ pour le bord $\partial\Gamma$ d'une strate semi-analytique Γ (non vide).

2) Si $f \; : M \longrightarrow N$ est une application analytique des variétés analytiques et les ensembles E et $f(E)$ sont semi-analytiques (non vides), alors on a toujours l'inégalité

$$\dim f(E) \leqslant \dim E.$$

Le théorème des points réguliers dit que *l'ensemble des points réguliers d'un semi-analytique est toujours semi-analytique.*

Ce théorème est l'un des plus délicats à démontrer dans la géométrie semi-analytique. Pour le prouver on utilise la technique de la complexification. (Voir [21] pp. 38-54 et 77-79, aussi que [30], II.§ 8.)

5. On appelle *stratification semi-analytique* de la variété M chaque partition localement finie $\mathcal{T}$ de cette variété en strates semi-analytiques connexes qui est soumise à la condition suivante : *pour toute strate $\Gamma \in \mathcal{T}$ son bord $\partial\Gamma = \overline{\Gamma} \setminus \Gamma$ est réunion finie de strates de $\mathcal{T}$ de dimension $< \dim \Gamma$.*

Considérons les triplets (Λ, Γ, a), où Λ, Γ sont des strates semi-analytiques de M vérifiant $\Lambda \subset \partial\Gamma$, et $a \in \Lambda$. On appelle *condition d'incidence* chaque condition portant sur un tel triplet qui ne dépend que des germes des strates Λ, Γ au point a.

Une telle condition d'incidence est dite *semi-analytique* si pour chaque couple de strates semi-analytiques comme ci-dessus l'ensemble des points

$a \in \Lambda$, où cette condition est remplie, est un semi-analytique (de M) dense dans Λ.

Citons ici certaines conditions d'incidence, bien connues : les conditions (a) et (b) de Whitney et la condition (w) de Verdier. Dans le cas où $M = \mathbf{R}^n$ elles sont définies par :

$$(a) \qquad \delta(T_a\Lambda, T_x\Gamma) \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad \Gamma \ni x \longrightarrow a,$$

$$(b) \quad \delta(\mathbf{R}(x-z), T_x\Gamma) \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad \Gamma \ni x \longrightarrow a \quad \text{et} \quad \Lambda \ni z \longrightarrow a,$$

$$(w) \quad \delta(T_z\Lambda, T_x\Gamma) = \mathrm{O}(|x-z|) \quad \text{lorsque} \quad \Gamma \ni x \longrightarrow a \quad \text{et} \quad \Lambda \ni z \longrightarrow a,$$

où $\delta(S, T)$ est la borne supérieure du sinus de l'angle entre une droite contenue dans S et l'espace T. Vu que ces conditions sont invariantes par les difféomorphismes, elles sont bien définies (au moyen des cartes) dans le cas d'une variété analytique.(8)

On démontre que *toutes ces conditions (a), (b) et (w) sont semi-analytiques.* (Voir [45], [28] et [25].)

THÉORÈME DE LA STRATIFICATION SEMI-ANALYTIQUE. — *Soit (γ)une condition d'incidence semi-analytique. Pour chaque famille localement finie de semi-analytiques de M il existe une stratification semi-analytique compatible avec cette famille. On peut exiger en plus que pour tout couple de strates Λ, Γ de cette stratification, vérifiant $\Lambda \subset \partial\Gamma$, la condition (γ) soit satisfaite en chaque point de Λ.*

Voir [21], [45], [28] et [7].

THÉORÈME DE LA TRIANGULATION SEMI-ANALYTIQUE. — *Soit $\mathcal{F}$ une famille localement finie de semi-analytiques de M. Alors il existe une stratification semi-analytique de M, comptabible avec $\mathcal{F}$ dont les strates sont les images des simplexes d'un complexe géométrique (rectilinéaire) K dans $\mathbf{R}^n$ par un homéomorphisme $h\colon |K| \longrightarrow M$(9), tel que toutes les restrictions $h_S\colon S \longrightarrow h(S), S \in K$, soient des isomorphismes analytiques.*

Voir [19].

(8) On a $(w) \Longrightarrow (b) \Longrightarrow (a)$; la première implication (la semi-analyticité y est essentielle !), c'est un théorème de Kuiper-Kuo ; voir [45].

(9) Voir la remarque dans III.1 qui suit.

Il y a une condition beaucoup plus fine que les conditions d'incidences ci-dessus : celle de la *stratification lipschitzienne* due à T. Mostowski qui a démontré un théorème d'existence de telles stratifications (dans le domaine complexe). Grâce à ce théorème T. Mostowski a résolu un problème, vieux et très difficile, celui de *l'équisingularisation lipschitzienne* (voir [34]).

Le cas réel (semi-analytique) a été continué par son élève A. Parusiński qui a démontré un *théorème des stratifications lipschitziennes semi-analytiques.* Voir [35] et [36].

III. Géométrie semi-algébrique (voir [21] 21a-b, [2] et [30] II.10).

1. *Les sous-ensembles semi-algébriques de* $\mathbf{R}^n$, sont ceux qui sont définis par une famille finie d'inégalités de la forme $P > 0$ ou $P \geqslant 0$ avec P polynôme sur $\mathbf{R}^n$.

Les sous-ensembles semi-algébriques de $\mathbf{R}^n$ forment évidemment une algèbre d'ensembles. On a un théorème fondamental :

THÉORÈME DE TARSKI-SEIDENBERG. — *L'image d'un sous-ensemble semi-algébrique quelconque de* $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k$ *par la projection naturelle* $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k \longrightarrow \mathbf{R}^n$ *est semi-algébrique.*

Il en résulte en particulier que *l'opération* de ***l'image*** *par une application polynomiale ou même semi-algébrique (c'est-à-dire de graphe semi-algébrique) respecte la semi-algébricité.*

Un exemple simple d'application de ce théorème est une preuve du fait que l'adhérence d'un semi-algébrique est semi-algébrique. Pour le vérifier il suffit de détailler la définition de l'adhérence et d'en éliminer les quantificateurs (au moyen de ce théorème).

C'est la méthode de Bernard Malgrange des polynômes génériques qui permet de généraliser Tarski-Seidenberg de la manière suivante. Soit M une variété analytique. Un sous-ensemble du produit $\mathbf{R}^n \times M$ est dit *partiellement semi-algébrique*, ou de manière plus précise : $\mathbf{R}^n$*-semi-algébrique*, si tout point de M possède un voisinage ouvert U tel que notre sous-ensemble est défini dans $\mathbf{R}^n \times U$ par une famille finie d'inégalités de la forme $F > 0$ ou $F \geqslant 0$ avec F polynôme dans les variables de $\mathbf{R}^n$ à coefficients analytiques dans U. Or :

COROLLAIRE. — *Supposons que le graphe d'une application de* $\mathbf{R}^n$ *dans* M *est partiellement semi-algébrique. Alors l'image de chaque semi-algébrique de* $\mathbf{R}^n$ *par cette application est semi-analytique.* (Voir [21] 20.)

Remarque. — Dans le théorème de la triangulation en II.5 l'homéomorphisme h est $\mathbf{R}^n$-semi-algébrique. Par conséquent l'image par h de tout simplexe de $\mathbf{R}^n$ est semi-analytique.

Voilà un autre théorème important :

THÉORÈME DES COMPOSANTES CONNEXES. — *Chaque composante connexe d'un semi-algébrique est aussi semi-algébrique. La famille des composantes connexes d'un semi-algébrique est finie.*

Voir [21], pp. 05-112, [2] chap. 2 et [30], II.10.

2. Une *fonction de Nash* est une fonction analytique ϕ dans un ouvert de $\mathbf{R}^n$ telle que chaque point de cet ouvert possède un voisinage dans lequel on a $W(x, \phi(x)) \equiv 0$ avec un polynôme $W \not\equiv 0$ sur $\mathbf{R}^{n+1}$. On appelle *application de Nash* chaque application d'un ouvert de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^k$ dont les composantes sont fonctions de Nash.

Vu que la composée des applications de Nash est de Nash et qu'il subsiste le théorème des fonctions implicites de Nash, on a les *variétés de Nash* (10).

Il y a une propriété curieuse des sous-variétés de Nash qui sert par exemple dans une preuve du théorème du cônes semi-analytiques (voir n° 5 qui suit) :

Une sous-variété de Nash connexe $\Gamma \subset \mathbf{R}^n$ *est semi-algébrique si et seulement si son bord* $\partial\Gamma$ *est semi-algébrique.*

On montre que l'on a tous les outils nécessaires pour transmettre la géométrie semi-analytique (au moins dans la partie que l'on a présentée ici) sur la catégorie de Nash, pour avoir la géométrie des ensembles "de Nash". Or, il se trouve que :

Les ensembles "semi-Nash" d'un ouvert G *de* $\mathbf{R}^n$, *sont précisément les ensembles localement semi-algébriques de* G (11).

(10) Attention : Cette notion est formellement naturelle mais trop générale. C'est pour ça que M. Shiota appelle dans son livre [40] "variété de Nash" une notion plus intéressante que l'on va définir dans le n° 3 sous le nom "variété de Nash semi-algébrique".

(11) C'est-à-dire les sous-ensembles (de G) dont les germes en chaque point de G sont ceux des sous-ensembles semi-algébriques (de $\mathbf{R}^n$).

3. Une *structure de variété de Nash semi-algébrique* est définie par un atlas de Nash *semi-algébrique*, c'est-à-dire un atlas de Nash $\{\phi_i\}$fini et tel que les composés $\phi_i^{-1} \circ \phi_j$ sont semi-algébriques [(12)].

Dans une variété de Nash semi-algébrique on définit un ensemble semi-algébrique par la condition que ses images par les cartes d'un atlas soient semi-algébriques[(13)].

On vérifie facilement que la structure de variété de Nash semi-algébrique est déterminée par sa classe de sous-ensembles semi-algébriques.

On montre que sur une variété de Nash compacte N il existe une et une seule structure de Nash semi-algébrique[(14)].

Par conséquent, sur une variété de Nash compacte les sous-ensembles semi-algébriques sont bien définis.

En particulier, ceci a lieu sur les grassmanniennes $\mathbf{G}_k^n$ (et donc sur les espaces projectifs $\mathbf{P}^n$) aussi que sur les sphères $\mathbf{S}^{\mathbf{n}}$[(15)].

Il se trouve que si l'on considère $\mathbf{S}^{\mathbf{n}}$ ou $\mathbf{P}^n$ comme un complété naturel de $\mathbf{R}^n$, alors *un sous-ensemble de* $\mathbf{R}^n$ *est semi-algébrique si et seulement s'il est semi-algébrique ou localement semi-algébrique* [(16)] *dans* $\mathbf{S}^{\mathbf{n}}$ *ou* $\mathbf{P}^n$, *respectivement.*

Ceci permet de se servir des méthodes de la géométrie semi-analytique dans la géométrie semi-algébrique.

4. Soit $\Gamma \subset \mathbf{R}^n$ une strate semi-analytique de dimension k. On considère *l'application - tangente* :

$$\tau : \Gamma \ni x \longrightarrow T_x\Gamma \in \mathbf{G}_k^n.$$

Dans les fondements de la géométrie sous-analytique (voir IV.2 qui suit) le théorème suivant joue un rôle esentiel :

THÉORÈME DE L'APPLICATION - TANGENTE. *L'image inverse par* τ *d'un semi-algébrique quelconque de* $\mathbf{G}_k^n$ *est un semi-analytique.*

---

(12) Deux atlas équivalents (c'est-à-dire tels que leur réunion est un atlas) définissant la même stucture.

(13) La condition ne dépend pas de l'atlas (dans sa classe d'équivalence).

(14) Laquelle soit compatible avec N, c'est-à-dire qui puisse être définie par un atlas de N.

(15) Leurs atlas naturels sont de Nash semi-algébriques.

(16) Ceci revient au même.

Voir [22] et [30], II prop.10.18.

5. Dans la géométrie analytique complexe il y a un théorème fameux de Chow selon lequel chaque ensemble analytique de l'espace projectif est forcément algébrique. Une démonstration extrêmement simple de ce théorème a éte trouvée par Remmert grâce au lemme de Cartan - Remmert - Stein qui dit que tout cône analytique de $\mathbf{C}^n$ est nécessairement algébrique(17). Un analogue réel de ce lemme est le suivant :

THÉORÈME DES CÔNES SEMI-ANALYTIQUES. — *Chaque cône semi-analitique de $\mathbf{R}^n$ est semi-algébrique.*

Voir [24] et [30], II.11.

Or, ce théorème entraîne un fait remarquable :

L'image par une projection d'un semi-analytique, même compact, n'est pas nécessairement semi-analytique.

On a en effet :

∗ *Exemple.* — *L'ensemble*

$$F = \{x = 1, z = e^y, 0 \leqslant y \leqslant x\} \subset \mathbf{R}^3$$

n'est pas semi-algébrique. (Ceci est clair parce que la fonction $y \longrightarrow e^y$ *n'est pas de Nash.) Par conséquent, grâce au théorème des cônes semi-analytiques, le cône* $[0,\infty)F$ *ne peut pas être semi-analytique, ce qui entraîne que l'ensemble*

$$E = [0,\infty)F \cap \{0 \leqslant x \leqslant 1\} = 0 \cup \{z = xe^{y/x}, 0 < x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant x\},$$

ne l'est plus. Mais l'ensemble E *est l'image par la projection* $(x,y,z,u) \longrightarrow (x,y,z)$ *de l'ensemble semi-analytique compact :*

$$\{y = xu, z = xe^u, 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant u \leqslant 1\} \subset \mathbf{R}^4.$$

Voir [24] et [30], II.11. *cf*. aussi [21] pp.133-135 (18).

(17) Voir p.ex. [27], VII.6 et II.3.3.

(18) Les racines de ce phénomène se trouvent déjà dans le vieil ouvrage classique de Osgood sur l'analyse complexe.

IV. Géométrie sous-analytique (voir [30]).

On a observé dans III.5 (∗ *Exemple*) que l'opération de l'image par une projection ne respecte pas la semi-analyticité des ensembles, même s'ils sont compacts [19] : dans la géométrie semi-analytique il n'y a aucun analogue raisonnable du théorème de Tarski - Seidenberg, ce qui est un inconvénient majeur. Pour cette raison il se pose une question naturelle : est-ce que l'on peut généraliser les résultats de la géométrie semi-analytique sur une classe plus ample d'ensembles, en espérant y trouver un analogue du théorème de Tarski - Seidenberg? Or, un bon candidat naturel qui s'impose, c'est la classe des ensembles qui sont localement images par les projections des ensembles semi-analytiques relativement compacts.

Le premier obstacle que l'on rencontre est d'un caractère très élémentaire : la classe est-elle stable par l'opération du complémentaire? Cette difficulté a été surmontée par A. M. Gabrielow dans [8] et alors la voie s'est montrée ouverte par des méthodes standard pareilles à celles que l'on a utilisées dans la géométrie semi-analytique.

Quelques années après, H. .Hironaka dans [11] a traité cette classe d'ensembles, en leur donnant le nom bien adéquat de *sous-analytiques*. Il a réussi à transmettre la géométrie semi-analytique à cette classe, en utilisant son grand théorème de désingularisation [20]. En même temps R. H. Hardt dans [9] a introduit et examiné les "analytic shadows" ; ils se sont révélés ultérieurement être sous-analytiques. Le théorème de la désingularisation étant extrêmement difficile à démontrer, c'était encore justifié de développer des méthodes directes comme celles de la géométrie semi-analytique, en réalisant d'ailleurs notre ancien programme. C'est sur ces méthodes que cette présentation-ci de la géométrie sous-analytique est basée (voir [30]).

Il est utile d'observer que E. Bierstone et P.D. Milman ont donné dans [1] une approche bien intéressante de cette géométrie. Ils ont réussi à trouver des démonstrations directes et relativement simples des théorèmes de l'uniformisation et de la rectilinéarisation qui sont à la base de la technique de Hironaka (voir aussi H.J. Sussmann [45]).

∗ ∗ ∗

(19) Sans aucune hypothèse supplémentaire on peut avoir comme l'image p.ex. l'ensemble des rationnels !

(20) C'est un des plus profonds théorèmes de l'analyse, dont la démonstration était – selon Jean Dieudonné – la deuxième, quant à la longueur, en mathématiques.

1. Soit M une variété analytique réelle. Un sous-ensemble E de M est dit *sous-analytique*, si son trace sur un voisinage d'un point arbitraire de M est l'image par la projection $M \times \mathbf{R}^k \longrightarrow M$ d'un semi-analytique relativement compact de $M \times \mathbf{R}^k$ (où k dépend de x).

Évidemment, un ensemble sous-analytique relativement compact est l'image par projection d'un semi-analytique relativement compact (et réciproquement).

On vérifie facilement que la classe des sous-ensembles sous-analytiques est stable par les opérations de réunion et d'intersections localement finies(21). Le produit de deux sous-analytiques est sous-analytique.

2. Quant aux *applications sous-analytiques*, c'est-à-dire celles des graphes sous-analytiques(22), les théorèmes de la sous-analyticité de la composée et de l'image directe et inverse (d'un sous-analytique) sont vrais sous certaines hypothèses supplémentaires de compacité relative. Par exemple, pour une application sous-analytique $f\colon A \longrightarrow N$ avec $A \subset M$ (où N est une variété analytique réelle) et pour un sous-analytique $E \subset M$, l'image $f(E)$ est sous-analytique, pourvu que E soit relativement compact ou f soit "horizontalement" relativement compacte, ce qui signifie que $f^{-1}(W)$ est relativement compact pour un voisinage W d'un point arbitraire de N.

3. Il y a plusieurs théorèmes de géométrie semi-analytique qui se généralisent facilement sur le cas sous-analytique (23). On a ici :

Théorème de l'adhérence. (Voir II.2.)

Les autres opérations topologiques élémentaires respectent aussi la sous-analyticité.

Théorème des composantes connexes. (Voir II.2.)

Curve Selecting Lemma. (Voir II.3.)

Observons qu'un arc "sous-analytique" est toujours semi-analytique (voir n° 8 qui suit).

---

(21) Et du complémentaire, selon le théorème du complémentaire de Gabrielov (voir n° 5 qui suit).

(22) Il y en a en particulier toutes les applications analytiques qui sont définies dans la variété toute entière.

(23) Chacun résulte de son correspondant et on n'utilise essentiellement que les définitions.

Le THÉORÈME DE L'APPLICATION - TANGENTE (voir III.4) dit simplement que le graphe de cette application est sous-analytique. La démonstration est plus simple : il suffit de détailler d'une manière convenable la définition de ce graphe.

Observons encore qu'il en est de même dans le cas semi-algébrique.

4. Afin d'avancer l'étude des sous-analytiques on se sert de certains lemmes de base qui permettent de présenter un sous-analytique relativement compact comme une réunion finie d'images par une projection d'ensembles semi-analytiques de manière que les restrictions soient de rang constant ou même des immersions, et que l'on ait un certain contrôle de la variation de la tangente.

Après avoir établi un certain nombre de propriétés de la dimension (analogues à celles que l'on a eu dans II.4 pour le cas semi-analytique) on démontre le

THÉORÈME DU COMPLÉMENTAIRE DE GABRIELOV. — *Le complémentaire d'un sous-analytique est toujours sous-analytique.*

On a un lemme bien utile :

LEMME DE STASICA. — *Chaque ensemble sous-analytique relativement compact*

$$\Gamma \subset M \times N,$$

telle que la projection naturelle $\pi_\Gamma : \Gamma \longrightarrow M$ *soit une immersion, admet une partition*

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \ldots \cup \Gamma_m \cup F,$$

où F *est un sous-analytique (dans* $M \times N$*) de dimension* $< \dim \Gamma$, *et chaque* Γ_i *est un ouvert de* Γ, *sous-analytique dans* $M \times N$, *tel que l'image* $\Delta_i = \pi(\Gamma_i)$ *soit un ensemble sous-analytique et que la restriction* $\pi_{\Gamma_i} : \Gamma_i \longrightarrow M$ *soit un isomorphisme analytique*[(24)].

5. Il y a aussi le

THÉORÈME DES POINTS RÉGULIERS (cf. II.4)

lequel n'est point facile à démontrer. Ce sont : M. Tamm [43] qui a prouvé ce théorème en s'appuyant sur le théorème de désingularisation

(24) C'est-à-dire que Γ_i soit le graphe de l'application analytique $\Delta_i \longrightarrow N$.

de Hironaka, et puis K. Kurdyka [15] qui a trouvé une démonstration sans désingularisation.

6. Étant donné un sous-analytique $E \subset M$, un point $a \in M$ est appelé *point essentiellement sous-analytique de* E si le germe E_a n'est pas semi-analytique (c'est-à-dire si $E \cap U$ n'est semi-analytique pour aucun voisinage ouvert U de a).

Alors on a un théorème bien naturel et très simple à énoncer :

THÉORÈME DE PAWŁUCKI. — *L'ensemble des points essentiellement sous-analytiques d'un sous-analytique est toujous sous-analytique.*

Sans doute, parmi les faits établis en géométrie sous-analytique le théorème de Pawłucki est le plus difficile à prouver (la démonstration compte environ soixante dix pages !).

7. Il y a un autre théorème intéressant de Gabrielov :

THÉORÈME DES COMPOSANTES DE LA FIBRE. — *Soit* $E \subset M \times N$ *un sous-analytique relativement compact. Alors le nombre des composantes connexes de la fibre* $E_x = \{y\colon (x,y) \in E\}$ *est borné lorsque* $x \in M$.

La preuve de ce théorème n'est pas tellement simple. On le montre dans le cas semi-analytique (ce qui suffit) par récurrence sur $k = \max\dim E_x$ en utilisant les propriétés des stratifications normales (voir II.2).

8. On a ensuite :

THÉORÈME DES SOUS-ANALYTIQUES DE PETITE DIMENSION. — Chaque sous-analytique de dimension $\leqslant 1$ ainsi que chaque sous-analytique d'une variété de dimension $\leqslant 2$ est nécessairement semi-analytique.

Ce fait résulte d'une manière assez simple des propriétés des arcs semi-analytiques (voir II.3) et du corollaire de III.1 du théorème de Tarski - Seidenberg.

9. Le dernier théorème permet de prouver d'une manière facile les THÉORÈMES DE LA SÉPARATION RÉGULIÈRE. (Cette manière de les démontrer est plus proche de l'idée de Hörmander [14].)

THÉORÈME I. — *Soient* A *et* B *deux sous-analytiques compacts de* $\mathbf{R}^n$. *On a alors*

$$\rho(x, B) \geqslant d\rho(x, A \cap B)^N \qquad \textit{lorsque} \qquad x \in A,$$

avec une constante $d > 0$ et un exposant $N > 0$.

THÉORÈME II. — *Soit $f: A \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction sous-analytique et continue sur un compact $A \subset \mathbf{R}^n$. On a alors*

$$|f(x)| \geqslant d\rho(x, Z)^N \qquad \text{lorsque} \qquad x \in A$$

avec une constante $d > 0$ et un exposant $N > 0$, où

$$Z = \{x: f(x) = 0\}.$$

Visiblement, le deuxième théorème est un cas particulier du premier.

Il implique l'inégalité suivante, pour une fonction analytique quelconque $f \not\equiv 0$ au voisinage de zero dans $\mathbf{R}^m$:

$$|\mathrm{grad}\,(x)| \geqslant |(x)|^{\Theta} \qquad \text{au voisinage de zéro}$$

avec un exposant Θ vérifiant

$$0 < \Theta < 1.$$

En se servant de cette inégalité on montre le

THÉORÈME DES TRAJECTOIRES DU GRADIENT. — *Soit $f \geqslant 0$ une fonction analytique au voisinage de zéro dans $\mathbf{R}^n$ et considérons le système dynamique*

$$\dot{x} = -\mathrm{grad}\, f(x).$$

Alors chaque trajectoire $x(t)$ qui part d'un point suffisamment voisin de zéro, possède une limite lorsque $t \longrightarrow \infty$.

Il y a un problème difficile, appelé PROBLÈME DE LA TANGENTE, qui a été posé par René Thom il y a au moins une vingtaine d'années, et qui **n'est pas encore résolu** :

Est-ce que les tangentes à ces trajectoires possèdent aussi une limite ?

10. Terminons cet article avec certains informations sur les stratifications et triangulations. Or, les

THÉORÈMES DE LA STRATIFICATION ET DE LA TRIANGULATION correspondants (cf. II.5) sont vrais dans les cas sous-analytique et semi-algébrique.

Les démonstrations des théorèmes de stratification (avec les conditions d'incidence), peuvent être répéter sans des modifications essentielles.

Notons un théorème beaucoup plus fin, démontré récemment par A. Parusiński [37], à savoir :

THÉORÈME DE LA STRATIFICATION SOUS-ANALYTIQUE LIPSCHITZIENNE.

Les théorèmes de la triangulation sous-analytique et semi-algébrique sont essentiellement plus simples à prouver (voir [13] et [25]), parce que la récurrence sur la dimension de l'espace n'exige pas de choix d'une direction, comme dans le cas semi-analytique où il manque un théorème du type Tarski - Seidenberg.

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. BIERSTONE, P.D. MILMAN, Semi-analytic and Subanalytic Sets, Publications de l'IHES, 67 (1988), 5-42.

[2] J. BOCHNAK, M. COSTE, M.-F. ROY, Géométrie algébrique réelle, Springer, 1987.

[3] M. COSTE, M.-F. ROY, Encore une démonstration de l'existence des stratifications satisfaisant la condition (w) de Verdier, Bull. Acad. Sci. Pol., 37 (1989), 597-601.

[4] Z. DENKOWSKA, S. ŁOJASIEWICZ, J. STASICA, Certaines propriétés élémentaires des ensembles sous-analytiques, Bull. Acad. Sci. Pol., 27 (1979), 529-536.

[5] Z. DENKOWSKA, S. ŁOJASIEWICZ, J. STASICA, Sur le théorème du complémentaire pour les ensembles sous-analytiques, ibid., 537-539.

[6] Z. DENKOWSKA, S. ŁOJASIEWICZ, J. STASICA, Sur le nombre des composantes connexes de la section d'un sous-analytique, ibid., 30 (1982), 333-335.

[7] Z. DENKOWSKA, K. WACHTA, Une construction de la stratification avec la condition (w), ibid., 35 (1987), 401-405.

[8] A. M. GABRIELOV, Projections des ensembles semi-analytiques (en russe), Funkc. Analiz i iego Priloz., 2 n° 4 (1969), 18-30.

[9] R. HARDT, Stratification of real analytic maps and images, preprint (environ 1973).

[10] R. HARDT, Triangulation of subanalytic sets and proper light subanalytic maps, Invent. Math., 38 (1977), 207-217.

[11] H. HIRONAKA, Subanalytic sets, Number Theory in Honor of Y. Akizuki, Kinokuniya, Tokyo (1973).

[12] H. HIRONAKA, Introduction to real analytic sets and real analytic maps, Univ. di Pisa (1973).

[13] H. HIRONAKA, Triangulation of algebraic sets, Prodeedings of Symp. in Pure Math., vol. 29 (1975).

[14] L. HÖRMANDER, On the division of distributions by polynomials, Arkiv för Matematik, 3 (1958), 555-568.

[15] K. KURDYKA, Points réguliers d'un ensemble sous-analytique, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 38–1 (1988), 133-156.

[16] K. KURDYKA, S. ŁOJASIEWICZ, M.A. ZURRO, Stratifications distinguées comme un outil dans la géométrie semi-analytique (en préparation).

[17] S. ŁOJASIEWICZ, Division d'une distribution par une fonction analytique des variables réelles, C. R. Acad. Sci. Paris, 246 (1958), 683-686.

[18] S. ŁOJASIEWICZ, Sur le problème de la division, Studia Math., 18 (1959), 87-136, et Rozprawy Matem., 22 (1961).

[19] S. ŁOJASIEWICZ, Une propriété topologique des ensembles analytiques réels, Coll. du C.N.R.S. sur les équations aux derivés partielles, Paris 1962, 87-89.

[20] S. ŁOJASIEWICZ, Triangulation of semi-analyticc sets, Ann. Scuola Norm. Sup. di Pisa, ser. 3, 18-4 (1964), 449-474.

[21] S. ŁOJASIEWICZ, Ensembles semi-analytiques, IHES, 1965.

[22] S. ŁOJASIEWICZ, Sur la semi-analycité des images inverse par l'application-tangente, Bull. Acad. Sci. Pol., 17 (1979), 525-527.

[23] S. ŁOJASIEWICZ, Sur la séparation régulière, Seminari Geometria, Bologna, 1985, 119-121.

[24] S. ŁOJASIEWICZ, Sur les cônes semi-analytiques, ibid., 123-125.

[25] S. ŁOJASIEWICZ, Stratifications et triangulations sous-analytiques, ibid., 1986, 83-97.

[26] S. ŁOJASIEWICZ, Wstęp do geometrii analitycznej zespolonej, PWN, Warszawa, 1988.

[27] S. ŁOJASIEWICZ, Introduction to Complex Analytic Geometry, Birkkaüser, Basel, 1991.

[28] S. ŁOJASIEWICZ, J. STASICA, K. WACHTA, Stratifications sous-analytiques. Condition de Verdier, Bull. Acad. Sci. Pol. 36 (1986), 531-539, y Seminari di Geometria, Bologna, 1988-1991, 83-88.

[29] S. ŁOJASIEWICZ, J.-Cl. TOUGERON, M.A. ZURRO, Eclatant les coefficients des séries entières. Applications en géométrie sous-analytique (en préparation).

[30] S. ŁOJASIEWICZ, M.A. ZURRO, Una introducción a la geometria semi- y sub-analitica, Univ. de Valladolid, 1993.

[31] B. MALGRANGE, Division des distributions, Séminaire L. Schwartz 1959/60, exposés 21-25.

[32] B. MALGRANGE, Ideals of differentiable functions, Oxford. Univ. Press, 1966.

[33] J. MILNOR, Singular points of complex hypersurfaces, Annals of Math. Studies, 61 (1968).

[34] T. MOSTOWSKI, Lipschitz Equisingularity, Dissertationes Mathematicae (Rozprawy Matem.) 243 (1985).

[35] A. PARUSIŃSKI, Lipschitz stratification of real analytic sets, Singularities, Banach Center Publ. XX, Warsaw (1988), 323-333.

[36] A. PARUSIŃSKI, Lipschitz properties of semianalytic sets, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 38-4 (1988), 189-213.

[37] A. PARUSIŃSKI, Lipschitz stratification of subanalytic sets, Ann. Ecole Norm. Sup. (sous presse).

[38] W. PAWLUCKI, Points de Nash des ensembles sous-analytiques, Memoirs Am. Math. Soc., 425 (1990).

[39] L. SCHWARTZ, Théorie des distributions, Paris, 1957-1958.

[40] M. SHIOTA, Nash Manifolds, Springer Lecture Notes Math., 1269 (1987).

[41] J. STASICA, The Whitney condition for subanalytic sets, Zesz. Nauk. U.J., Prace Mat., 32 (1982), 211-221.

[42] H.J. SUSSMAN, Real-analytic desingularisation and subanalytic sets : an elementary approach, Trans. Amer. Nath. Soc., 317 (1990), 417-461.

[43] M. TAMM, Subanalytic sets in calculus of variations, Acta Math. Uppsala, 146(1981), 167-199.

[44] J.-Cl. TOUGERON, Idéaux des fonctions différentiables, Springer, 1972.

[45] J.-L. VERDIER, Stratifications de Whitney et le théorème de Bertini-Sard, Inventiones Math., 36 (1976), 259-312.

Stanislas ŁOJASIEWICZ,
Département de Mathématiques
Université de Cracovie
Cracovie (Pologne).