ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JACQUES DIXMIER

Traces sur les C^*-algèbres

Annales de l'institut Fourier, tome 13, nº 1 (1963), p. 219-262
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1963__13_1_219_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
13 (1963), 219-262.

TRACES SUR LES C*-ALGÈBRES

par Jacques DIXMIER (Paris).

Cet article est tout entier consacré aux C*-algèbres, mais se compose de trois parties très différentes.

Au chapitre I, on étudie la notion de trace sur une C*-algèbre A. Une trace sur A peut être envisagée soit comme une forme linéaire sur un idéal bilatère auto-adjoint de A, soit comme une fonction positive partout définie sur A^+, à valeurs éventuellement infinies. Seul le premier point de vue a été systématiquement développé jusqu'ici (cf. [10], où l'on considère plutôt, à vrai dire, qu'une trace est une forme sesquilinéaire), et ceci est gênant dans certaines questions : par exemple, la notion de somme de deux traces n'est pas claire. Le deuxième point de vue est expliqué ici.

L'étude des GCR-algèbres (cf. notations et rappels) révèle quelques phénomènes pathologiques ([5], § 2). Le but du chapitre II est d'introduire une classe de GCR-algèbres pour laquelle ces phénomènes ne se produisent pas; on peut espérer par ailleurs que les C*-algèbres des groupes de Lie de type I font partie de cette classe. Les raisonnements qu'on est amené à faire redonnent en quelques lignes des résultats établis par I. Kaplansky au moyen de démonstrations assez longues : on l'a signalé au début du chapitre II.

Le chapitre III est consacré au théorème de Plancherel non commutatif. Soit G un groupe localement compact séparable et unimodulaire, muni d'une mesure de Haar γ. En utilisant la réduction des algèbres de von Neumann, Mautner et Segal ([15], [17]) ont prouvé qu'il existe : 1) un ensemble Ω

muni d'une mesure positive μ; 2) pour tout $t \in \Omega$, une représentation unitaire factorielle $s \rightarrow U_t(s)$ de G, de telle sorte que, pour toute fonction $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$, on ait

$$\int_G |f(\gamma)|^2 \, d\gamma = \int_\Omega \mathrm{Tr}\,(U_t(f)U_t(f)^*) \, d\mu(t),$$

où Tr désigne la trace convenablement normalisée sur le facteur engendré par $U_t(G)$.

L'ensemble des classes (pour la quasi-équivalence) de représentations unitaires factorielles de G peut être muni d'une structure borélienne, d'où un espace borélien $\tilde{G}$ [7]. On montre alors, dans une deuxième étape, que Ω est isomorphe à un sous-espace borélien standard de $\tilde{G}$, de sorte que la formule précédente peut s'écrire sous forme plus intrinsèque

$$\int_G |f(\gamma)|^2 \, d\gamma = \int_{\tilde{G}} \mathrm{Tr}\,(U_t(f)U_t(f)^*) \, d\nu\,(t)$$

ν étant une certaine mesure sur $\tilde{G}$. Cette théorie a été aussi exposée dans le cas plus général des algèbres munies de traces ([7], [10]).

La mesure ν ne peut être définie qu'à une équivalence près puisque chaque trace Tr n'est définie qu'à un facteur multiplicatif près. Supposons désormais que G soit un GCR-groupe, toujours unimodulaire séparable. Alors $\tilde{G}$ est l'espace borélien (noté plutôt $\hat{G}$) des représentations unitaires irréductibles de G [14]. On peut prendre pour Tr la trace usuelle, et la mesure ν, ou *mesure de Plancherel*, est alors déterminée de manière unique (une fois γ choisie).

Les deux étapes de la méthode résumée ci-dessus utilisent la séparabilité de G. Le but du chapitre III est : 1) d'exposer une méthode différente et plus directe; 2) de démontrer ainsi le théorème de Plancherel, sans hypothèse de séparabilité, pour les GCR-groupes unimodulaires (et, plus généralement, pour les GCR-algèbres munies de traces). En outre $\hat{G}$ est muni canoniquement d'une topologie qui en fait un espace localement quasi-compact [9]. Nous verrons que : 3) la mesure de Plancherel est une mesure de Radon sur $\hat{G}$, en un sens qui généralise directement la notion de mesure de Radon sur un espace localement compact.

Le chapitre III repose sur le chapitre I, mais le chapitre II est, pour l'essentiel, indépendant des deux autres.

Notations et rappels. — 1. On note **R** l'ensemble des nombres réels, **C** l'ensemble des nombres complexes.

2. Si E est un espace vectoriel ordonné, on note E^+ l'ensemble des éléments $\geqslant 0$ de E.

3. Si T est un espace localement compact, on note $\mathcal{K}(T)$ l'ensemble des fonctions continues réelles sur T à support compact.

4. Un espace quasi-compact est un espace topologique qui vérifie l'axiome de Borel-Lebesgue, sans être nécessairement séparé. Un espace localement quasi-compact est un espace topologique dans lequel tout point admet un système fondamental de voisinages quasi-compacts. Toute partie ouverte, toute partie fermée d'un espace localement quasi-compact sont localement quasi-compacts.

5. Soit H un espace hilbertien. Tout opérateur linéaire continu $A \geqslant 0$ dans H admet une trace $\geqslant 0$, finie ou non, égale à $\Sigma(A\,\xi_i|\xi_i)$ si (ξ_i) est une base orthonormale de H. On emploiera la notation Tr(A) exclusivement pour cette notion de trace (on a seulement fait exception dans l'introduction).

6. Soit A une algèbre de Banach involutive. On appelle unité approchée de A une famille $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, indexée par un ensemble filtrant croissant, telle que $\|u_\lambda\| \leqslant 1$, $u_\lambda x \rightarrow x$ et $xu_\lambda \rightarrow x$ pour tout $x \in A$. Soit π une représentation de A dans un espace hilbertien H. On a $\|\pi(x)\| \leqslant \|x\|$ pour tout $x \in A$. Pour tout $\xi \in H$ et tout $x \in A$, on a $\|\pi(u_\lambda)\pi(x)\xi - \pi(x)\xi\| \rightarrow 0$. Si π est non dégénérée, c'est-à-dire si les vecteurs $\pi(x)\xi$ $(x \in A,\ \xi \in H)$ forment un ensemble total dans H, on voit que $\pi(u_\lambda)$ tend fortement vers 1.

7. Une C*-algèbre A est dite CCR si, pour toute représentation irréductible π de A dans un espace hilbertien et tout $x \in A$, $\pi(x)$ est compact. Une C*-algèbre A′ est dite GCR si tout quotient non nul de A′ admet un idéal CCR non nul, autrement dit si A′ admet une suite de composition à quotients CCR; si A′ est séparable, ceci revient à dire que A′ est de type I. Un groupe localement compact est dit GCR si sa C*-algèbre est GCR.

8. Soit A une C*-algèbre. Les classes de représentations irréductibles non dégénérées de A dans un espace hilbertien (variable avec la représentation) forment un ensemble $\hat{A}$. La topologie de Jacobson sur l'ensemble des idéaux primitifs de A définit une topologie sur $\hat{A}$; l'espace topologique $\hat{A}$ s'appelle le spectre de A; il est localement quasi-compact.

I. — Traces dans les C*-algèbres.

1. Existence de certaines unités approchées.

Le lemme 1 est un cas particulier d'un résultat de Rellich ([16], Hilfsatz 4). Pour la commodité du lecteur, nous reproduisons la démonstration.

Lemme 1. — *Soient* A *une* C*-*algèbre à élément unité, a et b des éléments inversibles de* A *tels que* $0 \leqslant a \leqslant b$. *On a* $a^{-1} \geqslant b^{-1}$.

On peut supposer A réalisée dans un espace hilbertien H. Soit $\zeta \in$ H. On a, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'hypothèse $0 \leqslant a \leqslant b$

$$(\zeta|b^{-1}\zeta)^2 = (a(a^{-1}\zeta)|b^{-1}\zeta)^2 \leqslant (a(a^{-1}\zeta)|a^{-1}\zeta)(a(b^{-1}\zeta)|b^{-1}\zeta)$$
$$\leqslant (a(a^{-1}\zeta)|a^{-1}\zeta)(b(b^{-1}\zeta)|b^{-1}\zeta) = (\zeta|a^{-1}\zeta)(\zeta|b^{-1}\zeta).$$

Si $(\zeta|b^{-1}\zeta) > 0$, on en déduit $(\zeta|b^{-1}\zeta) \leqslant (\zeta|a^{-1}\zeta)$. Si $(\zeta|b^{-1}\zeta) = 0$, on a $\zeta = 0$ d'où encore $(\zeta|b^{-1}\zeta) \leqslant (\zeta|a^{-1}\zeta)$. Donc $a^{-1} \geqslant b^{-1}$.

Segal a prouvé [18] qu'il existe dans toute C*-algèbre une unité approchée. Reprenant sa méthode, et utilisant le lemme 1, nous allons obtenir un résultat plus précis.

Définition 1. — *Soit* A *une* C*-*algèbre. On appelle unité approchée filtrante croissante de* A *une unité approchée* $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *de* A *telle que* $u_\lambda \geqslant 0$ *pour tout* λ *et que* $\lambda \leqslant \mu$ *implique* $u_\lambda \leqslant u_\mu$.

Alors, pour tout $x \geqslant 0$ dans A, les $x^{1/2}u_\lambda x^{1/2}$ forment une famille filtrante croissante d'éléments $\geqslant 0$ de A, majorée par x et tendant vers x.

Lemme 2. — *Soient* A *une* C*-*algèbre,* $\mathfrak{m}$ *un idéal bilatère auto-adjoint de* A *partout dense dans* A. *Il existe une unité approchée filtrante croissante* (u_λ) *de* A *formée d'éléments de* $\mathfrak{m}$.

Soit $\tilde{A}$ la C*-algèbre déduite de A par adjonction d'un élément unité. Soit Λ l'ensemble des parties finies de $\mathfrak{m}$, ordonné par inclusion. Pour $\lambda = \{x_1, \ldots, x_n\} \in \Lambda$, posons $v_\lambda = x_1x_1^* + \cdots + x_nx_n^* \in \mathfrak{m}$, et

$$u_\lambda = v_\lambda\left(\frac{1}{n} + v_\lambda\right)^{-1} = 1 - \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} + v_\lambda\right)^{-1}$$

(u_λ est calculé dans $\tilde{A}$, mais en fait $u_\lambda \in \mathfrak{m}$). Comme la fonction de variables réelles $t \to t\left(\frac{1}{n} + t\right)^{-1}$ est comprise entre 0 et 1 pour $t \geqslant 0$, on a $0 \leqslant u_\lambda \leqslant 1$. D'autre part,

$$\sum_{i=1}^{n} [(u_\lambda - 1)x_i]\,[(u_\lambda - 1)x_i]^* = (u_\lambda - 1)v_\lambda(u_\lambda - 1)$$
$$= \frac{1}{n^2}v_\lambda\left(\frac{1}{n} + v_\lambda\right)^{-2}.$$

Or la fonction de variable réelle $t \to t\left(\frac{1}{n} + t\right)^{-2}$ est $\leqslant \frac{n}{4}$. Donc $\sum_{i=1}^{n} [(u_\lambda - 1)x_i]\,[(u_\lambda - 1)x_i]^* \leqslant \frac{1}{4n}$ et par suite

$$||u_\lambda x_i - x_i||^2 \leqslant \frac{1}{4n}$$

pour tout i. Donc $||u_\lambda x - x|| \to 0$ pour tout $x \in \mathfrak{m}$; comme $||u_\lambda|| \leqslant 1$ et que $\mathfrak{m}$ est partout dense dans A, ceci entraîne $||u_\lambda x - x|| \to 0$ pour tout $x \in A$, donc

$$||xu_\lambda - x|| = ||u_\lambda x^* - x^*|| \to 0.$$

Enfin, soient $\lambda, \mu \in \Lambda$ tels que $\lambda \leqslant \mu$. On a $\lambda = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $\mu = \{x_1, \ldots, x_p\}$ avec $p \geqslant n$, donc $v_\lambda \leqslant v_\mu$, donc, compte tenu du lemme 1 et du fait que

$$n^{-1}(n^{-1} + t)^{-1} \geqslant p^{-1}(p^{-1} + t)^{-1}$$

pour tout nombre réel $t \geqslant 0$,

$$1 - \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} + v_\lambda\right)^{-1} \leqslant 1 - \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} + v_\mu\right)^{-1} \leqslant 1 - \frac{1}{p}\left(\frac{1}{p} + v_\mu\right)^{-1}$$

c'est-à-dire $u_\lambda \leqslant u_\mu$.

2. Traces.

DÉFINITION 2. — *Soit* A *une* C*-*algèbre. On appelle trace sur* A^+ *une fonction* $\varphi : A^+ \to [0, +\infty]$ *vérifiant les axiomes suivants :*

(i) *si* $x, y \in A^+$, *on a* $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$;

(ii) *si* $x \in A^+$ *et si* λ *est un nombre réel* $\geqslant 0$, *on a* $\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x)$ (*on convient que* $0 . +\infty = 0$).

(iii) *si* $z \in A$, *on a* $\varphi(zz^*) = \varphi(z^*z)$.

On dit que φ *est fidèle si les conditions* $x \in A^+$, $\varphi(x) = 0$ *entraînent* $x = 0$.

On dit que φ *est semi-finie si, pour tout* $x \in A^+$, $\varphi(x)$ *est la borne supérieure des nombres* $\varphi(y)$ *pour les* $y \in A^+$ *tels que* $y \leqslant x$ *et* $\varphi(y) < +\infty$.

(Dans la définition des traces semi-finies, il suffit évidemment d'envisager le cas des x tels que $\varphi(x) = +\infty$).

Remarque 1. — Supposons que A soit une algèbre de von Neumann et comparons à la déf. 1 de [3], p. 79. D'abord, compte tenu de [3], corollaire 1, p. 81, la définition des traces est la même. La définition des traces fidèles est formulée de la même façon. Il est clair que si φ est semi-finie au sens actuel, φ est semi-finie au sens de [3] (c'est-à-dire que, pour tout x non nul de A^+, il existe un y non nul de A^+ tel que

$$y \leqslant x, \varphi(y) < +\infty).$$

Montrons que la réciproque est exacte quand φ est normale. Soit donc φ une trace sur A^+, normale et semi-finie au sens de [3]; soient $\mathfrak{p}$ l'ensemble des $x \in A^+$ tels que $\varphi(x) < +\infty$, et $\mathfrak{m}$ l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de $\mathfrak{p}$; c'est un idéal bilatère auto-adjoint de A et $\mathfrak{m}^+ = \mathfrak{p}$ (cf. [3], p. 80; ou le lemme 3 ci-dessous); soient B et C l'adhérence uniforme et l'adhérence forte de $\mathfrak{m}$; le plus grand projecteur de C, élément du centre de A, est égal à 1 puisque φ est semi-finie, donc $C = A$; donc l'ensemble des $x\xi (x \in \mathfrak{m}, \xi \in H)$ est partout dense dans H; soit (u_λ) une unité approchée filtrante croissante de B formée d'éléments de $\mathfrak{m}$ (lemme 2); on a $u_\lambda \to 1$ fortement (cf. notations et rappels); alors, pour tout x A^+, $\varphi(x^{1/2}u_\lambda x^{1/2}) \to \varphi(x)$ parce que φ est normale; or $x^{1/2}u_\lambda x^{1/2} \in \mathfrak{p}$; on voit donc que φ est semi-finie au sens actuel (on pourrait aussi utiliser [3], p. 45, cor. 5). Par contre, il peut exister sur A^+ des traces non normales semi-finies au sens de [3] mais non au sens actuel. En effet, soit H un espace hilbertien admettant une base orthonormale $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots)$; soit P_i le projecteur orthogonal sur $\mathbf{C}\varepsilon_i$; soit A l'algèbre de von Neumann commutative formée des opérateurs $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i P_i$ $(\sup |\lambda_i| < +\infty)$; soit ω une limite généralisée sur l'ensemble des suites bornées de nombres complexes; pour $x = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i P_i \in A^+$, posons

$$\varphi(x) = 0 \quad \text{si} \quad \omega((\lambda_i)) = 0, \quad \varphi(x) = +\infty \quad \text{si} \quad \omega((\lambda_i)) > 0;$$

alors φ est une trace semi-finie au sens de [3] mais non au sens actuel (et pourtant φ est majorée par la trace $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i P_i \to \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i$ qui est semi-finie au sens actuel). Comme la suite semble prouver que la notion actuelle de trace semi-finie est une bonne notion, et que d'autre part les seules traces étudiées sérieusement dans [3] sont les traces normales, il aurait mieux valu, dans [3], définir les traces semi-finies comme il est fait maintenant.

Remarque 2. — Soit A une C*-algèbre. Nous étudierons surtout les traces sur A^+ qui sont semi-continues inférieurement. Soient φ une telle trace et $x \in A^+$. Si (x_i) est une famille filtrante croissante d'éléments de A^+ tendant vers x (en norme), on a $\varphi(x_i) \leqslant \varphi(x)$ et $\underline{\lim}\ \varphi(x_i) \geqslant \varphi(x)$, donc $\varphi(x_i) \to \varphi(x)$. Réciproquement, soit φ une trace sur A^+ telle que, pour tout $x \in A^+$ et toute famille filtrante croissante (x_i) d'éléments de A^+ tendant vers x, on ait $\varphi(x_i) \to \varphi(x)$. Alors on peut faire sur φ tous les raisonnements qui sont faits plus bas sous l'hypothèse de semi-continuité inférieure, et la conclusion sera que φ est en fait semi-continue inférieurement. On voit donc que l'hypothèse de semi-continuité inférieure pour une trace sur A^+ est analogue à l'hypothèse de normalité dans la théorie des traces sur les algèbres de von Neumann. Notons que si A est une algèbre de von Neumann et si φ est une trace normale sur A^+, φ est semi-continue inférieurement pour la topologie faible ([3], p. 83, corollaire) et a fortiori pour la topologie déduite de la norme.

LEMME 3. — *Soient* A *une* C*-*algèbre*, φ *une trace sur* A^+.

(i) *Soit* $\mathfrak{n}$ *l'ensemble des* $x \in A$ *tels que* $\varphi(xx^*) < +\infty$. *Alors* $\mathfrak{n}$ *est un idéal bilatère auto-adjoint de* A.

(ii) *L'idéal bilatère* $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}^2$ *est l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de* $\mathfrak{m}^+$.

(iii) $\mathfrak{m}^+$ *est l'ensemble des* $x \in A^+$ *tels que* $\varphi(x) < +\infty$.

(iv) *Il existe sur* $\mathfrak{m}$ *une forme linéaire* f *et une seule qui coïncide avec* φ *sur* $\mathfrak{m}^+$.

(v) *On a*

$$\begin{aligned} f(x^*) &= \overline{f(x)} && \textit{pour tout } x \in \mathfrak{m};\\ f(zx) &= f(xz) && \textit{quels que soient } x \in \mathfrak{m},\ z \in A;\\ f(uv) &= f(vu) && \textit{quels que soient } u,\ v \in \mathfrak{n}. \end{aligned}$$

(La démonstration est presque entièrement recopiée de [3], pp. 11, 12 et 80.)

Il est clair que $x \in \mathfrak{n}$ implique $x^* \in \mathfrak{n}$. Si $x, y \in \mathfrak{n}$, on a

$$\varphi(xx^*) < +\infty, \qquad \varphi(yy^*) < +\infty,$$

donc $\varphi((x+y)(x+y)^*) < +\infty$ car

$$(x+y)(x+y)^* \leqslant 2\,xx^* + 2\,yy^*,$$

donc $x + y \in \mathfrak{n}$. Si $x \in \mathfrak{n}$ et $z \in A$, on a $\varphi(xz(xz)^*) < +\infty$, car $xzz^*x^* \leqslant \|zz^*\|xx^*$. Donc $\mathfrak{n}$ est un idéal à droite de A, et par suite un idéal bilatère puisque $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}^*$. D'où (i).

Soit $x \in \mathfrak{m}$. On a $x = \sum_{j=1}^{n} a_j b_j^*$ avec $a_j, b_j \in \mathfrak{n}$. Donc

$$\begin{aligned} 4x = \Sigma(a_j + b_j)(a_j + b_j)^* &- \Sigma(a_j - b_j)(a_j - b_j)^* \\ &+ i\Sigma(a_j + ib_j)(a_j + ib_j)^* - i\Sigma(a_j - ib_j)(a_j - ib_j)^*. \end{aligned}$$

Donc (ii) est démontré. Si en outre x est hermitien, on voit que

$$\begin{aligned} 4x = \Sigma(a_j + b_j)(a_j + b_j)^* &- \Sigma(a_j - b_j)(a_j - b_j)^* \\ &\leqslant \Sigma(a_j + b_j)(a_j + b_j)^*. \end{aligned}$$

Si $x \in \mathfrak{m}^+$, on en conclut que $\varphi(x) < +\infty$. Réciproquement, soit $x \in A^+$ tel que $\varphi(x) < +\infty$; on a $x^{1/2} \in \mathfrak{n}$, donc

$$x = x^{1/2}x^{1/2} \in \mathfrak{m}^+.$$

D'où (iii).

L'assertion (iv) résulte aussitôt de (ii) et des propriétés de φ. De même, (ii) entraîne que $f(x^*) = \overline{f(x)}$ pour $x \in \mathfrak{m}$. Si $u \in \mathfrak{n}$, on a $uu^* \in \mathfrak{m}$ et $u^*u \in \mathfrak{m}$, donc

$$f(uu^*) = \varphi(uu^*) = \varphi(u^*u) = f(u^*u);$$

par polarisation, on en déduit que $f(uv^*) = f(v^*u)$ pour u, $v \in \mathfrak{n}$. Enfin, soient $z \in \mathrm{A}$ et $x \in \mathfrak{m}$. On a $x = \Sigma u_j v_j$ avec u_j, $v_j \in \mathfrak{n}$, donc

$$\begin{aligned} f(z(\Sigma u_j v_j)) = \Sigma f((zu_j)v_j) &= \Sigma f(v_j(zu_j)) = \Sigma f((v_j z)u_j) \\ &= \Sigma f(u_j(v_j z)) = f((\Sigma u_j v_j)z). \end{aligned}$$

D'où le lemme.

L'idéal $\mathfrak{m}$ sera appelé, par abus de langage, *l'idéal de définition de* φ et noté $\mathfrak{m}_\varphi$.

Remarque 3. — Soient A une C*-algèbre, φ une trace semi-continue inférieurement sur A^+, et J l'adhérence de $\mathfrak{m}_\varphi$. Alors le spectre $\hat{\mathrm{J}}$ de J s'identifie à une partie ouverte du spectre $\hat{\mathrm{A}}$ de A. On a

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}_\varphi \text{ partout dense dans A} &\Longrightarrow \varphi \text{ semi-finie} \\ &\Longrightarrow \hat{\mathrm{J}} \text{ partout dense dans } \hat{\mathrm{A}}. \end{aligned}$$

En effet, supposons $\mathfrak{m}_\varphi$ partout dense dans A; soit (u_λ) une unité approchée filtrante croissante de A formée d'éléments de $\mathfrak{m}_\varphi$ (lemme 2); soit $x \in \mathrm{A}^+$; alors les $x^{1/2}u_\lambda x^{1/2}$ forment une famille filtrante croissante d'éléments de A^+ tendant vers x, donc $\varphi(x^{1/2}u_\lambda x^{1/2}) \to \varphi(x)$; or $x^{1/2}u_\lambda x^{1/2} \in \mathfrak{m}_\varphi^+$, donc

$$\varphi(x^{1/2}u_\lambda x^{1/2}) < +\infty;$$

ainsi, φ est semi-finie. Maintenant, supposons φ semi-finie; supposons qu'il existe dans $\hat{\mathrm{A}}$ une partie ouverte non vide disjointe de $\hat{\mathrm{J}}$; cette partie est le spectre $\hat{\mathrm{J}}'$ d'un idéal bilatère fermé J' de A non réduit à 0, tel que $\mathrm{J}' \cap \mathrm{J} = 0$; soit $a \in \mathrm{J}'^+$ tel que $a \neq 0$; pour tout $b \in \mathrm{A}^+$ tel que $b \leqslant a$, on a $b \in \mathrm{J}'^+$, donc $b = 0$ ou $b \notin \mathrm{J}^+$, donc $\varphi(b) = 0$ ou $\varphi(b) = +\infty$, d'où contradiction; donc $\hat{\mathrm{J}}$ est partout dense dans $\hat{\mathrm{A}}$.

Les réciproques des implications précédentes sont inexactes. Prenons pour A la C*-algèbre des fonctions continues complexes sur $[0,1]$. Posons $\varphi(x) = \int_0^1 x(t)t^{-1}\, dt$ pour $x \in \mathrm{A}^+$. Alors φ est une trace semi-finie semi-continue inférieurement sur A^+, mais $\overline{\mathfrak{m}_\varphi}$ est l'ensemble des $x \in A$ tels que $x(0) = 0$, donc $\overline{\mathfrak{m}_\varphi}$ n'est pas partout dense dans A. Maintenant, pour tout $x \in A^+$, posons $\psi(x) = 0$ si $x(0) = 0$, $\psi(x) = +\infty$ si $x(0) > 0$; alors ψ est une trace semi-continue inférieurement sur A^+, non semi-finie, mais $\overline{\mathfrak{m}_\psi} = \overline{\mathfrak{m}_\varphi}$, et le spectre de $\overline{\mathfrak{m}_\psi}$ s'identifie à $]0,1]$, donc est partout dense dans le spectre $[0,1]$ de A.

Remarque 4. — Soient A une C*-algèbre, $\mathfrak{m}$ un idéal bilatère auto-adjoint de A, (u_λ) une unité approchée de la C*-algèbre $\overline{\mathfrak{m}}$ formée d'éléments de $\mathfrak{m}$ (lemme 2). Pour tout $y \in \mathfrak{m}$, on a $u_\lambda y \to y$, donc $y \in \overline{\mathfrak{m}^2}$, donc $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{m}^2$ ont même adhérence. Ceci s'applique en particulier aux idéaux $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{n}$ du lemme 3.

Remarque 5. — Soient A une C*-algèbre, φ une trace semi-continue inférieurement sur A^+, et J l'adhérence de $\mathfrak{m}_\varphi$. S'il existe une unité approchée filtrante croissante (u_λ) de J, formée d'éléments de $\mathfrak{m}_\varphi$, et telle que $\varphi(x^{1/2}u_\lambda x^{1/2}) \to \varphi(x)$ pour tout $x \in A^+$, alors φ est évidemment semi-finie. Réciproquement, supposons φ semi-finie, et montrons que, pour toute unité approchée filtrante croissante (u_λ) de J, on a $\varphi(x) = \lim \varphi(x^{1/2}u_\lambda x^{1/2})$ pour tout $x \in A^+$. Soit $\alpha < \varphi(x)$; il existe un $y \in \mathfrak{m}_\varphi^+$ majoré par x tel que $\varphi(y) > \alpha$; comme $y \in J$, on a $\varphi(y^{1/2}u_\lambda y^{1/2}) \to \varphi(y)$, donc il existe λ tel que

$$\varphi(y^{1/2}u_\lambda y^{1/2}) > \alpha;$$

alors

$$\varphi(x^{1/2}u_\lambda x^{1/2}) = \varphi(u_\lambda^{1/2}xu_\lambda^{1/2}) \geqslant \varphi(u_\lambda^{1/2}yu_\lambda^{1/2}) = \varphi(y^{1/2}u_\lambda y^{1/2}) > \alpha,$$

d'où notre assertion.

Soient A et B deux C*-algèbres, ρ un homomorphisme de A dans B, φ une trace sur B^+. Alors $\varphi \circ \rho$ est une trace sur A^+. Si φ est semi-continue inférieurement, $\varphi \circ \rho$ est semi-continue inférieurement. Si φ est semi-finie, $\varphi \circ \rho$ n'est pas semi-finie en général. On a toutefois les prop. 3 et 4 du § 6, et le lemme suivant :

LEMME 4. — *Soient* A *une* C*-*algèbre,* π *une représentation non dégénérée de* A *dans un espace hilbertien* H, $\mathfrak{A}$ *l'algèbre de von Neumann engendrée par* $\pi(A)$, θ *une trace normale sur* $\mathfrak{A}^+$, $\mathfrak{m}$ *un idéal bilatère auto-adjoint de* A *tel que* $\pi(\mathfrak{m})$ *soit contenu dans* $\mathfrak{m}_\theta$ *et soit fortement partout dense dans* $\mathfrak{A}$. *Alors* $\varphi = \theta \circ \pi$

est semi-finie, et, si (u_λ) *est une unité approchée filtrante croissante de* $\overline{\mathfrak{m}}$, *on a* $\varphi(x) = \lim \varphi(x^{1/2}\, u_\lambda x^{1/2})$ *pour tout* $x \in \mathrm{A}^+$.

Comme $\pi(\mathfrak{m})$ est fortement partout dense dans $\mathfrak{U}$, la restriction de π à $\overline{\mathfrak{m}}$ est non dégénérée, donc $\pi(u_\lambda)$ tend fortement vers 1. Donc, pour tout $x \in \mathrm{A}^+$, $\theta(\pi(x)^{1/2}\pi(u_\lambda)\pi(x)^{1/2}) \to \theta(\pi(x))$, autrement dit $\varphi(x^{1/2}u_\lambda x^{1/2}) \to \varphi(x)$. On peut prendre les u_λ dans $\mathfrak{m}$ (lemme 2); alors $\pi(x^{1/2}u_\lambda x^{1/2}) \in \pi(\mathfrak{m}) \subset \mathfrak{m}_\theta$, donc

$$\varphi(x^{1/2}u_\lambda x^{1/2}) < +\infty;$$

donc φ est semi-finie.

3. Bitraces.

Définition 3. — *Soit* A *une* C*-*algèbre. On appelle bitrace de* A *une fonction* $\sigma : \mathfrak{n} \times \mathfrak{n} \to \mathbf{C}$, *où* $\mathfrak{n}$ *est un idéal bilatère auto-adjoint de* A, *vérifiant les axiomes suivants:*

(i) σ *est une forme sesquilinéaire hermitienne positive*;

(ii) $\sigma(y, x) = \sigma(x^*, y^*)$ *pour* $x, y \in \mathfrak{n}$;

(iii) $\sigma(zx, y) = \sigma(x, z^*y)$ *pour* $x, y \in \mathfrak{n}$, $z \in \mathrm{A}$;

(iv) *pour tout* $z \in \mathrm{A}$, *l'application* $x \to zx$ *de* $\mathfrak{n}$ *dans* $\mathfrak{n}$ *est continue pour la structure préhilbertienne définie par* σ;

(v) *les éléments* xy $(x \in \mathfrak{n},\ y \in \mathfrak{n})$ *sont partout denses dans* $\mathfrak{n}$ *pour la structure préhilbertienne définie par* σ.

L'idéal $\mathfrak{n}$ est appelé idéal de définition de σ et noté $\mathfrak{n}_\sigma$.

Les axiomes (i) à (v) sont ceux de [10], chap. I, § 1, à ceci près que l'axiome (iv) actuel est en apparence plus faible que l'axiome (iv) de [10] (mais cf. plus bas).

On peut reprendre mot pour mot les constructions de [10]. Nous allons les rappeler. On notera N_σ l'idéal bilatère auto-adjoint de A formé des $x \in \mathfrak{n}_\sigma$ tels que $\sigma(x,x) = 0$, et Λ_σ l'application canonique de $\mathfrak{n}_\sigma$ dans $\mathfrak{n}_\sigma/\mathrm{N}_\sigma$. Muni du produit scalaire $(\Lambda_\sigma x | \Lambda_\sigma y) = \sigma(x, y)$, $\mathfrak{n}_\sigma/\mathrm{N}_\sigma$ est une algèbre hilbertienne; on notera H_σ l'espace hilbertien complété. Pour tout $z \in \mathrm{A}$, on notera $\pi_\sigma(z)$ (resp. $\rho_\sigma(z)$) l'opérateur linéaire continu dans H_σ qui prolonge l'application

$$\Lambda_\sigma x \to \Lambda_\sigma(zx) \text{ (resp. } \Lambda_\sigma x \to \Lambda_\sigma(xz))$$

dans $\mathfrak{n}_\sigma/\mathrm{N}_\sigma$. Alors π_σ et ρ_σ sont des représentations non dégénérées de A et de l'algèbre opposée dans H_σ. Les algèbres $\pi_\sigma(\mathrm{A})$,

$\pi_\sigma(\mathfrak{n}_\sigma)$ engendrent la même algèbre de von Neumann $\mathfrak{U}_\sigma$. Les algèbres $\rho_\sigma(\mathrm{A})$, $\rho_\sigma(\mathfrak{n}_\sigma)$ engendrent la même algèbre de von Neumann $\mathfrak{V}_\sigma$ commutante de $\mathfrak{U}_\sigma$. L'algèbre hilbertienne $\mathfrak{n}_\sigma/\mathrm{N}_\sigma$ définit sur $\mathfrak{U}_\sigma^+$ une trace naturelle normale fidèle semi-finie qu'on notera θ_σ. D'après les propriétés des algèbres hilbertiennes, on a, pour $x \in \mathfrak{n}_\sigma$, $\theta_\sigma(\pi_\sigma(xx^*)) = \sigma(x,x) < +\infty$; et, pour x, $y \in \mathfrak{n}_\sigma$, $\pi_\sigma(xy^*) \in \mathfrak{m}_{\theta_\sigma}$ et $\sigma(x,y) = \dot{\theta}_\sigma(\pi_\sigma(xy^*))$ (on note $\dot{\theta}_\sigma$ le prolongement linéaire à $\mathfrak{m}_{\theta_\sigma}$ de $\theta_\sigma \mid \mathfrak{m}_{\theta_\sigma}^+$). Soient $x \in \mathfrak{n}_\sigma$ et $z \in \mathrm{A}$; alors

$$|\sigma(zx, x)| = |\dot{\theta}_\sigma(\pi_\sigma(z)\pi_\sigma(xx^*))| \leqslant ||\pi_\sigma(z)||\theta_\sigma(\pi_\sigma(xx^*)) \leqslant ||z||\sigma(x, x).$$

D'autre part, si (u_λ) est une unité approchée de A, on a

$$||\pi_\sigma(u_\lambda)|| \leqslant 1$$

et $\pi_\sigma(u_\lambda)$ tend fortement vers 1, donc

$$\dot{\theta}_\sigma(\pi_\sigma(u_\lambda)\pi_\sigma(xx^*)) \rightarrow \theta_\sigma(\pi_\sigma(xx^*)) = \sigma(x, x).$$

Donc la forme $z \rightarrow \sigma(zx,x)$ sur A est continue de norme $\sigma(x, x)$, ce qui est l'axiome (iv) de [10]. Ainsi, la définition actuelle des bitraces coïncide avec celle des traces dans [10] (mais on a préféré changer de terminologie).

Posons $\mathfrak{q} = \mathfrak{m}_{\theta_\sigma}$, et $\mathfrak{q}' = \mathfrak{q}^{1/2}$. Si, pour x, $y \in \pi_\sigma^{-1}(\mathfrak{q}')$, on pose $\tilde{\sigma}(x, y) = \theta_\sigma(\pi_\sigma(xy^*))$, $\tilde{\sigma}$ est une bitrace prolongeant σ, appelé prolongement maximal canonique de σ. (Une bitrace est dite maximale si elle ne peut se prolonger strictement en une bitrace de A). D'après le lemme 2 de [10], p. 10, si σ' est une bitrace de A prolongeant σ, on a $\mathfrak{n}_{\sigma'} \subset \mathfrak{n}_{\tilde{\sigma}}$; en fait, le raisonnement de [10] prouve même que $\tilde{\sigma}(x, x) \leqslant \sigma'(x, x)$ pour tout $x \in \mathfrak{n}_{\sigma'}$. D'autre part, l'algèbre hilbertienne $\pi_\sigma(\mathfrak{n}_\sigma)$ est partout dense dans l'algèbre hilbertienne $\mathfrak{q}'$ (pour la structure préhilbertienne définie par θ_σ); donc $\mathfrak{n}_\sigma$ est partout dense dans $\mathfrak{n}_{\tilde{\sigma}}$, $\mathrm{H}_{\tilde{\sigma}}$ s'identifie à H_σ, et alors

$$\pi_{\tilde{\sigma}} = \pi_\sigma, \quad \mathfrak{U}_{\tilde{\sigma}} = \mathfrak{U}_\sigma, \quad \theta_{\tilde{\sigma}} = \theta_\sigma.$$

4. Relations entre traces et bitraces.

Lemme 5. — *Soient* A *une* C*-*algèbre*, φ *une trace sur* A^+, *semi-continue inférieurement. Introduisons les notations du lemme* 3. *Pour* $x,y \in \mathfrak{n}$, *posons* $\sigma(x,y) = f(xy^*) = f(y^*x)$. *Alors* σ *est une bitrace de* A.

Il est clair que σ est sesquilinéaire. Pour $x, y \in \mathfrak{n}$ et $z \in A$, on a, compte tenu du lemme 3 (v)

$$\begin{aligned}
\sigma(y, x) &= f(yx^*) = \overline{f(xy^*)} = \overline{\sigma(x, y)} \\
\sigma(x, x) &= f(xx^*) \geqslant 0 \\
\sigma(x^*, y^*) &= f(x^*y) = f(yx^*) = \sigma(y, x) \\
\sigma(zx, y) &= f(y^*(zx)) = f((z^*y)^*x) = \sigma(x, z^*y) \\
\sigma(zx, zx) &= f(x^*z^*xz) \leqslant \|z^*z\| f(x^*x) = \|z^*z\|\sigma(x,x).
\end{aligned}$$

Soit (u_λ) une unité approchée filtrante croissante de $\bar{\mathfrak{n}}$ formée d'éléments de $\mathfrak{n}$. Alors, pour tout $x \in \mathfrak{n}$, on a

$$\begin{aligned}
\sigma(u_\lambda x - x, u_\lambda x - x) &= \sigma(u_\lambda x, u_\lambda x) - \sigma(u_\lambda x, x) - \sigma(x, u_\lambda x) + \sigma(x,x) \\
&\leqslant \|u_\lambda^2\|\sigma(x,x) - f(x^*u_\lambda x) - f(x^*u_\lambda x) + \sigma(x, x) \\
&\leqslant 2(\varphi(x^*x) - \varphi(x^*u_\lambda x)).
\end{aligned}$$

Or les $x^*u_\lambda x$ forment une famille filtrante croissante d'éléments de A^+ tendant vers x^*x, donc $\varphi(x^*u_\lambda x) \rightarrow \varphi(x^*x)$; ainsi, x est limite de $u_\lambda x$ pour la structure préhilbertienne définie par σ.

On dira que σ est *la bitrace associée à* φ.

Maintenant, soient A une C*-algèbre, et σ une bitrace de A. Pour tout $x \in A^+$, posons $\varphi(x) = \theta_\sigma(\pi_\sigma(x))$. On a $\pi_\sigma(\mathfrak{n}_\sigma^2) \subset \mathfrak{m}_{\theta_\sigma}$, et $\pi_\sigma(\mathfrak{n}_\sigma^2)$ est fortement partout dense dans $\mathfrak{U}_\sigma$. Donc (lemme 4) φ est une trace semi-finie semi-continue inférieurement sur A^+ qui sera dite *associée à* σ.

Lemme 6. — *Soient* A *une* C*-*algèbre,* σ *une bitrace de* A, φ *la trace associée. La bitrace* σ' *associée à* φ *est le prolongement maximal canonique de* σ.

Soient $\mathfrak{q} = \mathfrak{m}_{\theta_\sigma}$ et $\mathfrak{q}' = \mathfrak{q}^{1/2}$. Pour tout $x \in A$, on a

$$\begin{aligned}
x \in \mathfrak{n}_{\sigma'} \Longleftrightarrow \varphi(xx^*) < +\infty \Longleftrightarrow \theta_\sigma(\pi_\sigma(xx^*)) < +\infty \Longleftrightarrow \pi_\sigma(x) \in \mathfrak{q}' \\
\Longleftrightarrow x \in \pi_\sigma^{-1}(\mathfrak{q}')
\end{aligned}$$

donc $\mathfrak{n}_{\sigma'} = \mathfrak{n}_{\tilde{\sigma}}$; et, pour $x \in \mathfrak{n}_{\sigma'}$,

$$\sigma'(x, x) = \varphi(xx^*) = \theta_\sigma(\pi_\sigma(xx^*)) = \tilde{\sigma}(x, x),$$

d'où le lemme.

Lemme 7. — *Soient* A *une* C*-*algèbre,* φ *une trace sur* A^+, *semi-finie et semi-continue inférieurement,* σ *la bitrace associée à* φ. *Alors* σ *est maximale, et la trace associée à* σ *est* φ.

Soit φ' la trace associée à σ. D'après le lemme 6, la bitrace σ' associée à φ' est le prolongement maximal canonique de σ. Pour $y \in \mathfrak{n}_\sigma$, on a $\varphi'(yy^*) = \sigma'(y, y) = \sigma(y, y) = \varphi(yy^*)$. Donc, si $x \in \mathrm{A}^+$ est tel que $\varphi(x) < +\infty$, on a $\varphi'(x) = \varphi(x)$. Soit $x \in \mathrm{A}^+$ tel que $\varphi(x) = +\infty$. Pour tout nombre réel fini α, il existe $x_1 \in \mathrm{A}^+$ tel que $x_1 \leqslant x$ et $\alpha < \varphi(x_1) < +\infty$, puisque φ est semi-finie. Alors $\varphi'(x) \geqslant \varphi'(x_1) = \varphi(x_1) > \alpha$; donc $\varphi'(x) = +\infty$. Ceci prouve que $\varphi' = \varphi$. Donc $\sigma' = \sigma$, de sorte que σ est maximale.

PROPOSITION 1. — *Soit* A *une* C*-*algèbre. Soit* E *l'ensemble des traces semi-finies semi-continues inférieurement sur* A^+. *Soit* E' *l'ensemble des bitraces maximales de* A. *Les applications trace* $\rightarrow$ *bitrace associée, bitrace* $\rightarrow$ *trace associée, définissent des bijections* $\mathrm{E} \rightarrow \mathrm{E}'$, $\mathrm{E}' \rightarrow \mathrm{E}$ *réciproques l'une de l'autre.*

Ceci résulte aussitôt des lemmes 5, 6, 7.

Soient φ une trace semi-finie semi-continue inférieurement sur A^+, σ la bitrace maximale associée. On posera $\mathrm{N}_\sigma = \mathrm{N}_\varphi$, $\mathfrak{n}_\sigma = \mathfrak{n}_\varphi$, ..., $\theta_\sigma = \theta_\varphi$; et, inversement, $\mathfrak{m}_\varphi = \mathfrak{m}_\sigma$.

5. Traces et représentations.

Soit A une C*-algèbre. Nous appellerons *représentation normale* de A un couple (π, θ) possédant les propriétés suivantes :

(i) π est une représentation non dégénérée de A dans un espace hilbertien;

(ii) θ est une trace normale fidèle sur l'algèbre de von Neumann $\mathfrak{U}$ engendrée par $\pi(\mathrm{A})$;

(iii) $\pi(\mathrm{A}) \cap \mathfrak{m}_\theta$ engendre l'algèbre de von Neumann $\mathfrak{U}$.

Ces conditions entraînent que θ est semi-finie, donc que $\mathfrak{U}$ est semi-finie.

Si π est une représentation factorielle de A dans un espace hilbertien, et si $\mathfrak{U}$ désigne le facteur engendré par $\pi(\mathrm{A})$, il existe sur $\mathfrak{U}^+$ une seule trace normale fidèle θ, à un facteur > 0 fini près (en excluant la trace purement infinie dans le cas où $\mathfrak{U}$ est semi-fini). Pour que π soit normale au sens de [10], il faut et il suffit que (π, θ) soit normale au sens actuel ([10], p. 14, prop. 4). On peut donc dire que notre définition généralise celle de [10].

Soient (π, θ), (π', θ') deux représentations normales de A, $\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{U}'$ les algèbres de von Neumann engendrées par $\pi(A)$ et $\pi'(A)$. On dit que (π, θ) et (π', θ') sont quasi-équivalentes s'il existe un isomorphisme de $\mathfrak{U}$ sur $\mathfrak{U}'$ qui transforme π en π' et θ en θ'.

Soient A une C*-algèbre, (π, θ) une représentation normale de A. Alors $\varphi = \theta \circ \pi$ est une trace semi-finie semi-continue inférieurement sur A^+ (lemme 4). Nous dirons que φ (et la bitrace maximale correspondante) sont associées à (π, θ). Si on remplace (π, θ) par une représentation normale quasi-équivalente, φ ne change pas.

Réciproquement, soient φ une trace semi-finie semi-continue inférieurement sur A^+, σ la bitrace associée. Alors $(\pi_\sigma, \theta_\sigma)$ est une représentation normale de A qui sera dite associée à φ et σ.

PROPOSITION 2. — (i) *Soient φ une trace semi-finie semi-continue inférieurement sur* A^+, (π, θ) *la représentatio nnormale de* A *associée à φ. Alors la trace associée à* (π, θ) *est* φ.

(ii) *Soient* (π, θ) *une représentation normale de* A, φ *la trace sur* A^+ *associée à* (π, θ). *Alors la représentation normale associée à φ est quasi-équivalente à* (π, θ).

L'assertion (i) résulte du lemme 7. Pour prouver (ii), il suffit de recopier la démonstration de [10], prop. 4, p. 14 (qui concernait le cas des représentations factorielles). Seules les l. 1-6 du bas de la p. 14 doivent être remplacées par un autre argument, par exemple l'emploi de [3], p. 214, lemme 1.

COROLLAIRE. — *Il existe une bijection canonique de l'ensemble des traces semi-finies semi-continues inférieurement sur* A^+, *sur l'ensemble des classes de quasi-équivalence de représentations normales de* A.

6. Traces sur un quotient, sur un idéal, sur une extension.

PROPOSITION 3. — *Soient* A *une C*-algèbre,* J *un idéal bilatère fermé de* A, $\rho : A \to A/J$ *l'homomorphisme canonique. Soient* E *l'ensemble des traces semi-finies semi-continues inférieurement sur* $(A/J)^+$, E' *l'ensemble des traces semi-finiesse mi-continues inférieurement sur* A^+ *nulles sur* J^+. *Alors* $\varphi \to \varphi \circ \rho$

est une bijection de E *sur* E'. *La représentation normale associée à* $\varphi\circ\rho$ *est* $(\pi_\varphi\circ\rho, \theta_\varphi)$.

L'application $(\pi, \theta) \to (\pi\circ\rho, \theta)$ est une bijection de l'ensemble des représentations normales de A/J sur l'ensemble des représentations normales de A nulles sur J. Cette bijection applique les classes de quasi-équivalence sur les classes de quasi-équivalence. D'autre part, si (π_1, θ_1) est une représentation normale de A associée à la trace φ_1, π_1 s'annule sur J si et seulement si φ_1 s'annule sur J^+. Ceci, et le cor. de la prop. 2, prouvent la première assertion de la prop. 3. D'autre part, $\mathfrak{n}_{\varphi\circ\rho} = \rho^{-1}(\mathfrak{n}_\varphi)$, $N_{\varphi\circ\rho} = \rho^{-1}(N_\varphi)$, donc l'algèbre hilbertienne $\mathfrak{n}_\varphi/N_\varphi$ s'identifie à l'algèbre hilbertienne $\mathfrak{n}_{\varphi\circ\rho}/N_{\varphi\circ\rho}$, et ceci entraîne facilement la deuxième assertion.

PROPOSITION 4. — *Soient* A *une* C*-*algèbre,* J *un idéal bilatère fermé de* A, φ *une trace semi-finie semi-continue inférieurement sur* A^+.

(i) $\varphi' = \varphi|J^+$ *est une trace semi-finie semi-continue inférieurement sur* J^+.

(ii) *On a* $\mathfrak{n}_{\varphi'} = \mathfrak{n}_\varphi \cap J$, $N_{\varphi'} = N_{\varphi'} \cap J$, *de sorte que* $H_{\varphi'}$ *s'identifie à un sous-espace vectoriel fermé de* H_φ. *Le projecteur orthogonal de* H_φ *sur* $H_{\varphi'}$ *appartient au centre de* $\mathfrak{U}_\varphi$. *Pour* $x \in J$, $\pi_\varphi(x)$ *induit* 0 *dans* $H_\varphi \ominus H_{\varphi'}$ *et* $\pi_{\varphi'}(x)$ *dans* $H_{\varphi'}$. *L'algèbre de von Neumann* $\mathfrak{U}_{\varphi'}$ *est l'algèbre induite par* $\mathfrak{U}_\varphi$ *dans* $H_{\varphi'}$, *et* $\theta_{\varphi'}$ *est la trace induite par* θ_φ *sur* $\mathfrak{U}^+_{\varphi'}$.

Si $x \in J^+$ et si $y \in A^+$ est majoré par x, on a $y \in J^+$. Il en résulte aussitôt que la trace semi-continue inférieurement φ' est semi-finie.

Il est clair que $\mathfrak{n}_{\varphi'} = \mathfrak{n}_\varphi \cap J$, $N_{\varphi'} = N_\varphi \cap J$. Comme $\mathfrak{n}_\varphi$ est un idéal bilatère de A, $H_{\varphi'}$ est stable par les opérateurs $\pi_\varphi(z)$, $\rho_\varphi(z)$ quel que soit $z \in A$, donc le projecteur orthogonal de H_φ sur $H_{\varphi'}$ appartient au centre de $\mathfrak{U}_\varphi$. Si $x \in J$, on a $x.\mathfrak{n}_\varphi \subset \mathfrak{n}_\varphi \cap J = \mathfrak{n}_{\varphi'}$, donc $\pi_\varphi(x)(H_\varphi) \subset H_{\varphi'}$. Ainsi, $\pi_\varphi(x)$ induit 0 dans $H_\varphi \ominus H_{\varphi'}$; il est clair que $\pi_\varphi(x)$ induit $\pi_{\varphi'}(x)$ dans $H_{\varphi'}$. Soit B l'algèbre hilbertienne des éléments bornés relativement à l'algèbre hilbertienne $\mathfrak{n}_\varphi/N_\varphi$; soit B' la projection orthogonale de B sur $H_{\varphi'}$; alors l'algèbre de von Neumann associée à gauche à B' est l'algèbre de von Neumann induite par $\mathfrak{U}_\varphi$ dans $H_{\varphi'}$, et la trace naturelle définie par B' est la trace induite par θ_φ; or $\mathfrak{n}_{\varphi'}/N_{\varphi'}$ est contenue dans B et partout dense dans $H_{\varphi'}$, donc contenue dans B' et partout dense dans B', donc définit la même algèbre de von Neumann et la même trace naturelle que B'.

Le résultat suivant, qui permet de décomposer une trace, jouera un rôle important au chap. III :

PROPOSITION 5. — *Soient* A *une* C*-*algèbre,* J *un idéal bilatère fermé de* A, φ *une trace semi-finie semi-continue inférieurement sur* A^+, σ *la bitrace maximale associée à* φ, $\varphi' = \varphi|J^+$, σ' *la bitrace de* J *associée à* φ'.

(i) σ' *est une bitrace de* A; *soient* τ *son prolongement maximal canonique,* ψ *la trace associée sur* A^+.

(ii) *On a* $H_\psi = H_{\varphi'}$, $\mathfrak{U}_\psi = \mathfrak{U}_{\varphi'}$, $\theta_\psi = \theta_{\varphi'}$. *Pour tout* $x \in A$, $\pi_\psi(x)$ *est la restriction de* $\pi_\varphi(x)$ *à* $H_{\varphi'}$. *Si* $x \in A^+$, *on a* $\psi(x) = \theta_\varphi(P\pi_\varphi(x))$, *en notant* P *le projecteur orthogonal de* H_φ *sur* $H_{\varphi'}$.

(iii) *Soit* (u_λ) *une unité approchée filtrante croissante de* $\overline{\mathfrak{m}}_{\varphi'}$. *Si* $x \in A^+$, *on a* $\psi(x) = \lim \varphi'(x^{1/2}u_\lambda x^{1/2})$.

(iv) *Pour tout* $x \in A^+$, *posons* $\omega(x) = \theta_\varphi((1 - P)\pi_\varphi(x))$. *Alors* ω *est une trace semi-finie semi-continue inférieurement sur* A^+ *nulle sur* J^+, *et* $\varphi = \psi + \omega$.

On a $\mathfrak{n}_{\sigma'} = \mathfrak{n}_\sigma \cap J$, donc $\mathfrak{n}_{\sigma'}$ est un idéal bilatère auto-adjoint de A, et σ' est la restriction de σ à $\mathfrak{n}_{\sigma'} \times \mathfrak{n}_{\sigma'}$. Il en résulte que σ' est une bitrace de A : les axiomes (i) à (iv) des bitraces sont immédiats, et l'axiome (v) résulte de ce que σ' est une bitrace de J. D'où (i).

Les égalités $H_\psi = H_{\varphi'}$, $\mathfrak{U}_\psi = \mathfrak{U}_{\varphi'}$, $\theta_\psi = \theta_{\varphi'}$ résultent des propriétés générales du prolongement maximal canonique. Soit $x \in A$. On a, pour tout $y \in \mathfrak{n}_{\sigma'}$,

$$\pi_\psi(x)\Lambda_\psi(y) = \Lambda_\psi(xy) = \Lambda_{\varphi'}(xy) = \Lambda_\varphi(xy) = \pi_\varphi(x)\Lambda_\varphi(y) = \pi_\varphi(x)\Lambda_\psi(y)$$

donc $\pi_\psi(x)$ coïncide avec $\pi_\varphi(x)$ sur H_ψ. Si $x \in A^+$, on a, compte tenu de la prop. 4 et de ce qui précède

$$\psi(x) = \theta_\psi(\pi_\psi(x)) = \theta_{\varphi'}(\pi_\psi(x)) = \theta_\varphi(P\pi_\varphi(x)).$$

Ceci prouve (ii), et (iii) résulte du lemme 4 (appliqué à A, π_ψ, H_ψ, $\mathfrak{U}_\psi$, θ_ψ, $\mathfrak{m}_{\varphi'}$). Enfin, ω est une trace semi-finie semi-continue inférieurement sur A^+ (lemme 4) telle que $\varphi = \psi + \omega$; si $x \in J^+$, on a $\pi_\varphi(x) = P\pi_\varphi(x)$ (prop. 4), donc $\omega(x) = 0$; d'où (iv).

7. Somme de deux traces.

Soient A une C*-algèbre, φ et φ' deux traces sur A^+. Il est clair que $\varphi + \varphi'$ est une trace. Si φ et φ' sont semi-continues inférieurement, $\varphi + \varphi'$ est semi-continue inférieurement. Supposons φ et φ' semi-finies, et montrons que $\varphi + \varphi'$ est semi-finie. Soit $x \in A^+$ tel que $(\varphi + \varphi')(x) = +\infty$, et soit α un nombre réel fini; on a par exemple $\varphi(x) = +\infty$; il existe un $y \in A^+$ tel que $y \leqslant x$ et $\alpha < \varphi(y) < +\infty$; si $\varphi'(y) < +\infty$, on a $\alpha < (\varphi + \varphi')(y) < +\infty$; si $\varphi'(y) = +\infty$, il existe un $z \in A^+$ tel que $z \leqslant y$ et $\alpha < \varphi'(z) < +\infty$, d'où $z \leqslant x$ et $\alpha < (\varphi + \varphi')(z) < +\infty$; dans les deux cas, on voit bien que $\varphi + \varphi'$ est semi-finie.

L'ensemble des traces sur A^+ est évidemment ordonné par la relation $\varphi(x) \leqslant \varphi'(x)$ pour tout $x \in A^+$. Supposons φ et φ' semi-finies semi-continues inférieurement, et soient σ, σ' les bitraces maximales associées; alors la relation $\varphi' \geqslant \varphi$ équivaut à la relation $\mathfrak{n}_{\sigma'} \subset \mathfrak{n}_\sigma$ et $\sigma'(x, x) \geqslant \sigma(x, x)$ pour $x \in \mathfrak{n}_{\sigma'}$, c'est-à-dire à la relation « σ' majore σ » au sens de [10].

Lemme 8. — *Soient* A *une* C*-*algèbre,* σ *et* σ' *deux bitraces maximales de* A. *On suppose qu'il existe une sous-algèbre involutive* B *de* A, *partout dense dans* A, *contenue dans* $\mathfrak{n}_\sigma$ *et* $\mathfrak{n}_{\sigma'}$, *telle que* σ *et* σ' *coïncident sur* B. *Alors* $\sigma = \sigma'$.

L'application $(x, y) \rightarrow \Lambda_\sigma(xy) = \pi_\sigma(x)y = \rho_\sigma(y)x$ de $\mathfrak{n}_\sigma \times \mathfrak{n}_\sigma$ dans H_σ est séparément continue ($\mathfrak{n}_\sigma$ étant muni de la topologie induite par celle de A), donc B est partout dense dans $\mathfrak{n}_\sigma$ pour la structure préhilbertienne définie par σ; de même B est partout dense dans $\mathfrak{n}_{\sigma'}$ pour la structure préhilbertienne définie par σ'. D'où un isomorphisme Θ de H_σ sur $H_{\sigma'}$ qui transforme $\Lambda_\sigma x$ en $\Lambda_{\sigma'} x$ pour tout $x \in B$. Il est immédiat que Θ transforme $\pi_\sigma(x)$ en $\pi_{\sigma'}(x)$ pour tout $x \in B$, donc transforme π_σ en $\pi_{\sigma'}$, donc $\mathcal{U}_\sigma$ en $\mathcal{U}_{\sigma'}$; d'autre part Θ transforme l'algèbre hilbertienne achevée contenant $\Lambda_\sigma(B)$ en l'algèbre hilbertienne achevée contenant $\Lambda_{\sigma'}(B)$, et par suite θ_σ en $\theta_{\sigma'}$.

Lemme 9. — *Soient* A *une* C*-*algèbre,* φ *et* φ' *deux traces semi-finies semi-continues inférieurement sur* A^+, σ *et* σ' *les bitraces associées. On suppose* $\varphi' \leqslant \varphi$.

(i) *Il existe un opérateur linéaire continu* T *et un seul dans* H_σ *tel que* $\sigma'(x, y) = (T\Lambda_\sigma x | \Lambda_\sigma y)$ *pour* $x, y \in \mathfrak{n}_\sigma$.

(ii) *On a* $0 \leqslant T \leqslant 1$ *et* $T \in \mathfrak{U}_\sigma \cap \mathfrak{V}_\sigma$.

(iii) *Si on pose* $\varphi_1(x) = \theta_\sigma(T\pi_\sigma(x))$ *pour tout* $x \in A^+$, φ_1 *est une trace semi-finie semi-continue inférieurement sur* A^+, *majorée par* φ', *et qui coïncide avec* φ' *sur* $(\overline{\mathfrak{n}_\sigma})^+$.

La démonstration de (i) et (ii) procède exactement comme dans [10], p. 12,l.21-27. La fonction $S \to \theta_\sigma(TS)$ sur $\mathfrak{U}_\sigma^+$ est une trace normale θ, et $\pi_\sigma(\mathfrak{m}_\varphi) \subset \mathfrak{m}_\theta$ est fortement partout dense dans $\mathfrak{U}_\sigma$, donc φ_1 est une trace semi-finie semi-continue inférieurement sur A^+ (lemme 4). Pour $x \in \mathfrak{n}_\sigma$, on a $\varphi_1(xx^*) = \theta_\sigma(T\pi_\sigma(x)\pi_\sigma(x^*))$; comme $T \in \mathfrak{U}_\sigma$, $T\Lambda_\sigma x$ est un élément borné relativement à l'algèbre hilbertienne $\Lambda_\sigma(\mathfrak{n}_\sigma)$, et $\theta_\sigma(T\pi_\sigma(x)\pi_\sigma(x^*)) = (T\Lambda_\sigma x | \Lambda_\sigma x^*) = \sigma'(x,x) = \varphi'(xx^*)$. Alors

$$\varphi_1 | (\overline{\mathfrak{n}_\sigma})^+ \qquad \text{et} \qquad \varphi' | (\overline{\mathfrak{n}_\sigma})^+$$

sont des traces semi-finies semi-continues inférieurement sur $(\overline{\mathfrak{n}_\sigma})^+$ (prop. 4), coïncidant sur $(\mathfrak{n}_\sigma^2)^+$, donc égales (lemme 8). D'autre part, soit (u_λ) une unité approchée filtrante croissante de $\overline{\mathfrak{m}_\sigma}$; d'après le lemme 4, on a

$$\varphi_1(x) = \lim \varphi_1(x^{1/2}u_\lambda x^{1/2}) = \lim \varphi'(x^{1/2}u_\lambda x^{1/2}) \leqslant \varphi'(x).$$

Proposition 6. — *Soient* A *une* C*-*algèbre*, φ *et* φ' *deux traces semi-finies semi-continues inférieurement sur* A^+. *Pour que* $\varphi' \leqslant \varphi$, *il faut et il suffit qu'il existe une trace semi-finie semi-continue inférieurement* φ'' *sur* A^+ *telle que* $\varphi = \varphi' + \varphi''$.

La condition est évidemment suffisante. Supposons $\varphi' \leqslant \varphi$. Utilisons le lemme 9 et ses notations. Posons

$$\varphi''(x) = \theta_\sigma((1 - T)\pi_\sigma(x))$$

pour tout $x \in A^+$. Alors φ'' est une trace semi-finie semi-continue inférieurement sur A^+ (lemme 4). Pour tout $x \in A^+$, on a $\varphi_1(x) + \varphi''(x) = \theta_\sigma(T\pi_\sigma(x)) + \theta_\sigma((1 - T)\pi_\sigma(x)) = \theta_\sigma((\pi_\sigma(x)) = \varphi(x)$. Compte tenu du lemme 9, $\varphi' + \varphi''$ coïncide avec φ sur $(\overline{\mathfrak{n}_\sigma})^+$. Si $x \in A^+$ et $x \notin (\overline{\mathfrak{n}_\sigma})^+$, on a

$$\varphi'(x) + \varphi''(x) \geqslant \varphi_1(x) + \varphi''(x) = \varphi(x) = +\infty,$$

donc encore $\varphi'(x) + \varphi''(x) = \varphi(x)$.

Corollaire. — *Soit* K *le cône convexe des traces semi-finies semi-continues inférieurement sur* A^+. *Les caractères de* A *sont les bitraces associées aux éléments des génératrices extrémales de* K.

D'après la prop. 6, l'ordre naturel entre traces coïncide avec l'ordre défini par la structure de cône convexe de K. Les éléments des génératrices extrémales de K sont donc les traces $\varphi \in K$ non nulles telles que toute $\varphi' \in K$ majorée par φ soit proportionnelle à φ; les bitraces associées sont donc les caractères de A ([10], p. 12, définition).

Proposition 7. — *Soient* A *une* C*-*algèbre*, φ *et* φ' *deux traces semi-continues inférieurement sur* A^+ *telles que* $\varphi' \leqslant \varphi$. *On suppose* $\mathfrak{m}_\varphi$ *partout dense dans* A, *de sorte que* φ *et* φ' *sont semi-finies. Il existe une trace semi-finie semi-continue inférieurement* φ'' *sur* A^+ *et une seule telle que* $\varphi = \varphi' + \varphi''$.

L'existence de φ'' résulte de la prop. 6. Soient $\varphi = \varphi' + \varphi''$, $\varphi = \varphi' + \varphi''_1$ deux décompositions de φ. Pour $x \in \mathfrak{m}_\varphi^+$, les nombres $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$, $\varphi''_1(x)$ sont finis, donc $\varphi''(x) = \varphi''_1(x)$. Donc $\varphi'' = \varphi''_1$ d'après le lemme 8.

Remarque 6. — L'unicité de φ'' est inexacte quand on ne suppose pas $\mathfrak{m}_\varphi$ partout dense dans A (même si φ est semi-finie). En effet, prenons pour A la C*-algèbre des fonctions continues complexes sur [0,1]. Posons $\varphi(x) = \int_0^1 x(t)t^{-1}\, dt$, $\varphi'(x) = x(0)$ pour $x \in A^+$. Alors φ et φ' sont des traces semi-finies semi-continues inférieurement sur A^+. Pour tout $x \in A^+$, on a $\varphi(x) + \varphi'(x) = \varphi(x)$: c'est évident si $x(0) = 0$, et, si $x(0) > 0$, les deux membres sont infinis. Donc $\varphi + \varphi' = \varphi$. Dans ce cas, $\overline{\mathfrak{m}_\varphi}$ est l'ensemble des $x \in A$ tels que $x(0) = 0$.

II. — Généralisation des C*-algèbres à trace continue.

8. Quelques résultats de Kaplansky.

Lemme 10. — *Soient* A *une* C*-*algèbre*, π_0 *un point de* $\hat{A}$, x *un élément de* A^+, *tels que la fonction* $\pi \to \mathrm{Tr}\, \pi(x)$ *sur* $\hat{A}$ *soit finie et continue en* π_0.

(i) *Si* $y \in A^+$ *est majoré par* x, *la fonction* $\pi \to \mathrm{Tr}\, \pi(y)$ *sur* $\hat{A}$ *est continue en* π_0.

(ii) *Si* $\pi_0(x) \neq 0$, *il existe un* $z \in A^+$ *tel que* $\pi(z)$ *soit un projecteur de rang* 1 *pour tous les* π *d'un voisinage de* π_0.

Soit $y' = x - y \in A^+$. Les fonctions

$$\pi \to \operatorname{Tr} \pi(y), \qquad \pi \to \operatorname{Tr} \pi(y')$$

sont semi-continues inférieurement ([5], prop. 5), de somme finie et continue en π_0, donc sont continues en π_0.

Pour prouver (ii), on peut supposer $\|\pi_0(x)\| = 1$. Soit K un sous-espace propre de dimension 1 de $\pi_0(x)$ correspondant à la valeur propre 1. L'algèbre irréductible $\pi_0(A)$ contient l'opérateur compact non nul $\pi_0(x)$, donc contient tous les opérateurs compacts; donc il existe $z_1 \in A^+$ tel que $\pi_0(z_1) = P_K$. Soit $z_2 = f(z_1)$, où $f(t) = t$ pour $0 \leqslant t \leqslant 1$ et $f(t) = 1$ pour $t \geqslant 1$; alors $\|z_2\| \leqslant 1$ et $\pi_0(z_2) = P_K$. Soit $z_3 = x^{1/2}z_2x^{1/2} \leqslant x$; on a $\pi_0(z_3) = \pi_0(x).P_K = P_K$. D'après (i), on a $\operatorname{Tr} \pi(z_3) \leqslant 5/4$ au voisinage de π_0; d'autre part, $\|\pi(z_3)\| \geqslant 3/4$ au voisinage de π_0; donc, dans un voisinage V de π_0, la plus grande valeur propre de $\pi(z_3)$ est $\geqslant 3/4$ et les suivantes sont $\leqslant 1/2$. Soit $g(t)$ une fonction continue croissante égale à 0 pour $t \leqslant 1/2$ et à 1 pour $t \geqslant 3/4$; soit $z = g(z_3)$; alors $\pi(z)$ est un projecteur de rang 1 pour $\pi \in V$.

LEMME 11. — *Soit* A *une* CCR-*algèbre. L'ensemble* I *des* $x \in A$ *tels que* $\pi(x)$ *soit pour tout* $\pi \in \hat{A}$ *un opérateur de rang fini est un idéal bilatère partout dense de* A.

Il est clair que I est un idéal bilatère de A. Soit $(f_n(t))$ une suite de fonctions continues nulles dans un voisinage variable de 0, tendant uniformément vers la fonction t. Alors, pour tout élément hermitien x de A, $f_n(x) \to f(x)$, et

$$\pi(f_n(x)) = f_n(\pi(x))$$

est de rang fini pour tout $\pi \in \hat{A}$ puisque $\pi(x)$ est compact. Donc $\bar{I} = A$.

LEMME 12. — *Soit* A *une* GCR-*algèbre non nulle. Il existe un idéal bilatère fermé non nul* I *de* A *possédant la propriété suivante: quels que soient les points distincts* π_1 *et* π_2 *dans la partie ouverte* $\hat{I}$ *de* $\hat{A}$, *il existe* $x \in I^+$ *tel que*: *a*) $\pi(x)$ *est de rang* $\leqslant 1$ *pour tout* $\pi \in \hat{I}$; *b*) *la fonction* $\pi \to \operatorname{Tr} \pi(x)$ *est continue sur* $\hat{I}$; *c*) $\operatorname{Tr} \pi_1(x) = 1$, $\operatorname{Tr} \pi_2(x) = 0$.

Comme A possède un idéal CCR non nul, on peut supposer que A est CCR; le lemme 11 prouve qu'il existe un x_1

non nul dans A^+ tel que la fonction $\pi \to f(\pi) = \operatorname{Tr} \pi(x_1)$ sur $\hat{A}$ soit partout finie. Cette fonction est semi-continue inférieurement et non identiquement nulle, donc reste $\geqslant \alpha > 0$ dans une partie ouverte non vide U de $\hat{A}$. Comme U est un espace de Baire, f admet un point de continuité π_0 dans U. D'après le lemme 10 (ii), il existe un $x_2 \in A^+$ et un voisinage ouvert V de π_0 tels que $\pi(x_2)$ soit un projecteur de rang 1 pour $\pi \in V$. Soit I l'idéal bilatère fermé de A tel que $\hat{I} = V$. Soient π_1, π_2 deux points distincts de V. Il existe $x_3 \in I^+$ tel que $\pi_1(x_3) = \pi_1(x_2)$, $\pi_2(x_3) = 0$. Soit $x = x_2^{1/2} x_3 x_2^{1/2} \in I^+$. On a $x \leqslant \|x_3\| x_2$, donc $\pi \to \operatorname{Tr} \pi(x)$ est continue sur V [lemme 10 (i)]. D'autre part,

$$\operatorname{Tr} \pi_1(x) = \operatorname{Tr} \pi_1(x_2)^2 = 1, \quad \operatorname{Tr} \pi_2(x) = 0.$$

Enfin, rang $\pi(x) \leqslant$ rang $\pi(x_2) = 1$ pour tout $\pi \in V$.

Proposition 8 ([12], *th.* 6.2, *et* [13], *lemme* 3). — *Soit* A *une* GCR-*algèbre non nulle.*

(i) *Il existe dans* $\hat{A}$ *une partie ouverte non vide séparée.*

(ii) *Il existe dans* A^+ *un* x *non nul tel que* xAx *soit commutatif.*

Avec les notations du lemme 12, les points de $\hat{I}$ sont séparés par des fonctions continues, d'où (i). On a $\pi(x) = 0$ pour $\pi \notin \hat{I}$ et rang $\pi(x) \leqslant 1$ pour $\pi \in \hat{I}$, donc $\pi(xAx)$ est commutatif pour tout $\pi \in \hat{A}$, donc xAx est commutatif.

9. C*-algèbres à trace continue.

Soit A une C*-algèbre. Soit $\mathfrak{p}$ l'ensemble des $x \in A^+$ tels que la fonction $\pi \to \operatorname{Tr} \pi(x)$ soit finie continue sur $\hat{A}$. On a $\mathfrak{p} + \mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}$, $\lambda\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}$ pour $\lambda \geqslant 0$; si $x \in A$ et $xx^* \in \mathfrak{p}$, alors $x^*x \in \mathfrak{p}$; si $x \in \mathfrak{p}$ et $0 \leqslant y \leqslant x$, alors $y \in \mathfrak{p}$ d'après le lemme 10 (i). A partir de là, les raisonnements du lemme 3 prouvent que $\mathfrak{p}$ est la partie positive d'un idéal bilatère auto-adjoint $\mathfrak{m}$ de A, ensemble des combinaisons linéaires des éléments de $\mathfrak{p}$. Si $x \in \mathfrak{m}$, l'opérateur $\pi(x)$ est un opérateur à trace pour tout $\pi \in \hat{A}$, et la fonction $\pi \to \operatorname{Tr} \pi(x)$ est continue (mais la réciproque est inexacte). Nous poserons $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}(A)$, $\overline{\mathfrak{m}} = J(A)$. On dira que A est une C*-algèbre *à trace continue* si $J(A) = A$. Il revient au même de dire que, pour tout $\pi \in \hat{A}$, il existe un

$x \in \mathfrak{m}(A)$ tel que $\pi(x) \neq 0$. Pour toute C*-algèbre A, J(A) est une C*-algèbre à trace continue.

Proposition 9. — *Si* A *est une* GCR-*algèbre non nulle,* A *possède un idéal bilatère fermé non nul à trace continue.*

Ceci résulte aussitôt du lemme 12.

Montrons que notre définition des C*-algèbres à trace continue coïncide avec celle de Fell ([9], chap. IV) (de sorte que la prop. 9 deviendra identique au th. 4.2 de [9]). Les lemmes 13 et 14 nous seront utiles, non seulement pour la prop. 10, mais aussi plus loin.

Lemme 13. — *Soient* A *une* C*-*algèbre, et* $J = J(A)$. *Tout point de* $\hat{J}$ *admet dans* $\hat{A}$ *un système fondamental de voisinages fermés.*

Soient $\pi_0 \in \hat{J}$ et V un voisinage ouvert de π_0 dans $\hat{A}$. Soit I l'idéal bilatère fermé de A quel que $\hat{I} = V$. Puisque $\pi_0 \in \hat{J}$, il existe un $x \in \mathfrak{m}(A)^+$ tel que $\operatorname{Tr} \pi_0(x) \neq 0$. Or $\pi_0(I)$ est irréductible non nul, donc il existe $x_1 \in I$ tel que $\pi_0(x_1 x x_1^*)$ soit non nul. Comme $y = x_1 x x_1^* \in \mathfrak{m}(A) \cap I^+$, la fonction $\pi \to \operatorname{Tr} \pi(y)$ est finie continue sur $\hat{A}$ et nulle hors de V; elle est > 0 en π_0. L'ensemble des $\pi \in \hat{A}$ tels que $\operatorname{Tr} \pi(y) \geqslant \frac{1}{2} \operatorname{Tr} \pi_0(y)$ est un voisinage fermé de π_0 dans $\hat{A}$ contenu dans V.

Lemme 14. — *Soient* A *une* C*-*algèbre,* π_0 *un point de* $\hat{A}$, V *et* W *des voisinages ouverts de* π_0 *dans* $\hat{A}$ *tels que* $\overline{W} \subset V$, x *un élément de* A^+ *tel que la fonction* $\pi \to \operatorname{Tr} \pi(x)$ *soit finie continue sur* V *et non nulle en* π_0. *Soit* I *l'idéal bilatère fermé de* A *tel que* $\hat{I} = W$. *Il existe un* $y \in I^+$ *tel que la fonction* $\pi \to \operatorname{Tr} \pi(y)$ *soit finie continue sur* $\hat{A}$ *et non nulle en* π_0.

Il existe un $x_1 \in I^+$ tel que $\pi_0(x_1) = \pi_0(x)$. Soit $y = x^{1/2} x_1 x^{1/2} \in I^+$. On a $\operatorname{Tr} \pi_0(y) = \operatorname{Tr} \pi_0(x)^2 \neq 0$. La fonction $\pi \to f(\pi) = \operatorname{Tr} \pi(y)$ sur $\hat{A}$ est nulle sur $\hat{A} - W$, donc continue en tout point de $\hat{A} - V$. D'autre part, $y \leqslant \|x_1\| x$, donc f est continue en tout point de V (lemme 10 (i)).

Proposition 10. — *Pour qu'une* C*-*algèbre* A *soit à trace continue, il faut et il suffit que* A *vérifie les conditions suivantes :* (i) A *est* CCR; (ii) $\hat{A}$ *est séparé*; (iii) *pour tout* $\pi_0 \in \hat{A}$, *il existe* *un* $y \in A^+$ *tel que* $\pi(y)$ *soit un projecteur de rang* 1 *dans un voisinage de* π_0.

Supposons A à trace continue. Soit $\pi \in \hat{A}$. Alors $\pi(x)$ est un opérateur traçable pour tout $x \in \mathfrak{m}(A)$, donc est compact pour tout $x \in A$. Donc A est CCR. Les points de $\hat{A}$ sont donc fermés, et le lemme 13 entraîne que $\hat{A}$ est séparé. La condition (iii) résulte du lemme 10 (ii).

Réciproquement, supposons la condition (iii) vérifiée. Soit $\pi_0 \in \hat{A}$. Il existe un voisinage ouvert V de π_0 et un $x \in A^+$ tels que $\pi(x)$ soit un projecteur de rang 1 dans V. Si $\hat{A}$ est séparé, il existe un voisinage W de π_0 tel que $\overline{W} \subset V$. D'après le lemme 14, il existe un $y \in \mathfrak{m}(A)^+$ tel que $\pi_0(y) \neq 0$. Donc $J(A) = A$.

Remarque 7. — La démonstration prouve en fait que les conditions (ii) et (iii) à elles seules entraînent que A est à trace continue. L'exemple de [5], § 2, prouve que les conditions (i) et (iii) n'entraînent pas la condition (ii), même si A est séparable. L'exemple de [8], p. 388, prouve que les conditions (i) et (ii) n'entraînent pas la condition (iii), même si A est séparable.

10. C*-algèbres à trace continue généralisées.

Soit A une C*-algèbre. Il existe un ordinal α et une famille croissante $(J_\rho)_{0 \leqslant \rho \leqslant \alpha}$ d'idéaux bilatères fermés de A possédant les propriétés suivantes : (*a*) $J_0 = 0$, $J(A/J_\alpha) = 0$; (*b*) si $\rho \leqslant \alpha$ est un ordinal limite, J_ρ est l'adhérence de $\bigcup_{\rho' \leqslant \rho} J_{\rho'}$; (*c*) si $\rho < \alpha$, $J_{\rho+1}/J_\rho = J(A/J_\rho) \neq 0$. En outre, α et la famille (J_ρ) sont déterminés *de manière unique* par les conditions précédentes. (Les J_ρ se construisent par induction transfinie). On posera $J_\alpha = K(A)$.

Proposition 11. — *Soit* A *une* C*-*algèbre. Les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *La famille* $(J_\rho)_{\rho \leqslant \alpha}$ *définie ci-dessus est telle que* $J_\alpha = A$.

(ii) *Il existe un ordinal* α' *et une famille croissante* $(J'_\rho)_{0 \leqslant \rho \leqslant \alpha'}$ *d'idéaux bilatères fermés de* A *possédant les propriétés suivantes :* (*a*) $J'_0 = 0$, $J'_{\alpha'} = A$; (b) *si* $\rho \leqslant \alpha'$ *est un ordinal limite,* J'_ρ *est l'adhérence de* $\bigcup_{\rho' < \rho} J'_{\rho'}$; (*c*) *si* $\rho < \alpha$, $J'_{\rho+1}/J'_\rho$ *est contenu dans* $J(A/J'_\rho)$.

(iii) *Pour tout idéal bilatère fermé* I *de* A *distinct de* A, $J(A/I) \neq 0$.

(iii) $\Longrightarrow$ (i) : si (iii) est vérifié, $J(A/J_\alpha) = 0$ entraîne $A = J_\alpha$.

(i) $\Longrightarrow$ (ii) : évident.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) : supposons (ii) vérifié. Soit $I \neq A$ un idéal bilatère fermé de A. Soit ρ le plus petit ordinal $\leqslant \alpha'$ tel que $J'_\rho \not\subset I$. Si $\rho' < \rho$, on a $J'_{\rho'} \subset I$, donc l'adhérence de $\bigcup_{\rho' < \rho} J'_{\rho'}$ est contenue dans I, donc ρ n'est pas un ordinal limite, donc $\rho = \rho' + 1$. Soit $x \in J'^+_\rho$ tel que $x \notin I$. Comme

$$J'_\rho/J'_{\rho'} \subset J(A/J'_{\rho'}),$$

la fonction $\pi \to \operatorname{Tr} \pi(x)$ est finie continue sur $(A/J'_{\rho'})^\wedge = \hat{A} - \hat{J}'_{\rho'}$, et a fortiori sur $\hat{A} - \hat{I} = (A/I)^\wedge$; comme $x \notin I$ on a $J(A/I) \neq 0$.

Définition 4. — *Si* A *vérifie les conditions équivalentes de la prop.* 11, *on dira que* A *est une* C*-*algèbre à trace continue généralisée (en abrégé, une* GTC-*algèbre).*

Une GTC-algèbre admet une suite de composition *canonique* dont les quotients sont à trace continue, à savoir la famille (J_ρ) définie ci-dessus. Une GTC-algèbre est évidemment GCR.

Proposition 12. — *Soient* A *une* GTC-*algèbre*, $(J_\rho)_{0 \leqslant \rho \leqslant \alpha}$ *sa suite de composition canonique. Pour tout* $\rho < \alpha$, $\hat{J}_{\rho+1} - \hat{J}_\rho$ *est une partie ouverte partout dense de* $\hat{A} - \hat{J}_\rho$, *et tout point de* $\hat{J}_{\rho+1} - \hat{J}_\rho$ *admet dans* $\hat{A} - \hat{J}_\rho$ *un système fondamental de voisinages fermés.*

En considérant A/J_ρ, on se ramène tout de suite à prouver que $\hat{J}_1$ est une partie ouverte partout dense de $\hat{A}$ et que tout point de $\hat{J}_1$ admet dans $\hat{A}$ un système fondamental de voisinages fermés. La deuxième assertion n'est autre que le lemme 13. Prouvons la première.

Soit $0 < \rho < \alpha$, et supposons qu'il existe une partie ouverte non vide U de $\hat{J}_{\rho+1}$ disjointe de $\hat{J}_\rho$. Soit I l'idéal bilatère fermé de A tel que $\hat{I} = U$. Soit φ l'homomorphisme canonique de A sur A/J_ρ. Alors $\varphi(I)$ est un idéal bilatère fermé non nul de A/J_ρ, dont le spectre s'identifie à la partie ouverte U de $(A/J_\rho)^\wedge = \hat{A} - \hat{J}_\rho$. Comme $U \subset \hat{J}_{\rho+1}$, on a $\varphi(I) \subset J(A/J_\rho)$.

Comme $\mathfrak{m}(A/J_\rho)$ est partout dense dans $J(A/J_\rho)$, $\mathfrak{m}(A/J_\rho) \cap \varphi(I)$ est partout dense dans $\varphi(I)$. Il existe donc un x non nul dans I^+ tel que $\varphi(x) \in \mathfrak{m}(A/J_\rho)$. La fonction $\pi \to f(\pi) = \operatorname{Tr} \pi(x)$ est donc finie continue sur $\hat{A} - \hat{J}_\rho$. Cette fonction est par ailleurs nulle hors de $\hat{I} = U$. Montrons que f est continue en tout point π_0 de $\hat{A}$. C'est évident si π_0 appartient à la partie ouverte U de $\hat{A} - \hat{J}_\rho$. Si $\pi_0 \notin U$, on a $f(\pi_0) = 0$; soit $\varepsilon > 0$; il existe un voisinage V de π_0 dans $\hat{A}$ tel que $f(\pi) \leqslant \varepsilon$ pour $\pi \in V \cap (\hat{A} - \hat{J}_\rho)$; pour $\pi \in V \cap \hat{J}_\rho$, on a $f(\pi) = 0 \leqslant \varepsilon$; donc $f(\pi) \leqslant \varepsilon$ dans V, ce qui prouve notre assertion. Il en résulte que $x \in J_1 \subset J_\rho$. Mais $I \cap J_\rho = 0$ puisque $U \cap \hat{J}_\rho = \emptyset$. Cette contradiction prouve que, pour $0 < \rho < \alpha$, $\hat{J}_\rho$ est partout dense dans $\hat{J}_{\rho+1}$. Par induction transfinie, on en déduit que $\hat{J}_1$ est partout dense dans $\hat{J}_\alpha = \hat{A}$. D'où la proposition.

Réciproquement :

Proposition 13. — *Soient* A *une* GCR-*algèbre*, α *un ordinal*, $(V_\rho)_{0 \leqslant \rho \leqslant \alpha}$ *une famille croissante de parties ouvertes de* $\hat{A}$ *possédant les propriétés suivantes:* (*a*) $V_0 = \emptyset$, $V_\alpha = \hat{A}$; (*b*) *si* $\rho \leqslant \alpha$ *est un ordinal limite*, $V_\rho = \bigcup_{\rho' < \rho} V_{\rho'}$; (*c*) *tout point de* $V_{\rho+1} - V_\rho$ *admet dans* $\hat{A} - V_\rho$ *un système fondamental de voisinages fermés. Alors* A *est une* GTC-*algèbre.*

Soit H_ρ l'idéal bilatère fermé de A tel que $\hat{H}_\rho = V_\rho$. Supposons $A \neq 0$. Soit ρ le plus petit ordinal $\leqslant \alpha$ tel que $H_\rho \neq 0$. D'après le lemme 12 appliqué à H_ρ, il existe un $x \in H_\rho^+$, un point π_0 de $\hat{H}_\rho$, et un voisinage ouvert V de π_0 dans $\hat{H}_\rho$ tels que la fonction $\pi \to \operatorname{Tr} \pi(x)$ soit finie continue sur V et non nulle en π_0. Par hypothèse, il existe un voisinage ouvert W de π_0 dans $\hat{A}$ tel que $\overline{W} \subset V$. Appliquant le lemme 14, on voit que $J(A) \neq 0$.

Ceci établi, supposons $K = K(A) \neq A$. Les $V_\rho - (V_\rho \cap \hat{K})$ vérifient dans $\hat{A} - \hat{K} = (A/K)^\wedge$ les conditions (*a*), (*b*), (*c*) de la proposition 13. D'après ce qui précède, $J(A/K) \neq 0$, ce qui est absurde. Donc $K = A$.

Corollaire. — *Une* GCR-*algèbre à spectre séparé est une* GTC-*algèbre.*

Remarque 8. — Par contre, il existe des CCR-algèbres séparables non nulles A telles que $J(A) = 0$ (donc qui ne sont pas GTC). En effet, soient A une C*-algèbre, $J = J(A)$, et $\pi \in \hat{J}$. Montrons que π est un point séparé de $\hat{A}$ au sens de [5]. Soit π' un point de $\hat{A}$ distinct de π. Si $\pi' \in \hat{J}$, π et π' admettent des voisinages disjoints, car, comme J est à trace continue, $\hat{J}$ est séparé. Supposons $\pi' \in \hat{A} - \hat{J}$; il existe un voisinage V de π tel que $\overline{V} \subset \hat{J}$ (lemme 13); alors V et $\hat{A} - V$ sont des voisinages disjoints de π et π'. Ceci posé, on a construit dans [5], § 2, une CCR-algèbre séparable A pour laquelle l'ensemble des points séparés de $\hat{A}$ est d'intérieur vide; les remarques qui précèdent prouvent que $J(A) = 0$.

PROPOSITION 14. — *Soient* A *une* C*-*algèbre,* $(J_\rho)_{0 \leqslant \rho \leqslant \alpha}$ *la famille d'idéaux de* A *définie au début de ce paragraphe. Si* H *est un idéal bilatère fermé de* A *contenu dans* J_α, H *est une* GTC-*algèbre.*

Soit $H_\rho = J_\rho \cap H$. Les H_ρ sont des idéaux bilatères fermés croissants de H. On a $H_0 = 0$, $H_\alpha = H$. Soient ρ un ordinal limite, $x \in H_\rho$, et $\varepsilon > 0$; il existe un $\rho' < \rho$ tel que la distance de x à $J_{\rho'}$ soit $< \varepsilon$; comme $H/H_{\rho'}$ s'identifie à $(J_{\rho'} + H)/J_{\rho'}$, il existe un point de $H_{\rho'}$ dont la distance à x est $< \varepsilon$; donc H_ρ est l'adhérence de $\bigcup_{\rho' < \rho} H_{\rho'}$. Soit maintenant $\rho < \alpha$. Il existe des y partout denses dans $J^+_{\rho+1}$ tels que la fonction $\pi \to \operatorname{Tr} \pi(y)$ soit finie continue sur $\hat{A} - \hat{J}_\rho$; donc il existe des z partout denses dans $H^+_{\rho+1}$ tels que la fonction $\pi \to \operatorname{Tr} \pi(z)$ soit finie continue sur $\hat{A} - \hat{J}_\rho$, et en particulier sur $\hat{H} - (\hat{J}_\rho \cap \hat{H}) = (H/H_\rho)^\wedge$; donc $H_{\rho+1}/H_\rho \subset J(H/H_\rho)$. Ainsi, H est une GTC-algèbre d'après la condition (ii) de la prop. 11.

PROPOSITION 15. — *Soit* A *une* GTC-*algèbre. Toute* C*-*algèbre quotient et tout idéal bilatère fermé de* A *sont des* GTC-*algèbres.*

Pour les idéaux, ceci résulte de la prop. 14. Pour les quotients, ceci résulte de la condition (iii) de la prop. 11.

J'ignore si une sous-C*-algèbre d'une GTC-algèbre est une GTC-algèbre.

Il paraît vraisemblable que la C*-algèbre d'un groupe de Lie de type I est une GTC-algèbre; mais je ne peux que le vérifier dans quelques cas très particuliers. Par exemple, d'après la prop. 13 et [8], chapitre III, la C*-algèbre du groupe SL $(n, \mathbf{C})$ est une GTC-algèbre.

III. — Le théorème de Plancherel non commutatif.

11. Mesures de Radon sur un espace localement quasi-compact.

Définition 5. — *Soient* T *un espace localement quasi-compact,* $\mathcal{B}$ *la tribu des parties boréliennes de* T. *On appelle mesure de Radon positive sur* T *une fonction* $\mu : \mathcal{B} \rightarrow [0, +\infty]$ *telle que :*

(i) *si* (X_i) *est une suite d'éléments de* $\mathcal{B}$ *deux à deux disjoints,* $\mu\left(\bigcup X_i\right) = \Sigma\mu(X_i)$;

(ii) $\mu(X) < +\infty$ *pour tout élément quasi-compact* X *de* $\mathcal{B}$;

(iii) *pour tout* $Y \in \mathcal{B}$, $\mu(Y)$ *est la borne supérieure des nombres* $\mu(X)$ *pour les* $X \in \mathcal{B}$ *quasi-compacts contenus dans* Y.

Pour l'intégration des fonctions par rapport à une μ vérifiant seulement l'axiome (i), on renvoie par exemple à [2].

Si T' est une partie ouverte ou fermée d'un espace localement quasi-compact T, et si μ est une mesure de Radon positive sur T, il est clair que μ induit sur T' une mesure de Radon positive.

Remarque 9. — Supposons T localement compact. Si μ est une mesure de Radon au sens de la déf. 5, l'application $f \rightarrow \int f\, d\mu$ de $\mathcal{K}(T)$ dans $\mathbf{R}$ est une mesure de Radon positive ν au sens de [1]. Réciproquement, soit ν une mesure de Radon positive sur T au sens de [1]; pour toute partie borélienne X de T, soit $\mu(X)$ l'intégrale supérieure essentielle de la fonction caractéristique de X, autrement dit la borne supérieure des ν-mesures des parties compactes de X; alors μ est une mesure de Radon positive au sens de la déf. 5. Et l'on sait (cf. par exemple [2]) que l'on établit ainsi une correspondance bijective entre mesures de Radon positives au sens de [1] et mesures de Radon positives au sens de la déf. 5.

Remarque 10. — Si T est un espace localement compact à base dénombrable, les axiomes (i) et (ii) de la déf. 5 entraînent l'axiome (iii). Ceci se voit par exemple en utilisant [1], chap. IV, § 4, th. 5. Il n'en est pas de même dans un espace localement compact quelconque, d'après un exemple de Dieudonné ([11], p. 231, exerc. 10).

Remarque 11. — Si T est le spectre d'une GCR-algèbre séparable, les axiomes (i) et (ii) de la déf. 5 entraînent l'axiome (iii). En effet, on sait (cf. par exemple [4]) que T est réunion d'une suite de parties boréliennes T_1, T_2, ... telles que chaque T_i soit un sous-espace de T localement compact à base dénombrable. Notre assertion résulte alors de la remarque 10.

Remarque 12. — Si T est un espace localement quasi-compact à base dénombrable dans lequel tout point est fermé (par exemple le spectre d'une CCR-algèbre séparable), on montre facilement que toute partie quasi-compacte de T est un G_δ. J'ignore si toute partie quasi-compacte de T est borélienne lorsque T est le spectre d'une GCR-algèbre séparable, ou le spectre d'une CCR-algèbre quelconque. A l'aide de [5], § 2, on peut construire un exemple de GCR-algèbre dont le spectre contient des parties quasi-compactes non boréliennes. Enfin, la démonstration de [9], th. 2.1, prouve que, si T est le spectre d'une C*-algèbre quelconque, tout point de T admet un système fondamental de voisinages quasi-compacts boréliens.

LEMME 15. — *Soient* T *un espace localement quasi-compact,* μ *une mesure de Radon positive sur* T, (f_i) *une famille filtrante croissante de fonctions semi-continues inférieurement* $\geqslant 0$ *sur* T, *et* $f = \sup f_i$. *Alors*

$$\sup \int f_i \, d\mu = \int f \, d\mu.$$

Nous allons prouver l'assertion suivante : soient $f \geqslant 0$ semi-continue inférieurement sur T, (f_i) une famille filtrante croissante de fonctions semi-continues inférieurement $\geqslant 0$ sur T, telles que $\sup f_i \geqslant f$. Soit $\alpha < \int f \, d\mu$. Alors $\alpha \leqslant \sup \int f_i d\mu$. Ceci entraînera évidemment le lemme.

Soit n un entier > 0. Soit $U_{k,n}$ l'ensemble ouvert des points où $f(t) > k.2^{-n}$. Soit $\chi_{k,n}$ la fonction caractéristique de $U_{k,n}$. Alors $g_n = 2^{-n} \sum_{k=1}^{2^{2n}} \chi_{k,n}$ est une fonction semi-continue inférieurement $\geqslant 0$ majorée par f; les g_n vont en croissant et tendent simplement vers f. Donc pour n assez grand, on a $\alpha < \int g_n \, d\mu$. Comme $\sup f_i \geqslant g_n$, on voit qu'on est ramené au cas où f est de la forme $a_1\chi_1 + a_2\chi_2 + \cdots + a_p\chi_p$, où $a_1, \ldots, a_p \in \mathrm{R}^+$ et où χ_j est la fonction caractéristique d'un ensemble ouvert U_j, avec $\mathrm{U}_1 \subset \mathrm{U}_2 \subset \cdots \subset \mathrm{U}_p$. D'après l'axiome (iii), il existe des ensembles quasi-compacts boréliens $\mathrm{K}_1 \subset \mathrm{U}_1$, $\ldots$, $\mathrm{K}_p \subset \mathrm{U}_p$ tels que $\mathrm{K}_1 \subset \mathrm{K}_2 \subset \cdots \subset \mathrm{K}_p$ et tels que, désignant par φ_j, la fonction caractéristique de K_j, on ait $\alpha < \int (a_1\varphi_1 + \cdots + a_p\varphi_p)\, d\mu$. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $t \in \mathrm{K}_1$ il existe une fonction f_i qui majore $a_1\varphi_1 + \cdots + a_p\varphi_p - \frac{\varepsilon}{2}$ en t, donc qui majore $a_1\varphi_1 + \cdots + a_p\varphi_p - \varepsilon$ dans un voisinage V_t de t. Recouvrant K_1 par un nombre fini de voisinages V_t, et utilisant le fait que la famille (f_i) est filtrante croissante, on voit qu'il existe une fonction f_i qui majore $a_1\varphi_1 + \cdots + a_p\varphi_p - \varepsilon$ sur K_1. Soit $t \in \mathrm{K}_2$. Il existe une f_j qui majore $a_1\varphi_1 + \cdots + a_p\varphi_p - \frac{\varepsilon}{2}$ en t, donc qui majore $a_1\varphi_1 + \cdots + a_p\varphi_p - \varepsilon$ dans $(\mathrm{T} - \mathrm{K}_1) \cap \mathrm{V}_t$ (V_t, voisinage de t); remplaçant f_j par une fonction f_k qui majore f_i et f_j, on peut supposer que f_j majore $a_1\varphi_1 + \cdots + a_p\varphi_p - \varepsilon$ dans V_t. Raisonnant comme plus haut, on obtient une f_i qui majore $a_1\varphi_1 + \cdots + a_p\varphi_p - \varepsilon$ sur K_2. De proche en proche, on obtient une f_i qui majore $a_1\varphi_1 + \cdots + a_p\varphi_p - \varepsilon$ partout, d'où

$$\int f_i \, d\mu > \alpha - \varepsilon(\mu(\mathrm{K}_1) + \cdots + \mu(\mathrm{K}_p)).$$

En prenant ε assez petit, on en conclut que $\sup \int f_i \, d\mu \geqslant \alpha$, d'où le lemme.

Lemme 16. — *Soient* T *un espace localement quasi-compact,* (T_i) *une famille filtrante croissante de parties ouvertes de* T, *de réunion* T, μ_i *une mesure de Radon positive sur* T_i. *On suppose que, pour tout couple* (i, j) *tel que* $\mathrm{T}_j \subset \mathrm{T}_j$, μ_j *induit sur* T_i *la mesure* μ_i. *Alors il existe sur* T *une mesure de Radon positive* μ *et une seule qui, pour tout* i, *induit* μ_i *sur* T_i.

Si K est une partie quasi-compacte borélienne de T, K est contenu dans l'un des T_i. Ceci, et l'axiome (iii) de la déf. 5, prouvent l'unicité de μ.

Si K est contenu dans T_i et T_j, il existe un T_k contenant à la fois T_i et T_j, et l'on a $\mu_i(K) = \mu_k(K) = \mu_j(K)$. On définit donc une fonction $K \to \mu(K) \in [0, +\infty[$ en posant $\mu(K) = \mu_i(K)$. Soit $\mathcal{B}$ l'ensemble des parties boréliennes de T. Pour tout $X \in \mathcal{B}$, soit $\mu(X)$ la borne supérieure des $\mu(K)$ pour tous les $K \in \mathcal{B}$ quasi-compacts contenus dans X. La fonction μ ainsi définie sur $\mathcal{B}$ vérifie évidemment les axiomes (ii) et (iii) de la déf. 5. Si $X \in \mathcal{B}$ est contenu dans T_i, on a $\mu(X) = \mu_i(X)$ puisque μ_i vérifie l'axiome (iii) de la déf. 5. Soient

$$X_1, X_2, \cdots \in \mathcal{B},$$

deux à deux disjoints, et $X = X_1 \cup X_2 \cup \cdots$. Pour tout

$$\alpha < \mu(X_1) + \mu(X_2) + \cdots,$$

il existe n tel que $\alpha < \mu(X_1) + \cdots + \mu(X_n)$; puis il existe des ensembles quasi-compacts boréliens $K_1 \subset X_1, \ldots, K_n \subset X_n$ tels que $\alpha < \mu(K_1) + \cdots + \mu(K_n)$; alors $\mu(X) \geqslant \mu(K_1 \cup \cdots \cup K_n)$. Or tous les K_j sont contenus dans un même T_i, donc

$$\mu(K_1 \cup \cdots \cup K_n) = \mu(K_1) + \cdots + \mu(K_n) > \alpha.$$

Donc $\mu(X) > \alpha$ et finalement $\mu(X) \geqslant \mu(X_1) + \mu(X_2) + \cdots$. Maintenant, soit $\beta < \mu(X)$; il existe un ensemble quasi-compact borélien K tel que $K \subset X$ et $\beta < \mu(K)$; on a $K \subset T_i$ pour un certain i, donc

$$\beta < \mu(K) = \mu_i(K) = \mu_i(K \cap X_1) + \mu_i(K \cap X_2) \\ + \cdots \leqslant \mu(X_1) + \mu(X_2) + \cdots$$

et finalement $\mu(X) \leqslant \mu(X_1) + \mu(X_2) + \cdots$ Ainsi μ est une mesure de Radon positive sur T qui, pour tout i, induit μ_i sur T_i.

12. Trace définie par une mesure sur le spectre.

Soient A une C*-algèbre, $\hat{A}$ son spectre. Pour tout $a \in A^+$, la fonction $t \to \operatorname{Tr} a(t)$ sur $\hat{A}$ est, rappelons-le, semi-continue inférieurement.

LEMME 17. — *Soient* U *une partie ouverte de* $\hat{A}$, μ *une mesure de Radon positive sur* U. *Pour tout* $a \in A^+$, *posons*

$$\varphi(a) = \int_U \operatorname{Tr} a(t)\, d\mu(t).$$

Alors φ *est une trace semi-continue inférieurement sur* A^+.

Il est clair que φ est une trace sur A^+. Si $(a_1, a_2, \dots)$ est une suite d'éléments de A^+ tendant vers a, on a $a_n(t) \to a(t)$ pour tout $t \in \hat{A}$, donc, d'après le lemme de Fatou,

$$\underline{\lim}\ \varphi(a_n) \geqslant \int_U \underline{\lim}\ \mathrm{Tr}\ a_n(t)\ d\mu\ (t) \geqslant \int_U \mathrm{Tr}\ a(t)\ d\mu\ (t) = \varphi(a)$$

donc φ est semi-continue inférieurement.

On dira que φ est la trace définie par μ et on la notera φ_μ. Une trace semi-continue inférieurement, même semi-finie, n'est pas toujours de cette forme. Nous verrons toutefois (cor. 2 du th. 2) qu'il en est ainsi si A est une GCR-algèbre.

13. — Lemmes sur les opérateurs de rang fini.

LEMME 18. — *Soient* H *un espace hilbertien,* $P_1, \dots, P_m$ (*resp.* $P'_1, \dots, P'_n$) *des projecteurs de rang* 1 *deux à deux orthogonaux dans* H, $\lambda_1, \dots, \lambda_m, \lambda'_1, \dots, \lambda'_n$ *des nombres* $\geqslant 0$ *tels que* $\lambda_1 + \dots + \lambda_m = \lambda'_1 + \dots + \lambda'_n$. *Posons* $A = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i P_i$, $A' = \sum_{i=1}^{n} \lambda'_i P'_i$. *Il existe des opérateurs partiellement isométriques* $U_1, \dots, U_p$ *et des nombres* $\alpha_1, \dots, \alpha_p \geqslant 0$ *tels que :*

(i) *chaque* U_i *a pour projecteur initial l'un des* P_j *et pour projecteur final l'un des* P'_k;

(ii) $$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i U_i^* U_i = A, \qquad \sum_{i=1}^{p} \alpha_i U_i U_i^* = A'.$$

Nous ferons la démonstration par récurrence sur $m + n$. Le lemme est évident pour $m + n = 0$. Supposons-le démontré pour $m + n \leqslant q - 1$, et envisageons le cas où $m + n = q$. On peut supposer que $\lambda_m \leqslant \lambda'_n$. Posons

$$B = \lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_{m-1} P_{m-1},$$
$$B' = \lambda'_1 P'_1 + \dots + \lambda'_{n-1} P'_{n-1} + (\lambda'_n - \lambda_m) P'_n.$$

D'après l'hypothèse de récurrence, il existe des opérateurs partiellement isométriques $U_1, \dots, U_{p-1}$ et des nombres $\alpha_1, \dots, \alpha_{p-1} \geqslant 0$ tels que : *a*) chaque U_i a pour projecteur initial l'un des projecteurs $P_1, \dots, P_{m-1}$ et pour projecteur final l'un des P'_k; *b*) $\sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i U_i^* U_i = B$, $\sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i U_i U_i^* = B'$. Soit U_p un opérateur partiellement isométrique admettant P_m pour projecteur initial, P'_n pour projecteur final, et soit $\alpha_p = \lambda_m$.

Il est immédiat que $U_1, \ldots, U_p, \alpha_1, \ldots, \alpha_p$ possèdent les propriétés du lemme.

Lemme 19. — *Soient* H *un espace hilbertien,* A *et* A′ *des opérateurs* $\geqslant 0$ *de rang fini dans* H, *de même trace. Il existe des opérateurs de rang fini* $X_1, \ldots, X_q$ *dans* H *tels que :*

(i) $\sum_{i=1}^{p} (A'^{1/2}X_iA^{1/2})^*(A'^{1/2}X_iA^{1/2}) = A$;

(ii) $\sum_{i=1}^{p} (A'^{1/2}X_iA^{1/2})(A'^{1/2}X_iA^{1/2})^* = A'$;

(iii) $\sum_{i=1}^{p} X_i^*A'X_i$ *est le support* ([3], p. 333) *de* A;

(iv) $\sum_{i=1}^{p} X_iAX_i^*$ *est le support de* A′.

Il existe $P_1, \ldots, P_m, P'_1, \ldots, P'_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m, \lambda'_1, \ldots, \lambda'_n$ tels que toutes les hypothèses du lemme 18 soient vérifiées, avec même $\lambda_j > 0$, $\lambda'_k > 0$ pour tout j et tout k. Soient $U_1, \ldots, U_p, \alpha_1, \ldots, \alpha_p$ avec les propriétés de ce lemme 18. Pour tout $i = 1, 2, \ldots, p$, notons $j(i)$ et $k(i)$ les indices tels que les projecteurs initial et final de U_i soient $P_{j(i)}$ et $P'_{k(i)}$. Posons $X_i = \lambda_{j(i)}^{-1/2}.\lambda'^{-1/2}_{k(i)}.\alpha_i^{1/2}.U_i$. Comme $U_iP_j = P'_kU_i = 0$ pour $j \neq j(i)$ et $k \neq k(i)$, on a en posant $Y_i = A'^{1/2}X_iA^{1/2}$,

$$\begin{aligned} Y_i &= \lambda'^{1/2}_{k(i)}\, P_{k(i)}\, \lambda_{j(i)}^{-1/2}\, \lambda'^{-1/2}_{k(i)}\, \alpha_i^{1/2}\, U_i\, \lambda_{j(i)}^{1/2}\, P_{j(i)} \\ &= \alpha_i^{1/2}\, P_{k(i)}\, U_i\, P_{j(i)} = \alpha_i^{1/2}\, U_i. \end{aligned}$$

Donc

$$\sum_{i=1}^{p} Y_i^*Y_i = \sum_{i=1}^{p} \alpha_iU_i^*U_i = A, \quad \sum_{i=1}^{p} Y_iY_i^* = \sum_{i=1}^{p} \alpha_iU_iU_i^* = A'.$$

Puisque $\sum_{i=1}^{p} A^{1/2}X_i^*A'X_iA^{1/2} = A$, on voit que

$$\left(\left(\sum_{i=1}^{p} X_i^*A'X_i\right)\xi|\xi\right) = (\xi|\xi)$$

pour tout $\xi \in A^{1/2}(H) = A(H)$; comme $\sum_{i=1}^{p} X_i^*A'X_i$ s'annule sur $H \ominus A(H)$, on en conclut que $\sum_{i=1}^{p} X_i^*A'X_i$ est le support de A. On voit de même que $\sum_{i=1}^{p} X_iAX_i^*$ est le support de A′.

14. — Théorème de Plancherel : cas des C*-algèbres à trace continue, et des traces à idéal de définition dense.

Lemme 20. — *Soient* T *un espace topologique,* $\mathfrak{A} = ((\mathrm{A}(t)), \Theta)$ *un champ continu de* C*-*algèbres élémentaires sur* T (*cf. par exemple* [6]), $t_0 \in \mathrm{T}$, $\varepsilon > 0$, a *et* a' *des éléments de* Θ^+ *tels que* $a(t_0)$ *et* $a'(t_0)$ *soient de rang fini et de même trace. Il existe des éléments* $y_1, \ldots, y_p \in \Theta$ *et un voisinage* V *de* t_0 *dans* T *tels que* $a(t) - \varepsilon \leqslant \Sigma y_i^*(t)y_i(t) \leqslant a(t)$, $\quad a'(t) - \varepsilon \leqslant \Sigma y_i(t)y_i^*(t) \leqslant a'(t)$ *dans* V.

Appliquant le lemme 19 à $a(t_0)$ et $a'(t_0)$, on voit qu'il existe $x_1', \ldots, x_p' \in \Theta$, tels que, posant $y_i' = a'^{1/2}x_i'a^{1/2}$, on ait

$$\Sigma y_i'^*(t_0)y_i'(t_0) = a(t_0), \qquad \Sigma y_i'(t_0)y_i'^*(t_0) = a'(t_0),$$
$$||\Sigma x_i'^*(t_0)a'(t_0)x_i'(t_0)|| \leqslant 1, \qquad ||\Sigma x_i'(t_0)a(t_0)x_i'^*(t_0)|| \leqslant 1.$$

Soit $\eta \in]0,1[$, et posons

$$x_i = (1 - \eta)x_i', \qquad y_i = a'^{1/2}x_ia^{1/2}.$$

Alors

$$||\Sigma x_i^*(t_0)a'(t_0)x_i(t_0)|| \leqslant (1 - \eta)^2, \qquad ||\Sigma x_i(t_0)a(t_0)x_i^*(t_0)|| \leqslant (1 - \eta)^2$$

donc

$$||\Sigma x_i^*(t)a'(t)x_i(t)|| \leqslant 1, \qquad ||\Sigma x_i(t)a(t)x_i^*(t)|| \leqslant 1$$

dans un voisinage W de t_0. On en déduit que, dans W,

$$\Sigma y_i^*(t)y_i(t) = a^{1/2}(t)[\Sigma x_i^*(t)a'(t)x_i(t)]a^{1/2}(t) \leqslant a(t)$$
$$\Sigma y_i(t)y_i^*(t) = a'^{1/2}(t)[\Sigma x_i(t)a(t)x_i^*(t)]a'^{1/2}(t) \leqslant a'(t).$$

D'autre part,

$$||a(t_0) - \Sigma y_i^*(t_0)y_i(t_0)|| = ||a(t_0) - (1 - \eta)^2\Sigma y_i'^*(t_0)y_i'(t_0)|| = (2\eta - \eta^2)||a(t_0)||,$$

donc $||a(t) - \Sigma y_i^*(t)y_i(t)|| \leqslant \varepsilon$ au voisinage de t_0 si η a été pris assez petit, et de même $||a'(t) - \Sigma y_i(t)y_i^*(t)|| \leqslant \varepsilon$ au voisinage de t_0.

Lemme 21. — *Soient* T *un espace localement compact,* $\mathfrak{A} = ((\mathrm{A}(t)), \Theta)$ *un champ continu de* C*-*algèbres élémentaires sur* T, $\varepsilon > 0$, a, a' *des éléments de* Θ *tendant vers* 0 *à l'infini, tels que* $a(t)$, $a'(t)$ *soient* $\geqslant 0$, *de rang fini, de même trace pour tout* $t \in \mathrm{T}$. *Il existe* $x_1, \ldots, x_s \in \Theta$ *tendant vers* 0 *à l'infini tels que*

$$a - \varepsilon \leqslant \Sigma x_i^*x_i \leqslant a, \qquad a' - \varepsilon \leqslant \Sigma x_ix_i^* \leqslant a \quad \textit{dans } \mathrm{T}.$$

Par adjonction d'un point à l'infini à T (cf. [6], prop. 10), on se ramène au cas où T est compact. Pour tout $t \in$ T, il existe un voisinage V_t de t et des éléments $y_1^t, \ldots, y_{p_t}^t$ de Θ tels que $a - \varepsilon \leqslant \Sigma y_i^{t*} y_i^t \leqslant a$, $a' - \varepsilon \leqslant \Sigma y_i^t y_i^{t*} \leqslant a'$ dans V_t. Soient $t_1, \ldots, t_q$ tels que les V_{t_i} recouvrent T. On peut supposer $p_{t_1} = p_{t_2} = \cdots = p_{t_q} = p$. Soit $(\theta_1, \ldots, \theta_q)$ une partition continue de l'unité subordonnée à $(V_{t_1}, \ldots, V_{t_q})$. Montrons que les $\theta_i^{1/2} y_j^{t_i}$ $(i = 1, \ldots, q;\ j = 1, \ldots, p)$ possèdent les propriétés des éléments x_i du lemme. Soit $t \in$ T. On a par exemple $t \in V_{t_1}, \ldots, V_{t_r}$, $t \notin V_{t_{r+1}}, \ldots, V_{t_q}$. Donc

$$\sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{p} (\theta_i^{1/2}(t)\, y_j^{t_i}(t))^* (\theta_i^{1/2}(t) y_j^{t_i}(t)) = \sum_{i=1}^{r} \theta_i(t) \sum_{j=1}^{p} y_j^{t_i}(t)^* y_j^{t_i}(t).$$

Or, si $1 \leqslant i \leqslant r$, on a $a(t) - \varepsilon \leqslant \sum_{j=1}^{p} y_j^{t_i}(t)^* y_j^{t_i}(t) \leqslant a(t)$. Comme $\sum_{i=1}^{r} \theta_i(t) = 1$, on voit que

$$a(t) - \varepsilon \leqslant \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{p} (\theta_i^{1/2}(t) y_j^{t_i}(t))^* (\theta_i^{1/2}(t) y_j^{t_i}(t)) \leqslant a(t).$$

On voit de même que

$$a'(t) - \varepsilon \leqslant \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{p} (\theta_i^{1/2}(t) y_j^{t_i}(t))\, (\theta_i^{1/2}(t) y_j^{t_i}(t))^* \leqslant a'(t).$$

LEMME 22. — *Soient* A *une* CCR-*algèbre dont le spectre* T *est supposé séparé,* φ *une trace semi-continue inférieurement sur* A^+, a *et* a' *des éléments de* A^+ *tels que, pour tout* $t \in$ T, $a(t)$ *et* $a'(t)$ *soient de rang fini et de même trace. Alors* $\varphi(a) = \varphi(a')$.

Il existe sur T un champ continu $\mathfrak{A}$ de C*-algèbres élémentaires tel que A s'identifie à la C*-algèbre des champs de vecteurs continus pour $\mathfrak{A}$ tendant vers 0 à l'infini (cf. [12], et [9], cor. du th. 1.4). D'après le lemme 21, il existe, pour tout entier $n > 0$, des éléments $x_1^n, \ldots, x_{q_n}^n \in$ A tels que

$$a - \frac{1}{n} \leqslant \Sigma x_i^{n*} x_i^n \leqslant a, \qquad a' - \frac{1}{n} \leqslant \Sigma x_i^n x_i^{n*} \leqslant a'.$$

Alors

$$\varphi(a') \leqslant \varliminf_{n \to +\infty} \varphi(\Sigma x_i^n x_i^{n*}) = \varliminf_{n \to +\infty} \varphi(\Sigma x_i^{n*} x_i^n) \leqslant \varphi(a)$$

et de même $\varphi(a) \leqslant \varphi(a')$.

LEMME 23. — *Soit* A *une* C*-*algèbre à trace continue.*

(i) *L'ensemble* $\mathfrak{p}$ *des* $x \in A$ *tels que* $x(t)$ *soit de rang borné sur* $\hat{A}$ *et nul hors d'une partie compacte de* $\hat{A}$ *est un idéal bilatère partout dense de* $\hat{A}$. *Pour* $x \in \mathfrak{p}$ *la fonction* $t \rightarrow \operatorname{Tr} x(t)$ *est un élément de* $\mathcal{K}(T)$.

(ii) *Soit* $\mathfrak{q}$ *un autre idéal bilatère partout dense de* A *tel que les conditions* $x \in \mathfrak{q}^+$, $y \in A^+$ *et* $y \leqslant x$ *impliquent* $y \in \mathfrak{q}^+$. *Soit* $f \in \mathcal{K}^+(T)$. *Il existe* $x \in (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q})^+$ *tel que* $\operatorname{Tr} x(t) = f(t)$ *pour tout* $t \in T$.

Il est clair que $\mathfrak{p}$ est un idéal bilatère auto-adjoint de A. Supposons que $\mathfrak{p}$ ne soit pas partout dense dans A. Il existe $t_0 \in T$ tel que $x(t_0) = 0$ pour tout $x \in \mathfrak{p}$. Or il existe $a \in A$ tel que $a(t)$ soit un projecteur de rang 1 dans un voisinage V de t_0. Soit $f \in \mathcal{K}(T)$, nulle hors de V, égale à 1 en t_0. Alors $f.a \in \mathfrak{p}$ et $(f.a)(t_0) \neq 0$, d'où contradiction. Donc $\mathfrak{p}$ est partout dense dans A. Si $x \in \mathfrak{p}$, la fonction $t \rightarrow \operatorname{Tr} x(t)$ appartient à $\mathcal{K}(T)$ d'après [9], th. 4.1.

Soient $\mathfrak{q}$ un idéal bilatère partout dense dans A et $f \in \mathcal{K}^+(T)$. Soit $u \in T$. Il existe $x_u \in \mathfrak{q}$, $x'_u \in \mathfrak{p}$ tels que $x_u(u)$, $x'_u(u)$ approchant arbitrairement des éléments quelconques de $A(u)$, donc tels que $x_u(u)x'_u(u) \neq 0$. Alors $y_u = (x_u x'_u)(x_u x'_u)^*$ est un élément de $(\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q})^+$ tel que $y_u(u) \neq 0$, donc $y_u(t)$ est non nul dans un voisinage ouvert V_u de u. Soient $u_1, \ldots, u_n \in T$ tels que $V_{u_1}, \ldots, V_{u_n}$ recouvrent le support de f. Soit

$$y = y_{u_1} + \cdots + y_{u_n} \in (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q})^+.$$

D'après (*i*) la fonction $t \rightarrow \operatorname{Tr}\, y(t)$ est continue. D'autre part, $\operatorname{Tr} y(t) > 0$ sur le support de f. Donc il existe $g \in \mathcal{K}^+(T)$ telle que $f(t) = g(t).\operatorname{Tr} y(t)$ pour tout $t \in T$. Posons $x = g.y$. On a $x \in \mathfrak{p}^+$. D'autre part, il existe une constante $M > 0$ telle que $x \leqslant My$, donc $x \in \mathfrak{q}$ si $\mathfrak{q}$ vérifie la condition du lemme.

Nous appliquerons ce lemme au cas où $\mathfrak{q}$ est l'idéal de définition d'une trace sur A^+; la condition

$$x \in \mathfrak{q}^+, \quad y \in A^+ \quad \text{et} \quad y \leqslant x \quad \Longrightarrow \quad y \in \mathfrak{q}^+$$

est alors évidemment satisfaite.

THÉORÈME 1. — *Soit* A *une* C*-*algèbre à trace continue. Soient* $\mathcal{M}^+(\hat{A})$ *l'ensemble des mesures de Radon positives sur*

$\hat{A}$, et $\mathcal{T}(A)$ l'ensemble des traces semi-continues inférieurement sur A^+ donc l'idéal de définition est partout dense dans A. Alors $\mu \to \varphi_\mu$ est une bijection de $\mathcal{M}(A)^+$ sur $\mathcal{T}(A)$.

Soit $\mu \in \mathcal{M}^+(A)$. Si l'idéal de définition $\mathfrak{m}$ de φ_μ n'est pas partout dense dans A, il existe $t_0 \in \hat{A}$ tel que $x(t_0) = 0$ pour tout $x \in \mathfrak{m}$. Soit $f \in \mathcal{K}^+(\hat{A})$ telle que $f(t_0) > 0$. Il existe $a \in A^+$ tel que $\operatorname{Tr} a(t) = f(t)$ pour tout $t \in \hat{A}$ (lemme 23). Alors $\varphi_\mu(a) < +\infty$, donc $a \in \mathfrak{m}$, d'où contradiction puisque $a(t_0) \neq 0$. Donc $\overline{\mathfrak{m}} = A$, de sorte que $\varphi_\mu \in \mathcal{T}(A)$.

L'application $\mu \to \varphi_\mu$ est injective d'après le lemme 23 (ii).

Soit $\varphi \in \mathcal{T}(A)$. Soit $f \in \mathcal{K}^+(A)$. D'après le lemme 23, dont nous adoptons les notations (avec $\mathfrak{q} = \mathfrak{m}_\varphi$), il existe $a \in (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q})^+$ tel que $f(t) = \operatorname{Tr} a(t)$ pour tout $t \in \hat{A}$. D'après le lemme 22, si $a' \in (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q})^+$ est tel que $f(t) = \operatorname{Tr} a'(t)$ pour tout $t \in \hat{A}$, on a $\varphi(a) = \varphi(a')$. On peut donc poser $\mu(f) = \varphi(a)$, et on définit ainsi une application de $\mathcal{K}^+(\hat{A})$ dans $\mathbf{R}^+$ qui est évidemment une mesure de Radon positive sur $\hat{A}$ (au sens de [1]). On a $\varphi_\mu(a) = \varphi(a)$ pour $a \in (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q})^+$ par construction de μ. Les traces φ et φ_μ sont semi-finies semi-continues inférieurement, et les bitraces correspondantes σ et σ' coïncident sur $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$; donc $\sigma = \sigma'$ (lemme 8) et par suite $\varphi = \varphi_\mu$. L'application $\mu \to \varphi_\mu$ est surjective.

15. — Théorème de Plancherel : cas des GCR-algèbres et des traces semi-finies.

LEMME 24. — *Soient A une C*-algèbre, φ une trace semi-continue inférieurement sur A^+. Soit E l'ensemble des idéaux bilatères fermés J de A tels que $\varphi|J^+$ soit semi-finie. Alors E, ordonné par inclusion, est inductif.*

Soit (J_i) une famille totalement ordonnée d'éléments de E, K la réunion des J_i, J l'adhérence de K, $a \in J^+$, et $\alpha < \varphi(a)$. Soit (u_λ) une unité approchée filtrante croissante de J formée d'éléments de K (lemme 2). On a $\varphi(a^{1/2}u_\lambda a^{1/2}) \to \varphi(a)$, donc $\varphi(a^{1/2}u_\lambda a^{1/2}) > \alpha$ pour un certain λ. Or $a^{1/2}u_\lambda a^{1/2} \in J_i$ pour un certain i; comme $J_i \in E$, il existe un $b \in J_i^+$ majoré par $a^{1/2}u_\lambda a^{1/2}$ tel que $\alpha < \varphi(b) < +\infty$; alors $b \leqslant a$, donc $\varphi|J^+$ est semi-finie, c'est-à-dire que $J \in E$. Donc E est inductif.

LEMME 25. — *Soient A une C*-algèbre, U une partie ouverte de $\hat{A}$, μ une mesure de Radon positive sur U.*

(i) *Soit* J *l'idéal bilatère fermé de* A *tel que* $\hat{J} = U$. *Soit* (u_λ) *une unité approchée filtrante croissante de* J. *Si* $a \in A^+$, *on a* $\varphi_\mu(a) = \lim \varphi_\mu(a^{1/2}\ u_\lambda a^{1/2})$.

(ii) *Si* $\varphi_\mu | J^+$ *est semi-finie,* φ_μ *est semi-finie.*

Les fonctions $t \to \mathrm{Tr}(a(t)^{1/2}u_\lambda(t)a(t)^{1/2})$ sur U forment une famille filtrante croissante de fonctions semi-continues inférieurement. D'autre part, $u_\lambda(t)$ tend fortement vers 1 pour $t \in U = \hat{J}$ puisque $u_\lambda \in J$; donc $\mathrm{Tr}(a(t)^{1/2}u_\lambda(t)a(t)^{1/2}) \to \mathrm{Tr}\, a(t)$. Donc $\varphi_\mu(a^{1/2}u_\lambda a^{1/2}) \to \varphi_\mu(a)$ (lemme 15). Soit $\alpha < \varphi_\mu(a)$. Il existe λ tel que $\alpha < \varphi_\mu(a^{1/2}u_\lambda a^{1/2})$. Si $\varphi_\mu | J^+$ est semi-finie, il existe $b \leqslant a^{1/2}u_\lambda a^{1/2}$ tel que $\alpha < \varphi(b) < +\infty$; alors $b \leqslant a$, donc φ est semi-finie.

LEMME 26. — *Soient* A *une* GCR-*algèbre,* U *une partie ouverte de* $\hat{A}$, μ *une mesure de Radon positive sur* U. *Alors* φ_μ *est semi-finie.*

Posons $U = \hat{K}$, où K est un idéal bilatère fermé de A. D'après le lemme 25, il suffit de prouver que $\varphi_\mu | K^+$ est semi-finie. On est donc ramené au cas où $U = \hat{A}$, ce que nous supposerons désormais.

Soit J un élément maximal de l'ensemble des idéaux bilatères fermés K de A tels que $\varphi_\mu | K^+$ soit semi-finie (lemme 24). Supposant $J \neq A$, on va aboutir à une contradiction, ce qui établira le lemme. Puisque A/J est une GCR-algèbre non nulle, il existe un idéal bilatère fermé I de A contenant J et tel que I/J soit une C*-algèbre non nulle à trace continue. Soient ν et ν' les mesures de Radon positives induites par μ sur $\hat{J}$ et sur $\hat{I} - \hat{J}$. On a $\varphi_\mu | I^+ = \varphi_\nu | I^+ + \varphi_{\nu'} | I^+$. Or $\varphi_\nu | J^+ = \varphi_\mu | J^+$ est semi-finie, donc $\varphi_\nu | I^+$ est semi-finie (lemme 25). D'autre part $\varphi_{\nu'} | I^+ = \omega \circ \rho$, en désignant par ρ l'homomorphisme canonique de I sur I/J, et par ω la trace sur $(I/J)^+$ définie par ν' (considérée comme mesure de Radon positive sur $\hat{I} - \hat{J} = (I/J)^\wedge$); alors ω est semi-finie (th. 1), donc $\varphi_{\nu'} | I^+$ est semi-finie (prop. 3), donc $\varphi_\mu | I^+$ est semi-finie. Ceci contredit la maximalité de J.

THÉORÈME 2. — *Soient* A *une* GCR-*algèbre,* φ *une trace semi-continue inférieurement sur* A^+, *dont l'idéal de définition* $\mathfrak{m}_\varphi$ *est partout dense dans* A. *Il existe une mesure de Radon positive* μ *et une seule sur* $\hat{A}$ *telle que* $\varphi = \varphi_\mu$.

Soit E l'ensemble des idéaux bilatères fermés J de A qui possèdent la propriété suivante : il existe sur le spectre $\hat{J}$ de J une mesure de Radon positive μ et une seule telle que $\varphi|J^+ = \varphi_\mu$.

Ordonnons E par inclusion, et montrons que E est inductif. Soit (J_i) une famille totalement ordonnée d'éléments de E. La réunion K des J_i est un idéal bilatère de A ; soit J son adhérence. Les $\hat{J}_i$ forment une famille totalement ordonnée de parties ouvertes de $\hat{A}$, dont la réunion est $\hat{J}$. Pour tout i, il existe une mesure de Radon positive μ_i et une seule sur $\hat{J}_i$ telle que $\varphi|J_i^+ = \varphi_{\mu_i}$. Soient i et j deux indices tels que $J_i \subset J_j$. Soit μ'_i la mesure induite par μ_j sur $\hat{J}_i$. Soit $a \in J_i^+ \subset J_j^+$. On a $\varphi(a) = \int_{\hat{J}_j} \mathrm{Tr}\ a(t)\ d\mu_j(t)$. Mais $a(t) = 0$ pour $t \notin \hat{J}_i$. Donc $\varphi(a) = \int_{\hat{J}_i} \mathrm{Tr}\ a(t)\ d\mu'_i(t)$. D'après l'hypothèse d'unicité, on a $\mu'_i = \mu_i$. Il existe (lemme 16) une mesure de Radon positive μ sur $\hat{J}$ qui induit μ_i sur $\hat{J}_i$ pour tout i. On a $\varphi_\mu(a) = \varphi(a)$ pour $a \in K^+$ par construction de μ. Les traces $\varphi|J^+$ et $\varphi_\mu|J^+$ sont semi-continues inférieurement et semi-finies (lemme 26), donc égales (lemme 8). D'autre part, si μ' est une mesure de Radon positive sur $\hat{J}$ telle que $\varphi|J^+ = \varphi_{\mu'}$, μ' induit μ_i sur $\hat{J}_i$ d'après l'hypothèse d'unicité faite sur μ_i, donc $\mu' = \mu$ d'après le lemme 16. Ainsi, $J \in E$, et on a bien prouvé que E est inductif.

Soit J un élément maximal de E. Supposons $J \neq A$. On va aboutir à une contradiction, ce qui établira le théorème.

Puisque A/J est GCR non nulle, il existe un idéal bilatère fermé I de A contenant J et tel que I/J soit une C*-algèbre non nulle à trace continue. Alors $\hat{I}$ est une partie ouverte de $\hat{A}$ contenant $\hat{J}$, et $\hat{J} - \hat{I}$ s'identifie au spectre de I/J, donc est localement compact. D'après la prop. 5 appliquée à I, J et $\varphi|I^+$, il existe des traces semi-finies semi-continues inférieurement ψ, ω sur I^+ possédant les propriétés suivantes : 1) $\varphi|I^+ = \psi + \omega$; 2) ω est nulle sur J^+ ; 3) pour tout $x \in I^+$, $\psi(x) = \lim \varphi(x^{1/2}u_\lambda x^{1/2})$, en désignant par (u_λ) une unité approchée filtrante croissante de J (on notera que, comme $\overline{\mathfrak{m}_\varphi} = A$, $\mathfrak{m}_\varphi \cap J$ est partout dense dans J).

Puisque $J \in E$, il existe une mesure de Radon positive ν

sur $\hat{J}$ telle que $\varphi|J^+ = \varphi_\nu$. Si $x \in I^+$, on a

$$(1) \qquad \varphi(x^{1/2}u_\lambda x^{1/2}) = \int_{\hat{J}} \mathrm{Tr}\,(x(t)^{1/2}u_\lambda(t)x(t)^{1/2})\,d\nu\,(t).$$

A la limite, $\varphi(x^{1/2}u_\lambda x^{1/2})$ tend vers $\psi(x)$. Les fonctions

$$t \to \mathrm{Tr}\,(x(t)^{1/2}u_\lambda(t)x(t)^{1/2})$$

forment une famille filtrante croissante de fonctions semi-continues inférieurement sur $\hat{J}$, tendant en chaque point de $\hat{J}$ vers $\mathrm{Tr}\,x(t)$ comme on l'a vu dans la démonstration du lemme 25. L'égalité (1) et le lemme 15 prouvent alors que

$$\psi(x) = \int_{\hat{J}} \mathrm{Tr}\,x(t)\,d\nu\,(t)$$

pour tout $x \in I^+$.

D'après la prop. 3, il existe une trace semi-finie semi-continue inférieurement ω' et une seule sur $(I/J)^+$ telle que $\omega = \omega' \circ \rho$, ρ désignant l'homomorphisme canonique de I sur I/J. Comme $\mathfrak{m}_\varphi$ est partout dense dans A, $\mathfrak{m}_{\varphi|I^+}$ est partout dense dans I; a fortiori, $\mathfrak{m}_\omega$ est partout dense dans I, donc $\mathfrak{m}_{\omega'}$ est partout dense dans I/J. D'après le th. 1, il existe une mesure de Radon positive ν' sur $(I/J)^\wedge = \hat{I} - \hat{J}$ telle que, pour tout $x \in I^+$, on ait

$$\omega(x) = \omega'(\rho(x)) = \int_{\hat{I}-\hat{J}} \mathrm{Tr}\rho(x)(t)d\nu'(t) = \int_{\hat{I}-\hat{J}} \mathrm{Tr}\,x(t)d\nu'(t).$$

Pour toute partie borélienne X de $\hat{I}$, posons

$$\mu(X) = \nu(X \cap \hat{J}) + \nu'(X \cap (\hat{I} - \hat{J})).$$

Il est clair que μ vérifie les axiomes (i) et (iii) de la déf. 5. Soit $t \in \hat{I}$. Il existe un $x \in I^+$ tel que $\varphi(x) < +\infty$ et $\mathrm{Tr}\,x(t) > \beta > 0$. On a alors $\mathrm{Tr}\,x(u) > \beta$ dans un voisinage ouvert V_t de t. Donc

$$\beta\nu(V_t \cap \hat{J}) \leqslant \int_{V_t \cap \hat{J}} \mathrm{Tr}\,x(u)\,d\nu(u) \leqslant \int_{\hat{J}} \mathrm{Tr}\,x(u)\,d\nu(u) = \psi(x) \leqslant \varphi(x) < +\infty,$$

donc $\nu(V_t \cap \hat{J}) < +\infty$. Il résulte de là que, si K est une partie quasi-compacte borélienne de $\hat{I}$, on a $\nu(K \cap \hat{J}) < +\infty$. Par ailleurs, $\nu'(K \cap (\hat{I} - \hat{J})) < +\infty$, car $K \cap (\hat{I} - \hat{J})$ est compact. Donc μ vérifie aussi l'axiome (ii) de la déf. 4. Bref, μ est une mesure de Radon positive sur $\hat{I}$, et, pour tout $x \in I^+$, on a

$$\varphi(x) = \psi(x) + \omega(x) = \int_{\hat{J}} \mathrm{Tr}\, x(t)\, d\nu(t) + \int_{\hat{I}-\hat{J}} \mathrm{Tr}\, x(t)\, d\nu'(t)$$
$$= \int_{\hat{I}} \mathrm{Tr}\, x(t)\, d\mu\,(t).$$

Enfin, soit μ_1 une mesure de Radon positive sur $\hat{I}$ telle que $\varphi|I^+ = \varphi_{\mu_1}$. Pour tout $a \in J^+$, on a $\varphi(a) = \int_{\hat{J}} \mathrm{Tr}\ a(t)\ d\mu_1(t)$, donc la mesure induite par μ_1 sur $\hat{J}$ est égale à ν. Soit $x \in \mathfrak{m}_\varphi \cap I^+$. On a

$$\int_{\hat{I}-\hat{J}} \mathrm{Tr}\, x(t)\, d\mu_1(t) + \int_{\hat{J}} \mathrm{Tr}\ x(t)\ d\nu(t) = \varphi(x)$$
$$= \int_{\hat{I}-\hat{J}} \mathrm{Tr}\, x(t)\, d\nu'(t) + \int_{\hat{J}} \mathrm{Tr}\, x(t)\, d\nu(t).$$

Comme tous les nombres écrits sont finis, on en déduit

$$\int_{\hat{I}-\hat{J}} \mathrm{Tr}\, x(t)\ d\mu_1(t) = \int_{\hat{I}-\hat{J}} \mathrm{Tr}\, x(t)\ d\nu'(t)$$

donc

$$\int_{\hat{I}-\hat{J}} \mathrm{Tr}\, y(t)\ d\mu_1(t) = \omega'(y)$$

pour tout $y \in \rho(\mathfrak{m}_\varphi \cap I^+)$, et par suite (lemme 8) pour tout $y \in (I/J)^+$. D'après le th. 1, la mesure induite par μ_1 sur $\hat{I} - \hat{J}$ est ν'. Donc $\mu_1 = \mu$. Donc $I \in E$, ce qui contredit la maximalité de J.

Corollaire 1. — *On conserve les notations du th. 2. Soit σ la bitrace associée à φ. Si $x, y \in \mathfrak{n}_\sigma$, l'opérateur $x(t)y^*(t)$ est traçable sauf sur un ensemble de mesure extérieure nulle (pour μ), la fonction $t \to \mathrm{Tr}\, x(t)y^*(t)$ est μ-intégrable, et l'on a*

$$\sigma(x, y) = \int_{\hat{A}} \mathrm{Tr}\ x(t)y^*(t)\ d\mu(t).$$

Par linéarité, il suffit de prouver ceci pour $x = y$. Comme $xx^* \in \mathfrak{m}_\varphi$, on a alors

$$\int_{\hat{A}} \mathrm{Tr}\ x(t)x^*(t)\ d\mu(t) < +\infty.$$

Pour tout entier n, soit $U_n \subset \hat{A}$ l'ensemble ouvert des $t \in A$ tels que $\mathrm{Tr}\ \ x(t)x^*(t) > n$. Alors

$$n\mu(U_n) \leqslant \int_{\hat{A}} \mathrm{Tr}\ x(t)x^*(t)\ d\mu(t),$$

donc $\mu(U_n) \to 0$ quand $n \to +\infty$. Ceci prouve que l'ensemble des $t \in \hat{A}$ tels que $\mathrm{Tr}(x(t)x^*(t)) = +\infty$ est de mesure extérieure nulle pour μ. On a $\sigma(x,x) = \varphi(xx^*) = \int_{\hat{A}} \mathrm{Tr}\, x(t)x^*(t)\, d\mu(t)$.

Problème. — Soit A une GCR-algèbre. Si μ est une mesure de Radon positive sur $\hat{A}$, φ_μ est semi-finie (lemme 26). Est-il vrai que $\mathfrak{m}_{\varphi_\mu}$ est partout dense? (Il en est bien ainsi si A est à trace continue, d'après le th. 1.)

Corollaire 2. — *Soit* A *une* GCR-*algèbre.*

(i) *Si* φ *est une trace semi-finie semi-continue inférieurement sur* A^+, *et si* $J = \overline{\mathfrak{m}_\varphi}$, *il existe sur* $\hat{J}$ *(qui est une partie ouverte partout dense de* $\hat{A}$*) une mesure de Radon positive* μ *et une seule telle que* $\varphi = \varphi_\mu$.

(ii) *Si* ν *est une mesure de Radon positive sur une partie ouverte de* $\hat{A}$, φ_ν *est une trace semi-finie semi-continue inférieurement sur* A^+.

L'assertion (ii) résulte des lemmes 17 et 26. D'après le th. 2, il existe une mesure de Radon positive μ et une seule sur $\hat{J}$ telle que $\varphi(a) = \int_{\hat{J}} \mathrm{Tr}\, a(t)\, d\mu(t)$ pour tout $a \in J^+$. Appliquons la prop. 5, avec les mêmes notations, à A, J, φ. Puisque $J = \overline{\mathfrak{m}_\varphi}$, on a $\sigma' = \sigma$, donc $\psi = \varphi$, et par suite

$$\varphi(x) = \lim \varphi(x^{1/2} u_\lambda x^{1/2})$$

pour tout $x \in A^+$. Par un raisonnement plusieurs fois employé, on en déduit que

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \lim \int_{\hat{J}} \mathrm{Tr}\,(x(t)^{1/2}\, u_\lambda(t) x(t)^{1/2})\, d\mu\,(t)\\ &= \int_{\hat{J}} \mathrm{Tr}\, x(t)\, d\mu(t).\end{aligned}$$

Donc $\varphi = \varphi_\mu$.

16. — Théorème de Plancherel : cas des groupes.

Théorème 3. — *Soit* G *un groupe localement compact unimodulaire et* GCR. *Il existe sur l'espace localement quasi-compact* $\hat{G}$ *une mesure de Radon positive* μ *et une seule possédant les propriétés suivantes : si* f, $g \in L^1(G) \cap L^2(G)$, *l'opérateur* $\pi(f)\pi(g^*)$ *(où* $\pi \in \hat{G}$*) est traçable sauf sur un ensemble* μ*-négli-*

geable de valeurs de π, *la fonction* $\pi \to \mathrm{Tr}(\pi(f)\pi(g)^*)$ *est* μ-*intégrable, et l'on a*

$$\int_G f(s)\overline{g(s)}\,ds = \int_{\hat{G}} \mathrm{Tr}\,(\pi(f)\pi(g)^*)\,d\mu\,(\pi).$$

Soit A la C*-algèbre de G. Alors $B = L^1(G) \cap L^2(G)$ est une sous-algèbre involutive de A partout dense dans A, et en même temps une algèbre hilbertienne. Soit π la représentation régulière gauche de G dans $H = L^2(G)$; cette représentation définit de façon canonique une représentation, notée encore π, de A dans H, et l'algèbre de von Neumann $\mathfrak{U}$ engendrée par $\pi(A)$ est aussi l'algèbre de von Neumann associée à gauche à l'algèbre hilbertienne B. Soit θ la trace naturelle définie par B sur $\mathfrak{U}^+$. Alors (π, θ) est une représentation normale de A; soit φ la trace associée sur A^+. Pour $f \in B$, on a

$$\theta(\pi(f)\pi(f)^*) = (f|f) < +\infty.$$

Donc $\overline{\mathfrak{m}}_\varphi = A$. Il existe (th. 2) une mesure de Radon positive μ sur $\hat{A} = \hat{G}$ telle que $\varphi = \varphi_\mu$. D'après le cor. 1 du th. 2, μ possède les propriétés du th. 3. Soit μ' une autre mesure de Radon positive sur $\hat{G}$ possédant ces propriétés. Soient σ et σ' les bitraces maximales de A associées à φ_μ et $\varphi_{\mu'}$. Pour $f, g \in B$, on a $\sigma(f, g) = (f|g) = \sigma'(f, g)$. Donc $\sigma = \sigma'$ (lemme 8), $\varphi_\mu = \varphi_{\mu'}$ et $\mu = \mu'$.

Remarque 13. — La représentation π de A ci-dessus admet un noyau J, et c'est parfois A/J, identifiable à $\pi(A) = \overline{\pi(B)}$, qu'on appelle la C*-algèbre de G; le spectre de A/J est la partie fermée $\hat{G} - \hat{J}$ de $\hat{G}$, appelée parfois dual réduit de G (ses éléments sont les représentations unitaires irréductibles de G faiblement contenues [8] dans la représentation régulière). Puisque φ s'annule sur J^+, μ est concentrée sur $\hat{G} - \hat{J}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. Bourbaki. Intégration, chap. I-IV et chap. V, *Act. Sc. Ind.*, n° 1175 et 1244, Paris, Hermann, 1952 et 1956.

[2] P. Courrège. Théorie de la mesure, Paris, *Centre de Documentation Universitaire*, 1962.

[3] J. Dixmier. Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien, *Cahiers Scientifiques*, Paris, Gauthier-Villars, 1957.

[4] J. Dixmier. Sur les structures boréliennes du spectre d'une C*-algèbre, *Publ. Math. Inst. H.E.S.*, n° 6, 1960, pp. 5-11.

[5] J. Dixmier. Points séparés dans le spectre d'une C*-algèbre, *Acta Sc. Math.*, 22 (1961), pp. 115-128.

[6] J. Dixmier et A. Douady. *Champs continus d'espaces hilbertiens et de C*-algèbres*, à paraître au *Bull. Soc. Math. France*.

[7] J. A. Ernest. A decomposition theory for unitary representations of locally compact groups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 104 (1962), pp. 252-277.

[8] J. M. G. Fell. The dual spaces of C*-algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 94 (1960), p. 365-403.

[9] J. M. G. Fell. The structure of algebras of operator fields, *Acta Math.*, 106 (1961), pp. 233-280.

[10] A. Guichardet. Caractères des algèbres de Banach involutives, *Ann. Inst. Fourier*, 13 (1962), p. 1-81.

[11] P. R. Halmos, *Measure theory*, D. van Nostrand, New York, 1953.

[12] I. Kaplansky. The structure of certain operator algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 70 (1951), pp. 219-255.

[13] I. Kaplansky. Group algebras in the large, *Tohoku Math. J.*, 3 (1951), pp. 249-256.

[14] G. W. Mackey. Borel structure in groups and their duals, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 85 (1957), pp. 134-165.

[15] F. I. Mautner. Unitary representations of locally compact groups, II, *Ann. Math.*, 52 (1950), pp. 528-556.

[16] F. Rellich. Halbbeschrankte gewohnliche Differentialoperatoren zweiter Ordnung, *Math. Ann.*, 122 (1951), pp. 343-368.

[17] I. E. Segal. An extension of Plancherel's formula to separable unimodular groups, *Ann. Math.*, 52 (1950), pp. 272-292.

[18] I. E. Segal. Irreducible representations of operator algebras, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 53 (1947), pp. 73-88.