Annales de l'institut Fourier

Charles Ehresmann

Groupoïdes sous inductifs

Annales de l'institut Fourier, tome 13, nº 2 (1963), p. 1-60
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1963__13_2_1_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
13, 2 (1963), 1-60.

GROUPOIDES SOUS-INDUCTIFS

par Charles EHRESMANN (Paris)

INTRODUCTION

Cet article a été rédigé, il y a deux ans, avec l'intention d'en faire une partie du 2e chapitre d'un livre sur la théorie des catégories ordonnées. Le plan du livre ayant été modifié depuis, en fonction de résultats nouveaux (catégories structurées [3]), seul le premier chapitre et la partie I du 2e chapitre ont été publiés ([1] et [2]). Ici nous avons réuni le texte des parties II et III du chapitre 2, en l'abrégeant; la partie IV sera publiée plus tard.

La théorie des groupoïdes sous-inductifs, et plus particulièrement des atlas complets dans les groupoïdes sous-inductifs, a été exposée dans différentes conférences, tant à Paris qu'à l'étranger; la partie II a aussi été multigraphiée à Paris. De plus les théorèmes ont été publiés, sans démonstration, dans [4].

Les principaux résultats de ce mémoire sont : l'existence et les propriétés des groupoïdes sous-préinductifs des atlas faibles complets et des atlas complets attachés à un groupoïde sous-préinductif; les théorèmes de complétion d'un groupoïde prélocal; les théorèmes d'existence du groupoïde sous-inductif des filtres sur un groupoïde sous-préinductif. Cet article est une généralisation, et une étude plus approfondie, de la théorie des groupoïdes inductifs, qui interviennent dans de nombreuses questions; il peut donc être considéré comme la suite de [5].

PLAN

QUELQUES RAPPELS

Le texte avait été écrit en supposant connue la partie I ([2]); bien que certaines démonstrations tout à fait analogues à celles faites dans [2] aient été omises dans les n^{os} 1 et 2, nous allons rappeler quelques définitions et conventions afin que cet article puisse être lu indépendamment de la partie I [2].

Dans une catégorie $\mathcal{C}$, la loi de composition est toujours désignée par le signe ., le composé de g et f étant donc noté $g.f$, s'il est défini. La classe des unités de $\mathcal{C}$ est notée $\mathcal{C}_0$, les unités à droite et à gauche de f étant représentées resp. par $\alpha(f)$ et $\beta(f)$. Le mot foncteur signifie toujours foncteur covariant.

Si $\mathcal{A}$ est une classe ordonnée, et si $\mathcal{A}$ est une sous-classe de $\mathcal{A}$ admettant une borne supérieure (resp. inférieure) dans $\mathcal{A}$, nous appellerons cette borne supérieure (resp. inférieure) *l'agrégat* (resp. *l'intersection*) de A et nous la noterons $\bigcup A$ (resp. $\bigcap A$). Si B ne contient que deux éléments a et a', nous écrirons aussi : $\bigcap A = a \cap a'$ et $\bigcup A = a \cup a'$.

DÉFINITION 1. — *On appelle* classe préinductive *une classe ordonnée* $\mathcal{A}$ *telle que deux éléments quelconques aient une intersection et que* $\mathcal{A}$ *admette un plus petit élément* 0. *On appelle* classe inductive, *une classe ordonnée* $\mathcal{A}$ *dans laquelle toute sous-classe admet une intersection.*

DÉFINITION 2. — *On appelle* groupoïde ⸢pré⸣inductif [1] *un groupoïde* $\mathcal{G}$ *muni d'une relation d'ordre* $<$ *pour laquelle* $\mathcal{G}$ *soit une classe ⸢pré⸣inductive et telle que l'axiome suivant soit vérifié :*

(I) *Pour tout* $f \in \mathcal{G}$, *soit* $\varphi(f)$ *la classe des éléments* $f' < f$; *l'application :* $f \to \varphi(f)$ *est un foncteur généralisé de* $\mathcal{G}$ *vers* $\mathcal{G}$ *appelé* foncteur d'induction.

L'axiome (I) est équivalent à :

1) Soit $e \in \mathcal{G}_0$ et $h < e$; alors on a $h \in \mathcal{G}_0$;

2) On a $h < g.f$ si, et seulement si, $h = g'.f'$, où $g' < g$ et $f' < f$.

En particulier, si $f' < f$, on a $\alpha(f') < \alpha(f)$ et $\beta(f') < \beta(f)$.

1. GROUPOIDES SOUS-⸢PRE⸣INDUCTIFS

Dans une classe ordonnée, nous désignerons par $a^{>}$ la classe des éléments plus petits qu'un élément a.

DÉFINITION 1. — *Une classe ordonnée* $\mathcal{A}$ *est appelée* classe sous-⸢pré⸣inductive *si* $\mathcal{A}$ *a un plus petit élément* 0 *et si, pour tout élément* $a \in \mathcal{A}$, *la classe* $a^{>}$ *est une classe ⸢pré⸣inductive pour l'ordre induit.*

PROPOSITION 1. — *Soient* $\mathcal{A}$ *une classe ordonnée et* B *une sous-classe de* $\mathcal{A}$ *majorée par* $a \in \mathcal{A}$. *Pour que* b *soit l'intersection de* B *dans* $\mathcal{A}$, *il faut et il suffit que* b *soit l'intersection de* B *dans* $a^{>}$.

En effet, la classe des minorants de B dans $\mathcal{A}$ est identique à celle des minorants de B dans $a^{>}$.

COROLLAIRE. — *Pour que* $\mathcal{A}$ *soit sous-⸢pré⸣inductif, il faut et il suffit que* $\mathcal{A}$ *admette un plus petit élément* 0 *et que toute sous-classe ⸢finie⸣ de* $\mathcal{A}$ *majorée dans* $\mathcal{A}$ *admette une intersection.*

PROPOSITION 2. — *Soit* $\mathcal{A}$ *une classe sous-préinductive,* $a \in \mathcal{A}$ *et* $b \in \mathcal{A}$; *si* $a \cap b$ *est défini, alors* $a' \cap b'$ *est défini, pour tout* $a' < a$ *et tout* $b' < b$.

Démonstration. — Les éléments a' et $a \cap b$ étant majorés par a, ils ont une intersection $a' \cap (a \cap b) = a' \cap b$; de même

[1] Les mots ou membres de phrases placés entre les signes ⸢ ⸣ peuvent être lus ou supprimés simultanément dans un énoncé ou une démonstration.

les éléments b' et $a \cap b$ ont pour intersection $(a \cap b) \cap b' = a \cap b'$. Les éléments $a' \cap b$ et $a \cap b'$ étant majorés par $a \cap b$, ils ont pour intersection $(a' \cap b) \cap (a \cap b') = a' \cap b'$.

Définition 2. — *Soit* $\mathcal{A}$ *une classe sous-préinductive,* B *une sous-classe de* $\mathcal{A}$; *si* B *admet un agrégat dans* $c^{>}$, *alors cet agrégat sera appelé* c-agrégat *ou* sous-agrégat de B *et sera noté* $\overset{c}{\bigsqcup} B$; *la classe de tous les sous-agrégats de* B *sera appelé* congrégation de B *dans* $\mathcal{A}$ *et désignée par* $\overline{\bigsqcup} B$; *si* B *n'admet pas de sous-agrégat, nous écrirons :* $\overline{\bigsqcup} B = \emptyset$.

Proposition 3. — *Soit* $\mathcal{A}$ *une classe sous-(pré)inductive et* B *une sous-classe de* $\mathcal{A}$ *majorée par* $c \in \mathcal{A}$ *et admettant un c-agrégat* b; *alors* b *est aussi le* c'*-agrégat de* B, *où* c' *est un majorant de* B *tel que* $c \cap c'$ *soit défini dans* $\mathcal{A}$: $\overset{c}{\bigsqcup} B = \overset{c'}{\bigsqcup} B$.

En effet, $c' \cap c$ est aussi un majorant de B; comme $c' \cap c$ appartient à $c^{>}$, on a $b < c \cap c'$ et b est un majorant de B dans $c'^{>}$. — Soit c'' un majorant de B tel que $c'' < c'$; comme $c'' \cap c$ est défini et majore B dans $c^{>}$, on trouve $b < c'' \cap c < c''$ et b est aussi l'agrégat de B dans $c'^{>}$.

Corollaire 1 [2]. — *Si* $b = \overset{c}{\bigsqcup} B$, *on a* $b = \overset{b}{\bigsqcup} B$. *Si* $b_1 = \overset{c_1}{\bigsqcup} B$ *et si* $b \cap b_1$ *est défini, alors* $b = b_1$.

Corollaire 2. — *Si* B *admet un agrégat* $\bigcup B$ *dans* $\mathcal{A}$, *alors* $\bigcup B = \overset{c}{\bigsqcup} B$ *pour tout majorant* c *de* B.

Une classe sous-inductive $\mathcal{A}$ est une classe ordonnée admettant un plus petit élément et telle que la classe des majorants d'une sous-classe B de $\mathcal{A}$ soit vide ou admette des éléments minimaux, tout majorant c de B étant plus grand qu'un majorant minimal, à savoir $\overset{c}{\bigsqcup} B$.

Proposition 4. — *Si* $\mathcal{A}$ *est une classe préinductive et si* B *est une sous-classe de* $\mathcal{A}$, *on a* $\overline{\bigsqcup} B = \{\bigcup B\}$ *si* B *admet un agrégat dans* $\mathcal{A}$, *sinon* $\overline{\bigsqcup} B = \emptyset$.

[2] Dans le corollaire d'une proposition ou d'un théorème, nous supposons vérifiées les hypothèses de la proposition ou du théorème.

En effet, supposons que B admette un c-agrégat; pour tout majorant c' de B, puisque $c \cap c'$ est défini, on a :

$$\bigsqcup^{c} \mathrm{B} = \bigsqcup^{c'} \mathrm{B} < c',$$

d'où

$$\bigsqcup^{c} \mathrm{B} = \cup \mathrm{B}.$$

Définition 3. — *Un groupoïde $\mathcal{G}$ est appelé* groupoïde sous-(pré)inductif *s'il est muni d'une relation d'ordre pour laquelle $\mathcal{G}$ est une classe sous-(pré)inductive et si l'axiome* (I) *est vérifié.*

Proposition 5. — *Soit $\mathcal{G}$ un groupoïde muni d'une relation d'ordre vérifiant l'axiome* (I); *pour tout $f \in \mathcal{G}$ et tout $e \in \mathcal{G}_0$ tel que $e < \alpha(f)$ (respectivement $e < \beta(f)$), il existe un et un seul élément $g < f$ pour lequel $\alpha(g) = e$ (respectivement $\beta(g) = e$); g est appelé* l'élément induit (*respectivement* induit à gauche) par f sur e.

Corollaire. — *Pour qu'un groupoïde $\mathcal{G}$ muni d'une relation d'ordre vérifiant l'axiome* (I) *soit sous-(pré)inductif, il faut et il suffit que $\mathcal{G}_0$ soit une classe sous-(pré)inductive pour l'ordre induit.*

La démonstration est analogue à celle de la proposition 2-1, I [2]. Démontrons le corollaire : soit F une sous-classe (finie) de $\mathcal{G}$ majorée par $g \in \mathcal{G}$; alors $\alpha(\mathrm{F})$ est majorée par $\alpha(g)$, donc $e = \bigcap \alpha(\mathrm{F})$ est défini; soit g' l'élément induit par g sur e; pour tout $f \in \mathrm{F}$, on a $g' < f$. Si h est un minorant de F, $\alpha(h)$ minore $\alpha(\mathrm{F})$, d'où $\alpha(h) < e$; par suite h est l'élément induit par g' sur $\alpha(h)$ et $h < g'$. Donc $g' = \bigcap \mathrm{F}$.

Remarque. — Il y a des exemples importants de groupoïdes $\mathcal{G}$ sous-préinductifs dans lesquels la condition suivante est vérifiée : Soient E une sous-classe de $\mathcal{G}_0$, e' et e'' deux sous-agrégats de E dans $\mathcal{G}_0$; alors il existe un et un seul $f \in \mathcal{G}$ tel que $f \in \overline{\bigsqcup} \mathrm{E}$, $\alpha(f) = e'$ et $\beta(f) = e''$.

Proposition 6. — *Soit $\mathcal{G}$ un groupoïde sous-préinductif; si* E *est une sous-classe de $\mathcal{G}_0$, la congrégation de* E *dans $\mathcal{G}_0$*

est contenue dans la congrégation de E *dans* $\mathcal{G}$*; pour toute sous-classe* A *de* $\mathcal{G}$*, on a les relations :*

$$\alpha\Big(\bigcup^{g} A\Big) = \bigcup^{\alpha(g)} \alpha(A); \qquad \beta\Big(\bigcup^{g} A\Big) = \bigcup^{\beta(g)} \beta(A);$$
$$\Big(\overline{\bigcup} A\Big)^{-1} = \overline{\bigcup}(A^{-1}).$$

En effet, soit $b = \bigcup^{g} A = \bigcup^{b} A$; montrons que $\bigcup^{\alpha(g)} \alpha(A)$ est défini et égal à $\alpha(b)$. On a $\alpha(b) < \alpha(g)$ et $\alpha(b)$ est un majorant de $\alpha(A)$. Si e est un majorant de $\alpha(A)$ tel que $e < \alpha(b)$, l'élément b' induit par b sur e est un majorant de A, donc $b' = b$ et par suite $e = \alpha(b)$. D'où $\alpha(b) = \bigcup^{\alpha(b)} \alpha(A) = \bigcup^{\alpha(g)} \alpha(A)$. La suite de la démonstration est analogue à celle de la proposition 3-1, I [2].

Proposition 7. — *Soit* $\mathcal{G}$ *un groupoïde sous-préinductif,* A *une sous-classe de* $\mathcal{G}$ *majorée par* $f \in \mathcal{G}$*; si* $\bigcup^{\alpha(f)} \alpha(A)$ *ou* $\bigcup^{\beta(f)} \beta(A)$ *est défini, alors* $\bigcup^{f} A$ *est défini; si* $\bigcap A$ *est défini, alors* $\bigcap \alpha(A)$ *et* $\bigcap \beta(A)$ *sont définis; si* $\bigcap \alpha(A)$ *ou* $\bigcap \beta(A)$ *est défini,* $\bigcap A$ *est défini. On a les relations :*

$$\alpha(\bigcap A) = \bigcap \alpha(A); \qquad \beta(\bigcap A) = \bigcap \beta(A).$$

Démonstration analogue à celle de la proposition 4-1, I [2].

Proposition 8. — *Soit* $\mathcal{G}$ *un groupoïde sous-préinductif; la loi de composition dans* $\mathcal{G}$ *peut être étendue en une loi de composition appelée* pseudomultiplication, *définie pour tous les couples* (f', f) *tels que* $e = \alpha(f') \cap \alpha(f)$ *soit défini, en posant :*

$(f', f) \rightarrow f'f = g'.g$*, où* g *est l'élément induit à gauche sur* e *par* f *et* g' *l'élément induit sur* e *par* f'.

Cette pseudomultiplication vérifie l'axiome d'associativité suivant :

Si (hg) *et* (gf) *sont définis, alors* $h(gf)$ *et* $(hg)f$ *sont définis et égaux.*

Démonstration. — Comme dans le cas préinductif (proposition 6-1, I [2]) on montre ([3]) que $f'f$ est le plus grand élément

([3]) On montre que $f'f$ est défini si, et seulement si, la classe K admet un plus grand élément.

de la classe K des composés $h'.h$, où $h < f$ et $h' < f'$. — Si hg et gf sont définis, $\alpha(h) \cap \beta(g)$ et $\alpha(g) \cap \beta(f)$ sont définis; par suite $\alpha(hg) \cap \beta(f)$ et $\alpha(h) \cap \beta(gf)$ sont aussi définis, ainsi que $(hg)f$ et $h(gf)$. L'égalité de ces deux pseudoproduits se démontre comme au § I [2].

Proposition 9. — *Soit $\mathcal{G}$ un groupoïde sous-préinductif; les unités du groupoïde $\mathcal{G}$ sont les seuls éléments idempotents pour la pseudomultiplication; si e et e' sont deux unités telles que $e \cap e'$ soit défini, on a $e \cap e' = ee' = e'e$. La relation d'ordre dans $\mathcal{G}$ est compatible avec la pseudomultiplication et elle peut aussi être définie par une des conditions suivantes: $f' < f$ si, et seulement si, il existe $e \in \mathcal{G}_0$ tel que fe soit défini et égal à f';*

$f' < f$ si, et seulement si, il existe $e' \in \mathcal{G}_0$ tel que $e'f$ soit défini et égal à f'.

Cette proposition se démontre comme la proposition 7-1, I [2] et admet un corollaire analogue; en particulier:

Corollaire. — *Soient $f \in \mathcal{G}$ et $f' \in \mathcal{G}$ tels que $f'f$ soit défini; alors on a les formules:*

$$f'f = (f'\beta(f)) \cdot (\alpha(f')f); \quad (f'f)^{-1} = f^{-1}f'^{-1}.$$

Lemme 1. — *Soit $\mathcal{A}$ une classe munie d'une loi de composition partiellement définie, vérifiant l'axiome d'associativité* (A):

(A) *Si bb' et $b'b''$ sont définis, alors $(bb')b''$ et $b(b'b'')$ sont définis et égaux;*

et l'axiome de commutativité (C):

(C) *Si bb' est défini, alors $b'b$ est défini et $bb' = b'b$.*

Si, de plus, tout élément de $\mathcal{A}$ est idempotent et si $\mathcal{A}$ admet un élément 0 tel que $0b = 0$ pour tout $b \in \mathcal{A}$, alors $\mathcal{A}$ est une classe sous-préinductive pour la relation:

$$b' < b \qquad \text{si, et seulement si,} \qquad b' = b'b.$$

Démonstration analogue à celle du lemme 1-1, I [2].

Théorème 1. — *Soit $\mathcal{G}$ une classe munie d'une loi de composition partiellement définie vérifiant l'axiome* (A). *Soit $\mathcal{G}_0$ une sous-classe de $\mathcal{G}$ formée d'idempotents, stable pour la loi de composition et contenant un élément 0 tel que $0e = 0$ pour tout $e \in \mathcal{G}_0$. Supposons vérifiés les axiomes 1, 2, 3 suivants:*

1) *La restriction de la loi de composition à $\mathcal{G}_0 \times \mathcal{G}_0$ vérifie* (C).

2) *Pour tout* $f \in \mathcal{G}$, *la classe des éléments* $e \in \mathcal{G}_0$ *tels que* fe *soit défini et égal à* f *admet une intersection* $\alpha(f)$, *telle que* $f\alpha(f)$ *soit défini et égal à* f, *pour la structure d'ordre sur* $\mathcal{G}_0$ *définie dans le lemme. De même, la classe des éléments* $e' \in \mathcal{G}_0$ *tels que* $e'f$ *soit défini et égal à* f *admet une intersection* $\beta(f)$ *telle que* $\beta(f)f = f$.

3) *Pour tout* $f \in \mathcal{G}$, *il existe* $f' \in \mathcal{G}$ *tel que* $f'f$ *et* ff' *soient définis et que l'on ait:* $f'f = \alpha(f)$ *et* $ff' = \beta(f)$.
Alors $\mathcal{G}$ *est un groupoïde sous-préinductif pour la structure d'ordre définie par la relation:*

$f' < f$ *si, et seulement si, il existe* $e \in \mathcal{G}_0$ *tel que* fe *soit défini et égal à* f';
$\mathcal{G}_0$ *est la classe de tous les éléments idempotents de* $\mathcal{G}$. *Si, de plus,* $\mathcal{G}_0$ *est une classe sous-inductive pour la relation d'ordre considérée dans le lemme, alors* $\mathcal{G}$ *est sous-inductif.*

La démonstration est analogue à celle du théorème 1-1,I [2].

PROPOSITION 10. — *Le groupoïde produit de deux groupoïdes sous-(pré)inductifs, muni de la structure d'ordre produit, est un groupoïde sous-(pré)inductif, appelé* groupoïde sous-(pré)-inductif produit *des groupoïdes donnés.*

THÉORÈME 2. — *Soit* $\mathcal{G}$ *un groupoïde sous-(pré)inductif et soit* $\hat{\mathcal{G}}$ *le sous-groupoïde de* $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$ *formé des couples* (f', f), *où* $f' < f$, *muni de la relation:*
$(f', f) < (g', g)$ *si, et seulement si,* $f = 0$, *ou si* $f = g$ *et* $f' < g'$.
Alors $\hat{\mathcal{G}}$ *est un groupoïde (pré)inductif.*

Démonstration. — $\hat{\mathcal{G}}$ admet pour plus petit élément l'élément $(0, 0)$. Soient $(f', f) \in \hat{\mathcal{G}}$ et $(g', g) \in \hat{\mathcal{G}}$; si $f \neq g$, l'élément $(0, 0)$, qui est le seul minorant de (f', f) et (g', g), est leur intersection. Si $f = g$, l'élément $f' \cap g'$ est défini et on a: $(f', f) \cap (g', f) = (f' \cap g', f)$. Donc $\hat{\mathcal{G}}$ est une classe préinductive. — Le composé $(g', g).(f', f)$ est défini si, et seulement si, $g'.f'$ et $g.f$ sont définis; pour que l'on ait $(h', h) < (g'.f', g.f)$, il faut et il suffit que $h = 0$, ou que: $h = g.f$ et $h' < g'.f'$, d'où $h' = g'_1.f'_1$, avec $g'_1 < g'$ et $f'_1 < f'$. Comme tout élément majoré par une unité est une unité, $\hat{\mathcal{G}}$ vérifie l'axiome (I) et $\hat{\mathcal{G}}$ est un groupoïde préinductif. — Si $\mathcal{G}$ est sous-inductif, soit A une sous-classe de $\hat{\mathcal{G}}$ majorée par $(f', f) \in \hat{\mathcal{G}}$; tout élément de A est de la forme (a, f) et la classe des éléments a tels que $(a, f) \in A$ admet un f-agrégat a' dans $\mathcal{G}$. Par suite, dans $\hat{\mathcal{G}}$, on aura : $(a', f) = \bigcup A$, donc $\hat{\mathcal{G}}$ est inductif.

2. GROUPOIDES SOUS-LOCAUX ET SOUS-PSEUDOGROUPES

DÉFINITION 1. — *Une* classe sous-(pré)locale *est une classe sous-(pré)inductive $\mathcal{A}$ dans laquelle l'axiome de distributivité* (D) *suivant est vérifié :*

(D) *Soit* B *une sous-classe de $\mathcal{A}$ admettant un c-agrégat et soit $a \in \mathcal{A}$ tel que $\left(\overset{c}{\bigcup} B\right) \cap a$ soit défini; alors la classe des éléments $b \cap a$, où $b \in B$, admet $\left(\overset{c}{\bigcup} B\right) \cap a$ pour c-agrégat :*

$$\left(\overset{c}{\bigcup} B\right) \cap a = \overset{c}{\bigcup_{b \in B}} b \cap a.$$

Un groupoïde sous-(pré) local *est un groupoïde sous-(pré)-inductif dont la classe $\mathcal{G}_0$ des unités est une classe sous-(pré)locale.*

PROPOSITION 1 — *Soit $\mathcal{A}$ une classe sous-prélocale,* B *une sous-classe de $\mathcal{A}$ admettant un c-agrégat et $a \in \mathcal{A}$ tel que $d = \overset{c}{\bigcup_{b \in B}} (b \cap a)$ et $a \cap d$ soient définis; alors on a : $d = \left(\overset{c}{\bigcup} B\right) \cap a$.*

Démonstration. — d est un minorant de $\overset{c}{\bigcup} B$ et de a, puisque $a \cap d$ est défini; soit d' un autre minorant de a et de $\overset{c}{\bigcup} B$; les éléments d' et d sont majorés par a, donc $d \cap d'$ est défini et, d'après l'axiome (D) :

$$d \cap d' = \overset{c}{\bigcup_{b \in B}} (b \cap a \cap d') = \overset{c}{\bigcup_{b \in B}} (b \cap d');$$

par ailleurs $d' \cap \left(\overset{c}{\bigcup} B\right)$ est aussi défini et on a :

$$d' = d' \cap \left(\overset{c}{\bigcup} B\right) = \overset{c}{\bigcup_{b \in B}} (d' \cap b) = d \cap d',$$

d'où $d' < d$ et $d = \left(\overset{c}{\bigcup} B\right) \cap a$.

Proposition 2. — *Un groupoïde sous-prélocal $\mathcal{G}$ est une classe sous-prélocale.*

La démonstration de la proposition 2-2, I [2] s'applique en prenant pour A une sous-classe de $\mathcal{G}$ admettant un h-agrégat et en supposant $g = f \cap \overset{h}{\bigsqcup} A$ défini.

Étant donnés un groupoïde sous-préinductif $\mathcal{G}$, A et A′ deux sous-classes de $\mathcal{G}$, nous désignerons par A′A la classe des pseudoproduits $a'a$, où $a \in A$, $a' \in A'$, $a'a$ défini.

Proposition 3. — *Soit $\mathcal{G}$ un groupoïde sous-prélocal,* A *et* A′ *deux sous-classes de $\mathcal{G}$; on a:*

$$\left(\overline{\bigsqcup} A'\right)\left(\overline{\bigsqcup} A\right) \subset \overline{\bigsqcup} A'A.$$

Démonstration. — Soient

$$g = \overset{b}{\bigsqcup} A = \overset{g}{\bigsqcup} A \quad \text{et} \quad g' = \overset{b'}{\bigsqcup} A' = \overset{g'}{\bigsqcup} A'$$

tels que $e = \alpha(g')\beta(g)$ soit défini; alors $g'g$ est défini et, par une démonstration analogue à celle de la proposition 3-2, I, on montre que: $g'g = \overset{g'g}{\bigsqcup} A'A$; donc A′A admet $g'g = b'eb$ pour $b'eb$-agrégat.

Définition 2. — *Soit $\mathcal{A}$ une classe sous-préinductive. Une sous-classe $\mathcal{A}'$ de $\mathcal{A}$ est appelée* sous-classe inductive (*respectivement* partie sous-inductive) ⌜faible⌝ *de $\mathcal{A}$ si elle vérifie les axiomes* 1 *et* 2 (*respectivement* 1′ *et* 2) *suivants:*

1) *Soient $a \in \mathcal{A}'$, $a' \in \mathcal{A}'$ tels que $a \cap a'$ soit défini; alors $a \cap a' \in \mathcal{A}'$.*

1′) *Soient $a \in \mathcal{A}'$, $a' \in \mathcal{A}'$, $a'' \in \mathcal{A}'$ avec $a' < a$, $a'' < a$; on a: $a' \cap a'' \in \mathcal{A}'$.*

2) *$\mathcal{A}'$ est ⌜faiblement⌝ $\overline{\bigsqcup}$-saturée, c'est-à-dire pour toute sous-classe* B de *$\mathcal{A}'$ admettant un b-agrégat ⌜où $b \in \mathcal{A}'$⌝, on a: $\overset{b}{\bigsqcup} B \in \mathcal{A}'$.*

Une sous-classe inductive faible et une partie sous-inductive faible d'une classe sous-⌜pré⌝inductive sont des classes sous-⌜pré⌝inductives pour l'ordre induit. L'intersection d'une classe de sous-classes inductives (respectivement parties sous-inductives) ⁅faibles⁆ d'une classe $\mathcal{A}$ sous-préinductive est une sous-classe inductive (respectivement partie sous-inductive) ⁅faible⁆ de $\mathcal{A}$.

DÉFINITION 3. — *Soit* $\mathcal{A}$ *une classe sous-préinductive,* B *une sous-classe de* $\mathcal{A}$. *Si* $\overline{\mathrm{B}}$ *est la classe des b-agrégats des sous-classes de* B ⁅*où* $b \in \mathrm{B}$⁆, B *est appelée* base ⁅faible⁆ de $\overline{\mathrm{B}}$. *L'intersection* $\mathcal{B}$ *des sous-classes inductives (respectivement parties sous-inductives)* ⁅*faibles*⁆ *de* $\mathcal{A}$ *qui contiennent* B *est appelée* sous-classe inductive (*respectivement* partie sous-inductive) ⁅faible⁆ de $\mathcal{A}$ engendrée par B.

PROPOSITION 4. — *Soit* B *une sous-classe d'une classe sous-prélocale* $\mathcal{A}$ *contenant avec deux éléments majorés dans* $\mathcal{A}$ *leur intersection; alors* B *est une base* ⁅*faible*⁆ *de la partie sous-inductive* ⁅*faible*⁆ $\mathcal{B}$ *qu'elle engendre dans* $\mathcal{A}$.

Comme dans la proposition 5-2, I [2], $\mathcal{B}$ est la classe des c-agrégats des sous-classes de B ⁅où $c \in \mathrm{B}$⁆.

COROLLAIRE. — *Si* B *est une sous-classe d'un groupoïde sous-prélocal* $\mathcal{G}$ *telle que* $\mathrm{B}\alpha(\mathrm{B}) \subset \mathrm{B}$, *alors* B *est une base* ⁅*faible*⁆ *de* $\mathcal{B}$ *et on a :* $\mathcal{B}\alpha(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}$; *de plus,* $\alpha(\mathcal{B})$ *est une sous-classe inductive faible de* $\mathcal{G}_0$.

La première partie se démontre comme le corollaire de la proposition 5-2, I [2]. Soient $e = \alpha(f)$, $f \in \mathcal{B}$, $e' \in \alpha(\mathcal{B})$ tels que ee' soit défini. La relation $fe' \in \mathcal{B}\alpha(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}$ entraîne

$$\alpha(fe') = ee' \in \alpha(\mathcal{B}).$$

Soit E une sous-classe de $\alpha(\mathcal{B})$ admettant un $\alpha(g)$-agrégat où $g \in \mathcal{B}$; pour tout $e \in \mathrm{E}$, on a $ge \in \mathcal{B}$; par suite :

$$g\left(\bigcup^{\alpha(g)} \mathrm{E}\right) = \bigcup^{g} g\mathrm{E} \in \mathcal{B}$$

et $\displaystyle\bigcup^{\alpha(g)} \mathrm{E} = \alpha\left(\bigcup^{g} g\mathrm{E}\right) \in \alpha(\mathcal{B})$.

DÉFINITION 4. — *Soit* $\mathcal{G}$ *un groupoïde sous-préinductif; on appelle* sous-groupoïde sous-préinductif *de* $\mathcal{G}$ *un sous-groupoïde* $\mathcal{G}'$ *de* $\mathcal{G}$ *vérifiant les conditions suivantes :*

1) *Soient* $e \in \mathcal{G}'_0$, $e' \in \mathcal{G}'_0$, $e'' \in \mathcal{G}'_0$ *avec* $e' < e$, $e'' < e$; *alors* $e' \cap e'' \in \mathcal{G}'_0$.

2) *Soient* $f \in \mathcal{G}'$ *et* $e \in \mathcal{G}'_0$, $e < \alpha(f)$; *alors on a* $fe \in \mathcal{G}'$.

PROPOSITION 5. — *Soit $\mathcal{G}$ un groupoïde sous-préinductif et $\mathcal{G}'$ un sous-groupoïde sous-préinductif de $\mathcal{G}$; alors $\mathcal{G}'$ contient $f' \cap f''$ avec deux éléments f' et f'' majorés par $f \in \mathcal{G}'$.*

En effet, on a $\alpha(f') < \alpha(f)$, $\alpha(f'') < \alpha(f)$, d'où $\alpha(f') \cap \alpha(f'') \in \mathcal{G}'_0$ et $f' \cap f'' = f(\alpha(f')\alpha(f'')) \in \mathcal{G}'$.

COROLLAIRE. — *$\mathcal{G}'$ est un groupoïde sous-préinductif pour l'ordre induit.*

DÉFINITION 5. — *Soit $\mathcal{G}$ un groupoïde sous-préinductif; on appelle* sous-pseudogroupe (faible) de $\mathcal{G}$ *un sous-groupoïde $\mathcal{G}'$ de $\mathcal{G}$ stable pour la pseudomultiplication et (faiblement) $\bigsqcup$-saturée.*

Un sous-pseudogroupe faible d'un groupoïde sous-préinductif est un groupoïde sous-préinductif pour l'ordre induit.

PROPOSITION 6. — *Soit $\mathcal{G}$ un groupoïde sous-préinductif; pour qu'un sous-groupoïde $\mathcal{G}'$ de $\mathcal{G}$ soit un sous-pseudogroupe faible de $\mathcal{G}$, il faut et il suffit que $\mathcal{G}'_0$ soit une sous-classe inductive faible de $\mathcal{G}_0$ et que $\mathcal{G}'$ soit un sous-groupoïde sous-préinductif de $\mathcal{G}$.*

En effet, supposons que $f'f$ soit défini, où $f \in \mathcal{G}'$ et $f \in \mathcal{G}'$; alors $e = \alpha(f') \cap \beta(f) \in \mathcal{G}'_0$, $f'e \in \mathcal{G}'$, $ef \in \mathcal{G}'$, d'où $f'f \in \mathcal{G}'$. La fin de la démonstration est analogue à celle de la proposition 9-2, I [2].

PROPOSITION 7. — *Un sous-groupoïde $\mathcal{G}'$ d'un groupoïde sous-préinductif $\mathcal{G}$ qui est saturé par induction est un sous-pseudogroupe faible de $\mathcal{G}$.*

L'intersection d'une classe de sous-pseudogroupes (faibles) d'un groupoïde sous-préinductif $\mathcal{G}$ est un sous-pseudogroupe (faible) de $\mathcal{G}$.

DÉFINITION 6. — *Soit $\mathcal{G}$ un groupoïde sous-préinductif,* B *une sous-classe de $\mathcal{G}$; l'intersection $\mathcal{B}$ des sous-pseudogroupes (faibles) de $\mathcal{G}$ contenant* B *est appelée* sous-pseudogroupe (faible) de $\mathcal{G}$ engendré par B dans $\mathcal{G}$; *si tout élément de $\mathcal{B}$ est un b-agrégat d'une sous-classe de* B *(où $b \in$ B), alors* B *est dit* base (faible) de $\mathcal{B}$.

Proposition 8. — *Soit* B *une sous-classe d'un groupoïde sous-préinductif* $\mathcal{G}$ *vérifiant les conditions suivantes :*

1) *On a* $\alpha(B) \subset B$; $\beta(B) \subset B$; $B^{-1} = B$.

2) *Si* $e \in B \cap \mathcal{G}_0$, $b \in B$ *et si* be *est défini, alors on a* $be \in B$.

3) B *est faiblement* $\overline{\bigsqcup}$*-saturé.*

Alors le sous-groupoïde $\mathcal{B}$ *engendré par* B *dans* $\mathcal{G}$ *est un sous-pseudogroupe faible de* $\mathcal{G}$.

La démonstration est analogue à celle de la proposition 11-2, I [2].

Proposition 9. — *Soit* $\mathcal{G}$ *un groupoïde sous-prélocal et* B *un sous-groupoïde de* $\mathcal{G}$ *stable pour la pseudomultiplication; alors* B *est une base (faible) du sous-pseudogroupe (faible) qu'il engendre dans* $\mathcal{G}$.

Cette proposition se démontre comme la proposition 12-2, I [2] et admet des corollaires analogues.

Définition 7. — *Soit* $\mathcal{G}$ *un groupoïde sous-préinductif: on appelle* sous-classe compatible *de* $\mathcal{G}$ *une sous-classe* F *telle que, pour tout* $f \in F$ *et tout* $f' \in F$, $f^{-1}f'$ *et* $f'f^{-1}$ *soient définis et appartiennent à* $\mathcal{G}_0$.

En particulier toute sous-classe majorée d'un groupoïde sous-préinductif $\mathcal{G}$ est compatible; pour qu'une classe d'unités de $\mathcal{G}$ soit compatible, il faut et il suffit que l'intersection de deux quelconques de ses éléments soit définie.

Proposition 10. — *Soit* $\mathcal{G}$ *un groupoïde sous-préinductif,* $f \in \mathcal{G}$ *et* $f' \in \mathcal{G}$. *Pour que l'on ait* $f'f^{-1} \in \mathcal{G}_0$, *il faut et il suffit que* $f \cap f'$ *soit défini et que l'on ait :* $f \cap f' = f\alpha(f') = f'\alpha(f)$. *Dans ce cas on a :* $f'f^{-1} = \beta(f \cap f')$.

En effet, montrons que la condition est nécessaire : $\alpha(f) \cap \alpha(f')$ étant défini, $f\alpha(f')$ et $f'\alpha(f)$ sont définis; de plus on a :

$$f'f^{-1} = (f'\alpha(f)).(\alpha(f')f^{-1}) \in \mathcal{G}_0,$$

d'où $f'\alpha(f) = f\ \alpha(f') = f \cap f'$.

Proposition 11. — *Soit* $\mathcal{G}$ *un groupoïde sous-préinductif,* F *et* G *deux sous-classes compatibles de* $\mathcal{G}$; *alors* $\varphi(F)$, F^{-1} *et* GF *sont des sous-classes compatibles, où* $\varphi(F)$ *est la classe des éléments induits des éléments de* F.

En effet, l'existence de $(gf)^{-1}(g'f')$, où $gf \in \mathrm{GF}$ et $g'f' \in \mathrm{GF}$, résulte de celle de $g^{-1}g'$. On démontre comme à la proposition 4-2, I [2] : $(g \cap g')\ (f \cap f') = gf\alpha(g'f') = g'f'\alpha(gf)$. Remarquons que la sous-classe inductive engendrée par F n'est pas nécessairement compatible.

DÉFINITION 8. — *Un sous-pseudogroupe* (*faible*) $\mathcal{G}'$ *d'un groupoïde sous-préinductif* $\mathcal{G}$ *est dit* propre *si* $\mathcal{G}'$ *admet une base* (*faible*) B *telle que* $\alpha(\mathrm{B})$ *et* $\beta(\mathrm{B})$ *soient des sous-classes compatibles.*

En particulier, si $\mathcal{G}'$ *est formé d'unités, on dira que* $\mathcal{G}'$ *est une sous-*classe *inductive* (*faible*) propre *de* $\mathcal{G}_0$.

PROPOSITION 12. — *Soit* $\mathcal{G}$ *un groupoïde sous-préinductif; si* $\mathcal{G}'$ *est un sous-pseudogroupe faible propre de* $\mathcal{G}$, *alors* $\mathcal{G}'_0$ *est une sous-classe compatible de* $\mathcal{G}_0$ *et le sous-pseudogroupe engendré par* $\mathcal{G}'$ *dans* $\mathcal{G}$ *est propre.*

En effet, soit B la base faible de $\mathcal{G}'$ telle que $\alpha(\mathrm{B})$ et $\beta(\mathrm{B})$ soient compatibles; toute unité de $\mathcal{G}'$ étant majorée par un élément de B, $\mathcal{G}'_0$ est compatible. Comme $\mathcal{G}'$ est une base du sous-pseudogroupe qu'il engendre, ce dernier est propre.

Remarque. Un sous-pseudogroupe propre n'est pas toujours un sous-pseudogroupe faible propre.

DÉFINITION 9. — *Soit* $\mathcal{G}$ *un groupoïde sous-préinductif,* Γ *un sous-pseudogroupe de* $\mathcal{G}$ *et* A *une sous-classe de* $\mathcal{G}$. *On dit que* A *est* pseudo-saturé à droite (*respectivement* à gauche) relativement à Γ *si* $\mathrm{A}\Gamma = \mathrm{A}$ (*resp.* $\Gamma\mathrm{A} = \mathrm{A}$). *Si* A *est pseudo-saturé à droite et à gauche relativement à* Γ, *alors* $\mathrm{A} = \Gamma\mathrm{A} = \mathrm{A}\Gamma$ *est dit* pseudo-saturé relativement à Γ. *Si* A *est pseudo-saturé relativement à* $\mathcal{G}$, A *est appelé* composante inductive faible de $\mathcal{G}$.

Si A est pseudo-saturé à droite relativement à Γ, alors $\alpha(\mathrm{A})$ est contenu dans la classe $\varphi(\Gamma_0)$ des éléments induits des éléments de Γ_0.

Soit $\mathcal{G}$ un groupoïde et soit $\mathcal{G}^+$ le groupoïde inductif obtenu en adjoignant à $\mathcal{G}$ un élément 0 et en considérant sur $\mathcal{G}^+$ la relation triviale :

$f' < f$ si, et seulement si, $f' = f$, ou $f' = 0$.

Pour que A soit un sous-groupoïde saturé ([4]) de $\mathcal{G}$, il faut

([4]) Un sous-groupoïde A de $\mathcal{G}$ est saturé dans $\mathcal{G}$ (1-I [1]) si $\mathrm{A} = \mathrm{A}.\mathcal{G} = \mathcal{G}.\mathrm{A}$.

et il suffit que la classe A^+ obtenue en adjoignant 0 à A soit une composante faible de $\mathcal{G}^+$.

Proposition 13. — *Soit $\mathcal{G}$ un groupoïde sous-préinductif. Pour qu'une sous-classe A de $\mathcal{G}$ soit une composante inductive faible de $\mathcal{G}$, il faut et il suffit que l'une des conditions équivalentes suivantes soit vérifiée :*

1) A *est un sous-groupoïde saturé de $\mathcal{G}$ et une sous-classe saturée par induction dans $\mathcal{G}$.*

2) *On a :* $\alpha(A) \subset A$ *et* A *est pseudo-saturé à droite relativement à $\mathcal{G}$.*

3) *On a* $\beta(A) \subset A$ *et* A *est pseudo-saturé à gauche relativement à $\mathcal{G}$.*

Démonstration. — Soit A une classe vérifiant la condition 2; pour tout $f \in A$, on a $f^{-1} = \alpha(f)f^{-1} \in A\mathcal{G} = A$ et A^{-1} est contenu dans A. Soit $g \in \mathcal{G}$ tel que gf soit défini; les relations : $gf = (f^{-1}g^{-1})^{-1}$, $f^{-1} \in A$ et $f^{-1}g^{-1} \in A\mathcal{G} = A$ entraînent $gf \in A$, donc $\mathcal{G}A \subset A$ et, puisque $A \subset \mathcal{G}A$ pour toute sous-classe A, on a $\mathcal{G}A = A$; par suite A est une composante inductive faible de $\mathcal{G}$. On démontre de même que si A vérifie la condition 3, alors A est une composante inductive faible de $\mathcal{G}$. — Soit A une composante inductive faible de $\mathcal{G}$ et soit $f \in A$. Comme on a : $\alpha(f) = f^{-1}f \in \mathcal{G}A = A$ et $\beta(f) = ff^{-1} \in A\mathcal{G} = A$, les conditions 2 et 3 sont satisfaites et le début de la démonstration prouve que A^{-1} est contenu dans A. Pour tout $h \in \mathcal{G}$ tel que fh soit défini, on a $fh \in A$; il en résulte que A est un sous-groupoïde saturé et saturé par induction dans $\mathcal{G}$. — Soit A un sous-pseudogroupe faible vérifiant la condition 1; alors $\alpha(A) \subset A$; soit $f \in A$ et $g \in \mathcal{G}$ tels que fg soit défini; on a : $fg = (f\beta(g)).(\alpha(f)g)$; puisque A est saturé par induction, $f\beta(g) \in A$; A étant aussi saturé dans $\mathcal{G}$, on a $\alpha(f)g \in \mathcal{G}$, et par suite $fg \in A$, c'est-à-dire $A\mathcal{G} \subset A$ et A vérifie la condition 2. Donc A est une composante inductive faible de $\mathcal{G}$.

Corollaire 1. — *Pour qu'une sous-classe C_0 de $\mathcal{G}_0$ soit une composante inductive faible de $\mathcal{G}_0$, il faut et il suffit que C_0 soit une sous-classe de $\mathcal{G}_0$ saturée par induction.*

Corollaire 2. — *L'intersection d'une classe de composantes inductives faibles de $\mathcal{G}$ est une composante inductive faible de $\mathcal{G}$.*

Définition 10. — *Soit* $\mathcal{G}$ *un groupoïde sous-préinductif. Un sous-pseudogroupe* A' *de* $\mathcal{G}$ *qui est engendré par une composante inductive faible* A *de* $\mathcal{G}$ *est appelé* composante inductive de $\mathcal{G}$.

Proposition 14. — *Soit* $\mathcal{G}$ *un groupoïde sous-prélocal,* A' *un sous-pseudogroupe de* $\mathcal{G}$*; pour que* A' *soit une composante inductive de* $\mathcal{G}$*, il faut et il suffit que* A' *soit une composante inductive faible de* $\mathcal{G}$.

Démonstration. — Soit A' une composante inductive de $\mathcal{G}$ engendrée par la composante inductive faible A; puisque $\mathcal{G}$ est sous-prélocal, A' admet A pour base; donc A' est saturé par induction dans $\mathcal{G}$. Soit $h \in \mathcal{G}$ et $\alpha(h) \in \overline{A'_0}$; il existe une sous-classe E de A_0 telle que $\alpha(h) \in \bigcup E$. D'après la proposition 3, on a : $h = \bigcup^{h} hE$. Comme A est pseudo-saturé, et que $\alpha(he) = e \in A_0$, on a $he \in A$ pour tout $e \in E$, d'où $h \in A'$. Par suite A' est saturé dans $\mathcal{G}$ et A' est une composante inductive faible de $\mathcal{G}$. La condition est évidemment suffisante.

Corollaire 1. — *Pour qu'une sous-classe* C_0 *de la classe sous-prélocale* $\mathcal{G}_0$ *soit une composante inductive de* $\mathcal{G}_0$*, il faut et il suffit que* C_0 *soit une sous-classe inductive de* $\mathcal{G}_0$ *saturée par induction.*

Corollaire 2. — *L'intersection d'une classe de composantes inductives de* $\mathcal{G}$ *est une composante inductive de* $\mathcal{G}$.

Ce corollaire résulte du corollaire 2 de la proposition 13.

Définition 11. — *Soit* B *une sous-classe d'un groupoïde sous-préinductif* $\mathcal{G}$*; on appelle* composante inductive faible de B dans $\mathcal{G}$ *l'intersection* A *des composantes inductives faibles de* $\mathcal{G}$ *contenant* B. *Le sous-pseudogroupe* $\overline{A}$ *engendré par* A *est appelé* composante inductive de B dans $\mathcal{G}$.

Proposition 15. — *Soit* B *une sous-classe d'un groupoïde sous-préinductif* $\mathcal{G}$*; la composante inductive faible de* B *dans* $\mathcal{G}$ *est la composante* (5) A *dans* $\mathcal{G}$ *de la classe* $\varphi(B)$ *des éléments induits des éléments de* B. *Si* $\mathcal{G}$ *est sous-prélocal, la composante*

(5) **La composante de C dans $\mathcal{G}$, où $C \subset \mathcal{G}$, est le plus petit sous-groupoïde saturé de $\mathcal{G}$ contenant C.**

inductive A' *de* B *dans* $\mathcal{G}$ *est le groupoïde saturé de* $\mathcal{G}$ *tel que* A'_0 *soit la sous-classe inductive de* $\mathcal{G}_0$ *admettant* A_0 *pour base.*

Démonstration. — D'après la proposition 13, A est une composante inductive faible de $\mathcal{G}$; comme A contient B, A est la composante inductive faible de B dans $\mathcal{G}$. Si $\mathcal{G}$ est sous-prélocal, le sous-pseudogroupe A' admet A pour base et A'_0 admet A_0 pour base; la proposition résulte donc de la proposition 14.

Corollaire 1. — *La composante inductive faible dans* $\mathcal{G}_0$ *d'une sous-classe* B_0 *de* $\mathcal{G}_0$ *est la classe* $\varphi(B_0)$.

Corollaire 2. — *La composante inductive de* B *dans* $\mathcal{G}$ *est l'intersection des composantes inductives de* $\mathcal{G}$ *contenant* B.

Remarque. — Les composantes inductives (faibles) d'un groupoïde sous-préinductif $\mathcal{G}$ ne forment pas une partition de $\mathcal{G}$; en effet, la relation « f appartient à la composante inductive (faible) de g » n'est pas une relation symétrique. On obtient une partition de $\mathcal{G}$ en considérant les *composantes surinductives* de $\mathcal{G}$, c'est-à-dire les composantes inductives faibles A de $\mathcal{G}$ telle que pour tout $e \in A_0$, la relation $e < e'$ entraîne $e' \in A_0$. Une composante surinductive de $\mathcal{G}$ est ainsi une composante inductive de $\mathcal{G}$ qui contient avec un élément tous ses majorants et tous ses minorants.

3. ATLAS COMPLETS DANS LES GROUPOIDES SOUS-INDUCTIFS

Soit $\mathcal{G}$ une groupoïde sous-préinductif. Si F et G sont deux sous-classes de $\mathcal{G}$, nous désignerons par F^{-1} la classe des inverses des éléments de F, par G.F la classe des composés $g.f$ et par GF la classe des pseudo-produits gf, où $g \in G$ et $f \in F$.

Proposition 1. — *Soit* F *une sous-classe faiblement* $\overline{\bigcup}$-*saturée de* $\mathcal{G}$ *telle que* $F\alpha(F) = F$ *et* $\beta(F)F = F$. *Alors* F *est une partie sous-inductive faible de* $\mathcal{G}$, *tandis que* $\alpha(F)$ *et* $\beta(F)$ *sont des sous-classes inductives faibles. On a*: $F^{-1}F = F^{-1}.F$; $FF^{-1} = F.F^{-1}$; *les groupoïdes engendrés par* $a(F) = F^{-1}F$ *et* $b(F) = FF^{-1}$ *sont des sous-pseudogroupes faibles de* $\mathcal{G}$.

Démonstration. Soient $f \in \mathrm{F}$ et $f' \in \mathrm{F}$. Si f et f' sont majorés par $f'' \in \mathrm{F}$, on a $f \cap f' = f\alpha(f') \in \mathrm{F}$, donc F est une partie sous-inductive faible; si $\alpha(f) \cap \alpha(f')$ est défini, on a :

$$\alpha(f) \cap \alpha(f') = \alpha(f\alpha(f')) \in \alpha(\mathrm{F}).$$

Soit E une sous-classe de $\alpha(\mathrm{F})$ admettant un $\alpha(f)$-agrégat $\bar{e}$; la classe $f\mathrm{E}$ est une sous-classe de F majorée par f et admettant $f\bar{e}$ pour f-agrégat en vertu de la proposition 7-1; par suite $f\bar{e} \in \mathrm{F}$ et $\bar{e} = \alpha(f\bar{e}) \in \alpha(\mathrm{F})$. Ainsi $\alpha(\mathrm{F})$ est une sous-classe inductive faible. Si $f^{-1}f'$ est défini, il est égal à

$$(\beta(f')f)^{-1}.(\beta(f)f') \in \mathrm{F}^{-1}.\mathrm{F};$$

on en déduit $\mathrm{F}^{-1}\mathrm{F} = \mathrm{F}^{-1}.\mathrm{F}$. Montrons que $a(\mathrm{F})$ vérifie les conditions de la proposition 8-2. En effet, comme

$$\alpha(f^{-1}.f') = \alpha(f') = f'^{-1}.f' \in \mathrm{F}^{-1}.\mathrm{F},$$

on a $\alpha(a(\mathrm{F})) = \alpha(\mathrm{F}) \subset a(\mathrm{F})$; de même $\beta(a(\mathrm{F})) = \alpha(\mathrm{F}) \subset a(\mathrm{F})$; de plus $(a(\mathrm{F}))^{-1} = (\mathrm{F}^{-1}.\mathrm{F})^{-1} = \mathrm{F}^{-1}.\mathrm{F} = a(\mathrm{F})$. Si $e \in \alpha(\mathrm{F})$ et si $g = (f'^{-1}.f)e$ est défini, alors $g = f'^{-1}(fe) \in \mathrm{F}^{-1}\mathrm{F}$. Soit K une sous-classe de $a(\mathrm{F})$ admettant un $f^{-1}f'$-agrégat k; puisque $\alpha(\mathrm{K})$ est une sous-classe de $\alpha(\mathrm{F})$ majorée par $e = \alpha(f^{-1}f') \in \alpha(\mathrm{F})$, on a :

$$e' = \bigsqcup^{e} \alpha(\mathrm{K}) \in \alpha(\mathrm{F}) \qquad \text{et} \qquad k = (f^{-1}f')e' \in a(\mathrm{F}).$$

Par conséquent il résulte de la proposition 8-2 que le sous-groupoïde engendré par $a(\mathrm{F})$ est un sous-pseudogroupe faible. La démonstration est analogue pour $b(\mathrm{F})$.

Définition 1. — *On appelle* atlas (faible) complet de $\mathcal{G}$ *une sous-classe* F *de* $\mathcal{G}$ *qui est (faiblement)* $\bigsqcup$*-saturée et telle que l'on ait :*

$$\mathrm{F}\, a(\mathrm{F}) \subset \mathrm{F}, \qquad \textit{où} \qquad a(\mathrm{F}) = \mathrm{F}^{-1}\mathrm{F}.$$

Un atlas (faible) complet F *qui admet pour base (faible) une sous-classe* F′ *telle que* $\alpha(\mathrm{F}')$ *et* $\beta(\mathrm{F}')$ *soient des classes compatibles est dit* propre.

Cette définition entraîne $\mathrm{F}a(\mathrm{F}) = \mathrm{F}$.

Si F est un atlas faible complet propre, alors $\alpha(\mathrm{F})$ et $\beta(\mathrm{F})$ sont des classes compatibles. Un atlas complet propre n'est pas forcément propre en tant qu'atlas faible complet.

Si C est une classe d'atlas (faibles) complets, la classe intersection des $F \in C$ est un atlas (faible) complet. Par suite toute sous-classe B de $\mathcal{G}$ est contenue dans un plus petit atlas (faible) complet de $\mathcal{G}$, appelé *atlas (faible) complet engendré par* B dans $\mathcal{G}$.

Soient I une classe d'indices et $\mathcal{G} \times (I \times I)$ le groupoïde produit de $\mathcal{G}$ avec le groupoïde des couples $(I \times I)$; on identifie avec 0 tous les éléments $(0,(j, i))$, où $(j, i) \in I \times I$. Muni de la relation d'ordre : $(f', (j', i')) < (f, (j, i))$ si, et seulement si, $f' < f$ et $(j', i') = (j, i)$, $\mathcal{G} \times (I \times I)$ est un groupoïde sous-préinductif. Soient Γ un sous-pseudogroupe de $\mathcal{G} \times (I \times I)$ et F_{ji} la classe des éléments f tels que $(f, (j, i)) \in \Gamma$.

Proposition 2. — *Avec les notations précédentes,* F_{ji} *est un atlas complet,* F_{ii} *est un sous-pseudogroupe; on a* $(F_{ji})^{-1} = F_{ij}$; $F'_{ki} = F_{kj} . F_{ji} = F_{kj}F_{ji}$ *est un atlas faible complet saturé par induction dans* F_{ki} *et* $a(F_{ji})$ *est une composante inductive faible de* F_{ii}; *de plus* F'_{ki} *est pseudo-saturé à droite relativement à* F_{kk} *et à gauche relativement à* F_{ii}.

Démonstration. — On a évidemment $(F_{ji})^{-1} = F_{ij}$. Un élément de Γ majoré par $(f, (j, i))$ étant de la forme $(f', (j, i))$, où $f' < f$ et $f' \in F_{ji}$, F_{ji} est une partie sous-inductive. Puisque Γ est un sous-pseudogroupe, on a $F_{kj}F_{ji} \subset F_{ki}$. Il en résulte que F_{ii} est un sous-pseudogroupe de $\mathcal{G}$. La relation

$$F_{ij}(F_{ji}F_{ij}) \subset F_{ij}F_{jj} \subset F_{ij}$$

entraîne que F_{ij} est un atlas complet. On a $F_{kj}F_{ji} = F_{kj} . F_{ji}$, car :

$$F_{kj}F_{ji} \subset (F_{kj}\beta(F_{ji})) . (\alpha(F_{kj})F_{ji}) \subset (F_{kj}F_{jj}) . (F_{jj}F_{ji}) \subset F_{kj} . F_{ji}.$$

Comme : $(F_{ij}F_{ji})F_{ii} = (F_{ij} . F_{ji})F_{ii} \subset F_{ij}(F_{ji}F_{ii}) \subset F_{ij}F_{ji} \subset F_{ii}$, $F_{ij}F_{ji}$ est une composante inductive faible de F_{ii}; en particulier $\alpha(F_{ji})$ est saturé par induction dans $\alpha(F_{ii})$. Soit $g < f'f$, où $f \in F_{ji}$, $f' \in F_{kj}$ et $g \in F_{ki}$; les relations : $\alpha(g) < \alpha(f)$ et $\alpha(g) \in \alpha(F_{ii})$ entraînant :

$$g = (f'f)\alpha(g) = f'(f\alpha(g)) \in F_{kj}(F_{ji}F_{ii}) \subset F_{kj}F_{ji} = F'_{ki},$$

F'_{ki} est saturé par induction dans F_{ki}; de plus F'_{ki} est un atlas faible complet en vertu de :

$$F'_{ki}F_{ii} = (F_{kj} . F_{ji})F_{ii} \subset F_{kj}(F_{ji}F_{ii}) \subset F'_{ki} \qquad \text{et} \qquad F_{kk}F'_{ki} \subset F'_{ki}.$$

Proposition 3. — *Soit* F *un atlas faible complet de* $\mathcal{G}$. *Alors* F *est une partie sous-inductive faible de* $\mathcal{G}$; *on a*

$$F = F\alpha(F) = \beta(F)F$$

et $a(F) = F^{-1}.F$; $a(F)$ *et* $b(F) = FF^{-1} = F.F^{-1}$ *sont des sous-pseudogroupes faibles de* $\mathcal{G}$ *tels que* $\alpha(a(F)) = \alpha(F)$ *et* $\alpha(b(F)) = \beta(F)$; *de plus* $b(F)F = F$.

Démonstration. — On a $F\alpha(F) \subset Fa(F) = F$, car $\alpha(F) \subset a(F)$, et :

$$\beta(F)F \subset (F.F^{-1})F \subset F(F^{-1}F) = Fa(F) = F.$$

D'après la proposition 1, F est une partie sous-inductive faible, $a(F) = F^{-1}.F$ et $b(F) = F.F^{-1}$. Les relations :

$$(a(F))^{-1} = (F^{-1}.F)^{-1} = F.F^{-1} = a(F)$$

et

$$(a(F)).(a(F)) = (F^{-1}.F).a(F) = F^{-1}.F = a(F)$$

montrent que $a(F)$ est un sous-groupoïde, donc un sous-pseudogroupe faible, d'après la proposition 1; de même $b(F)$ est un sous-pseudogroupe faible. Comme :

$$F = \beta(F)F \subset b(F)F$$

et

$$b(F)F = (F.F^{-1})F \subset Fa(F) = F,$$

on obtient $F = b(F)F$.

Corollaire 1. — *Si* F *est un atlas faible complet,* F^{-1} *est un atlas faible complet tel que* $a(F^{-1}) = b(F)$ *et* $b(F^{-1}) = a(F)$.

En effet, F^{-1} est une partie sous-inductive faible et on a :

$$a(F^{-1}) = (F^{-1})^{-1}F^{-1} = b(F); \qquad b(F^{-1}) = F^{-1}(F^{-1})^{-1} = a(F)$$

et

$$F^{-1}a(F^{-1}) = (b(F)F)^{-1} = F^{-1}.$$

Corollaire 2. — *Soit* $I = \{1, 2\}$. *Si* F *est un atlas faible complet de* $\mathcal{G}$, *la classe réunion de* $(F, (2, 1))$, $(F^{-1}, (1, 2))$, $(a(F), (1, 1))$ et $(b(F), (2, 2))$ *est le sous-pseudogroupe faible de* $\mathcal{G} \times (I \times I)$ *engendré par* $(F,(2, 1))$.

Proposition 4. — *Soient* B *une sous-classe de* $\mathcal{G}$ *et* Γ *un sous-pseudogroupe faible de* $\mathcal{G}$ *contenant* $\alpha(B)$. *Si on a*

$(B\Gamma)^{-1}(B\Gamma) \subset \Gamma$ *et si* A *est la composante inductive faible de* $(B\Gamma)^{-1}(B\Gamma)$ *dans* Γ, *alors* BA *est un atlas faible complet tel que* $a(BA) = A$.

Démonstration. — On a :

$$B^{-1}B \subset (B\alpha(B))^{-1}(B\alpha(B)) \subset (B\Gamma)^{-1}(B\Gamma) \subset A$$

et

$$a(BA) = (BA)^{-1}(BA) \subset (B\Gamma)^{-1}(B\Gamma) \subset A.$$

Si $(bf)f'$ est défini, $b \in B$, $f \in A$ et $f' \in A$, on a, en vertu de l'associativité partielle du pseudoproduit :

$$(bf)f' = (b(\alpha(b)f))f' = b((\alpha(b)f)f'),$$

puisque $\alpha(bf) \cap \beta(f')$ est défini ; il en résulte :

$$(BA)A \subset B((\alpha(B)A)A) \subset B((AA)A) = BA,$$

car $\alpha(B) \subset B^{-1}B \subset A$ et $AA = A$. Donc $(BA)a(BA) \subset (BA)A \subset BA$. Soit C une sous-classe de BA admettant un f-agrégat c, où $f \in BA$. Comme $\alpha(C)$ est majoré par $\alpha(f) \in A$ et $\alpha(C) \subset \alpha(BA) \subset A$, et comme A est un sous-pseudogroupe faible, on obtient :

$$\alpha(c) = \bigcup^{\alpha(f)} \alpha(C) \in A,$$

d'où

$$c = f\alpha(c) \in (BA)A \subset BA.$$

Ceci montre que BA est un atlas faible complet de $\mathcal{G}$. — Toute unité de $(B\Gamma)^{-1}(B\Gamma)$ étant majorée par un élément de $\alpha(B\Gamma)$, A est le groupoïde engendré par la classe A' des $f' \in \Gamma$ tels qu'il existe $b \in B$ et $g \in \Gamma$ avec $\beta(f') < \alpha(bg)$; par conséquent, pour tout $f' \in A'$, on a :

$$f' = (bg)^{-1}(bg)f' = (bg\beta(f'))^{-1}((bg)f').$$

Puisque

$$bg\beta(f') \in B(\Gamma A) \subset BA \quad \text{et} \quad (bg)f' = b((\alpha(b)g)f') \in B(\Gamma A) \subset BA,$$

on en déduit $f' \in (BA)^{-1}(BA) = a(BA)$ et par suite A est contenu dans le groupoïde $a(BA)$. Donc $A = a(BA)$.

Corollaire 1. — *Soit* B *une sous-classe de* $\mathcal{G}$ *telle que* $\beta(B)$ *soit une classe compatible. Si* Γ *est un sous-pseudogroupe faible (resp. faible propre) de* $\mathcal{G}$ *contenant* $B^{-1}B$ *et si* A *est la compo-*

sante inductive faible de Γ *engendrée par* $B^{-1}B$, *alors* BA *est un atlas faible complet* (*resp. complet propre*) *tel que* $a(BA) = A$.

En effet, on a $\alpha(B) \subset B^{-1}B \subset \Gamma$ et, puisque $\beta(B)$ est compatible :

$$(B\Gamma)^{-1}(B\Gamma) = \Gamma((B^{-1}B)\Gamma) \subset \Gamma(\Gamma\Gamma) \subset \Gamma;$$

de plus la composante inductive faible A de $B^{-1}B$ dans Γ contient $\Gamma(B^{-1}B)\Gamma = (\Gamma B)^{-1}(B\Gamma)$, donc est identique à la composante inductive faible A de $(B\Gamma)^{-1}(B\Gamma)$ dans Γ. Par suite le corollaire 1 est conséquence de la proposition 4.

Corollaire 2. — *Soit* B *une sous-classe de* $\mathcal{G}$ *telle que* $\beta(B)$ *soit une classe compatible. Si* Γ *est le sous-pseudogroupe faible engendré par* $B^{-1}B$ *dans* $\mathcal{G}$, *alors* $B\Gamma$ *est l'atlas faible complet engendré par* B *dans* $\mathcal{G}$ *et on a :* $a(B\Gamma) = \Gamma$.

Ce corollaire résulte du corollaire 1.

Corollaire 3. — *Soit* B *une sous-classe de* $\mathcal{G}$ *telle que* $B^{-1}.B$ *soit un sous-pseudogroupe faible de* $\mathcal{G}$ *et que l'on ait :*

$$\beta(B)B \subset B \qquad \textit{et} \qquad B(B^{-1}.B) \subset B.$$

Alors B *est un atlas faible complet de* $\mathcal{G}$.

En effet, la condition $\beta(B)B \subset B$ entraîne $B^{-1}B = B^{-1}.B$; par suite on a $B(B^{-1}B) \subset B$ et $(B(B^{-1}B))^{-1}(B(B^{-1}B)) \subset B^{-1}B$. Le corollaire se déduit donc de la proposition 4.

Proposition 5. — *Soient* E *et* E' *deux sous-classes inductives faibles de* $\mathcal{G}_0$. *La classe* F *des* $f \in \mathcal{G}$ *tels que* $\alpha(f) \in E$, $\beta(f) \in E'$, $\beta(fE) \subset E'$ *et* $\alpha(E'f) \subset E$ *est un atlas faible complet dit maximal;* $a(F)$ *et* $b(F)$ *sont des atlas faibles complets maximaux; on a* $F = FE = E'F$.

Démonstration. — Soient $e' \in E'$, $f \in F$ et $e'f \in E'F$. On a :

$$\alpha(e'f) \in E \qquad \text{et} \qquad \beta(e'f) = e'\beta(f) \in E'.$$

Les relations : $e'' \in E'$ et $f'' = e''(e'f) \in E'(E'F)$ entraînent :

$$\beta(f'') = e''\beta(e'f) \in E',$$

donc $f'' = \beta(f'')f \in E'F$ et $\alpha(f'') \in E$.
Si $f' = (e'f)e$ est défini, où $e \in E$, on a $\alpha(f') = \alpha(e'f)e \in E$, d'où $f' = f\alpha(f') \in FE$ et $\beta(f') \in E'$. Par suite $e'f \in F$, c'est-à-dire $E'F \subset F$; on montre de même $FE \subset F$. Comme on a aussi

$F \subset FE$ et $F \subset E'F$, il en résulte $F = FE = E'F$. En utilisant les conditions :

$$\beta(F)F \subset E'F = F \qquad \text{et} \qquad F\alpha(F) \subset FE = F,$$

on obtient $G = F(F^{-1}F) = F.(F^{-1}.F)$,

$$\alpha(G) \subset \alpha(F) \subset E; \ \beta(G) \subset \beta(F) \subset E';$$
$$GE \subset F(F^{-1}(FE)) = G \qquad \text{et} \qquad E'G \subset G.$$

On en déduit $G \subset F$. Enfin, si $\bigsqcup^{f} A$ est défini, où $A \subset F$ et $f \in F$, on a

$$\bigsqcup^{f} A = f\Big(\bigsqcup^{\alpha(f)} \alpha(A)\Big) \in FE \subset F,$$

car E est une sous-classe inductive faible. Donc F est faiblement $\bigsqcup$-saturée et F est un atlas faible complet.

COROLLAIRE 1. — *Soient* F *un atlas faible complet de* $\mathcal{G}$ *et* F′ *une sous-classe de* F *saturée par induction dans* F *et pleine dans* F *(c'est-à-dire telle que* $\beta(F').F.\alpha(F') = F'$). *Alors* F′ *est un atlas complet de* $\mathcal{G}$.

Démonstration. — La classe F_1 *des* $f \in \mathcal{G}$ tels que $\alpha(f) \in \alpha(F')$, $\beta(f) \in \beta(F')$, $\alpha(\beta(F')f) \subset \alpha(F')$ et $\beta(f\alpha(F')) \subset \beta(F')$ est un atlas faible complet d'après la proposition 5; comme la classe intersection de deux atlas faibles complets est un atlas faible complet, la classe F'_1 des $f \in F$ tels que $f \in F_1$ est aussi un atlas faible complet. On a évidemment $F'_1 \subset F'$; inversement si $f' \in F'$, les classes $\beta(F')f'$ et $f'\alpha(F')$ étant majorées par f', elles sont contenues dans F'; il en résulte $F' \subset F'_1$, d'où $F' = F'_1$.

COROLLAIRE 2. — *Soit* F *un atlas complet propre de* $\mathcal{G}$; *il existe un atlas faible complet propre* F_1, *saturé par induction dans* F, *formant une base de* F.

En effet, soit B une base de F telle que $\alpha(B)$ et $\beta(B)$ soient des classes compatibles; soient E et E′ les sous-classes de $\alpha(F)$ et $\beta(F)$ formées des éléments induits des éléments de $\alpha(B)$ et $\beta(B)$; la classe $F_1 = E'.F.E$ étant saturée par induction dans F, c'est un atlas faible complet d'après le corollaire 1; de plus F_1 est propre et F_1, contenant B, est aussi une base de F.

Proposition 6. — *Soit* F *un atlas faible complet de* $\mathcal{G}$; *si* $\beta(\mathrm{F})$ *est contenu dans* F, *alors* F *est contenu dans* $a(\mathrm{F})$; *si on a* $\mathrm{F} \subset a(\mathrm{F})$, *alors* $b(\mathrm{F}) \subset \mathrm{F}$ *et* $b(\mathrm{F})$ *est un sous-groupoïde saturé par induction de* $a(\mathrm{F})$, *dont* $a(\mathrm{F})$ *est un élargissement* (déf. 3-2, III [1] et [4]).

Démonstration. — Si $\beta(\mathrm{F}) \subset \mathrm{F}$, on a $\mathrm{F} = \beta(\mathrm{F})\mathrm{F} \subset \mathrm{F}^{-1}\mathrm{F} = a(\mathrm{F})$. Supposons $\mathrm{F} \subset a(\mathrm{F})$; alors $b(\mathrm{F}) = \mathrm{F}\mathrm{F}^{-1} \subset \mathrm{F}a(\mathrm{F}) = \mathrm{F}$; les conditions $f \in a(\mathrm{F})$ et $\beta(f) \in \beta(\mathrm{F})$ entraînent $f = \beta(f)f \in \mathrm{F}a(\mathrm{F}) = \mathrm{F}$; par suite $\mathrm{F} = \beta(\mathrm{F}).a(\mathrm{F})$. De plus: $b(\mathrm{F}) \subset \beta(\mathrm{F}).a(\mathrm{F}).\beta(\mathrm{F})$ et

$$\beta(\mathrm{F}).a(\mathrm{F}).\beta(\mathrm{F}) \subset \mathrm{F}.a(\mathrm{F}).\beta(\mathrm{F}) = \mathrm{F}.\beta(\mathrm{F}) \subset \mathrm{F}.\mathrm{F}^{-1} = b(\mathrm{F}),$$

d'où $b(\mathrm{F}) = \beta(\mathrm{F}).a(\mathrm{F}).\beta(\mathrm{F})$ et $b(\mathrm{F})$ est un sous-groupoïde plein de $a(\mathrm{F})$. Pour tout $e \in a(\mathrm{F})$ et tout $g \in b(\mathrm{F})$ avec $e < \alpha(g)$, on a $ge \in \mathrm{F}^{-1}(\mathrm{F}a(\mathrm{F})) = b(\mathrm{F})$; donc $b(\mathrm{F})$ est saturé par induction dans $a(\mathrm{F})$. Comme la composante de $b(\mathrm{F})$ dans $a(\mathrm{F})$ contient F, elle contient $\beta(\mathrm{F})$ ainsi que $a(\mathrm{F})$. Par conséquent $a(\mathrm{F})$ est un élargissement de $b(\mathrm{F})$.

Corollaire 1. — *Soient* I *une classe d'indices contenant* 1 *et* 2 *et* F *un atlas faible complet de* $\mathcal{G}$; *soit* $\mathfrak{F}$ *le sous-pseudogroupe faible du groupoïde sous-préinductif* $\mathcal{G} \times (\mathrm{I} \times \mathrm{I})$ *engendré par la classe des triplets* $(f, (2, 1))$ *tels que* $f \in \mathrm{F}$. *Alors* $(a(\mathrm{F}), (1, 1))$ *et* $(b(\mathrm{F}), (2, 2))$ *sont des sous-pseudogroupes faibles de* $\mathfrak{F}$ *saturés par induction et dont chacun admet* $\mathfrak{F}$ *pour élargissement.*

Démonstration. — $\mathfrak{F}$ est la classe réunion des classes $(\mathrm{F}, (2, 1))$, $(\mathrm{F}^{-1}, (1, 2))$, $(a(\mathrm{F}), (1, 1))$ et $(b(\mathrm{F}), (2, 2))$. La sous-classe G de $\mathfrak{F}$ formée des triplets $(g, (2, i))$, où $i = 1, 2$, est un atlas faible complet de $\mathcal{G} \times (\mathrm{I} \times \mathrm{I})$, puisque

$$(g'', (2, j))\,((g', (j, 2))\,(g, (2, i))) = (g''(g'g), (2, i)) \in \mathrm{G}.$$

Comme $\beta((g, (2, i))) = (\beta(g), (2, 2)) \in \mathrm{G}$, la proposition 6 entraîne que $a(\mathrm{G})$ contient G; donc $a(\mathrm{G}) = \mathfrak{F}$ et $\mathfrak{F}$ est un élargissement de $b(\mathrm{G}) = (b(\mathrm{F}), (2, 2))$.

Corollaire 2. — *Soit* E′ *une sous-classe de* $\mathcal{G}_0$ *saturée par induction;* $\mathrm{F} = \mathrm{E}'\mathcal{G}$ *est un atlas faible complet tel que* $a(\mathrm{F})$ *soit la composante inductive faible de* E′ *dans* $\mathcal{G}$.

En effet, on a $\beta(\mathrm{F}\mathcal{G}) \subset \beta(\mathrm{F}) \subset \mathrm{E}'$, car E′ est saturé par induction; par suite F est un atlas faible complet en vertu de la proposition 5, et $a(\mathrm{F})$ est la composante inductive faible de $\mathrm{E}' = \beta(\mathrm{F})$, d'après la proposition 6.

PROPOSITION 7. — *La classe $\mathcal{H}(\mathcal{G})$ des atlas faibles complets de $\mathcal{G}$ est un groupoïde pour la loi de composition définie par :*

$$(\mathrm{G}, \mathrm{F}) \to \mathrm{G}.\mathrm{F} \quad \textit{si, et seulement si,} \quad a(\mathrm{G}) = b(\mathrm{F}).$$

$\mathcal{H}(\mathcal{G})$ admet pour classe d'unités la classe des sous-pseudogroupes faibles de $\mathcal{G}$.

Démonstration. — Soient $\mathrm{F} \in \mathcal{H}(\mathcal{G})$ et $\mathrm{G} \in \mathcal{H}(\mathcal{G})$. Montrons que, si $a(\mathrm{G}) = b(\mathrm{F})$, G.F est un atlas faible complet tel que $a(\mathrm{G}.\mathrm{F}) = a(\mathrm{F})$ et $b(\mathrm{G}.\mathrm{F}) = b(\mathrm{G})$. En effet, les relations : $\mathrm{GF} \subset (\mathrm{G}\beta(\mathrm{F})).(\alpha(\mathrm{G})\mathrm{F}) \subset \mathrm{G}.\mathrm{F}$ entraînent $\mathrm{GF} = \mathrm{G}.\mathrm{F}$ et

$$\beta(\mathrm{G}.\mathrm{F})\ (\mathrm{GF}) \subset \beta(\mathrm{G})\ (\mathrm{GF}) \subset \mathrm{GF}.$$

Comme

$$a(\mathrm{G}.\mathrm{F}) = (\mathrm{G}.\mathrm{F})^{-1}.(\mathrm{G}.\mathrm{F}) = \mathrm{F}^{-1}.\mathrm{G}^{-1}.\mathrm{G}.\mathrm{F} = \mathrm{F}^{-1}.b(\mathrm{F}).\mathrm{F} = a(\mathrm{F}),$$

on a $(\mathrm{G}.\mathrm{F})a(\mathrm{G}.\mathrm{F}) = \mathrm{G}.\mathrm{F}$ et il résulte du corollaire 3 de la proposition 4 que GF est un atlas faible complet tel que $a(\mathrm{G}.\mathrm{F}) = a(\mathrm{F})$. De plus, on a :

$$b(\mathrm{G}.\mathrm{F}) = (\mathrm{G}.\mathrm{F}).(\mathrm{G}.\mathrm{F})^{-1} = \mathrm{G}.\mathrm{F}.\mathrm{F}^{-1}.\mathrm{G}^{-1} = \mathrm{G}.a(\mathrm{G}).\mathrm{G}^{-1} = b(\mathrm{G}).$$

— Dans $\mathcal{H}(\mathcal{G})$, F admet les pseudogroupes faibles $a(\mathrm{F})$ et $b(\mathrm{F})$ pour unités à droite et à gauche. D'après l'associativité de la loi de composition dans $\mathcal{G}$, on a

$$\mathrm{H}.\mathrm{G}.\mathrm{F} = \mathrm{H}.(\mathrm{G}.\mathrm{F}) = (\mathrm{H}.\mathrm{G}).\mathrm{F},$$

si $\mathrm{H}.(\mathrm{G}.\mathrm{F})$ est défini dans $\mathcal{H}(\mathcal{G})$. Donc $\mathcal{H}(\mathcal{G})$ est une catégorie. Enfin, d'après le corollaire de la proposition 3, F^{-1} est un atlas faible complet, qui est l'inverse de F dans $\mathcal{H}(\mathcal{G})$.

COROLLAIRE. — *La sous-classe de $\mathcal{H}(\mathcal{G})$ formée des atlas faibles complets propres de $\mathcal{G}$ est le sous-groupoïde plein $\mathcal{H}'(\mathcal{G})$ de $\mathcal{H}(\mathcal{G})$ dont la classe des unités est la classe des sous-pseudogroupes faibles propres.*

Étant donné un groupoïde sous-prélocal $\mathcal{G}$, nous désignerons par $\overline{\mathrm{F}}$ la partie sous-inductive engendrée dans $\mathcal{G}$ par la sous-classe F de $\mathcal{G}$. Soient G et F des sous-classes de $\mathcal{G}$. Si $\mathrm{G} \subset \mathrm{F}$, on a $\overline{\mathrm{G}} \subset \overline{\mathrm{F}}$. Si F et G sont des bases de $\overline{\mathrm{F}}$ et $\overline{\mathrm{G}}$ resp. on a : $\overline{\mathrm{G}}\,\overline{\mathrm{F}} \subset \overline{\mathrm{GF}}$, en vertu de la prop. 3-2.

Proposition 8. — *Soit $\mathcal{G}$ un groupoïde sous-prélocal. Si* F *est un atlas faible complet de $\mathcal{G}$, la partie sous-inductive* $\overline{\mathrm{F}}$ *engendrée par* F *dans $\mathcal{G}$ est un atlas complet admettant* F *pour base et tel que* $\overline{a(\overline{\mathrm{F}})} = \overline{a(\mathrm{F})}$.

Démonstration. — Puisque $\mathrm{F}\alpha(\mathrm{F}) = \mathrm{F}$, il résulte du corollaire de la proposition 4-2 que F est une base de $\overline{\mathrm{F}}$. Soient K, K′ et L des sous-classes de F admettant des sous-agrégats dans $\mathcal{G}$; on a, d'après la prop. 3-2 :

$$g = \Big(\overset{l}{\bigcup}\mathrm{L}\Big)\Big(\Big(\overset{k}{\bigcup}\mathrm{K}\Big)^{-1}\Big(\overset{k'}{\bigcup}\mathrm{K}'\Big)\Big) = \overset{g'}{\bigcup}\mathrm{L}(\mathrm{K}^{-1}\mathrm{K}');$$

les relations : $\mathrm{K}^{-1}\mathrm{K}' \subset \mathrm{F}^{-1}\,\mathrm{F} = a(\mathrm{F})$ et $\mathrm{L}(\mathrm{K}^{-1}\mathrm{K}') \subset \mathrm{F}a(\mathrm{F}) = \mathrm{F}$ entraînent $g \in \overline{\mathrm{F}}$. Par suite $\overline{\mathrm{F}}a(\overline{\mathrm{F}}) \subset \overline{\mathrm{F}}$ et $\overline{\mathrm{F}}$ est un atlas complet.

Corollaire 1. — *Soient* Γ *un sous-pseudogroupe de* $\mathcal{G}$ *et* B *une sous-classe de* $\mathcal{G}$ *telle que* $\alpha(\mathrm{B}) \subset \Gamma$ *et* $(\mathrm{B}\Gamma)^{-1}(\mathrm{B}\Gamma) \subset \Gamma$; *soient* A *la composante inductive faible, et* $\overline{\mathrm{A}}$ *la composante inductive, de* $(\mathrm{B}\Gamma)^{-1}(\mathrm{B}\Gamma)$ *dans* Γ; *alors la partie sous-inductive* $\overline{\mathrm{BA}}$ *engendrée par* BA *est un atlas complet de $\mathcal{G}$ admettant* $\mathrm{B}\overline{\mathrm{A}}$ *pour base et tel que* $\overline{\mathrm{A}}$ *soit le sous-pseudogroupe engendré par* $a(\overline{\mathrm{BA}})$ *dans $\mathcal{G}$.*

En effet, d'après la proposition 4, BA est un atlas faible complet de $\mathcal{G}$ tel que $a(\mathrm{BA}) = \mathrm{A}$; par suite $\overline{\mathrm{BA}}$ est un atlas complet admettant $\mathrm{B}\overline{\mathrm{A}}$ pour base; comme $a(\mathrm{BA})$ est une base de $\overline{a(\mathrm{BA})}$, c'est aussi une base de $\overline{a(\overline{\mathrm{BA}})}$, donc

$$\overline{a(\mathrm{BA})} = \overline{a(\overline{\mathrm{BA}})} = \overline{\mathrm{A}}.$$

Corollaire 2. — *Soit* B *une sous-classe de $\mathcal{G}$ telle que* $\overline{\mathrm{B}^{-1}.\mathrm{B}}$ *soit un sous-pseudogroupe de $\mathcal{G}$, que* $\beta(\mathrm{B})\mathrm{B} \subset \mathrm{B}$ *et que* $\mathrm{B}(\mathrm{B}^{-1}.\mathrm{B}) \subset \mathrm{B}$. *Alors* $\overline{\mathrm{B}}$ *est un atlas complet pour lequel*

$$\overline{a(\overline{\mathrm{B}})} = \overline{\mathrm{B}^{-1}.\mathrm{B}}.$$

Démonstration. — Comme $\beta(B)B \subset B$, *on a* $B^{-1}B = B^{-1}.B$, d'où $B(B^{-1}B) = B$. Des relations : $\alpha(B) \subset B^{-1}.B \subset \overline{B^{-1}.B}$,

$$B^{-1}B \subset (B(\overline{B^{-1}.B}))^{-1}(B(\overline{B^{-1}.B})) = H$$

et $$H \subset (\overline{B(B^{-1}B)})^{-1}(\overline{B(B^{-1}B)}) = \overline{B}^{-1}\overline{B} \subset \overline{B^{-1}B} = \overline{B^{-1}.B},$$

on déduit que $\overline{B^{-1}.B}$ est la composante inductive de H dans $\overline{B^{-1}B}$ et, en vertu du corollaire 1 de la proposition 8, $\overline{B(\overline{B^{-1}B})} = \overline{B}$ est un atlas complet tel que $\overline{a(\overline{B})} = \overline{B^{-1}.B}$.

Corollaire 3. — *Si* E *et* E′ *sont deux sous-classes inductives de* $\mathcal{G}_0$, *la classe* F *des* $f \in \mathcal{G}$ *tels que* $\alpha(f) \in E$, $\beta(f) \in E'$, $\beta(fE) \subset E'$ *et* $\alpha(E'f) \subset E$ *est un atlas complet de* $\mathcal{G}$.

En effet, d'après la proposition 5, F est un atlas faible complet; montrons que F est $\overline{\bigcup}$-saturée, d'où il résultera en vertu de la proposition 8 que F est un atlas complet. En effet pour une sous-classe A de F admettant un f-agrégat f, on a $\alpha(f) \in E$ et $\beta(f) \in E'$; d'après la prop. 3-2 : $\left(\overline{\bigcup} A\right) E \subset \overline{\bigcup}(AE)$, d'où $\beta(fE) \in E'$; de même $\alpha(E'f) \in E$ et $f \in F$.

Proposition 9. — *Soit* $\mathcal{G}$ *un groupoïde sous-prélocal,* F *un atlas complet de* $\mathcal{G}$, $\bar{a}(F)$ *et* $\bar{b}(F)$ *les sous-pseudogroupes engendrés resp. par* $a(F)$ *et* $b(F)$. *Alors on a* $F\bar{a}(F) = F = \bar{b}(F)F$. *De plus la classe des atlas complets de* $\mathcal{G}$ *est un groupoïde* $\mathcal{A}(\mathcal{G})$ *pour la loi de composition :*

$$(G, F) \to G \circ F = \overline{GF} \qquad \textit{si, et seulement si,} \qquad \bar{a}(G) = \bar{b}(F).$$

Démonstration. — On a $F = F\alpha(F) \subset F\bar{a}(F)$. D'après la proposition 9-2, $\bar{a}(F)$ admet $a(F)$ pour base. Soit $H \subset a(F)$ et $h = \bigcup^{h} H \in \bar{a}(F)$. Si fh est défini, où $f \in F$, on a, d'après la proposition 3-2, $fh \in \overline{\bigcup} fH$; comme F est $\overline{\bigcup}$-saturé et $fH \subset Fa(F) = F$, on en déduit $fh \in F$, donc $F\bar{a}(F) = F$. De même $\bar{b}(F)F = F$. — Soit $G \in \mathcal{A}(\mathcal{G})$ avec $\bar{a}(G) = \bar{b}(F)$; montrons que $G \circ F$ est un atlas complet tel que $\bar{a}(G \circ F) = \bar{a}(F)$ et $\bar{b}(G \circ F) = \bar{b}(G)$. En effet, les relations :

$$GF \subset (G\beta(F)).(\alpha(G)F)) \subset (G\bar{b}(F)).(\bar{a}(G)F)$$
$$= (G\bar{a}(G)).(\bar{b}(F)F) \subset G.F$$

entraînent $GF = G.F$. Il en résulte :

$$\beta(G.F)\,(G.F) \subset \beta(G)\,(G.F) \subset (\beta(G)G)F = GF = G.F$$

et

$$(G.F)^{-1}(G.F) = F^{-1}.G^{-1}.G.F \subset F^{-1}.\bar{b}(F).F = F^{-1}.F = a(F),$$

d'où

$$(G.F)\,((G.F)^{-1}.(G.F)) \subset (G.F)a(F) \subset G(Fa(F)) = GF$$

et

$$\overline{(GF)^{-1}.(GF)} \subset \bar{a}(F).$$

D'autre part, supposons $f \in F$, $f' \in F$ et $f^{-1}.f'$ défini. Comme $e = \beta(f) \in \bar{a}(G)$, il existe une sous-classe E′ de $a(G)$ telle que $e \in \bigcup E'$; on en déduit :

$$f^{-1}.f' \in \bigcup f^{-1}(E'f') \subset \overline{F^{-1}(a(G).F)}$$
$$= \overline{F^{-1}(G^{-1}.\,G.F)} \subset \overline{(GF)^{-1}(GF)}.$$

Par suite $\bar{a}(F) = \overline{(GF)^{-1}(GF)}$. Du corollaire 2 de la proposition 8 il résulte que $\overline{G.F} = G \odot F$ est un atlas complet tel que $\bar{a}(G \odot F) = \bar{a}(F)$. De plus on trouve :

$$\bar{b}(G \odot F) = \overline{(G.F).(G.F)^{-1}} = \overline{G.(b(F).G^{-1})}$$
$$= \overline{G.(\bar{b}(F).G^{-1})} = \bar{b}(G).$$

— Dans $\mathcal{A}(\mathcal{G})$, F admet resp. $\bar{a}(F)$ et $\bar{b}(F)$ pour unités à droite et à gauche. Soit $H \in \mathcal{A}(\mathcal{G})$; si $H \odot (G \odot F)$ et $(H \odot G) \odot F$ sont définis, ces atlas complets admettent chacun $H.G.F$ pour base; par conséquent ils sont égaux et la loi de composition $\odot$ est associative. Enfin F^{-1} est inverse de F dans $\mathcal{A}(\mathcal{G})$.

Corollaire. — *La classe $\mathcal{A}'(\mathcal{G})$ des atlas complets propres de $\mathcal{G}$ est le sous-groupoïde plein de $\mathcal{A}(\mathcal{G})$ admettant pour classe de ses unités la classe des sous-pseudogroupes propres de $\mathcal{G}$.*

Proposition 10. — *Soit* F *un atlas complet d'un groupoïde sous-prélocal $\mathcal{G}$; si* $\beta(F) \subset F$, *on a* $F \subset \bar{a}(F)$. *Si* $F \subset \bar{a}(F)$, *alors* $\bar{b}(F) \subset F$ *et* $\bar{b}(F)$ *est un sous-groupoïde plein saturé par induction de* $\bar{a}(F)$, *qui admet* $\bar{a}(F)$ *pour composante inductive dans* $\bar{a}(F)$.

La démonstration est analogue à celle de la proposition 6.

4. GROUPOIDES SOUS-PRÉINDUCTIFS DES ATLAS COMPLETS

Soit $\mathcal{G}$ un groupoïde sous-préinductif. Soient F, G et H des sous-classes de $\mathcal{G}$. Si la classe E réunion de $\alpha(\mathrm{H})$ et de $\beta(\mathrm{G})$ est compatible, on a, en vertu de l'associativité partielle du pseudoproduit :

$$\mathrm{H}(\mathrm{GF}) \subset (\mathrm{HG})\mathrm{F};$$

si la classe E′ réunion de $\alpha(\mathrm{G})$ et $\beta(\mathrm{F})$ est compatible, on a de même :

$$(\mathrm{HG})\mathrm{F} \subset \mathrm{H}(\mathrm{GF});$$

si E et E′ sont compatibles, on a donc :

$$(\mathrm{HG})\mathrm{F} = \mathrm{H}(\mathrm{GF}),$$

et dans ce cas on peut supprimer les parenthèses et écrire :

$$\mathrm{HGF} = \mathrm{H}(\mathrm{GF}).$$

La partie sous-inductive faible engendrée par F sera notée $\underline{\mathrm{F}}$.

Théorème 1. — *Soit $\mathcal{G}$ un groupoïde sous-prélocal. Le groupoïde $\mathcal{H}'(\mathcal{G})$ des atlas faibles complets propres de $\mathcal{G}$* (proposition 7-3) *est un groupoïde sous-préinductif lorsqu'il est muni de la relation :*

$$\mathrm{F}' < \mathrm{F} \quad \textit{si, et seulement si,} \quad \mathrm{F}' = \mathrm{F}\alpha(\mathrm{F}') = \beta(\mathrm{F}')\mathrm{F}.$$

Démonstration. — Soient $\mathrm{F} \in \mathcal{H}'(\mathcal{G})$, $\mathrm{F}' \in \mathcal{H}'(\mathcal{G})$ et $\mathrm{F}'' \in \mathcal{H}'(\mathcal{G})$. On a :

$$\mathrm{F}\alpha(\mathrm{F}) = \mathrm{F} = \beta(\mathrm{F})\mathrm{F}, \qquad \text{d'où} \qquad \mathrm{F} < \mathrm{F};$$

si $\mathrm{F}' < \mathrm{F}$ et $\mathrm{F}'' < \mathrm{F}'$, on trouve : $\alpha(\mathrm{F}'') = \alpha(\mathrm{F}')\alpha(\mathrm{F}'')$ et

$$\mathrm{F}'' = \mathrm{F}'\alpha(\mathrm{F}'') = \mathrm{F}\alpha(\mathrm{F}')\alpha(\mathrm{F}'') = \mathrm{F}\alpha(\mathrm{F}'');$$

de même $\mathrm{F}'' = \beta(\mathrm{F}'')\mathrm{F}$, c'est-à-dire $\mathrm{F}'' < \mathrm{F}$. Les conditions $\mathrm{F}' < \mathrm{F}$ et $\mathrm{F} < \mathrm{F}'$ entraînent :

$$\mathrm{F}' = \mathrm{F}\alpha(\mathrm{F}') = \mathrm{F}'\alpha(\mathrm{F})\alpha(\mathrm{F}') = \mathrm{F}'\alpha(\mathrm{F}')\alpha(\mathrm{F}) = \mathrm{F}'\alpha(\mathrm{F}) = \mathrm{F}.$$

Donc la relation $<$ est une relation d'ordre.

Soit Γ un sous-pseudogroupe faible propre de $\mathcal{G}$. Montrons que si $F < \Gamma$, F est un sous-pseudogroupe faible de $\mathcal{G}$. Comme $F = \Gamma\alpha(F) = \beta(F)\Gamma$, les relations :

$$\alpha(F) = \alpha(\Gamma)\alpha(F) \subset \Gamma\alpha(F) = F \qquad \text{et} \qquad \beta(F) = \beta(F)\beta(\Gamma) \subset F$$

entraînent, d'après la proposition 6-3, $a(F) \subset F \subset b(F)$ et $b(F) \subset F \subset a(F)$ resp., d'où $a(F) = b(F) = F$. Donc $F \in \mathcal{H}'(\mathcal{G})_0$. Supposons $F' < F$; puisque $\alpha(F)$ et $\beta(F)$ sont compatibles, on trouve :

$$a(F') = F'^{-1}F' = (F^{-1}\beta(F'))F' = F^{-1}(F\alpha(F'))$$
$$= a(F)\alpha(F') = \alpha(F')a(F),$$

et par suite $a(F') < a(F)$; de même $b(F') < b(F)$. On en déduit de plus : $Fa(F') = F(a(F)\alpha(F')) = F\alpha(F') = F'$; $b(F')F = F'$; $b(F')Fa(F') = F'$.

— Supposons $H < a(F)$ et montrons que l'on a : $FH \in \mathcal{H}'(\mathcal{G})$ et $FH < F$. En effet, comme :

$$(FH)^{-1}(FH) = H^{-1}F^{-1}FH = H^{-1}(a(F)H) = H^{-1}H = H,$$
$$\beta(FH)FH \subset ((FH).(FH)^{-1})(FH)$$
$$\subset FH((FH)^{-1}(FH)) \subset FHH = FH$$

et

$$(FH)((FH)^{-1}.(FH)) = (FH)H = FH,$$

FH est un atlas faible complet, d'après le corollaire 3 de la proposition 4-3, tel que $a(FH) = H$. On a $\alpha(FH) = \alpha(H)$; tout élément de $\alpha(FH)$ étant majoré par un élément de $\alpha(F)$, la classe $\alpha(FH)$ est compatible. Par conséquent $FH \in \mathcal{H}'(\mathcal{G})$. De plus on a les relations :

$$FH = F(a(F)\alpha(H)) = F\alpha(H) = F\alpha(FH)$$

et

$$\beta(FH)F \subset b(FH)F = ((F\alpha(H)).(F\alpha(H))^{-1})F$$
$$= F\alpha(H)F^{-1}F = F\alpha(H)a(F) = FH;$$

l'égalité $f\alpha(h) = \beta(f\alpha(h))f$, où $f \in F$ et $h \in H$, entraînant $F\alpha(H) \subset \beta(FH)F$, on obtient : $F\alpha(FH) = FH = \beta(FH)F$, d'où $FH < F$.

— Soit $G \in \mathcal{H}'(\mathcal{G})$ tel que $a(G) = b(F)$. On a : $G.F \subset GF$ et

$$GF \subset (G\beta(F)).(\alpha(G)F) = (G\alpha(G)).(\beta(F)F) = G.F,$$

d'où $GF = G.F$. Supposons de plus $G' \in \mathcal{H}'(\mathcal{S})$, $F' \in \mathcal{H}'(\mathcal{S})$, $a(G') = b(F')$, $F' < F$ et $G' < G$; on a :

$$G'.F' = (G\alpha(G'))F' = G(\beta(F')F') = GF' = (G.F)\alpha(F')$$

et
$$G'.F' = G'(\beta(F')F) = \beta(G')\,(G.F),$$

c'est-à-dire $G'.F' < G.F$. Inversement soit $K < G.F$; d'après le début de la démonstration, on trouve : $a(K) < a(F)$,

$$F' = Fa(K) \in \mathcal{H}'(\mathcal{S}), \qquad F' < F, \qquad a(F') = a(K),$$
$$b(F') < b(F) = a(G);$$
$$G' = Gb(F') \in \mathcal{H}'(\mathcal{S}), \qquad G' < G, \qquad a(G') = b(F');$$
$$G'.F' < G.F.$$

De plus :

$$G'.F' = (Ga(G')).(Fa(K)) = GFa(K) = (G.F)a(K) = K.$$

Ceci prouve que l'axiome (I) est vérifié dans $\mathcal{H}'(\mathcal{S})$.

— Soient H' et H'' deux éléments de $\mathcal{H}'(\mathcal{S})_0$ majorés par $\Gamma \in \mathcal{H}'(\mathcal{S})_0$. Comme $\alpha(H') = \alpha(\Gamma)\alpha(H')$ et $\alpha(H'') = \alpha(\Gamma)\alpha(H'')$, la classe $\alpha(H')\alpha(H'') = \alpha(\Gamma)\alpha(H')\alpha(H'')$ est compatible. Posons :

$$H = \Gamma\alpha(H')\alpha(H'');$$

on obtient :

$$H^{-1} = \alpha(H'')\alpha(H')\Gamma = \alpha(H'')H' = \alpha(H'')\Gamma\alpha(H') = H''\alpha(H') = H$$

et

$$HH \subset \alpha(H'')\alpha(H')\Gamma H = \alpha(H'')\alpha(H')H$$
$$= \alpha(H'')\alpha(H')\alpha(H'')\alpha(H')\Gamma = H.$$

$\mathcal{S}$ étant sous-prélocal, $\underline{H}$ est un sous-pseudogroupe faible. Comme $\alpha(H'\alpha(\underline{H})) = \alpha(H')\alpha(\underline{H}) = \alpha(\underline{H})$ est faiblement $\bigsqcup$-saturé, $H'\alpha(\underline{H})$ est faiblement $\bigsqcup$-saturé. Les relations :

$$H'\alpha(H) = \Gamma\alpha(H')\alpha(H'') = H = \alpha(H)H'$$

et
$$\underline{H'\alpha(H)} = \underline{H} = H'\alpha(\underline{H})$$

entraînent $\underline{H} < H'$ de même $\underline{H} < H''$. Si K est un minorant de H' et de H'' dans $\mathcal{H}'(\mathcal{S})$, on a $K < \underline{H}$, car

$$K = H'\alpha(K) = H'\alpha(H''\alpha(K)) = H'\alpha(H'')\alpha(K) = H\alpha(K) \subset \underline{H}\alpha(K)$$

et

$$\underline{\mathrm{H}}\alpha(\mathrm{K}) \subset \underline{\mathrm{H}\alpha(\mathrm{K})} = \underline{\mathrm{K}} = \mathrm{K};$$

par conséquent $\underline{\mathrm{H}} = \mathrm{H}' \cap \mathrm{H}''$ et $\mathcal{H}'(\mathcal{G})$ est un groupoïde sous-préinductif.

Corollaire. — *La classe* $\mathfrak{I}_f(\mathcal{G})$ *des sous-classes inductives faibles compatibles de* $\mathcal{G}$ (définition 7-2) *est le sous-groupoïde plein saturé par induction de* $\mathcal{H}'(\mathcal{G})$ *dont la classe des unités est la classe des sous-classes inductives faibles compatibles de* $\mathcal{G}_0$.

Démonstration. — Soit $\mathrm{F} \in \mathfrak{I}_f(\mathcal{G})$; on a $a(\mathrm{F}) = \alpha(\mathrm{F})$ et $b(\mathrm{F}) = \beta(\mathrm{F})$; les conditions $f \in \mathrm{F}$ et $f' \in \mathrm{F}$ entraînent

$$f\alpha(f') = f \cap f' \in \mathrm{F},$$

d'après la proposition 10-2, d'où $\mathrm{F}a(\mathrm{F}) = \mathrm{F}\alpha(\mathrm{F}) = \mathrm{F}$ et $\mathrm{F} \in \mathcal{H}'(\mathcal{G})$. Réciproquement si $\mathrm{F} \in \mathcal{H}'(\mathcal{G})$, $a(\mathrm{F}) = \alpha(\mathrm{F})$ et $b(\mathrm{F}) = \beta(\mathrm{F})$, alors on a $f^{-1}f' \in \mathcal{G}_0$, $f'f^{-1} \in \mathcal{G}_0$ pour tout $f \in \mathrm{F}$ et tout $f' \in \mathrm{F}$, donc $\mathrm{F} \in \mathfrak{I}_f(\mathcal{G})$.

Théorème 2. — *Soit* $\mathcal{G}$ *un groupoïde sous-préinductif; le groupoïde* $\mathcal{H}(\mathcal{G})$ *des atlas faibles complets de* $\mathcal{G}$ (proposition 7-3) *est un groupoïde sous-inductif lorsqu'il est muni de la relation :*

$\mathrm{F}' \leqslant \mathrm{F}$ *si, et seulement si,* $\mathrm{F}' \subset \mathrm{F}$ *et* $\mathrm{F}' = \mathrm{F}\alpha(\mathrm{F}') = \beta(\mathrm{F}')\mathrm{F}$.

Démonstration. — Soient $\mathrm{F} \in \mathcal{H}(\mathcal{G})$, $\mathrm{F}' \in \mathcal{H}(\mathcal{G})$ et $\mathrm{F}'' \in \mathcal{H}(\mathcal{G})$. On a : $\mathrm{F} \leqslant \mathrm{F}$. Si $\mathrm{F}' \leqslant \mathrm{F}$ et $\mathrm{F} \leqslant \mathrm{F}'$, alors $\mathrm{F}' \subset \mathrm{F} \subset \mathrm{F}'$, d'où $\mathrm{F}' = \mathrm{F}$. Si $\mathrm{F}' \leqslant \mathrm{F}$ et $\mathrm{F}'' \leqslant \mathrm{F}'$, on a : $\mathrm{F}'' \subset \mathrm{F}' \subset \mathrm{F}$; les relations :

$$\mathrm{F}'' = \mathrm{F}''\alpha(\mathrm{F}'') \subset \mathrm{F}\alpha(\mathrm{F}'')$$

et $\quad \mathrm{F}\alpha(\mathrm{F}'') \subset (\mathrm{F}\alpha(\mathrm{F}''))\alpha(\mathrm{F}'') \subset (\mathrm{F}\alpha(\mathrm{F}'))\alpha(\mathrm{F}'') = \mathrm{F}'\alpha(\mathrm{F}'') = \mathrm{F}''$

entraînent $\mathrm{F}'' = \mathrm{F}\alpha(\mathrm{F}'')$; de même $\mathrm{F}'' = \beta(\mathrm{F}'')\mathrm{F}$; donc $\mathrm{F}'' \leqslant \mathrm{F}$ et la relation $\leqslant$ est une relation d'ordre.

— Soit Γ un sous-pseudogroupe faible de $\mathcal{G}$. Montrons que si $\mathrm{F} \leqslant \Gamma$, F est un sous-pseudogroupe faible de $\mathcal{G}$. Comme :

$$\alpha(\mathrm{F}) = \alpha(\Gamma)\alpha(\mathrm{F}) \subset \Gamma\alpha(\mathrm{F}) = \mathrm{F} \qquad \text{et} \qquad \beta(\mathrm{F}) \subset \mathrm{F},$$

il résulte de la proposition 6-3 que : $\mathrm{F} = a(\mathrm{F}) = b(\mathrm{F}) \in \mathcal{H}(\mathcal{G})_0$. Supposons $\mathrm{F}' \leqslant \mathrm{F}$; alors $\mathrm{F}' = \mathrm{F}.\alpha(\mathrm{F}') = \beta(\mathrm{F}').\mathrm{F}$, car :

$$\mathrm{F}.\alpha(\mathrm{F}') \subset \mathrm{F}\alpha(\mathrm{F}') = \mathrm{F}'$$

et, pour tout $f' \in F'$, on a : $f' = f'.\alpha(f') \in F.\alpha(F')$. Évidemment :

$$a(F') \subset a(F) \qquad \text{et} \qquad a(F') \subset a(F)\alpha(F');$$

par ailleurs :

$$\begin{aligned} a(F)\alpha(F') &= (F^{-1}.F)\alpha(F') \subset F^{-1}F' \subset (F^{-1}\beta(F'))F' \\ &= F'^{-1}F' = a(F') \end{aligned}$$

et par suite : $a(F') = a(F)\alpha(F')$ et $a(F') \leqslant a(F)$; de même $b(F') \leqslant b(F)$. De plus :

$$Fa(F') = (F\alpha(F')).(\alpha(F)a(F')) = F'a(F') = F' = b(F')F,$$
$$F.a(F') = F.F^{-1}.\beta(F').F' = b(F).\beta(F').F' = b(F').F' = F'$$

et, de même, $F' = b(F').F$.

— Supposons $H \leqslant a(F)$ et montrons que $F.H$ est un atlas faible complet tel que $F.H \leqslant F$. En effet, on a :

$$F.H \subset F.a(F) = F;$$

puisque :

$$FH \subset (F\beta(H)).(\alpha(F)H) \subset F.H,$$

on a

$$F.H = FH \text{ et } \beta(F.H)\,(F.H) \subset \beta(F)(F.H) \subset (\beta(F)F)H = FH;$$

comme

$$(F.\,H)^{-1}.(F.H) = H.F^{-1}.F.H = H.a(F).H = H$$

et

$$(F.H)((FH)^{-1}.(FH)) = (F.H)H \subset F(HH) = FH = F.H,$$

les conditions du corollaire 3 de la proposition 4-3 sont vérifiées et FH est un atlas faible complet tel que $a(FH) = H$. Les relations :

$$\begin{aligned} F\alpha(H) \subset FH = F.H &= F.(a(F)\alpha(H)) \subset F\alpha(H) = F\alpha(FH), \\ FH &= F\alpha(H) \subset \beta(FH)F \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \beta(F.H)F \subset b(F.H)F &= ((F.H).(F.H)^{-1})F \\ &\subset (F.H.F^{-1})F \subset F(Ha(F)) = FH \end{aligned}$$

montrent que $F.H = F\alpha(FH) = \beta(FH)F$, donc $F.H \leqslant F$.

— Soit $G \in \mathscr{H}(\mathscr{G})$ tel que $a(G) = b(F)$; de la relation :

$$G.F \subset GF \subset (G\beta(F)).(\alpha(G)F) = G.F,$$

on déduit $G.F = GF$. Supposons $G' \in \mathcal{H}(\mathcal{G})$, $a(G') = b(F')$, $F' \leqslant F$ et $G' \leqslant G$; on obtient : $G'.F' \subset (G.F)\alpha(F')$ et

$$(G.F)\alpha(F') \subset G(F\alpha(F')) = GF' = G(\alpha(G').F') \subset G'.F',$$

c'est-à-dire $G'.F' = (G.F)\alpha(F')$; de même $G'.F' = \beta(G')\,(G.F)$ d'où $G'.F' \leqslant G.F$. Inversement soit $K \leqslant G.F$; posons;

$$F' = F.a(K) \leqslant F \qquad \text{et} \qquad G' = G.b(F') \leqslant G;$$

on a :

$$G'.F' = G.b(F').F' = G.F.a(K) = K.$$

Ceci prouve que l'axiome (I) est vérifié dans $\mathcal{H}(\mathcal{G})$.
La relation : $H' \leqslant H$, où H et H' sont des sous-pseudogroupes faibles, équivaut à :

H' est une composante inductive faible de H.
Par suite toute sous-classe A de $\mathcal{H}(\mathcal{G})$ majorée par H admet pour intersection dans $\mathcal{H}(\mathcal{G})$ la classe intersection (corollaire 2, proposition 13-2) des sous-pseudogroupes faibles $H' \in A$, et $\mathcal{H}(\mathcal{G})$ est un groupoïde sous-inductif d'après le corollaire de la proposition 5-1.

Corollaire 1. — *$\mathcal{H}'(\mathcal{G})$ est un sous-groupoïde saturé par induction de $\mathcal{H}(\mathcal{G})$; muni de la relation d'ordre induite par $\mathcal{H}(\mathcal{G})$, le groupoïde $\mathcal{H}'(\mathcal{G})$ est un groupoïde sous-inductif, que nous noterons $\dot{\mathcal{H}}'(\mathcal{G})$.*

Corollaire 2. — *$\mathfrak{I}_f(\mathcal{G})$ est un sous-groupoïde saturé par induction de $\mathcal{H}(\mathcal{G})$; muni de la relation d'ordre induite par $\leqslant$, le groupoïde $\mathfrak{I}_f(\mathcal{G})$ est sous-inductif; nous le noterons $\dot{\mathfrak{I}}_f(\mathcal{G})$; $\mathcal{G}$ s'identifie à un sous-groupoïde sous-préinductif de $\dot{\mathfrak{I}}_f(\mathcal{G})$, en identifiant $f \in \mathcal{G}$ à la classe $f^{>}$ des éléments induits par f.*

En effet, $\mathfrak{I}_f(\mathcal{G})$ est évidemment saturé par induction dans $\mathcal{H}(\mathcal{G})$; l'application : $f \to f^{>}$ identifie $\mathcal{G}$ à un sous-groupoïde de $\mathfrak{I}_f(\mathcal{H})$, encore noté $\mathcal{G}$, qui est stable pour la pseudomultiplication puisque :

$$(gf)^{>} = (g^{>})\,(f^{>}), \qquad \text{si} \qquad f \in \mathcal{G} \qquad \text{et} \qquad g \in \mathcal{G}.$$

Définition 1. — *Soit $\mathcal{G}$ un groupoïde sous-préinductif; on appelle* sous-classe faiblement complète, *ou* complexe, de $\mathcal{G}$ *une sous-classe de $\mathcal{G}$ saturée par induction dans $\mathcal{G}$ et compatible.*

THÉORÈME 3. — *Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde sous-prélocal. La classe des complexes de $\mathcal{S}$ est un sous-groupoïde $\overline{\mathcal{S}}'$ saturé de $\mathfrak{J}_f(\mathcal{S})$ sur lequel les relations $<$ et $\leqslant$ induisent la même relation d'ordre, définie par :*

$$F' < F \qquad \textit{si, et seulement si,} \qquad F' \subset F.$$

$\overline{\mathcal{S}}'$ est la composante inductive de $\mathcal{S}$ dans $\mathfrak{J}_f(\mathcal{S})$ et admet $\mathcal{S}$ pour base. De plus $\overline{\mathcal{S}}'$ est un groupoïde local.

Démonstration. — Pour tout $f \in \mathcal{S}$, soit $f^{>}$ le complexe des éléments induits par f. Soient $F \in \overline{\mathcal{S}}'$ et $F' \in \mathfrak{J}_f(\mathcal{S})$; la relation $F' < F$ entraîne : $F' = F\alpha(F') \subset F$, d'où $F' \leqslant F$; comme $f'e = (f'e)\alpha(f') \in F\alpha(F') = F'$, où $f' \in F'$ et $e < \alpha(f')$, F' est un complexe ; ainsi $\overline{\mathcal{S}}'$ est saturé par induction dans $\mathfrak{J}_f(\mathcal{S})$.

— Soit $F' \in \overline{\mathcal{S}}'$ et $F' \subset F$; on a $F' \subset F\alpha(F')$; si $f \in F$ et si $f' \in F'$, la relation $f\alpha(f') = f \cap f'$ entraîne $f\alpha(f') \in F'$, puisque F' est saturé par induction, d'où $F' \leqslant F$. Par suite les relations $<$ et $\leqslant$ induisent sur $\overline{\mathcal{S}}'$ la même relation, à savoir : $F' \subset F$; de plus $\overline{\mathcal{S}}'$ est un groupoïde inductif, dans lequel l'intersection d'une classe A de complexes est la classe intersection des $G \in A$.

— Soit $F \in \mathfrak{J}_f(\mathcal{S})$ et $\alpha(F) \in \overline{\mathcal{S}}'$; puisque :

$$fe = f(\alpha(f)e) \in F\alpha(F) = F,$$

où $f \in F$ et $e < \alpha(f)$, F est un complexe. Donc $\overline{\mathcal{S}}'$ est un sous-groupoïde saturé de $\mathfrak{J}_f(\mathcal{S})$.

— Pour tout $F \in \overline{\mathcal{S}}'$ et tout $f \in F$, le complexe $f^{>}$ est contenu dans F et F est un majorant de la classe $F^{>}$ des $f^{>} \in \overline{\mathcal{S}}'$, où $f \in F$; soit K un autre majorant de $F^{>}$ dans $\mathfrak{J}_f(\mathcal{S})$; des relations : $f^{>} = K\alpha(f)^{>}$, il résulte $F = K\alpha(F) \leqslant K$, et F est l'agrégat de la classe $F^{>}$. Donc $\mathcal{S}$ est une base de $\overline{\mathcal{S}}'$.

— Soit A une sous-classe de $\overline{\mathcal{S}}'_0$ admettant un sous-agrégat E' dans $\mathfrak{J}_f(\mathcal{S})$; tout complexe $E \in A$ est contenu dans la classe des éléments induits des éléments de E' ; par suite la classe E'' réunion des classes $E \in A$ est compatible et c'est un complexe, qui est l'agrégat de A dans $\overline{\mathcal{S}}'$. Des relations $E = E'E \subset E'E''$, on déduit $E'' \subset E'E''$; par ailleurs $E'E'' \subset E''$, puisque E'' est saturé par induction; donc $E'' = E'E''$ et $E'' < E'$; par conséquent $E' = E''$. Comme $\overline{\mathcal{G}}'$ est saturé dans $\mathfrak{J}_f(\mathcal{G})$, ceci entraîne que $\overline{\mathcal{G}}'$ est la composante inductive de $\mathcal{G}$ dans $\mathfrak{J}_f(\mathcal{G})$. Enfin si $B \in \overline{\mathcal{G}}'_0$, on a :

$$\cup A \cap B = \bigcup_{E \in A} (E \cap B)$$

et l'axiome (D) est vérifié dans $\overline{\mathcal{G}}'$.

Remarque. — Soient f et g deux éléments de $\mathcal{G}$ admettant h pour sous-agrégat dans $\mathcal{G}$; alors f et g sont compatibles; dans $\overline{\mathcal{G}}'$ les complexes $f^>$ et $g^>$ ont pour agrégat la classe réunion de $f^>$ et $g^>$; cette classe est différente de la classe $h^>$.

Théorème 4. — *Soit $\mathcal{G}$ un groupoïde sous-prélocal; le groupoïde $\mathcal{A}'(\mathcal{G})$ des atlas complets propres de $\mathcal{G}$* (proposition 9-3) *est un groupoïde sous-préinductif lorsqu'il est muni de la relation :*

$$F' < F \quad \textit{si, et seulement si,} \quad F' = \overline{F\alpha(F')} = \overline{\beta(F')F}.$$

Démonstration. — Pour tout $F \in \mathcal{A}'(\mathcal{G})$, nous désignerons par F_1 une base de F saturée par induction dans F et telle que $\alpha(F_1)$ et $\beta(F_1)$ soient des classes compatibles; si $F' < F$, on choisira pour F'_1 la classe des éléments induits des éléments de F_1 sur $\alpha(F')$, c'est-à-dire $\overline{F_1\alpha(F')}$.

— On a : $F = \overline{F\alpha(F)} = \overline{\beta(F)F}$; si $F' < F$ et $F < F'$, on trouve :

$$F' = \overline{F\alpha(F')} = \overline{F'_1\alpha(F_1)\alpha(F'_1)} = \overline{F'_1\,\alpha(F'_1)\alpha(F_1)} = \overline{F'\alpha(F)} = F;$$

si $F' < F$ et $F'' < F'$, les relations :

$$\overline{F\alpha(F'')} = \overline{F\alpha(F'\alpha(F''))} = \overline{F(\alpha(F')\alpha(F''))}$$
$$= \overline{F_1\alpha(F'_1)\alpha(F''_1)} = \overline{F'\alpha(F'')} = F''$$

et, de même : $\overline{\beta(F'')F} = F''$, entraînent $F'' < F$. Ainsi la relation $<$ est une relation d'ordre.

— Supposons $F < \Gamma$, où Γ est un sous-pseudogroupe propre de $\mathcal{G}$; comme

$$F = \overline{\Gamma\alpha(F)} \quad \text{et} \quad \alpha(F) \subset \overline{\alpha(\Gamma)\alpha(F)} \subset \overline{\Gamma\alpha(F)} = F,$$

il résulte de la proposition 10-3 que l'on a : $\bar{b}(F) \subset F \subset \bar{a}(F)$;

de même $\beta(F) \subset F$ et $\bar{a}(F) \subset F \subset \bar{b}(F)$; d'où $F = \bar{a}(F)$ est un sous-pseudogroupe propre.

— Supposons $F' < F$; puisque :

$$\begin{aligned}\bar{a}(F') &= \overline{F'^{-1}.F'} = \overline{F_1^{-1}\beta(F_1')F_1'} = \overline{F_1^{-1}F_1'} \\ &= \overline{F_1^{-1}F_1\alpha(F_1')} = \overline{a(F)\alpha(F')} = \overline{\bar{a}(F)\alpha(\bar{a}(F))},\end{aligned}$$

on trouve $\bar{a}(F') < \bar{a}(F)$; de même $\bar{b}(F') < \bar{b}(F)$.

— Supposons $H < \bar{a}(F)$ et montrons que $\overline{FH}$ est un atlas complet tel que $\overline{FH} < F$ et $\bar{a}(\overline{FH}) = H$. En effet, on a :

$$\begin{aligned}\alpha(FH) \subset \overline{\alpha(F)\alpha(H)} \subset \overline{\alpha(F_1)\,(a(F_1)\alpha(H_1))} \\ = \overline{\alpha(F_1)a(F_1)\alpha(H_1)} = \overline{a(F_1)\alpha(H_1)} = H\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\overline{((FH)H)^{-1}((FH)H)} &= \overline{H_1H_1F_1^{-1}F_1H_1H_1} \\ &= \overline{H_1a(F_1)H_1} = \overline{\alpha(H_1)a(F_1)\alpha(H_1)} = H,\end{aligned}$$

de sorte que, d'après le corollaire 1 de la proposition 8-3,

$$\overline{(FH)H} = \overline{F_1H_1H_1} = \overline{FH}$$

est un atlas complet pour lequel $\bar{a}(\overline{FH}) = H$. De plus, comme

$$\overline{FH} = \overline{F_1a(F_1)\alpha(H_1)} = \overline{F\alpha(H)} = \overline{F\alpha(FH)};$$
$$\overline{FH} = \overline{F\alpha(H)} \subset \overline{\beta(FH)F}$$

et

$$\overline{\beta(FH)F} \subset \overline{F_1H_1F_1^{-1}F_1} = \overline{F_1H_1a(F_1)} = \overline{F_1H_1} = \overline{FH},$$

on obtient : $\overline{FH} < F$.

— Supposons $G \circ F$ et $G' \circ F'$ définis dans $\mathcal{A}'(\mathcal{G})$, $G' < G$ et $F' < F$. Nous avons déjà démontré (proposition 9-3) que $G.F = GF$. Comme la classe E, intersection de $\alpha(G_1)$ et de $\beta(F_1)$ où F_1 et G_1 sont des bases propres saturées par induction de F et G, est une base de $\alpha(G)$, les classes EF_1 et G_1E sont aussi des bases de F et G; c'est de telles bases que nous nous servirons dans la suite de la démonstration. Les relations :

$$\begin{aligned}G' \circ F' = \overline{(G\alpha(G')).(\beta(F')F)} &= \overline{G_1\alpha(G_1')\beta(F_1')F_1} \\ &= \overline{G_1F'} = \overline{G_1F_1\alpha(F_1')} = \overline{(G\circ F)\alpha(F')}\end{aligned}$$

et, pour la même raison, $G' \odot F' = \overline{\beta(G')\,(G \odot F)}$ entraînent $G' \odot F' < G \odot F$. Inversement, soit $K < G \odot F$; d'après ce qui précède, on a : $\overline{a}(K) < \overline{a}(F)$,

$$F' = \overline{Fa(K)} = \overline{F\alpha(K)} < F; \qquad G' = \overline{Gb(F')} < G;$$
$$\overline{b}(F') = \overline{a}(G')$$

et $G' \odot F' < G \odot F$; par ailleurs :

$$G' \odot F' = \overline{(Gb(F'_1))F'_1} = \overline{GF'} = \overline{G_1 F_1 \alpha(K_1)} = \overline{(G \odot F)\alpha(K)} = K.$$

Donc l'axiome (I) est vérifié dans $\mathcal{A}'(\mathcal{G})$.

— Supposons $H' < \Gamma$, et $H'' < \Gamma$, où Γ est un sous-pseudogroupe propre de $\mathcal{G}$. Posons : $H = \overline{\Gamma_1 \alpha(H'_1)\alpha(H''_1)}$, où Γ_1, H'_1 et H''_1 sont des bases telles que la classe réunion de $\alpha(\Gamma_1)$, $\alpha(H'_1)$ et $\alpha(H''_1)$ soit compatible. On trouve :

$$H^{-1} = \overline{\alpha(H''_1)\alpha(H'_1)\Gamma_1} = \overline{\alpha(H'')H'} = \overline{\alpha(H''_1)\Gamma_1\alpha(H'_1)}$$
$$= \overline{H''\alpha(H')} = \overline{\Gamma_1\alpha(H''_1)\alpha(H'_1)} = H$$

et

$$HH = \overline{\alpha(H''_1)H'_1H_1} = \overline{\alpha(H''_1)\,(\alpha(H'_1)\Gamma_1)H_1} = \overline{\alpha(H''_1)\alpha(H'_1)H_1} = H.$$

Par suite H est un sous-pseudogroupe. Des conditions :

$$\overline{H'\alpha(H)} = \overline{\Gamma_1\alpha(H'_1)\alpha(H_1)} = \overline{\Gamma_1\alpha(H'_1)\alpha(H'_1)\alpha(H''_1)\alpha(\Gamma_1)}$$
$$= \overline{\Gamma_1\alpha(H'_1)\alpha(H''_1)} = H$$

et, de même, $\overline{H''\alpha(H)} = H$, on déduit $H < H'$ et $H < H''$. Si K est un autre minorant de H' et de H'', on a :

$$K = \overline{H'\alpha(K)} = \overline{H'_1\alpha(H''_1)\alpha(K_1)} = \overline{H\alpha(K)},$$

où K_1 désigne une base de K telle que la classe réunion de $\alpha(K_1)$ et de $\alpha(\Gamma_1)$ soit compatible, d'où $K < H$. Par conséquent $H = H' \cap H''$ dans $\mathcal{A}'(\mathcal{G})$ et $\mathcal{A}'(\mathcal{G})$ est un groupoïde sous-préinductif.

Corollaire. — *La sous-classe $\mathfrak{I}(\mathcal{G})$ de $\mathcal{A}'(\mathcal{G})$ formée des sous-classes inductives de $\mathcal{G}$ admettant une base compatible est un sous-groupoïde plein saturé par induction de $\mathcal{A}'(\mathcal{G})$.*

En effet, on a $F \in \mathfrak{I}(\mathcal{G})$ si, et seulement si, F est un atlas complet propre tel que $a(F)$ et $b(F)$ soient resp. les sous-classes inductives de $\mathcal{G}$ engendrées par $\alpha(F)$ et $\beta(F)$. Par suite la classe des unités de $\mathfrak{I}(\mathcal{G})$ est la classe des sous-classes inductives de $\mathcal{G}$ admettant pour base une sous-classe compatible de $\mathcal{G}_0$; elle est saturée par induction dans $\mathcal{A}'(\mathcal{G})$, puisque $F' < E$, où $E \in \mathfrak{I}(\mathcal{G})_0$, entraîne que F' admet la classe $E\alpha(F'_1) \subset \mathcal{G}_0$ pour base.

Théorème 5. — *Soit $\mathcal{G}$ un groupoïde sous-prélocal; le groupoïde $\mathcal{A}(\mathcal{G})$ des atlas complets de $\mathcal{G}$* (proposition 9-3) *est un groupoïde sous-inductif lorsqu'il est muni de la relation :*

$$F' \leqslant F \quad \textit{si, et seulement si,} \quad F' \subset F$$

et

$$F' = \overline{F\alpha(F')} = \overline{\beta(F')F}.$$

Démonstration. — Montrons que la relation $F' \leqslant F$ est équivalente à

$$F' \subset F \quad \text{et} \quad F' = F\alpha(F') = \beta(F')F,$$

c'est-à-dire $F' \leqslant F$ dans $\mathcal{H}(\mathcal{G})$ (théorème 3). En effet, soient $F \in \mathcal{A}(\mathcal{G})$ et $F' \in \mathcal{A}(\mathcal{G})$. Si $F' \leqslant F$, on a $F' \subset F\alpha(F') \subset F'$, d'où $F' = F\alpha(F')$; de même $F' = \beta(F')F$. Inversement, si $F' \subset F$ et $F' = F\alpha(F') = \beta(F')F$, on a :

$$F' = \overline{F'} = \overline{F\alpha(F')} = \overline{\beta(F')F}.$$

Il en résulte que la relation $\leqslant$ est une relation d'ordre, que, si $F' \leqslant F$, on a aussi :

$$F' = F.\alpha(F') = \beta(F').F$$

et qu'un élément F de $\mathcal{A}(\mathcal{G})$ est majoré par un pseudogroupe Γ si, et seulement si, F est une composante inductive de Γ. Par suite toute sous-classe majorée A de $\mathcal{A}(\mathcal{G})_0$ admet pour intersection dans $\mathcal{A}(\mathcal{G})$ la classe intersection des $H \in A$. Si $F' \leqslant F$ dans $\mathcal{A}(\mathcal{G})$, on a $a(F') \leqslant a(F)$ dans $\mathcal{H}(\mathcal{G})$, donc $\overline{a}(F') \subset \overline{a}(F)$ et $\overline{a}(F') = \overline{a(F)\alpha(F')}$, d'où

$$\overline{a}(F') = \overline{\overline{a}(F)\alpha(\overline{a}(F'))} \leqslant \overline{a}(F).$$

De même $\overline{b}(F') \leqslant \overline{b}(F)$.

— Soit $H \leqslant \overline{a}(F)$; puisque H est saturé par induction dans $\overline{a}(F)$, on a :

$$H\alpha(F) \subset H, \quad \text{d'où} \quad FH \subset (F\alpha(H)).(\alpha(F)H) \subset F.H;$$

on en déduit :

$$\mathrm{FH} = \mathrm{F.H}; \qquad \beta(\mathrm{FH})\,(\mathrm{F.H}) \subset \beta(\mathrm{F})\,(\mathrm{F.H}) \subset \mathrm{FH} = \mathrm{F.H};$$
$$(\mathrm{F.H})^{-1}.(\mathrm{F.H}) = \mathrm{H.F^{-1}.F.H} = \mathrm{H}.a(\mathrm{F}).\mathrm{H} \subset \mathrm{H},$$

d'où :

$$\overline{(\mathrm{FH})^{-1}(\mathrm{FH})} = \mathrm{H} \qquad \text{et} \qquad (\mathrm{FH})\,((\mathrm{FH^{-1}}).(\mathrm{FH})) \subset (\mathrm{F.H})\,\mathrm{H} \subset \mathrm{F(HH)} = \mathrm{FH}.$$

Ainsi les conditions du corollaire 2 de la proposition 8-3 sont vérifiées et $\overline{\mathrm{F.H}}$ est atlas complet tel que $\overline{a}(\overline{\mathrm{FH}}) = \mathrm{H}$; de plus on trouve :

$$\overline{\mathrm{F}\alpha(\mathrm{H})} \subset \overline{\mathrm{FH}} = \overline{\mathrm{F}.(\overline{a}(\mathrm{F}).\alpha(\mathrm{H}))} \subset \overline{\mathrm{F}\alpha(\mathrm{H})} = \overline{\mathrm{F}\alpha(\mathrm{FH})};$$
$$\overline{\mathrm{FH}} = \overline{\mathrm{F}\alpha(\mathrm{H})} \subset \overline{\beta(\mathrm{FH})\mathrm{F}}$$

et

$$\overline{\beta(\mathrm{FH})\mathrm{F}} \subset \overline{((\mathrm{F.H}).(\mathrm{F.H})^{-1})\mathrm{F}} = \overline{(\mathrm{F.H.F^{-1}})\mathrm{F}} \subset \overline{\mathrm{F}.(\mathrm{H}a(\mathrm{F}))} = \overline{\mathrm{F.H}},$$

donc

$$\overline{\mathrm{FH}} = \overline{\beta(\mathrm{FH})\mathrm{F}} = \overline{\mathrm{F}\alpha(\mathrm{FH})} \qquad \text{et} \qquad \overline{\mathrm{FH}} \leqslant \mathrm{F} \text{ dans } \mathcal{A}(\mathcal{G}).$$

— Soit $\mathrm{G} \in \mathcal{A}(\mathcal{G})$, $\overline{a}(\mathrm{G}) = \overline{b}(\mathrm{F})$; l'atlas complet $\mathrm{G} \odot \mathrm{F}$ admet

$$\mathrm{GF} = (\mathrm{G}\beta(\mathrm{F})).(\alpha(\mathrm{G})\mathrm{F}) = \mathrm{G.F}$$

pour base; soient $\mathrm{G}' \leqslant \mathrm{G}$, $\mathrm{F}' \leqslant \mathrm{F}$ et $\overline{a}(\mathrm{G}') = \overline{b}(\mathrm{F}')$; on obtient :

$$\overline{\mathrm{G}'.\mathrm{F}'} \subset \overline{(\mathrm{G.F})\alpha(\mathrm{G}'.\mathrm{F}')} \subset \overline{(\mathrm{G.F})\alpha(\mathrm{F}')}$$

et

$$\overline{(\mathrm{G.F})\alpha(\mathrm{F}')} \subset \overline{\mathrm{G}(\mathrm{F}\alpha(\mathrm{F}'))} = \overline{\mathrm{GF}'} \subset \overline{(\mathrm{G}\beta(\mathrm{F}'))\mathrm{F}'} = \overline{(\mathrm{G}\alpha(\mathrm{G}'))\mathrm{F}'} = \overline{\mathrm{G}'\mathrm{F}'},$$

c'est-à-dire $\mathrm{G}' \odot \mathrm{F}' = \overline{(\mathrm{G} \odot \mathrm{F})\alpha(\mathrm{F}')}$; de même

$$\mathrm{G}' \odot \mathrm{F}' = \overline{\beta(\mathrm{G}')\,(\mathrm{G} \odot \mathrm{F})}, \qquad \text{d'où} \qquad \mathrm{G}' \odot \mathrm{F}' \leqslant \mathrm{G} \odot \mathrm{F}.$$

Inversement si $\mathrm{K} \leqslant \mathrm{G} \odot \mathrm{F}$ on a, à l'aide d'un raisonnement analogue à celui utilisé dans le théorème 3,

$$\mathrm{F}' = \overline{\mathrm{F}a(\mathrm{K})} = \overline{\mathrm{F}.\alpha(\mathrm{K})} \leqslant \mathrm{F};$$
$$\mathrm{G}' = \overline{\mathrm{G}b(\mathrm{F}')} \leqslant \mathrm{G} \text{ et } \mathrm{G}' \odot \mathrm{F}' \leqslant \mathrm{G} \odot \mathrm{F}.$$

Enfin :

$$G' \circ F' = \overline{(G.\beta(F')).(F.\alpha(K))} = \overline{(G \circ F).\alpha(K)} = K.$$

Par conséquent $\mathcal{A}(\mathcal{G})$ est un groupoïde sous-inductif.

Corollaire 1. — *$\mathcal{A}(\mathcal{G})$ admet $\mathcal{A}'(\mathcal{G})$ comme sous-groupoïde saturé par induction; muni de la relation $\leqslant$, $\mathcal{A}'(\mathcal{G})$ est un groupoïde sous-inductif que nous désignerons par $\dot{\mathcal{A}}'(\mathcal{G})$.*

Théorème 6. — *$\mathfrak{J}(\mathcal{G})$ (corollaire du théorème 4) muni de la relation $\leqslant$ est un groupoïde inductif, que nous noterons $\dot{\mathfrak{J}}(\mathcal{G})$.*

Démonstration. — $\mathfrak{J}(\mathcal{G})$ est saturé par induction dans $\mathcal{A}(\mathcal{G})$, donc est un groupoïde sous-inductif. Il suffit de montrer qu'il est préinductif, car il en résultera qu'il est inductif. Soient $F' \in \mathfrak{J}(\mathcal{G})$ et $F \in \mathfrak{J}(\mathcal{G})$. Supposons $F' \subset F$ saturé par induction dans F; on a $F' \subset F\alpha(F')$; soit F_1 une base de F formée par une sous-classe compatible saturée par induction dans F; la classe F'_1 intersection de F' et de F_1 est une base de F'; si $f' \in F'_1$ et $f \in F_1$, on a :

$$f\alpha(f') = f \cap f' = \beta(f')f < f',$$

d'où $f\alpha(f') \in F'$ et $\overline{F\alpha(F')} = \overline{F_1\alpha(F'_1)} \subset F'$; par suite $F' = \overline{F\alpha(F')}$; de même $F' = \overline{\beta(F')F}$ et $F' \leqslant F$. — Supposons $F'' \in \mathfrak{J}(\mathcal{G})$ et montrons que F' et F'' admettent pour intersection dans $\dot{\mathfrak{J}}(\mathcal{G})$ la classe G des g tels que $g \in F'$, $g \in F''$ et $g\alpha(F') = g\alpha(F'')$. Soient $f' \in F'$, $g \in G$ et $f' < g$; la relation

$$f' = g(\alpha(f')) \in g\alpha(F'') \subset F''$$

entraîne :

$$f'\alpha(F') \subset g(\alpha(f')\alpha(F')) \subset g\alpha(F') = g\alpha(F'') \subset F'',$$

d'où :

$$f'\alpha(F') \subset f'\alpha(f'\alpha(F')) \subset f'\alpha(F'') \subset f'\alpha(F')$$

et $f' \in G$. Soit B une sous-classe de G admettant un sous-agrégat b; comme $b\alpha(f') \in \overline{\bigcup}(B\alpha(f')) \subset F''$, on a :

$$b\alpha(f') = b\alpha(b\alpha(f')) \in b\alpha(F''),$$

donc $b \in G$. Soient F'_1 et F''_1 des bases compatibles de F' et F'', saturées par induction resp. dans F' et dans F''. Si $g \in G$, il existe $A' \subset F'_1$ et $A'' \subset F''_1$ telles que $g = \bigsqcup^{g} A' = \bigsqcup^{g} A''$; on en déduit $g = \bigsqcup^{g} A$, où A est la classe des $f' \cap f''$, où $f' \in A'$ et $f'' \in A''$. Ainsi G admet pour base la classe G_1 des éléments $f' \cap f''$, où $f' \in F'_1$ et $f'' \in F''_1$, qui est compatible en vertu de la proposition 11-2; donc $G \in \mathfrak{J}(\mathcal{G})$ et, G étant saturé par induction dans F' et F'', on a $G \ll F'$ et $G \ll F''$. Si K est un minorant de F' et F'', on a, puisque $K = F'\alpha(K) = F'.\alpha(K) \subset F''$:

$$K\alpha(F') = (F'.\alpha(K))\alpha(F') \subset F'\alpha(K) = K \subset F'';$$

il en résulte, si $k \in K$, $f' \in F'$ et si $k\alpha(f')$ est défini :

$$k\alpha(f') = k\alpha(k\alpha(f')) \in k\alpha(F'');$$

de même $k\alpha(F'') \subset k\alpha(F')$, et par suite $K \subset G$ et $K \subset G\alpha(K)$; de plus :

$$G\alpha(K) \subset F'\alpha(K) = K, \qquad \text{d'où} \qquad K = G\alpha(K).$$

On en déduit que $K \ll G$ et que G est l'intersection de F' et de F'' dans le groupoïde inductif $\dot{\mathfrak{J}}(\mathcal{G})$.

DÉFINITION 2. — *Soit $\mathcal{A}$ une classe sous-préinductive; on appelle* paratopologie de $\mathcal{A}$ *ou* sur $a \in \mathcal{A}$ *une sous-classe inductive faible de $\mathcal{A}$ admettant a pour plus grand élément.*

THÉORÈME 7. — *Soit $\mathcal{T}(\mathcal{G})$ la classe des paratopologies sur un groupoïde sous-prélocal $\mathcal{G}$; alors $\mathcal{T}(\mathcal{G})$ est un sous-groupoïde sous-préinductif saturé de $\mathfrak{J}_f(\mathcal{G})$ et de $\dot{\mathfrak{J}}_f(\mathcal{G})$. Si $\mathcal{G}$ est sous-local, $\mathcal{T}(\mathcal{G})$ est un groupoïde sous-inductif pour la relation $\ll$, et $\mathcal{G}$ en est un sous-pseudogroupe faible saturé par induction.*

Démonstration. — Soit T une paratopologie sur $t \in \mathcal{G}$; alors $\alpha(T)$ et $\beta(T)$ sont des paratopologies sur $\alpha(t)$ et sur $\beta(t)$ et T s'identifie au triplet $(\beta(T), t, \alpha(T))$. Montrons que $\mathcal{T}(\mathcal{G})$ est un sous-groupoïde saturé de $\mathfrak{J}_f(\mathcal{G})$; soit $F \in \mathfrak{J}_f(\mathcal{G})$ tel que $\alpha(F)$ soit une paratopologie sur e; il existe $f \in F$ tel que $\alpha(f) = e$. Si $f'' \in F$, on a $\alpha(f'') < e$, d'où $f'' = f''\alpha(f) = f'' \cap f < f$, et F est une paratopologie $(\beta(F), f, \alpha(F))$ sur f. Soient T' et T'' deux paratopologies sur t' et t'' resp. majorées par T dans

$\mathfrak{J}_f(\mathcal{G})$; alors $T' \cap T''$ est une paratopologie sur $t' \cap t''$, puisque $T' \cap T'' = \underline{T\alpha(T')\alpha(T'')}$ d'après le théorème 1, et que $T\alpha(T')\alpha(T'')$ contient :

$$t\alpha(t')\alpha(t'') = t'\alpha(t'') = t' \cap t''.$$

Pour toute paratopologie E sur e telle que $E < \alpha(T)$ (resp. $E \leqslant \alpha(T)$), TE est une paratopologie sur te. Ainsi $\mathcal{T}(\mathcal{G})$ est un sous-groupoïde sous-préinductif de $\mathfrak{J}_f(\mathcal{G})$ (resp. de $\dot{\mathfrak{J}}_f(\mathcal{G})$).

— Supposons $\mathcal{G}$ sous-local; soit A une classe de paratopologies T' sur t' majorée par T dans $\dot{\mathfrak{J}}_f(\mathcal{G})$; la classe des éléments t' admet un t-agrégat $t'' \in T$; soit T'' la classe des éléments $f \in T$ tels que $f < t''$; T'' est une paratopologie sur t''; comme :

$$T' \subset T''\alpha(T') \subset T\alpha(T') = T', \qquad \text{et de même} \qquad T' = \beta(T')T'',$$

T'' majore $T' \in A$. Soit $M \leqslant T$ une paratopologie sur m, majorant A; on a $T' \leqslant M$, d'où $t' < m < t$ et $t'' < m$. Par suite :

$$T'' = t''\alpha(T'') = m\alpha(T'') \subset M\alpha(T'');$$

inversement, si $f \in T''$, on a $m\alpha(f) = f\alpha(m) = f \in T''$, de sorte que $M\alpha(T'') = T''$; de même $T'' = \beta(T'')M$, c'est-à-dire $T'' \leqslant M$. Ainsi T'' est le T-agrégat de A dans $\mathcal{T}(\mathcal{G})$ et $\mathcal{T}(\mathcal{G})$ est un groupoïde inductif.

— $\mathcal{G}$ s'identifie à un sous-groupoïde de $\mathcal{T}(\mathcal{G})$, en identifiant $f \in \mathcal{G}$ avec le complexe $f^{>}$. Si $T \leqslant f$, T est saturé par induction dans $f^{>}$, donc $T = t^{>}$ et $T \in \mathcal{G}$. Par suite $\mathcal{G}$ est saturé par induction dans $\mathcal{T}(\mathcal{G})$.

Remarque. — La congrégation d'une sous-classe de $\mathcal{T}(\mathcal{G})$ dans $\mathcal{T}(\mathcal{G})$ n'est généralement pas la même que sa congrégation dans $\mathfrak{J}_f(\mathcal{G})$.

5. COMPLÉTION DES GROUPOÏDES PRÉLOCAUX

Nous allons considérer plus particulièrement dans ce § le cas où $\mathcal{G}$ est un groupoïde prélocal. Alors $\mathcal{A}'(\mathcal{G}) = \mathcal{A}(\mathcal{G})$ et le sous-groupoïde $\mathfrak{J}(\mathcal{G})$ de $\mathcal{A}(\mathcal{G})$ (corollaire du théorème 4-4) est la classe de toutes les sous-classes inductives compatibles de $\mathcal{G}$.

THÉORÈME 1. — *Si $\mathcal{G}$ est un groupoïde prélocal, $\mathfrak{J}(\mathcal{G})$ est un groupoïde inductif* (pour la relation $<$).

Démonstration. — D'après le corollaire 2 du théorème 4-4, $\mathfrak{J}(\mathcal{G})$ est un sous-groupoïde saturé par induction de $\mathcal{A}(\mathcal{G})$, donc un groupoïde sous-inductif pour l'ordre induit. Nous allons montrer que c'est aussi un groupoïde préinductif, d'où résultera qu'il est inductif. Pour que l'on ait : $F' < F$ dans $\mathfrak{J}(\mathcal{G})$, il faut et il suffit que $F' = \overline{F\alpha(F')}$; en effet cette condition est nécessaire; si elle est vérifiée, F' est contenu dans la sous-classe inductive saturée par induction engendrée par F; par suite deux éléments $f \in F$ et $f' \in F'$ sont compatibles, c'est-à-dire :

$$f\alpha(f') = f \cap f' = \beta(f')f \in \beta(F')F.$$

d'où $\overline{\beta(F')F} = F'$ et $F' < F$. Soient F et G deux éléments de $\mathfrak{J}(\mathcal{G})$, H la classe des $f \cap g$, où $f \in F$ et $g \in G$; montrons que H est l'intersection de F et G dans $\mathfrak{J}(\mathcal{G})$. Comme H est contenu dans la classe saturée par induction déduite de F, c'est une classe compatible, et H est base d'une sous-classe inductive $\overline{H}$; pour tout $h \in H$, on a :

$$h = f \cap g = f\alpha(h) \in F\alpha(H).$$

Inversement, si $f' \in F$ et $h \in H$, on trouve : $h = f \cap g$ et

$$f'\alpha(h) = f'\alpha(f \cap g) = (f' \cap f) \cap g \in H.$$

Donc $\overline{H} = \overline{F\alpha(H)}$ et $\overline{H} < F$; de même $\overline{H} < G$. Soit K un minorant de F et G dans $\mathfrak{J}(\mathcal{G})$; alors K admet pour base la classe des éléments :

$$k_1 = f\alpha(k) \cap g\alpha(k'), \qquad \text{où} \qquad k \in K \qquad \text{et} \qquad k' \in K;$$

puisque $k_1 = (f \cap g)\alpha(k_1)$, on a $K \subset \overline{H\alpha(K)}$; par ailleurs :

$$(f \cap g)\alpha(k) = f\alpha(k) \cap g\alpha(k) \in K,$$

d'où $\overline{\overline{H}\alpha(K)} \subset K$. On en déduit $K = \overline{\overline{H}\alpha(K)}$ et $K < \overline{H}$. Ceci prouve que $\overline{H}$ est l'intersection de F et G dans $\mathfrak{J}(\mathcal{G})$ et que $\mathfrak{J}(\mathcal{G})$ est un groupoïde inductif.

COROLLAIRE. — *$\mathcal{G}$ s'identifie à un sous-groupoïde de $\mathfrak{J}(\mathcal{G})$ stable pour la pseudomultiplication. Si $\mathcal{G}$ est local, $\mathcal{G}$ s'identifie à un sous-pseudogroupe faible de $\mathfrak{J}(\mathcal{G})$, saturé par induction.*

Démonstration. — L'application : $f \to f^{>}$, où $f \in \mathcal{G}$, identifie $\mathcal{G}$ à une sous-classe de $\mathfrak{I}(\mathcal{G})$, que nous noterons encore $\mathcal{G}$. Des relations :

$$\alpha(f^{>}) = (\alpha(f))^{>}, \quad \beta(f^{>}) = (\beta(f))^{>}, \quad \overline{(g^{>})\,(f^{>})} = (gf)^{>},$$

on déduit que $\mathcal{G}$ est un sous-groupoïde de $\mathfrak{I}(\mathcal{G})$, stable pour la pseudomultiplication. — Supposons $\mathcal{G}$ local; si $F \in \mathfrak{I}(\mathcal{G})$ et $F < f^{>}$, comme on a $F = (f^{>})\alpha(F)$, F est saturé par induction dans $\mathcal{G}$ et F est majoré par f dans $\mathcal{G}$. Donc F admet un agrégat dans $\mathcal{G}$ et $F = (\bigcup F)^{>}$. Ainsi $\mathcal{G}$ est saturé par induction dans $\mathfrak{I}(\mathcal{G})$.

Remarque. — Une démonstration analogue à celle du théorème 1 montre que, si $\mathcal{G}$ est un groupoïde prélocal, alors $\mathfrak{I}_f(\mathcal{G})$ (corollaire 2, théorème 2-4) est un groupoïde inductif.

Définition 1. — *Soit $\mathcal{G}$ un groupoïde préinductif : on appelle* sous-classe complète *de $\mathcal{G}$ une sous-classe inductive de $\mathcal{G}$ qui est compatible et saturée par induction.*

Si F est une sous-classe compatible de $\mathcal{G}$, alors l'intersection des sous-classes complètes qui contiennent F est appelée *sous-classe complète* engendrée par F dans $\mathcal{G}$.

Proposition 1. — *Soit $\mathcal{G}$ un groupoïde prélocal; la sous-classe complète engendrée par une sous-classe compatible* F *de $\mathcal{G}$ est la sous-classe inductive* F′ *engendrée dans $\mathcal{G}$ par la classe* F_1 *des éléments induits des éléments de* F, *et* F′ *admet* F_1 *pour base.*

En effet, d'après le corollaire 2 de la proposition 12-2, [2] la sous-classe inductive F′ engendrée par F_1 est saturée par induction. D'après les propositions 13-2, [2] et 11-2, F_1 et F′ sont compatibles, donc F′ est la sous-classe complète engendrée par F.

Corollaire. — *Si* F *est saturée par induction, la sous-classe complète engendrée par* F *dans $\mathcal{G}$ est identique à la sous-classe inductive engendrée par* F *dans $\mathcal{G}$.*

Proposition 2. — *Soit $\mathcal{G}$ un groupoïde prélocal; la sous-classe $\overline{\mathcal{G}}$ du groupoïde préinductif $\mathfrak{I}(\mathcal{G})$ (théorème 1) formée par les sous-classes complètes de $\mathcal{G}$ est un sous-pseudogroupe faible de $\mathfrak{I}(\mathcal{G})$ saturé par induction et admettant $\mathcal{G}$*

pour base. De plus $\overline{\mathcal{S}}$ *est un groupoïde local pour l'ordre induit par* $\mathfrak{J}(\mathcal{S})$.

Démonstration. — Si F et G sont des sous-classes complètes de $\mathcal{S}$, les sous-classes $\overline{\alpha}(F)$, $\overline{\beta}(F)$, F^{-1} et $\overline{GF}$ sont saturées par induction, donc appartiennent à $\overline{\mathcal{S}}$, et $\overline{\mathcal{S}}$ est un sous-groupoïde de $\mathfrak{J}(\mathcal{S})$ stable pour la pseudomultiplication et contenant $\mathcal{S}$. Soit H un élément de $\mathfrak{J}(\mathcal{S})$ qui est majoré par un élément F de $\mathcal{S}$; puisque $H = \overline{F\alpha(H)}$, la classe H admet pour base la classe des éléments $f\alpha(h)$, où $f \in F$ et $h \in H$; cette base étant saturée par induction, H est aussi saturé par induction d'après le corollaire 3 de la proposition 12-2, I [2], donc $H \in \overline{\mathcal{S}}$ et $\overline{\mathcal{S}}$ est saturé par induction dans $\mathfrak{J}(\mathcal{S})$. Il en résulte que $\overline{\mathcal{S}}$ est un sous-pseudogroupe faible de $\mathfrak{J}(\mathcal{S})$. Soient $F \in \overline{\mathcal{S}}$ et $G \in \overline{\mathcal{S}}$; si $F = \overline{G\alpha(F)}$, F admet pour base la classe des éléments $g\alpha(f)$, où $g \in G$ et $f \in F$; comme G est saturé par induction, $g\alpha(f) \in G$ et F est une sous-classe de G. Inversement si F est une sous-classe de G, on a $F \subset G\alpha(F)$; pour tout $g \in G$ et $f \in F$ la relation : $g\alpha(f) = g \cap f \in F$ entraîne $\overline{G\alpha(F)} \subset F$. Donc la relation d'ordre dans $\overline{\mathcal{S}}$ est équivalente à la relation :

$F < G$ si, et seulement si, F est une sous-classe de G.

— L'agrégat d'une sous-classe A de $\overline{\mathcal{S}}$ majorée est la sous-classe inductive engendrée par la classe des f tels que $f \in F$ et $F \in A$. Par conséquent tout élément G de $\overline{\mathcal{S}}$ est l'agrégat dans $\overline{\mathcal{S}}$ de la sous-classe de $\mathcal{S}$ formée des $\underline{g} \in G$ et $\mathcal{S}$ est une base de $\overline{\mathcal{S}}$. Enfin, si B est une sous-classe de $\overline{\mathcal{S}}_0$ et $E \in \overline{\mathcal{S}}_0$, les classes $(\bigcup B)E$ et $\bigsqcup_{E' \in B}(E'E)$ admettent pour base la classe des éléments $e'e$, où $e' \in E'$ et $e \in E$, d'où $(\bigcup B)E = \bigsqcup_{E' \in B}(E'E)$; par suite l'axiome (D) est vérifié.

Corollaire. — $\mathfrak{J}(\mathcal{S})$ *est une extension inessentielle* $(\sigma; \mathfrak{J}(\mathcal{S}))$ *de* $\overline{\mathcal{S}}$, *où* σ *est un foncteur de* $\mathfrak{J}(\mathcal{S})$ *vers* $\overline{\mathcal{S}}$ *compatible avec la pseudomultiplication et l'intersection*; $\overline{\mathcal{S}}$ *est un groupoïde quotient de* $\mathfrak{J}(\mathcal{S})$ (définitions 5-1, III [1] et 10-2, I [1]).

En effet, soit σ l'application qui associe à $F \in \mathfrak{J}(\mathcal{S})$ la sous-classe complète $\overline{F}$ engendrée par F dans $\mathcal{S}$. Si $G \in \mathfrak{J}(\mathcal{S})$, les classes $\sigma(\mathrm{GF})$ et $\sigma(\mathrm{G})\sigma(\mathrm{F})$ admettent pour base la classe des éléments $e'gfe$, où $e \in \mathcal{S}_0$, $e' \in \mathcal{S}_0$, $g \in \mathrm{G}$ et $f \in \mathrm{F}$; donc $\sigma(\mathrm{GF}) = \sigma(\mathrm{G})\sigma(\mathrm{F})$. La classe $\sigma(\mathrm{G} \cap \mathrm{F})$ admet pour base la classe des éléments $(g \cap f)e$ et la classe $\sigma(\mathrm{G}) \cap \sigma(\mathrm{F})$ admet pour base la classe des éléments

$$(ge \cap fe') = (g \cap f)ee', \qquad \text{d'où} \qquad \sigma(\mathrm{G} \cap \mathrm{F}) = \sigma(\mathrm{G}) \cap \sigma(\mathrm{F}).$$

L'injection canonique i de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{J}(\mathcal{S})$ est un foncteur section relativement à σ (définition 2-2, I [1]) et $\overline{\mathcal{S}}$ est un groupoïde quotient de $\mathcal{J}(\mathcal{S})$ d'après la proposition 10-1, I [1].

DÉFINITION 2. — *Un groupoïde inductif $\mathcal{S}$ est dit* (relativement) complet *si toute sous-classe complète* F *de $\mathcal{S}$* (*telle que* $\bigcup \alpha(\mathrm{F})$ *et* $\bigcup \beta(\mathrm{F})$ *existent*) *admet un agrégat dans $\mathcal{S}$.*

Un sous-pseudogroupe d'un groupoïde inductif (relativement) complet est un groupoïde (relativement) complet pour la structure d'ordre induite, mais un sous-pseudogroupe faible peut ne pas être (relativement) complet.

Remarques. — 1) Soit $\mathcal{S}'$ un sous-pseudogroupe faible du pseudogroupe $\mathcal{S}$ tel que $\mathcal{S}'$ contienne l'agrégat de toute sous-classe F de $\mathcal{S}'$ majorée dans $\mathcal{S}$ et telle que $\alpha(\mathrm{F})$ et $\beta(\mathrm{F})$ soient majorés dans $\mathcal{S}'_0$. Cette condition peut être vérifiée sans que $\mathcal{S}'$ soit un sous-pseudogroupe de $\mathcal{S}$.

2) Soit $\mathcal{S}'$ un sous-pseudogroupe faible de $\mathcal{S}$ tel que toute classe compatible F de $\mathcal{S}'$ pour laquelle $\alpha(\mathrm{F})$ est majoré dans $\mathcal{S}'_0$ admette un agrégat dans $\mathcal{S}$; ceci peut arriver sans que $\mathcal{S}$ ni $\mathcal{S}'$ ne soient relativement complets.

THÉORÈME 2 (*de complétion*). — *Soit $\mathcal{S}$ un groupoïde prélocal. Le groupoïde local $\overline{\mathcal{S}}$ (proposition 2) est complet et caractérisé à une équivalence près par la condition* (C) *suivante* (6) :

(C) *Si Σ est un groupoïde local complet dont $\mathcal{S}$ est une base, l'injection canonique de $\mathcal{S}$ dans Σ étant compatible avec l'agrégation, il existe un foncteur π de $\overline{\mathcal{S}}$ sur Σ dont la restriction à $\mathcal{S}$ est l'identité et qui est compatible avec l'agrégation.*

Démonstration. — Soit B une sous-classe compatible de $\overline{\mathcal{S}}$; la classe des $f \in \mathcal{S}$ tels que $f \in \mathrm{F}$, $\mathrm{F} \in \mathrm{B}$ est compatible dans $\mathcal{S}$

(6) Pour une caractérisation plus canonique de $\overline{\mathcal{S}}$, voir [3].

et la sous-classe complète qu'elle engendre dans $\mathcal{G}$ est l'agrégat de B dans $\overline{\mathcal{G}}$; donc $\overline{\mathcal{G}}$ est complet. Montrons que $\overline{\mathcal{G}}$ est caractérisé par la condition (C). En effet, soit $F \in \overline{\mathcal{G}}$; la sous-classe complète F de $\mathcal{G}$ est une sous-classe compatible dans Σ, car: Soient f et g deux éléments de F; désignons par $f \cap g$ et $f \underset{\Sigma}{\bigcap} g$ leurs intersections dans $\mathcal{G}$ et Σ respectivement. On a

$$f \cap g < f \underset{\Sigma}{\bigcap} g.$$

Puisque $\mathcal{G}$ est une base de Σ, il existe une sous-classe H de de $\mathcal{G}$ telle que $f \underset{\Sigma}{\bigcap} g = \overset{\Sigma}{\bigcup} H$; pour tout $h \in H$, on a $h < f$ et $h < g$, d'où $h < f \cap g$ et $\overset{\Sigma}{\bigcup} H < f \cap g$; il en résulte $f \cap g = f \underset{\Sigma}{\bigcap} g$. Donc la classe F admet un agrégat dans Σ; soit π l'application qui associe à $F \in \overline{\mathcal{G}}$ l'agrégat $\overset{\Sigma}{\bigcup} F$ de la sous-classe F dans Σ. Soit A une sous-classe de $\overline{\mathcal{G}}$ majorée; alors $\cup A$ est la classe complète A′ engendrée dans $\mathcal{G}$ par la classe A″ des éléments f tels que $f \in F$ et $F \in A$. On a:

$$\pi(\cup A) = \overset{\Sigma}{\bigcup} A' = \overset{\Sigma}{\bigcup} A''.$$

Puisque $\pi(F) = \overset{\Sigma}{\bigcup} F$, on trouve:

$$\overset{\Sigma}{\underset{F \in A}{\bigcup}} \pi(F) = \overset{\Sigma}{\underset{F \in A}{\bigcup}} \left(\bigcup F \right) = \overset{\Sigma}{\bigcup} A''.$$

Donc π est compatible avec l'agrégation. — Soit $\overline{\mathcal{G}'}$ un groupoïde local vérifiant la condition (C); il existe aussi un foncteur π' de $\overline{\mathcal{G}'}$ sur $\overline{\mathcal{G}}$ compatible avec l'agrégation et se réduisant à l'identité sur $\mathcal{G}$. Soit $f' \in \overline{\mathcal{G}'}$; on a: $f' = \overset{\overline{\mathcal{G}'}}{\bigcup} F$, où F est une sous-classe de $\mathcal{G}$. Par hypothèse:

$$\pi'(f') = \cup \pi'(F) = \cup F \quad \text{et} \quad \pi(\pi'(f')) = \pi(\cup F) = \overset{\overline{\mathcal{G}'}}{\bigcup} F = f';$$

de même $\pi'\pi =$ identité; donc $\pi' = \pi^{-1}$ et π est une équivalence de $\overline{\mathcal{G}}$ sur $\overline{\mathcal{G}'}$.

Corollaire. — *Il existe un foncteur section φ relativement à π et Σ est un groupoïde quotient de $\overline{\mathcal{G}}$.*

Démonstration. — Soit $f' \in \Sigma$ et soit F′ la sous-classe de $\mathcal{G}$ formée des éléments f tels que $f < f'$ dans Σ. On a $f' = \bigcup^{\Sigma} F'$. La sous-classe F′ est une sous-classe inductive de $\mathcal{G}$ saturée par induction; puisque F′ est majorée dans Σ, elle est compatible dans Σ. A fortiori elle est aussi compatible dans $\mathcal{G}$. Donc F′ est une sous-classe complète de $\mathcal{G}$. Soit φ l'application qui associe $F' \in \overline{\mathcal{G}}$ à $f' \in \Sigma$. Soient $f' \in \Sigma$, $g' \in \Sigma$ et $g'.f'$ défini; posons $G' = \varphi(g')$. $G' \circ F'$ est défini et $G' \circ F' \subset \varphi(g'f')$; un élément de $\mathcal{G}$ majoré dans Σ par $g'.f'$ est de la forme $g.f$; par conséquent $\overline{G'.F'} = \varphi(g'.f')$ et φ est un foncteur de Σ vers $\overline{\mathcal{G}}$. De plus pour tout $f' \in \Sigma$, on a : $\pi(\varphi(f')) = \pi(F') = \bigcup^{\Sigma} F' = f'$, ce qui montre que φ est un foncteur section relativement à π et, d'après la proposition 10-1, I [1], que Σ est un groupoïde quotient de $\overline{\mathcal{G}}$. Remarquons que φ est compatible avec l'ordre dans Σ et $\overline{\mathcal{G}}$ mais non avec l'agrégation.

Théorème 3. — *Soit $\mathcal{G}$ un groupoïde prélocal et soit $\check{\mathcal{G}}$ le sous-pseudogroupe faible de $\overline{\mathcal{G}}$ engendré par $\mathcal{G}$ dans le pseudogroupe $\overline{\mathcal{G}}$ du théorème 2; alors $\check{\mathcal{G}}$ est un groupoïde local caractérisé à une équivalence près par la condition* ($\check{\mathrm{C}}$) *suivante:*

($\check{\mathrm{C}}$) *Si $\check{\Sigma}$ est un groupoïde local contenant $\mathcal{G}$ et tel que le sous-pseudogroupe faible engendré par $\mathcal{G}$ dans $\check{\Sigma}$ soit $\check{\Sigma}$, l'injection canonique de $\mathcal{G}$ dans $\check{\Sigma}$ étant compatible avec l'agrégation, alors il existe un foncteur $\check{\pi}$ de $\check{\mathcal{G}}$ sur $\check{\Sigma}$ dont la restriction à $\mathcal{G}$ est l'identité et tel que, pour toute sous-classe* B *de $\check{\mathcal{G}}$ admettant un agrégat dans $\check{\mathcal{G}}$, on ait*: $\check{\pi}(\bigcup B) = \bigcup^{\vee}(B)$.

Démonstration. — $\check{\mathcal{G}}$ est le sous-groupoïde de $\overline{\mathcal{G}}$ formé des sous-classes complètes de $\mathcal{G}$ majorées dans $\mathcal{G}$. Soit $\check{\Sigma}$ un groupoïde local vérifiant ($\check{\mathrm{C}}$) et soit Σ le groupoïde obtenu par complétion de $\check{\Sigma}$; d'après le théorème 2, Σ contient $\check{\Sigma}$ comme sous-pseudogroupe faible et il existe un foncteur π de $\overline{\mathcal{G}}$ sur Σ. Soit $\check{\pi}$ la restriction de π à $\check{\mathcal{G}}$; si $F \in \check{\mathcal{G}}$, alors $\pi(F)$

est l'agrégat dans Σ de la sous-classe F de $\mathcal{G}$ majorée par $f \in \mathcal{G}$, donc appartient au sous-pseudogroupe faible $\check{\Sigma}$ de Σ et $\check{\pi}(\check{\mathcal{G}}) \subset \check{\Sigma}$. La fin de la démonstration du théorème 2 et celle de son corollaire s'appliquent en remplaçant π par $\check{\pi}$, Σ par $\check{\Sigma}$ et $\overline{\mathcal{G}}$ par $\check{\mathcal{G}}$. Par suite :

Corollaire 1. — *Si $\mathcal{G}$ est un groupoïde local, alors $\check{\mathcal{G}}$ s'identifie à $\mathcal{G}$.*

Corollaire 2. — *Il existe un foncteur $\check{\varphi}$ section relativement à $\check{\pi}$ et $\check{\Sigma}$ est un groupoïde quotient de $\check{\mathcal{G}}$.*

Théorème 4. — *Soit $\mathcal{G}$ un groupoïde local et soit $\hat{\mathcal{G}}$ le sous-groupoïde plein de $\overline{\mathcal{G}}$ ayant $\mathcal{G}_0$ comme classe des unités; alors $\hat{\mathcal{G}}$ est un groupoïde local relativement complet caractérisé à une équivalence près par la condition $(\hat{C})$ suivante :*

$(\hat{C})$ *Si $\hat{\Sigma}$ est un groupoïde local relativement complet contenant $\mathcal{G}$ comme base et tel que $\hat{\Sigma}_0$ soit identique à $\mathcal{G}_0$, alors il existe un foncteur $\hat{\pi}$ de $\hat{\mathcal{G}}$ sur $\hat{\Sigma}$ dont la restriction à $\mathcal{G}$ est l'identité et qui est compatible avec l'agrégation.*

Démonstration. — $\hat{\mathcal{G}}$ étant saturé par induction est un sous-pseudogroupe faible de $\overline{\mathcal{G}}$. Si $\hat{A}$ est une sous-classe compatible de $\hat{\mathcal{G}}$ dont les classes d'unités à droite et à gauche sont majorées dans $\hat{\mathcal{G}}_0 = \mathcal{G}_0$, alors la sous-classe complète $\overline{A}$ engendrée par la classe A des éléments f de $\mathcal{G}$ tels que $f \in F$ et $F \in \hat{A}$ est telle que $\alpha(\overline{A})$ et $\beta(\overline{A})$ soient des sous-classes majorées dans $\mathcal{G}_0$; donc $\overline{\alpha}(\overline{A}) \in \mathcal{G}_0$, $\overline{\beta}(\overline{A}) \in \mathcal{G}_0$, $\overline{A}$ appartient à $\hat{\mathcal{G}}$ et l'agrégat de $\hat{A}$ dans $\hat{\mathcal{G}}$ est $\overline{A}$. Ainsi $\hat{\mathcal{G}}$ est un groupoïde local relativement complet. Si $\hat{\Sigma}$ est un groupoïde relativement complet contenant $\mathcal{G}$ comme base et tel que $\hat{\Sigma}_0$ soit égal à $\mathcal{G}_0$, on peut compléter $\hat{\Sigma}$ en un groupoïde local complet Σ et $\hat{\pi}$ est la restriction à $\hat{\mathcal{G}}$ du foncteur π de $\overline{\mathcal{G}}$ sur Σ; on a $\hat{\pi}(\hat{\mathcal{G}}) = \hat{\Sigma}$. La démonstration se termine comme celle du théorème 2.

Corollaire 1. — *Si $\mathcal{G}$ est complet, on a $\hat{\mathcal{G}} = \mathcal{G}$.*

Corollaire 2. — *Il existe un foncteur $\hat{\varphi}$ section relativement à $\hat{\pi}$ et $\hat{\Sigma}$ est un groupoïde quotient de $\hat{\mathcal{G}}$.*

Proposition 3. — *Soit* $\mathscr{G}$ *un groupoïde local et soit* $\tilde{\mathscr{G}}$ *la composante de* $\mathscr{G}$ *dans* $\overline{\mathscr{G}}$; *alors* $\tilde{\mathscr{G}}$ *est un élargissement de* $\overline{\mathscr{G}}$ *et un sous-pseudogroupe faible de* $\overline{\mathscr{G}}$ *saturé par induction; de plus toute sous-classe compatible* F *de* $\mathscr{G}$ *telle que* $\alpha(F)$ *ou* $\beta(F)$ *admette un agrégat dans* $\mathscr{G}$ *admet un agrégat dans* $\tilde{\mathscr{G}}$.

Démonstration. — $\tilde{\mathscr{G}}$ est le sous-groupoïde de $\overline{\mathscr{G}}$ engendré par la classe des éléments F de $\overline{\mathscr{G}}$ tels que $\overline{\alpha}(F)$ appartienne à $\mathscr{G}_0$. Alors $\tilde{\mathscr{G}}_0$ est formé des sous-classes complètes E′ de $\mathscr{G}_0$ telles qu'il existe $F' \in \overline{\mathscr{G}}$ avec $\overline{\alpha}(F') \in \mathscr{G}_0$ et $\overline{\beta}(F') = E'$. Pour tout $E \in \overline{\mathscr{G}}_0$, on a $\overline{\beta}(\overline{EF'}) = \overline{E\beta(F')} = \overline{EE'}$ et $\overline{\alpha}(\overline{EF'}) < \overline{\alpha}(F')$, d'où $\overline{\alpha}(\overline{EF'}) \in \mathscr{G}_0$, $\overline{EF'} \in \tilde{\mathscr{G}}$ et $\overline{EE'} \in \tilde{\mathscr{G}}_0$. Ainsi $\tilde{\mathscr{G}}_0$ est saturé par induction. Puisque $\tilde{\mathscr{G}}$ est plein dans $\overline{\mathscr{G}}$, il est saturé par induction dans $\overline{\mathscr{G}}$. Donc $\tilde{\mathscr{G}}$ est un sous-pseudogroupe faible de $\overline{\mathscr{G}}$ contenant $\mathscr{G}$ comme sous-pseudogroupe faible. Toute sous-classe compatible F de $\mathscr{G}$ telle que $\alpha(F)$ ou $\beta(F)$ admette un agrégat dans $\mathscr{G}_0$ admet $\overline{F} \in \tilde{\mathscr{G}}$ comme agrégat, où $\overline{F}$ est la sous-classe complète de $\mathscr{G}$ engendrée par F.

Définition 3. — *Une sous-classe complète* F *d'un groupoïde local* $\mathscr{G}$ *est dite* réductible *s'il existe deux sous-classes complètes* F_1 *et* F_2 *strictement contenues dans* F *et dont l'agrégat dans* $\overline{\mathscr{G}}$ *est* F. *Une classe qui n'est pas réductible est dite* irréductible.

Pour qu'une sous-classe F de $\mathscr{G}$ soit irréductible, il faut et il suffit que, quelles que soient les deux sous-classes complètes F_1 et F_2 strictement contenues dans F, la sous-classe complète engendrée par la classe réunion de F_1 et F_2 soit strictement contenue dans F.

Proposition 4. — *Soit* $\mathscr{G}$ *un groupoïde local. La classe des sous-classes complètes irréductibles de* $\mathscr{G}$ *forme un sous-groupoïde* $\mathring{\mathscr{G}}$ *plein saturé de* $\overline{\mathscr{G}}$.

Démonstration. — Soit F une sous-classe irréductible de $\mathscr{G}$ et soient E_1 et E_2 deux sous-classes complètes strictement contenues dans $\overline{\alpha}(F)$. Soit $F_1 = FE_1$ la sous-classe de F ayant pour éléments les f tels que $\alpha(f) \in E_1$; cette sous-classe est une sous-classe complète de F; en effet, F_1 est saturé par induction; d'autre part, si F′ est une sous-classe de F_1 admettant un agrégat, on a $\alpha(\bigcup F') = \bigcup\alpha(F') \in E_1$, d'où $\bigcup F' \in F_1$. De même la sous-classe $F_2 = FE_2$ est une sous-classe complète. Supposons que l'on ait $E_1 \cup E_2 = \overline{\alpha}(F)$. Alors pour tout $f \in F$ on a $\alpha(f) = (\bigcup E'_1) \cup (\bigcup E'_2)$, où E'_1 et E'_2 sont des sous-classes de E_1 et E_2 respectivement. C'est-à-dire $\alpha(f) = e_1 \cup e_2$, où $e_i = \bigcup E'_i \in E_i$, $i = 1, 2$. Donc $f = fe_1 \cup fe_2$ et par suite $F = F_1 \cup F_2$ dans $\overline{\mathcal{G}}$, ce qui est contraire à l'irréductibilité de F. Ainsi $\overline{\alpha}(F)$ et $\overline{\beta}(F)$ sont irréductibles. Inversement si F est réductible, il existe deux sous-classes complètes F_1 et F_2 strictement contenues dans F et telles que, dans $\overline{\mathcal{G}}$, on ait $F_1 \cup F_2 = F$; comme $\overline{\alpha}(F_1) \cup \overline{\alpha}(F_2) = \overline{\alpha}(F)$ et comme $\overline{\alpha}(F_1)$ et $\overline{\alpha}(F_2)$ sont strictement contenues dans $\overline{\alpha}(F)$, la classe $\overline{\alpha}(F)$ est rédutible. Donc $\mathring{\mathcal{G}}$ est un sous-groupoïde plein saturé dans $\overline{\mathcal{G}}$.

Remarques. — 1) Pour que $f \in \mathcal{G}$ appartienne à $\mathring{\mathcal{G}}$, il faut et il suffit que la sous-classe $f^{>}$ soit irréductible; puisque toute sous-classe complète contenue dans $f^{>}$ appartient à $\mathcal{G}$, $f^{>}$ est réductible si, et seulement si, f est l'agrégat d'un ensemble fini d'éléments de $\mathcal{G}$.

2) En général $\mathring{\mathcal{G}}$ n'est pas un sous-pseudogroupe faible de $\overline{\mathcal{G}}$, car la sous-classe complète engendrée par une réunion de sous-classes irréductibles contenues dans une classe irréductible n'est pas toujours irréductible.

3) La considération des classes irréductibles conduit à une théorie de la complétion des groupoïdes inductifs analogue à la théorie des « bouts » dans les espaces topologiques.

6. GROUPOIDE DES FILTRES

Soit $\mathcal{A}$ une classe sous-préinductive.

Définition 1. — *On appelle* base de filtre sur $\mathcal{A}$ *une sous-classe non vide* B *de* $\mathcal{A}$ *telle que, pour tout* $b \in B$ *et tout* $b' \in B$, *il existe* $b'' \in B$ *satisfaisant à* : $b'' < b$ *et* $b'' < b'$.

On appelle filtre sur $\mathcal{A}$ *une sous-classe* F *de* $\mathcal{A}$ *qui est une base de filtre et qui, pour tout* $f \in F$, *contient tout majorant de* f *dans* $\mathcal{A}$.

Si un filtre sur $\mathcal{A}$ contient le 0 de $\mathcal{A}$, il contient tout élément de $\mathcal{A}$; ce filtre sera appelé *filtre trivial de* $\mathcal{A}$.

Soit F un filtre sur $\mathcal{A}$; soient $f \in$ F et $f' \in$ F deux éléments tels que $f \cap f'$ soit défini; comme il existe $f'' \in$ F tel que $f'' < f$ et $f'' < f'$, on a $f'' < f \cap f' \in$ F; par suite la classe obtenue en adjoignant à F le 0 de $\mathcal{A}$, que nous désignerons par F^+, est une sous-classe inductive de $\mathcal{A}$.

Définition 2. — *On appelle* quasi-(base de) filtre sur $\mathcal{A}$ *une sous-classe de* $\mathcal{A}$ *contenant* 0 *et dont la classe des éléments différents de* 0 *est vide ou est un(e base de) filtre sur* $\mathcal{A}$.

Proposition 1. — *Soit* B *une (quasi-)base de filtre sur* $\mathcal{A}$; *la classe* F *ayant pour éléments* (0 *et*) *les majorants des éléments de* B (*différents de* 0) *est un (quasi-)filtre appelé (quasi-)* filtre engendré par B dans $\mathcal{A}$, *ou* (quasi-)filtre de (quasi-) base B.

Proposition 2. — *Soit* B *une quasi-base de filtre sur* $\mathcal{A}$ *qui est une base d'une partie sous-inductive* $\overline{\mathrm{B}}$. *Alors* $\overline{\mathrm{B}}$ *est une quasi-base du quasi-filtre* F *engendré par* B *dans* $\mathcal{A}$.

Remarque. — En général, une quasi-base de filtre n'est pas une base du quasi-filtre correspondant, considéré comme une sous-classe inductive de $\mathcal{A}$. Si F est un quasi-filtre, alors F est une sous-classe inductive dont toute base est une quasi-base de filtre.

Proposition 3. — *Soient* B_i, *où* $i = 1, 2$, *deux quasi-bases de filtres sur* $\mathcal{A}$; *pour que les quasi-filtres engendrés par* B_i *soient identiques, il faut et il suffit que, pour tout* $b_i \in \mathrm{B}_i$, *il existe* $b_j \in \mathrm{B}_j$ *tel que* $b_j < b_i$, $j = 1, 2$, $j \neq i$.

Théorème 1. — *Soit* $\mathcal{G}$ *un groupoïde sous-préinductif; la sous-classe* $\mathcal{K}(\mathcal{G})$ *de* $\mathcal{H}(\mathcal{G})$ (théorème 2-4) *formée des atlas faibles complets qui sont des quasi-bases de filtres sur* $\mathcal{G}$ *est un sous-groupoïde saturé par induction de* $\mathcal{H}(\mathcal{G})$.

Démonstration. — Soit $\mathrm{F} \in \mathcal{K}(\mathcal{G})$, $\mathrm{F} \neq 0$; soient $f \in$ F, $f' \in$ F, $f_1 \in$ F et $f'_1 \in$ F tels que $f^{-1}f'$ et $f_1^{-1}f'_1$ soient définis. Il existe $f'' \in$ F, $f'' \neq 0$ tel que $f'' < f$; $f'' < f'$; $f'' < f_1$ et $f'' < f'_1$; par suite :

$$\alpha(f'') = f''^{-1}.f'' < f^{-1}f' \qquad \text{et} \qquad \alpha(f'') < f_1^{-1}f'_1;$$

ainsi $a(\mathrm{F})$ est une quasi-base de filtre. — Supposons $\mathrm{G} \in \mathcal{K}(\mathcal{G})$, $a(\mathrm{G}) = b(\mathrm{F})$, et montrons que $\mathrm{G}.\mathrm{F}$ est une quasi-base de filtre; soient $g \in \mathrm{G}$ et $g' \in \mathrm{G}$ tels que $g.f$ et $g'.f'$ soient définis; il existe $g'' \in \mathrm{G}$ tel que $g'' \neq 0$, $g'' < g$ et $g'' < g'$; comme $a(\mathrm{G})$ est une quasi-base de filtre, il existe $e \in a(\mathrm{G})$ tel que $e \neq 0$, $e < \alpha(g'')$ et $e < \beta(f'')$; donc :

$$(g''e).(ef'') \in (\mathrm{G}a(\mathrm{G})).(a(\mathrm{G})\mathrm{F}) = \mathrm{G}.\mathrm{F},$$

et $(g''e).(ef'')$ est un minorant de $g.f$ et de $g'.f'$; ainsi $\mathrm{G}.\mathrm{F} \in \mathcal{K}(\mathcal{G})$. Il en résulte que $\mathcal{K}(\mathcal{G})$ est un sous-groupoïde de $\mathcal{H}(\mathcal{G})$, car $\mathrm{F}^{-1} \in \mathcal{K}(\mathcal{G})$. — Soient $\mathrm{F} \in \mathcal{K}(\mathcal{G})$ et $\mathrm{F}' \leqslant \mathrm{F}$ dans $\mathcal{H}(\mathcal{G})$. Si $\mathrm{F}' = 0$, on a $\mathrm{F}' \in \mathcal{K}(\mathcal{G})$. Supposons $\mathrm{F}' \neq 0$; soient $f' \in \mathrm{F}'$ et $f'_1 \in \mathrm{F}'$; comme F' est saturé par induction dans F, il existe $f \in \mathrm{F}'$ tel que $f \neq 0$, $f < f'$ et $f < f'_1$; de la relation :

$$f = f\,\alpha(f') \in \mathrm{F}\alpha(\mathrm{F}') = \mathrm{F}',$$

on déduit que F' est une quasi-base de filtre. Par conséquent $\mathcal{K}(\mathcal{G})$ est saturé par induction dans $\mathcal{H}(\mathcal{G})$.

Théorème 2. — *Soit $\mathcal{G}$ un groupoïde sous-prélocal. La sous-classe $\mathcal{B}(\mathcal{G})$ de $\mathcal{A}(\mathcal{G})$* (théorème 5-4) *formée des atlas complets qui sont des quasi-bases de filtres sur $\mathcal{G}$ est un sous-groupoïde saturé par induction de $\mathcal{A}(\mathcal{G})$.*

Démonstration. — Soit $\mathrm{F} \in \mathcal{B}(\mathcal{G})$. D'après le théorème 1, $a(\mathrm{F})$ est une quasi-base de filtre, donc $\bar{a}(\mathrm{F})$ est aussi une quasi-base de filtre, en vertu de la proposition 2. Si $\mathrm{G} \in \mathcal{B}(\mathcal{G})$ et $\bar{a}(\mathrm{G}) = \bar{b}(\mathrm{F})$, comme $\mathrm{G} \odot \mathrm{F}$ admet pour base $\mathrm{G}.\mathrm{F}$, une démonstration analogue à celle du théorème 1 montre que $\mathrm{G} \odot \mathrm{F} \in \mathcal{B}(\mathcal{G})$; par suite $\mathcal{B}(\mathcal{G})$ est un sous-groupoïde de $\mathcal{A}(\mathcal{G})$. De plus $\mathcal{B}(\mathcal{G})$ est saturé par induction dans $\mathcal{A}(\mathcal{G})$, car $\mathrm{F}' \leqslant \mathrm{F}$ dans $\mathcal{A}(\mathcal{G})$ entraîne $\mathrm{F}' \leqslant \mathrm{F}$ dans $\mathcal{H}(\mathcal{G})$, d'après le théorème 5-4, d'où $\mathrm{F}' \in \mathcal{B}(\mathcal{G})$ à l'aide du théorème 1.

Proposition 4. — *Un quasi-filtre sur un groupoïde sous-préinductif $\mathcal{G}$ est un atlas complet de $\mathcal{G}$.*

En effet, soit F un quasi-filtre; alors F est $\overline{\bigcup}$-saturé; si f, f' et f'' sont trois éléments de F tels que $f''(f^{-1}f')$ soit défini, il existe un $f_1 \in \mathrm{F}$, $f_1 \neq 0$, $f_1 < f$, $f_1 < f'$ et $f_1 < f''$. Puisque :

$$f_1 = f_1(f_1^{-1}f_1) < f''(f^{-1}f'),$$

on a $f''(f^{-1}f') \in \mathrm{F}$, d'où $\mathrm{F}a(\mathrm{F}) = \mathrm{F}$ et F est un atlas complet de $\mathcal{G}$.

Proposition 5. — *Soit* F *un filtre sur le groupoïde sous-préinductif* $\mathcal{G}$; $\alpha(\mathrm{F})$ *et* $\beta(\mathrm{F})$ *sont des bases de filtres* $\alpha^*(\mathrm{F})$ *et* $\beta^*(\mathrm{F})$. *Si* G *est un filtre sur* $\mathcal{G}$ *tel que* $\alpha^*(\mathrm{G}) = \beta^*(\mathrm{F})$, *la classe* $\mathrm{GF} = \mathrm{G}.\mathrm{F}$ *est base d'un filtre* $\mathrm{G}*\mathrm{F}$ *pour lequel on a :*

$$\alpha^*(\mathrm{G} * \mathrm{F}) = \alpha^*(\mathrm{F}) \qquad \textit{et} \qquad \beta^*(\mathrm{G} * \mathrm{F}) = \beta^*(\mathrm{G}).$$

Démonstration. — Soit F un filtre non trivial sur $\mathcal{G}$ (sinon $\alpha^*(\mathrm{F})$ et $\beta^*(\mathrm{F})$ sont identiques au filtre trivial) et F^+ le quasi-filtre correspondant. D'après la démonstration du théorème 1, $a(\mathrm{F}^+)$ est une quasi-base de filtre, engendrant un quasi-filtre dont $\alpha(\mathrm{F}^+)$ est aussi une quasi-base de filtre. Donc $\alpha(\mathrm{F})$ est une base de filtre et le filtre $\alpha^*(\mathrm{F})$ engendré par $\alpha(\mathrm{F})$ admet aussi $\overline{\mathrm{F}^{-1}\mathrm{F}}$ pour base. De plus, pour tout $h \in \alpha^*(\mathrm{F})$ et tout $f \in \mathrm{F}$, il existe $e \in \alpha^*(\mathrm{F})$ tel que $e < \alpha(f)$ et $e < h$; la relation $fe < fh$ entraîne $fh \in \mathrm{F}$, d'où $\mathrm{F}\alpha^*(\mathrm{F}) = \mathrm{F}$. — Supposons $\alpha^*(\mathrm{G}) = \beta^*(\mathrm{F})$; soient $f \in \mathrm{F}$, $f' \in \mathrm{F}$, $g \in \mathrm{G}$ et $g' \in \mathrm{G}$ tels que $g'f'$ et gf soient définis; il existe $f'' \in \mathrm{F}$ tel que $f'' \neq 0$, $f'' < f$, $f'' < f'$, et $g'' \in \mathrm{G}$ tel que $g'' \neq 0$, $g'' < g$ et $g'' < g'$; puisque $\alpha(\mathrm{G})$ est une base de filtre, il existe $e' \in \alpha^*(\mathrm{G})$ vérifiant les conditions : $e' < \alpha(g'')$ et $e' < \beta(f'')$, et, si G n'est pas le filtre trivial, $e' \neq 0$. Des relations :

$$(g''e').(e'f'') < gf; \qquad (g''e').(e'f'') < g'f'$$

et

$$(g''e').(e'f'') \in (\mathrm{G}\alpha^*(\mathrm{G})).(\beta^*(\mathrm{F})\mathrm{F}) = \mathrm{G}.\mathrm{F},$$

on déduit que GF est une base d'un filtre $\mathrm{G} * \mathrm{F}$; de plus on a : $gf = g_1 . f_1$, $g''e' < g_1$ et $e'f'' < f_1$, d'où $g_1 \in \mathrm{G}$, $f_1 \in \mathrm{F}$ et $\mathrm{GF} = \mathrm{G}.\mathrm{F}$. Enfin $\alpha^*(\mathrm{G} * \mathrm{F})$ admettant $\alpha(\mathrm{G}.\mathrm{F})$ et $\alpha(\mathrm{F})$ pour bases, il est identique à $\alpha^*(\mathrm{F})$.

Théorème 3. — *Soit* $\mathcal{G}$ *un groupoïde sous-préinductif. La classe* $\mathcal{F}(\mathcal{G})$ *des filtres sur* $\mathcal{G}$ *est un groupoïde sous-inductif pour la loi de composition définie par :*
$(\mathrm{G}, \mathrm{F}) \rightarrow \mathrm{G} * \mathrm{F}$ *si, et seulement si,* $\alpha^*(\mathrm{G}) = \beta^*(\mathrm{F})$ (prop. 5) *et la relation d'ordre :*

$$\mathrm{F}' < \mathrm{F} \qquad \textit{si, et seulement si,} \qquad \mathrm{F} \subset \mathrm{F}'.$$

Démonstration. — *Soit* $F \in \mathcal{F}(\mathcal{G})$. Alors F admet $\alpha^*(F)$ $\beta^*(F)$ pour seules unités à droite et à gauche resp. Si $H * (G * F)$ est défini dans $\mathcal{F}(\mathcal{G})$, il est engendré par la base de filtre $H.(G.F)$ d'après la proposition 5; comme $H.(G.F) = (H.G).F$, le filtre $(H * G) * F$, qui admet $(H.G).F$ pour base, est identique à $H * (G * F)$. Ainsi la loi de composition $*$ est associative. La classe F^{-1} est un filtre et on a : $F^{-1} * F = \alpha^*(F)$ et $F * F^{-1} = \beta^*(F)$. Donc $\mathcal{F}(\mathcal{G})$ est un groupoïde. Soit H un filtre admettant une base E formée d'unités. Le filtre $\alpha^*(H)$ admet $\alpha(H)$, et par suite E, pour base, d'où $\alpha^*(H) = H$. Ceci prouve que la classe des unités de $\mathcal{F}(\mathcal{G})$ est la classe des filtres admettant une base formée d'unités.

— Soit $H \in \mathcal{F}(\mathcal{G})_0$; soit E une base de H formée d'unités et soit $F' < H$; pour tout $f' \in F'$ et tout $e \in E$, il existe $e' \in F'$ tel que $e' < e$ et $e' < f'$; on en déduit $e' \in \alpha(F')$ et $\alpha^*(F') = F' \in \mathcal{F}(\mathcal{G})_0$. Supposons $H < \alpha^*(F)$; si $f \in F$, $f_1 \in F$, $e \in E$ et $e_1 \in E$, il existe $e' \in E$ tel que $e' < e$, $e' < e_1$, et $f_2 \in F$ tel que $f_2 < f$, $f_2 < f_1$; si H n'est pas trivial, il existe $e'' \in E$ tel que $e'' \neq 0$, $e'' < e'$ et $e'' < \alpha(f_2)$; si fe et $f_1 e_1$ sont définis, les relations :

$$f_2 e'' < f_1 e_1 ; \qquad f_2 e'' < fe \qquad \text{et} \qquad f_2 e'' \in FE$$

entraînent que FE est base d'un filtre $(FE)^* < F$. On a $\alpha(FE) \subset \alpha(F)E \subset H$. Inversement soit $h \in H$ et $f \in F$; il existe $e \in E$ tel que $e < h$, $e < \alpha(f)$ et on trouve $fe \in FE$ et $\alpha(fe) < h$, d'où $h \in \alpha^*(FE)^*$ et $H \subset \alpha^*(FE)^*$. Ainsi $\alpha^*(FE)^* = H$.

— Supposons $G * F$ et $G' * F'$ définis, $G' < G$ et $F' < F$; comme $G * F$ admet $G.F \subset G'.F'$ pour base, $G * F$ est contenu dans $G' * F'$. Inversement si $K < G * F$, posons :

$$F' = (F\alpha(K))^* < F \qquad \text{et} \qquad G' = (G\beta(F'))^* < G;$$

d'après ce qui précède, on a $G' * F' < G * F$ et $\alpha^*(G' * F') = \alpha^*(K)$; montrons que $G' * F'$ admet $(G.F)\alpha(K)$ pour base; en effet soit $h \in G' * F'$; pour tout $g.f \in G.F$, il existe $h' \in G' * F'$ tel que $h' < g.f$ et $h' < h$; comme $\alpha(K)$ est une base de $\alpha^*(K)$, il existe $e \in \alpha(K)$ avec $e < \alpha(h')$ et on a :

$$h'e < h, \qquad h'e \in G' * F' \qquad \text{et} \qquad h'e = (g.f)e \in (G.F)\alpha(K).$$

Ainsi $(G.F)\alpha(K) \subset K$ est une base de $G' * F'$. Par ailleurs $G.F \subset K$ et, pour tout $k \in K$, il existe $k' \in K$, $k' < k$ et $k' < g.f$;

il en résulte : $k' = (g.f)\alpha(k') \in (G.F)\alpha(K)$ et $(G.F)\alpha(K)$ est aussi une base de K. Donc $K = G' * F'$ et $\mathcal{F}(\mathcal{G})$ vérifie l'axiome (I).

— Soit A une classe de filtres F_i, où $i \in I$, majorée par $F \in \mathcal{F}(\mathcal{G})$; soit M la classe des éléments $\bigcap_{i \in I_0} f_i$, où $f_i \in F_i$ et où I_0 est une sous-classe finie de I ; soient $\bigcap_{i \in I_0} f_i \in M$ et $\bigcap_{i \in I'_0} f'_i \in M$. Pour tout $f \in F$ et tout i appartenant à la classe réunion I''_0 de I_0 et de I'_0, il existe $f''_i \in F_i$ tel que $f''_i < f_i$, $f''_i < f'_i$ et $f''_i < f$; par suite $\bigcap_{i \in I''_0} f''_i$ est défini et on a $\bigcap_{i \in I''_0} f''_i \in M$; donc M est une base de filtre. Soit $M^\star$ le filtre engendré par M ; ce filtre contient F_i pour tout $i \in I$ et, si N est un filtre contenant tout F_i, N contient aussi M, puisque N est saturé par intersection finie. Donc $M^\star$ est l'intersection de A dans $\mathcal{F}(\mathcal{G})$. Remarquons que $M^\star$ peut évidemment être le filtre trivial de $\mathcal{G}$, lequel est l'élément 0 de $\mathcal{F}(\mathcal{G})$.

Corollaire. — *$\mathcal{G}$ s'identifie à un sous-groupoïde plein saturé $\overset{+}{\mathcal{G}}$ de $\mathcal{F}(\mathcal{G})$, saturé par intersection finie, en identifiant $f \in \mathcal{G}$ au filtre $f^<$ des majorants de f dans $\mathcal{G}$. Si $\mathcal{G}$ est sous-inductif, $\overset{+}{\mathcal{G}}$ est un sous-pseudogroupe de $\mathcal{F}(\mathcal{G})$.*

Démonstration. — Soient $F \in \mathcal{F}(\mathcal{G})$ et $\alpha^\star(F) = e^<$, où $e \in \mathcal{G}_0$; puisque $\alpha(F)$ est une base de $\alpha^\star(F)$, il existe $f \in F$ avec $\alpha(f) = e$; pour tout $g \in F$, il existe $f' \in F$ tel que $f' < g$, $f' < f$ et $e < \alpha(f')$; par suite $\alpha(f') = e$, $f' = f < g$ et $F = f^<$. Ainsi $\overset{+}{\mathcal{G}}$ est un sous-groupoïde saturé de $\mathcal{F}(\mathcal{G})$. — Pour que l'on ait $g^< < f^<$ dans $\mathcal{F}(\mathcal{G})$, il faut et il suffit que l'on ait $g < f$ dans $\mathcal{G}$; donc $\mathcal{G}$ est isomorphe à $\overset{+}{\mathcal{G}}$ et peut lui être identifié. Si $f^< \in \overset{+}{\mathcal{G}}$ et $g^< \in \overset{+}{\mathcal{G}}$, on a : $g^< \cap f^< = (g \cap f)^<$. — Si $\mathcal{G}$ est sous-inductif, soit A une sous-classe de $\overset{+}{\mathcal{G}}$ admettant un sous-agrégat F dans $\mathcal{F}(\mathcal{G})$; tout élément f de F appartient à $h^< \in A$; donc la classe A' des h tels que $h^< \in A$ est majorée par $f \in F$ et admet un f-agrégat $g(f)$ dans $\mathcal{G}$. Pour tout $f_1 \in F$, il existe $f'' \in F$ tel que $f'' < f$ et $f'' < f_1$; par suite on a $g(f) = g(f'') = g(f_1)$, d'où $g(f) = g < f$ pour tout $f \in F$, et $g^< < F$. Par ailleurs, comme $h < g$, pour tout $h \in A'$, le filtre $g^<$ est un majorant de A et il existe un $g^<$-agrégat F' de A d'après le théorème 3.

La relation $g^{<} < \mathrm{F}$ entraîne $\mathrm{F}' = \mathrm{F} = g^{<}$. Par conséquent $\overset{+}{\mathcal{G}}$ est un sous-pseudogroupe de $\mathcal{F}(\mathcal{G})$.

Remarque. — En général $\mathcal{F}(\mathcal{G})$ n'est pas un groupoïde inductif.

Si F et G sont deux filtres tels que $\mathrm{G} * \mathrm{F}$ soit défini, $\mathrm{G} \odot \mathrm{F}$ n'est pas toujours défini. Inversement si $\mathrm{G} \odot \mathrm{F}$ est défini, $\mathrm{G} * \mathrm{F}$ est défini, mais peut être différent de $\mathrm{G} \odot \mathrm{F}$.

Théorème 4. — *Soit $\mathcal{G}$ un groupoïde sous-préinductif; $\mathcal{F}(\mathcal{G})$ est un groupoïde quotient de $\mathcal{K}(\mathcal{G})$ relativement au foncteur ψ qui associe à 0 le filtre trivial et à $\mathrm{F} \in \mathcal{K}(\mathcal{G})$, $\mathrm{F} \neq 0$, le filtre $\psi(\mathrm{F})$ tel que $\psi(\mathrm{F})^{+}$ admette F pour quasi-base; de plus $\mathrm{F}' \leqslant \mathrm{F}$ entraîne $\psi(\mathrm{F}) < \psi(\mathrm{F}')$ si $\mathrm{F}' \neq 0$, et $\psi(0) = 0$.*

Démonstration. — Si $\mathrm{F} \in \mathcal{K}(\mathcal{G})$ et si la classe des éléments de F différents de 0 est une base du filtre F′, nous dirons pour simplifier que F est une base de F′. Soient $\mathrm{F} \in \mathcal{K}(\mathcal{G})$ et $\mathrm{G} \in \mathcal{K}(\mathcal{G})$ tels que G.F soit défini; le filtre $\psi(\mathrm{G}.\mathrm{F})$ admet GF pour base; il en est de même pour le filtre $\psi(\mathrm{G}) * \psi(\mathrm{F})$, de sorte que $\psi(\mathrm{G}.\mathrm{F}) = \psi(\mathrm{G}) * \psi(\mathrm{F})$. Soit $\mathrm{H} \in \mathcal{K}(\mathcal{G})_0$; soit $h \in \mathrm{H}$; comme H est un groupoïde, il existe $h' \in \mathrm{H}$ tel que $h' < h$ et $h' < \alpha(h)$, d'où $h' = \alpha(h')$ et $\alpha(\mathrm{H})$ est une base de $\psi(\mathrm{H})$. Par suite $\psi(\mathrm{H})$ est une unité de $\mathcal{F}(\mathcal{G})$ et ψ est un foncteur.

— Soit $\mathrm{F} \in \mathcal{F}(\mathcal{G})$, $\mathrm{F} \neq 0$. Montrons que l'on a $a(\mathrm{F}^{+}) \leqslant \alpha^{*}(\mathrm{F})^{+}$; pour tout $h \in \alpha^{*}(\mathrm{F})$, il existe $e \in \alpha(\mathrm{F})$ tel que $e < h$; on a aussi $e < h^{-1}$, d'où $h^{-1} \in \alpha^{*}(\mathrm{F})$; il en résulte que $\alpha^{*}(\mathrm{F})^{+}$ est un sous-groupoïde de $\mathcal{G}$. On a $a(\mathrm{F}^{+}) \subset \alpha^{*}(\mathrm{F})^{+}$ et $a(\mathrm{F}^{+}) \subset \alpha^{*}(\mathrm{F})^{+}\alpha(\mathrm{F})$; par ailleurs, soient $f \in \mathrm{F}$ et $h \in \alpha^{*}(\mathrm{F})$; si fh^{-1} est défini, les relations : $fh^{-1} \in \mathrm{F}\alpha^{*}(\mathrm{F}) \subset \mathrm{F}$ et

$$h\alpha(f) = h(f^{-1}.f) = (fh^{-1})^{-1}f \in \mathrm{F}^{-1}\mathrm{F} = a(\mathrm{F})$$

entraînent : $\alpha^{*}(\mathrm{F})\alpha(\mathrm{F}) \subset a(\mathrm{F})$; on en déduit :

$$a(\mathrm{F}^{+}) = \alpha^{*}(\mathrm{F})^{+}\alpha(\mathrm{F}^{+}) \quad \text{et} \quad a(\mathrm{F}^{+}) \leqslant \alpha^{*}(\mathrm{F})^{+} \quad \text{dans} \quad \mathcal{K}(\mathcal{G}).$$

De même $b(\mathrm{F}^{+}) \leqslant \beta^{*}(\mathrm{F})^{+}$ dans $\mathcal{K}(\mathcal{G})$.

— Soient F′ et G′ deux filtres tels que $\alpha^{*}(\mathrm{G}') = \beta^{*}(\mathrm{F}') \neq 0$; d'après ce qui précède, $a(\mathrm{G}'^{+})$ et $b(\mathrm{F}'^{+})$ sont majorés par $\alpha^{*}(\mathrm{G}')^{+}$ dans $\mathcal{K}(\mathcal{G})$. Soit K l'intersection de $a(\mathrm{G}'^{+})$ et $b(\mathrm{F}'^{+})$ dans $\mathcal{K}(\mathcal{G})$, qui existe d'après le théorème 5-4; soit $g \in \mathrm{G}'$; puisque K est contenu dans $a(\mathrm{G}'^{+})$ et que $a(\mathrm{G}')$ et $\alpha(\mathrm{G}')$ sont des bases de $\alpha^*(G')$, pour tout $k \in K$ il existe $g' \in G'$ tel que $\alpha(g') < k$ et $\alpha(g') < \alpha(g)$. Puisque K est saturé par induction dans $a(G'^+)$, on a $\alpha(g') \in K$. Donc K est une base de $\alpha^*(G')$ et, de même, de $\beta^*(F')$. Posons $F'' = KF'^+$ et $G'' = G'^+K$; d'après le théorème 5-4, on a

$$F'' \leqslant F'^+,\ G'' \leqslant G'^+ \text{ et } b(F'') = a(G'') = K;$$

en vertu du théorème 1, F'' et G'' sont des quasi-bases de filtres; le filtre $\psi(G'')$ admettant $G'K$ pour base, il est identique à G'; de même $\psi(F'') = F'$ et :

$$\psi(G''.F'') = G' * F'.$$

Ceci prouve ([3], [4]) que $\mathcal{F}(\mathcal{G})$ est un groupoïde quotient de $\mathcal{K}(\mathcal{G})$.

Théorème 5. — *Soit $\mathcal{G}$ un groupoïde sous-prélocal; $\mathcal{F}(\mathcal{G})$ est un groupoïde quotient de $\mathcal{B}(\mathcal{G})$ relativement à la restriction de ψ à $\mathcal{B}(\mathcal{G})$* (théorèmes 4 et 3).

Une démonstration analogue à celle du théorème 4 montre que la restriction ψ' de ψ à $\mathcal{B}(\mathcal{G})$ est un foncteur de $\mathcal{B}(\mathcal{G})$ sur $\mathcal{F}(\mathcal{G})$ et que, si $F \in \mathcal{B}(\mathcal{G})$, on a $\bar{a}(F) \leqslant \alpha^*(F)^+$ et $\bar{b}(F) \leqslant \beta^*(F)^+$. Supposons $G' * F'$ défini; soit K l'intersection de $\bar{a}(G')$ et de $\bar{b}(F')$ dans $\mathcal{B}(\mathcal{G})$; on montre comme dans la démonstration du théorème 4 que K est une base du filtre $\alpha^*(G')$; de plus $F'' = \overline{KF'}$ et $G'' = \overline{G'K}$ appartiennent à $\mathcal{B}(\mathcal{G})$ et on a :

$$\psi(G'' \circ F'') = G' * F'.$$

Dans la fin de ce paragraphe, nous supposons que $\mathcal{G}$ est un groupoïde préinductif.

Théorème 6. — *Si $\mathcal{G}$ est un groupoïde préinductif, $\mathcal{F}(\mathcal{G})$ est un groupoïde inductif.*

En effet, si $F_i \in \mathcal{F}(\mathcal{G})$ pour tout $i \in I$ et $F_i < F$ dans $\mathcal{F}(\mathcal{G})$, soit F' la classe intersection des F_i, qui est non vide. Si $f' \in F'$ et $f'' \in F'$, on a $f' \cap f'' \in F_i$ pour tout $i \in I$, d'où $f' \cap f'' \in F'$. Ainsi F est un filtre, qui est l'agrégat de la classe $(F_i)_{i \in I}$ dans $\mathcal{F}(\mathcal{G})$.

Proposition 6. — *La classe $A^>$ des minorants d'une classe A de $\mathcal{G}$ est une sous-classe complète, la classe $A^<$ de ses majorants est un filtre si elle n'est pas vide.*

Remarque. — Si $\mathcal{G}$ est un groupoïde sous-préinductif, la classe des minorants d'un filtre n'est généralement pas une sous-classe complète de $\mathcal{G}$, puisqu'elle n'est pas $\bigcup$-saturée et la classe des majorants d'un complexe peut ne pas être un filtre.

Théorème 7. — *Soit $\mathcal{G}$ un groupoïde prélocal; la classe $\bigcup$-saturée $\mathcal{G}'$ engendrée par $\overset{+}{\mathcal{G}}$* (corollaire théorème 3) *dans $\mathcal{F}(\mathcal{G})$ est le groupoïde plein saturé de $\mathcal{F}(\mathcal{G})$ formé des filtres* F *tels que* $F = (F^{>})^{<}$. *De plus $\mathcal{G}'$ est un groupoïde inductif quotient de $\check{\mathcal{G}}$* (théorème 3-5).

Démonstration. — Comme $\overset{+}{\mathcal{G}}$ est un sous-groupoïde saturé de $\mathcal{F}(\mathcal{G})$, stable pour la pseudomultiplication, $\mathcal{G}'$ est un sous-groupoïde de $\mathcal{F}(\mathcal{G})$ plein et saturé et admettant $\overset{+}{\mathcal{G}}$ pour base; soit B une sous-classe de $\overset{+}{\mathcal{G}}$ admettant un agrégat F dans $\mathcal{F}(\mathcal{G})$. Pour tout $b \in B$, on a $F \subset b^{<}$, c'est-à-dire $b \in F^{>}$; soit $h \in (F^{>})^{<}$; alors $b < h$ et $b^{<} < h^{<}$, d'où $F = \cup B < h^{<}$, $h \in F$ et $(F^{>})^{<} \subset F$. Comme on a évidemment $F \subset (F^{>})^{<}$, il en résulte $F = (F^{>})^{<}$. Inversement, supposons $F \in \mathcal{F}(\mathcal{G})$ et $F = (F^{>})^{<}$; tout élément de l'agrégat H de la classe des fitres $g^{<}$, où $g \in F^{>}$, appartient à $g^{<}$, donc à $(F^{>})^{<} = F$, et $H \subset F$; comme tout élément $f \in F$ majore g, on doit avoir $g^{<} < f^{<}$, ou encore $H < f^{<}$ et $F \subset H$. On en déduit $F = H$ et $F \in \mathcal{G}'$. Tout $F \in \mathcal{G}'$ est majoré par $f^{<} \in \overset{+}{\mathcal{G}}$, où $f \in F$, donc $\overset{+}{\mathcal{G}}$ est une base faible de $\mathcal{G}'$. La démonstration du théorème 3-5 prouve que $\mathcal{G}'$ est un groupoïde quotient de $\check{\mathcal{G}}$ relativement au foncteur $\check{\pi}$ qui associe à $C \in \check{\mathcal{G}}$ le filtre $C^{<}$, qui est l'agrégat dans $\mathcal{F}(\mathcal{G})$ de la classe des $c^{<}$, où $c \in C$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Structures et catégories d'homomorphismes, chap. I, *Sém. Soc. Can. Université de Montréal*, 1961.
[2] Groupoïdes inductifs et structures locales, chap. 2, *Sém. Soc. Can. Un. Montréal*, 1961; également multigraphié à Paris.
[3] Structures quotient, I et II (act. multigraphié), à l'impression dans *Comm. Helv.*
[4] Espèces de structures locales, élargissement de catégories, *Sém. Topologie et Géom. diff.*, (Ehresmann), vol. III, 1961, Paris.
[5] Catégories inductives et pseudogroupes, *Ann. Inst. Fourier*, 1960, X, pp. 307-332.