ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

YVES FÉLIX
JEAN-CLAUDE THOMAS

Homologie des espaces de lacets des espaces de configuration

Annales de l'institut Fourier, tome 44, nº 2 (1994), p. 559-568
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1994__44_2_559_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
44, 2 (1994), 559-568

HOMOLOGIE DES ESPACES DE LACETS DES ESPACES DE CONFIGURATION

par Y. FÉLIX et J.-C. THOMAS

1. Introduction.

Dans tout ce texte, M désigne une variété compacte simplement connexe de dimension n sans bord et $\mathbb{F}_p$ désigne soit le corps fini à p éléments, soit le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels lorsque $p = 0$.

L'espace des configurations de k points de M, $k \geq 1$, est la variété définie par :

$$F(M,k) = \{(x_1, x_2, ..., x_k) \quad \mid \quad x_i \in M\,, x_i \neq x_j \text{ pour } i \neq j\}.$$

Le type d'homotopie des espaces $F(M,k)$ est lié à de nombreux autres invariants homotopiques de M, à la composante de l'identité des groupes $\mathrm{Aut}(M)$ des automorphismes de M et $\mathrm{Diff}(M)$ des difféomorphismes de M ([6]), ainsi qu'à la cohomologie de Gelfand-Fuks de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs ([5]). Ceci motive la recherche d'un maximum d'informations sur l'homotopie et la cohomologie des espaces de configurations.

Que connaissons-nous au juste à propos du type d'homotopie des espaces $F(M,k)$ et de leurs invariants homologiques ? La cohomologie de $F(M,k)$ a été calculée par F. Cohen lorsque $M = \mathbb{R}^n$ ([4]). Avec Taylor, ce dernier a également mis au point une suite spectrale qui converge vers la cohomologie de $F(M,k)$ et dont le terme E_1 est un quotient de l'algèbre $H^*(F(\mathbb{R}^n,k);\mathbb{F}_p) \otimes \left(\otimes^k H^*(M;\mathbb{F}_p)\right)$ ([5]). Lorsque M est une surface, les nombres de Betti de $F(M;k)$ pour $k \leq 3$ ont été déterminés par Brown et White ([3]).

Cette recherche a été rendue possible par un accord de coopération CNRS-CGRI.
Mots-clés : Espace de lacets – Algèbre de Hopf – Séries de Poincaré – Espace de configurations.
Classification A.M.S. : 57R19 – 55P35 – 57N60.

Le groupe de permutations Σ_k agit librement sur $F(M,k)$ et le quotient, l'espace des configurations non ordonnées, se note habituellement $C(M,k)$. Dans un travail récent ([1]), Bödigheimer, Cohen et Taylor indiquent comment calculer les nombres de Betti de $C(M;k)$ en fonction des nombres de Betti de M et de l'homologie des espaces $\Omega^m S^p$.

Désignons par N le complémentaire d'un point dans M. Le groupe $\mathrm{Diff}(M)$ agissant de manière transitive sur M, le type d'homotopie de N ne dépend pas du point choisi. Notre résultat concerne les variétés compactes simplement connexes qui vérifient la condition I_p suivante relative au corps $\mathbb{F}_p$:

$$I_p = \begin{cases} \text{l'inclusion } N \hookrightarrow M \text{ induit un morphisme surjectif} \\ H_*(\Omega N;\mathbb{F}_p) \to H_*(\Omega M;\mathbb{F}_p). \end{cases}$$

Cette condition est souvent réalisée.

THÉORÈME ([15], Th 5.1). — *Toute variété compacte simplement connexe dont la cohomologie rationnelle n'est pas engendrée par un seul générateur vérifie I_0.*

THÉORÈME ([11]). — *Toute variété compacte simplement connexe de dimension n satisfait I_p lorsque p est un nombre premier impair tel que*

(1) *$H^*(M;\mathbb{F}_p)$ n'est pas engendrée comme algèbre par un seul générateur,*

(2) *$p > nm$ où m désigne le nombre minimum de générateurs du groupe abélien gradué $H_*(M;\mathbb{Z})$.*

A ces deux théorèmes nous ajoutons :

PROPOSITION. — *Soit M une variété compacte simplement connexe dont la cohomologie rationnelle est engendrée par au moins deux générateurs. Si pour un sous-anneau R de $\mathbb{Q}$, le R-module $H_*(M;R)$ est libre, alors pour tout nombre premier p non inversible dans R la condition I_p est satisfaite.*

Notons $Q_m = \{q_1, q_2, \ldots, q_m\}$ un ensemble de m points distincts dans M. Le groupe des difféomorphismes de M agit transitivement sur l'ensemble $F(M,k)$. Il s'ensuit que l'espace $F(M - Q_m, k)$ ne dépend pas, à homéomorphisme près, du choix des points formant l'ensemble Q_m. D'autre part, pour $m \geq 2$, l'espace $M - Q_m$ a clairement le type d'homotopie du bouquet de N et de $S(m-1)$ où $S(j)$ désigne un bouquet de j sphères de dimension $n-1$.

Dans ([6]), Fadell and Neuwirth considèrent une suite de fibrations localement triviales :

$$\begin{array}{ccccccccc}
F(N,k-1) & F(M-Q_2,k-2) & \dots & F(M-Q_{i+1},k-i-1) & \dots & M-Q_{k-1} \\
\downarrow & \downarrow & \dots & \downarrow & \dots & \downarrow \\
F(M,k) & F(N,k-1) & \dots & F(M-Q_i,k-i) & \dots & F(M-Q_{k-2},2) \\
\downarrow & \downarrow & \dots & \downarrow & \dots & \downarrow \\
M & N & \dots & M-Q_i & \dots & M-Q_{k-2}
\end{array}$$

Ces fibrations admettent des sections pour $i \geq 1$. De plus, si n est impair, alors elles admettent toutes une section ([6]).

Notre résultat concerne la structure de l'homologie de l'espace des lacets des espaces de configuration. Fixons le corps des coefficients $\mathbb{F}_p$. Si X désigne un espace connexe par arcs, nous notons par $P_X = P_X(t)$ la série de Poincaré de X à coefficients dans le corps $\mathbb{F}_p$: $P_X(t) = \sum_i \dim H_i(X, \mathbb{F}_p)t^i$.

THÉORÈME. — *Soit M une variété compacte simplement connexe de dimension n vérifiant I_p et dont l'espace vectoriel de cohomologie à coefficients dans le corps $\mathbb{F}_p$ est au moins de dimension trois. Alors,*

1) *pour tout $k \geq 2$, on a une suite exacte d'algèbres de Hopf*

$$\mathbb{F}_p \to H_*(\Omega F(N,k-1);\mathbb{F}_p) \to H_*(\Omega F(M,k);\mathbb{F}_p) \to H_*(\Omega M;\mathbb{F}_p) \to \mathbb{F}_p.$$

2) *La série de Poincaré de l'espace $\Omega F(M;k)$ est donnée par*

$$P_{\Omega F(M,k)} = \frac{{P_{\Omega M}}^k}{\prod_{i=2}^k (1 + (k-i-1)t^{n-2}P_{\Omega M})}.$$

Rappellons que pour les espaces simplement connexes, on a un isomorphisme $H_*(\Omega X;\mathbb{Q}) \cong U\pi_*(\Omega X) \otimes \mathbb{Q}$.

D'autre part, du point de vue de leur type d'homotopie rationnelle, les CW complexes finis se répartissent en deux catégories. On distingue les espaces elliptiques pour lesquels la somme $\sum_{i\geq 2} \dim \pi_i(X) \otimes \mathbb{Q}$ est finie et les espaces hyperboliques pour lesquels la suite $\sum_{j\leq i} \dim \pi_j(X) \otimes \mathbb{Q}$ a une croissance exponentielle ([7]). Nous en déduisons :

COROLLAIRE. — *Soit M une variété compacte simplement connexe, alors, pour $k \geq 2$, de trois choses l'une :*

1) Ou bien, l'espace $F(M,k)$ est hyperbolique et $\pi_*(\Omega F(M,k)) \otimes \mathbb{Q}$ contient une algèbre de Lie libre a deux générateurs.

2) Ou bien M a le type d'homotopie rationnelle d'une sphère S^n, et $k \leq 3$. On a alors $F(M,2) \sim_0 S^n$, $F(M,3) \sim_0 S^{2n-1}$ si n est pair et $F(M,3) \sim_0 S^n \times S^{n-1}$ si n est impair.

3) Ou bien $H^*(M;\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}[x]/x^{n+1}$, $n \geq 2$ et $k = 2$. Dans ce cas, $F(M,2)$ est un espace formel de cohomologie rationnelle $\mathbb{Q}[x,y]/(x^{n+1}, \sum_{i=0}^{n} x^i y^{n-i})$, $|y| = |x|$.

Preuve. — L'inclusion $\pi_*(M - Q_k) \subset \pi_*(F(M,k))$ montre que $\pi_*(\Omega F(M,k)) \otimes \mathbb{Q}$ contient une algèbre de Lie libre dans les trois cas suivants :

a) L'algèbre $H^*(M;\mathbb{Q})$ requiert au moins deux générateurs et $k = 1$, cas inerte ([15]),

b) la cohomologie réduite de M est rationnellement non nulle et $k \geq 2$,

c) $k \geq 3$.

L'étude du cas particulier des sphères est faite dans l'article de Fadell et Neuwirth ([6]), la description de $F(M,2)$ dans le second cas résulte de la suite spectrale de Cohen-Taylor ([5]). □

2. Démonstration du théorème.

2.1. Rappelons, ([10]), que si un espace a le type d'homotopie d'un CW complexe simplement connexe fini, alors la réunion des sous-algèbres de Hopf normales résolubles de $H_*(\Omega X;\mathbb{F}_p)$ est encore une sous-algèbre normale résoluble appelée radical de $H_*(\Omega X;\mathbb{F}_p)$ et notée $R(X;\mathbb{F}_p)$. Lorsque $R(X;\mathbb{F}_p) = 0$, nous disons que l'espace X est p-semi-simple. Si $R(X;\mathbb{F}_p)$ est non nul, alors il contient toujours un élément central primitif. En effet, il suffit de considérer un élément de plus bas degré dans la sous-algèbre de Hopf dérivée maximale non triviale de $R(X;\mathbb{F}_p)$. Il s'ensuit qu'un espace X est p-semi-simple si et seulement si $H_*(\Omega X;\mathbb{F}_p)$ ne contient aucun élément central primitif.

Avec S. Halperin, nous avons étudié les liens entre les structures d'algèbres de Hopf sur les homologies de la fibre, de l'espace total et de la base dans une fibration multiplicative. Pour résumer les résultats obtenus, ([8]), considérons une fibration

$$F \xrightarrow{j} E \xrightarrow{p} B,$$

formée d'espaces simplement connexes avec homologies de type fini.

Dans ce cas, la suite spectrale de Serre de $\Omega F \to \Omega E \to \Omega B$ est une suite spectrale du premier quadrant formée d'algèbres de Hopf bigraduées. De plus,

i) $E^2_{s,t} = H_s(\Omega B) \otimes H_t(\Omega F)$, comme algèbre de Hopf.

ii) Pour tout $r \geq 2$, l'algèbre de Hopf E^r est isomorphe au produit tensoriel $E^r_{*,0} \otimes E^r_{0,*} \otimes \wedge V^r$ où $\wedge V^r$ désigne une algèbre extérieure primitivement engendrée en degrés impairs ([8]).

iii) Les différentielles d^r de la suite spectrale vérifient :

$$d^r(E^r_{*,0} \oplus V^r) \subset ZE^r_{0,*} \otimes E^r_{+,*}\,,$$

où $E^r_{+,*} = \bigoplus\limits_{s>0} E^r_{s,*}$, et $ZE^r_{0,*}$ désigne la sous-algèbre engendrée par les élements centraux primitifs de $E^r_{0,*}$ ([8]).

iv) Si $R(F;\mathbb{F}_p) = 0$, la suite spectrale dégénère au terme E^2 et on a donc une suite courte exacte d'algèbres de Hopf :

$$\mathbb{F}_p \to H_*(\Omega F;\mathbb{F}_p) \xrightarrow{\Omega j_*} H_*(\Omega E;\mathbb{F}_p) \xrightarrow{\Omega p_*} H_*(\Omega B;\mathbb{F}_p) \to \mathbb{F}_p\,, ([8]).$$

v) En particulier, lorsque F et B sont simplement connexes et p-semi-simples, alors E est aussi semi-simple.

2.2. Pour $l \geq 2$, les espaces $M - Q_l$ ont le type d'homotopie de $N \vee S(l-1)$. L'homologie de leur espace de lacets $H_*(\Omega(M - Q_l);\mathbb{F}_p)$ est donc isomorphe au produit libre $H_*(\Omega N;\mathbb{F}_p) \sqcup T(V(l-1))$ où $T(V(l-1))$ est une algèbre tensorielle engendrée par un espace vectoriel $V(l-1)$ concentré en degré $n-2$ et de dimension $l-1$. En particulier, si l'homologie réduite de N est non nulle, l'algèbre $H_*(\Omega(M - Q_l);\mathbb{F}_p)$ n'a pas d'élément central primitif pour $l \geq 2$.

LEMME. — *Si M satisfait I_p, alors l'espace $N = M - Q_1$ est p-semi-simple.*

Preuve. — Ecrivons $M = N \bigcup_{\varphi} e_n$. L'application d'attachement de la dernière cellule $\varphi : S^{n-1} \to N$ détermine une classe $a \in H_{n-2}(\Omega N; \mathbb{F}_p)$. Notons J l'idéal engendré par a dans $H_*(\Omega N; \mathbb{F}_p)$ et par $E^0 = \oplus E^0_{p,q}$ l'algèbre bigraduée associée à la filtration J-adique de $H_*(\Omega N; \mathbb{F}_p)$. L'hypothèse I_p entraîne l'existence d'isomorphismes bigradués ([15], 2.3, 2.4)

$$E^0_{0,*} = H_*(\Omega N; \mathbb{F}_p)/J \cong H_*(\Omega M; \mathbb{F}_p) \qquad E^0 \cong E^0_{0,*} \sqcup T(a).$$

Il s'ensuit que E^0 et a fortiori $H_*(\Omega N; \mathbb{F}_p)$ ne possèdent aucun élément central primitif. $\square$

2.3. Pour démontrer le théorème, il suffit maintenant de considérer la suite de fibrations

$$F(M - Q_{i+1}, k - i - 1) \to F(M - Q_i, k - i) \to M - Q_i.$$

Une induction décroissante sur les entiers $l \geq 1$ montre d'après (v) que les espaces $F(M - Q_l, k - l)$ sont p-semi-simples pour $l \geq 1$. L'assertion (iv) fournit alors la première moitié du théorème. La seconde partie du théorème résulte directement des formules suivantes sur les séries de Poincaré :

$$P_{\Omega(X \vee Y)}{}^{-1} = P_{\Omega X}{}^{-1} + P_{\Omega Y}{}^{-1} - 1,$$

et ([13], Th. 1),

$$P_{\Omega N}(1 + t^{n-2} P_{\Omega M}) = P_{\Omega M}\,.$$

$\square$

3. Preuve de la proposition.

Désignons par F la fibre homotopique de l'inclusion naturelle $N \hookrightarrow M$. Par ([12]), nous savons que l'homologie réduite de F à coefficients dans l'anneau R est un $H_*(\Omega M; R)$-module libre engendré par un élément de degré $n - 1$. Comme $H_*(M; R)$ n'a pas de torsion, il en est de même pour $H_*(F; R)$.

Dans ce cas, l'algèbre des cochaînes $C_*(\Omega F; R)$ admet un modèle minimal. C'est-à-dire qu'il existe un morphisme d'algèbres différentielles graduées

$$(T(W), D) \to \mathcal{C}_*(\Omega F; R)$$

induisant un isomorphisme en homologie, avec les propriétés suivantes :

$$W = s^{-1}\tilde{H}_*(F;R) \qquad D(W) \subset T^{\geq 2}(W).$$

Considérons maintenant le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} (T(W),D) & \hookrightarrow & (T(W\otimes\mathbb{Q}),D\otimes 1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ C_*(\Omega F;R) & \rightarrow & C_*(\Omega F;\mathbb{Q}). \end{array}$$

Les applications verticales sont des quasi-isomorphismes et les applications horizontales des injections. Dans ([15]), Halperin et Lemaire montrent que $H_*(\Omega F;\mathbb{Q})$ est isomorphe à l'algèbre tensorielle sur $W\otimes\mathbb{Q}$. Il s'ensuit que $D\otimes 1$ est nul et, par le diagramme ci-dessus, D est aussi nul.

Si p est non inversible dans R, alors $H_*(F;R)\otimes\mathbb{F}_p = H_*(F;\mathbb{F}_p)$. En tensorisant le quasi-isomorphisme

$$(T(W),0) \rightarrow C_*(\Omega F;R)$$

avec $\mathbb{F}_p$, nous obtenons un quasi-isomorphisme d'algèbres graduées

$$T(s^{-1}\tilde{H}_*(F;\mathbb{F}_p),0) \xrightarrow{\cong} C_*(\Omega F;\mathbb{F}_p).$$

Ceci démontre que $H_*(\Omega F;\mathbb{F}_p)$ est une algèbre tensorielle sur au moins deux générateurs, et que $R(F;\mathbb{F}_p)=0$. Par le point (iv), la suite spectrale de Serre de la fibration

$$\Omega F \rightarrow \Omega N \rightarrow \Omega M$$

dégénère au terme E^2 et la condition I_p est bien vérifiée. □

4. Type d'homotopie des espaces de configurations de deux points de M.

Soit M une variété différentiable compacte simplement connexe de dimension n, on considère le diagramme suivant formé de fibrations

$$\begin{array}{ccc} M-\{*\} & \overset{h}{\hookrightarrow} & M \\ \downarrow i & & \downarrow k \\ F(M,2) & \overset{j}{\hookrightarrow} & M\times M \\ \downarrow \pi & & \downarrow p \\ M & = & M. \end{array}$$

Les différentes applications sont définies par les formules $i(m) = (*, m)$, $k(m) = (*, m)$, $h(m) = m$, $j(m,n) = (m,n)$, $\pi(m,n) = m = p(m,n)$. Comme M est compact, h_* est injective en homologie et il en est donc de même pour la composée

$$M - \{*\} \overset{h}{\hookrightarrow} M \overset{k}{\hookrightarrow} M \times M.$$

Il en résulte que l'application

$$H_*(M - \{*\}) \xrightarrow{i_*} H_*(F(M,2))$$

est aussi injective et donc que la suite spectrale de Serre pour la fibration de gauche dégénère au terme E_2.

D'autre part, les fibres homotopiques de j et de h sont les mêmes. Lorsque la cohomologie rationnelle de M n'est pas engendrée par un seul générateur, il résulte de ([13]) que la fibre homotopique F de j a le type d'homotopie rationnelle d'un bouquet infini de sphères. Dans tous les cas ([12]), la série de Poincaré P_F est donnée par la formule :

$$P_F = 1 + t^{n-1} P_{\Omega M}.$$

Désignons par $A(M)$ l'algèbre des formes de de Rham sur la variété M, et par $(\wedge Z, d) \xrightarrow{\varphi} A(M)$ un modèle minimal sur $\mathbb{R}$ de M. Par le théorème de Halperin sur le modèle des fibrations ([14]), $F(M,2)$ admet un modèle sur $\mathbb{R}$ de la forme

$$(\wedge Z \otimes \wedge Z \otimes \wedge V, D) \xrightarrow{\cong} A(F(M,2)),$$

avec $D(z \otimes 1 \otimes 1) = d(z) \otimes 1 \otimes 1$ et $D(1 \otimes z \otimes 1) = 1 \otimes d(z) \otimes 1$. De plus, $V = \mathbb{Q}v \oplus V^{\geq n}$, et $D(v) = \sum_i \alpha_i \otimes \beta_i$, les α_i désignant une famille de cocyles de $\wedge Z$ représentant une base de la cohomologie de M et les β_i des cocyles représentant les classes duales pour la dualité de Poincaré. Ce dernier point résulte directement de l'étude de la cohomologie des espaces $F(M,2)$ faite par Cohen et Taylor dans ([5]).

Dans certains cas, ceci suffit pour connaître le type d'homotopie rationnelle ou réelle de $F(M,2)$. Ainsi,

COROLLAIRE. — *Si M est une somme connexe de r copies du produit de deux sphères de même dimension, $M = \#^r(S^m \times S^m)$, alors la variété $F(M,2)$ est formelle et admet pour cohomologie l'algèbre*

$$H^*(F(M,2) \cong H^*(M) \otimes H^*(M)/I,$$

où I désigne l'idéal engendré par la somme $\sum_i x_i \otimes y_i$, les x_i désignant une base de $H^*(M)$ et les y_i des classes duales pour la dualité de Poincaré.

BIBLIOGRAPHY

[1] C.-F. BÖDIGHEIMER, F. COHEN and L. TAYLOR, On the homology of configuration spaces, Topology, 28 (1989), 111-123.

[2] W. BROWDER, Differential Hopf algebras, Trans. of the Amer. Math. Soc., 107 (1963), 153-176.

[3] R.F. BROWN and J.H. WHITE, Homology and Morse Theory of Third Configuration Spaces, Indiana University Math. Journal, 30 (1981), 501-512.

[4] F.R. COHEN, The homology of $\mathcal{C}_{n+1}$ spaces, $n \geq 0$, in F.R. Cohen, T.J. Lada and J.P. May, The homology of iterated loop spaces, Springer-Verlag, Lecture Notes in Math., 533 (1976).

[5] F.R. COHEN and L.R. TAYLOR, Computations of Gelfand-Fuks cohomology, the cohomology of function spaces, and the cohomology of configuration spaces, in Geometric Applications of Homotopy Theory I, Proceedings Evanston 1977, Edited by Barratt and Mahowald, Lecture Notes in Mathematics 657, Springer-Verlag (1978), 106-143.

[6] E. FADELL and L. NEUWIRTH, Configuration spaces, Math. Scand., 10 (1962), 111-118.

[7] Y. FÉLIX and S. HALPERIN, Rational L.S. category and its applications, Trans. Amer. Math. Soc., 273 (1982), 1-32.

[8] Y. FÉLIX, S. HALPERIN and J.-C. THOMAS, The Serre spectral sequence of a multiplicative fibration, preprint (1993).

[9] Y. FÉLIX, S. HALPERIN and J.-C. THOMAS, Adam's cobar equivalence, Trans. Amer. Math. Soc., 329 (1992), 531-549.

[10] Y. FÉLIX, J.-M. LEMAIRE S. HALPERIN and J.-C. THOMAS, Mod p loop space homology, Invent. Math., 95 (1989), 247-262.

[11] Y. FÉLIX et D. TANRÉ, Sur l'homologie de l'espace des lacets d'une variété compacte, Annales Ecole Norm. Sup., 25 (1992), 617-627.

[12] Y. FÉLIX et J.-C. THOMAS, Module d'holonomie d'une fibration, Bull. Soc. Math. France, 113 (1985), 255-258.

[13] Y. FÉLIX et J.-C. THOMAS, Effet d'un attachement cellulaire dans l'homologie de l'espace des lacets, Annales de l'Institut Fourier, 39-1 (1989), 207-224.

[14] S. HALPERIN, Lectures on minimal models, Mémoire de la Soc. Math. France, 9/10 (1983).

15] S. HALPERIN et J.-M. LEMAIRE, Suites inertes dans les algèbres de Lie graduées, Math. Scand., 61 (1987), 39-67.

Manuscrit reçu le 4 juin 1992,
révisé le 10 août 1993.

Y. FÉLIX,
Université Catholique de Louvain
Institut Mathématique
2 chemin du Cyclotron
1348 Louvain-la-Neuve (Belgique)
et
J.-C. THOMAS,
Université des Sciences
et Techniques de Lille I
Département de Mathématiques
59655 Villeneuve d'Ascq Cedex (France).