ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

HUBERT DELANGE

Sur les fonctions multiplicatives complexes de module ≤ 1

Annales de l'institut Fourier, tome 44, n° 5 (1994), p. 1323-1349

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1994__44_5_1323_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
44, 5 (1994), 1323-1349

SUR LES FONCTIONS MULTIPLICATIVES COMPLEXES DE MODULE ≤ 1

par Hubert DELANGE

---

1. Introduction.

Nous nous proposons ici de donner les démonstrations détaillées de résultats que nous avons énoncés sans preuve il y a quelques années [3].

1.1. f étant une fonction arithmétique complexe, pour étudier la distribution asymptotique de ses valeurs il est naturel de considérer, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, la mesure sur $\mathbb{C}$ définie pour tout $E \subset \mathbb{C}$ par

$$\mu_n(E) = \frac{1}{n} \text{ nombre des } m \in \mathbb{N}^* \text{ et } \leq n \text{ tels que } f(m) \in E$$

et d'étudier le comportement asymptotique de la suite $\{\mu_n\}$.

μ_n est une mesure de probabilité ($\mu_n(\mathbb{C}) = 1$). En fait $\mu_n(E)$ est la probabilité pour que, si on choisit au hasard un entier entre 1 et n, chacun ayant la probabilité $\frac{1}{n}$ d'être choisi, $f(m)$ appartienne à E.

Lorsque nous dirons qu'une suite de mesures sur $\mathbb{C}$ converge vers une mesure μ (borélienne), il s'agira de la convergence que les probabilistes appellent "faible" et que Bourbaki appelle "vague".

S'agissant d'une suite $\{\mu'_n\}$ de mesures de probabilité discrètes (donc définies sur toutes les parties de $\mathbb{C}$), sa convergence vers la mesure borélienne μ est équivalente au fait que, quel que soit $E \subset \mathbb{C}$ dont la frontière est de mesure μ nulle, $\mu'_n(E)$ tend vers $\mu(E)$. (Plus généralement, quel que soit E, on a

$$\underline{\lim}\ \mu'_n(E) \geq \mu(\mathring{E}) \text{ et } \overline{\lim}\ \mu'_n(E) \leq \mu(\overline{E}),$$

Mots-clés : Fonction multiplicative – Mesure – Convergence de mesures.
Classification A.M.S. : 11K65 – 11N64.

$\overset{\circ}{E}$ et $\overline{E}$ étant l'intérieur et l'adhérence de E.)

1.2. La mesure sur $\mathbb{C}$ déduite d'une mesure μ par la rotation d'angle θ autour de 0 est par définition la mesure $\mu^{(\theta)}$ définie par

$$\mu^{(\theta)}(E) = \mu(e^{-i\theta}E).$$

Dans le cas où μ est la mesure μ_n considérée plus haut, c'est la mesure égale pour tout $E \subset \mathbb{C}$ à

$$\frac{1}{n} \text{ nombre des } m \in \mathbb{N}^* \text{ et } \leq n \text{ tels que } f(m) \in e^{-i\theta}E$$
$$(\text{c'est-à-dire } f(m)e^{i\theta} \in E).$$

C'est encore une mesure de probabilité discrète.

Dans toute la suite, il est entendu que le mot "rotation" signifie "rotation autour de 0".

Nous dirons simplement qu'une mesure sur $\mathbb{C}$ est "invariante par rotation" si elle est invariante par toutes les rotations.

Dans le cas contraire, le groupe des rotations qui la conservent est un sous-groupe fermé du groupe de toutes les rotations, distinct de celui-ci. Il existe donc $\nu \in \mathbb{N}^*$ tel que ce sous-groupe est formé des rotations d'angle multiple de $2\pi/\nu$ (et est donc d'ordre ν). Nous dirons que la mesure en question possède une symétrie d'ordre ν. La symétrie d'ordre 1 signifie que la mesure n'est conservée par aucune rotation autre que l'identité.

Il est clair qu'une mesure déduite par rotation d'une mesure non invariante par rotation est également non invariante par rotation et a le même ordre de symétrie.

1.3. Les fonctions arithmétiques que nous considérons ici sont les fonctions multiplicatives complexes de module ≤ 1. *Il est entendu dans toute la suite que f est une telle fonction.*

Dans $\mathbb{C}$ nous désignons par D le disque ouvert $|z| < 1$, de sorte que $\overline{D}$ est le disque fermé $|z| \leq 1$.

La mesure μ_n définie plus haut est donc une mesure de probabilité de support contenu dans $\overline{D}$, et il en est de même de toutes les mesures que l'on en déduit par rotation.

Nous utilisons la lettre p pour désigner les nombres premiers.

Nous ferons usage du théorème bien connu de Halàsz [4] concernant la moyenne $\frac{1}{x}\sum_{n\leq x} f(n)$, mais nos résultats éclairent celui de Halàsz du fait que

$$\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} f(m) = \int_{\overline{D}} z d\mu_n(z).$$

Notre résultat principal est le suivant :

THÉORÈME 1. — 1) *Si on a* $\sum(1/p)(1-|f(p)|) = +\infty$, *la suite* $\{\mu_n\}$ *converge vers la mesure de Dirac au point* 0 (c'est-à-dire que, quel que soit $\rho \in]0,1[$, le nombre des $m \leq n$ tels que $|f(m)| > \rho$ est $o(n)$).

2) *Si* $\sum(1/p)(1-|f(p)|) < +\infty$, *il y a deux cas possibles :*

(a) *On a* $\sum(1/p)(1-\mathrm{Re}(f(p)^k p^{-iu})) = +\infty$ *pour tout* $k \in \mathbb{N}^*$ *et tout* u *réel;*

(b) *Il existe* $k \in \mathbb{N}^*$ *et* $u \in \mathbb{R}$ *tels que*

$$\sum(1/p)(1-\mathrm{Re}(f(p)^k p^{-iu})) < +\infty. \tag{1}$$

Dans le cas (a) *la suite* $\{\mu_n\}$ *converge vers une mesure* μ *non concentrée au point* 0 *mais invariante par rotation.*

Dans le cas (b), *elle ne converge pas vers une mesure invariante par rotation; il existe* $a \in \mathbb{R}$ *et une suite* $\{b_n\}$ *de nombres réels satisfaisant à*

$$\operatorname*{Sup}_{n<n'\leq n^2} |b_{n'} - b_n| = o(1) \quad (n \to \infty)$$

tels que, si μ'_n *est la mesure déduite de* μ_n *par la rotation d'angle* $\theta_n = -(a\log n + b_n)$, *la suite* $\{\mu'_n\}$ *converge vers une mesure limite* μ *qui n'est pas invariante par rotation* (c'est-à-dire que, pour tout $E \subset \mathbb{C}$ dont la frontière est de mesure μ nulle, le nombre des $m \leq n$ pour lesquels $f(m)$ appartient à $e^{-i\theta_n}E = n^{ia}e^{ib_n}E$ est $n\mu(E) + o(n)$). *La suite* $\{\theta_n\}$ *n'est pas unique. Le nombre* a *est bien déterminé mais la suite* $\{b_n\}$ *ne l'est pas : on peut remplacer* b_n *par* b'_n *à la seule condition que* $b'_n - b_n$ *tende vers une limite finie* θ, *la mesure* μ *subissant alors une rotation d'angle* $-\theta$.

On peut apporter les précisions suivantes sur le cas (b) *:*

Dans ce cas, il y a une infinité de couples (k,u) *où* $k \in \mathbb{N}^*$ *et* $u \in \mathbb{R}$ *pour lesquels on a* (1). *Il existe* $q \in \mathbb{N}^*$ *et* $\alpha \in \mathbb{R}$ *tels que ces couples sont les couples* $(\lambda q, \lambda\alpha)$ *où* $\lambda \in \mathbb{N}^*$.

On a $a = \alpha/q$ et on peut prendre

$$b_n = \frac{1}{\lambda q} \sum_{p \leq n} \frac{1}{p} \mathrm{Im}(f(p)^{\lambda q} p^{-i\lambda\alpha}),$$

avec λ fixe quelconque $\in \mathbb{N}^*$.

De plus, la mesure μ possède une symétrie d'ordre q si $f(2^r)^q \neq -2^{ir\alpha}$ pour au moins un $r \in \mathbb{N}^*$, d'ordre $2q$ dans le cas contraire.

Si l'ordre de symétrie est 1, on a $\int_{\overline{D}} z d\mu(z) \neq 0$.

Le théorème 1 donne, de façon évidente, des conditions nécessaires et suffisantes pour que la suite $\{\mu_n\}$ converge vers la mesure de Dirac au point 0 ou pour qu'elle converge vers une mesure non concentrée au point 0 mais invariante par rotation.

On obtient, de plus, le résultat suivant :

THÉORÈME 2. — *Pour que la suite $\{\mu_n\}$ converge vers une mesure μ non invariante par rotation, il faut et il suffit qu'il existe au moins un $k \in \mathbb{N}^*$ tel que la série*

$$\sum (1/p)(1 - f(p)^k)$$

soit convergente.

Cette série est alors convergente pour une infinité de k, qui sont les multiples d'un certain q, et la mesure μ possède une symétrie d'ordre q si $f(2^r)^q \neq -1$ pour au moins un $r \in \mathbb{N}^*$, d'ordre $2q$ dans le cas contraire.

Ici encore, si l'ordre de symétrie de μ est 1, on a $\int_{\overline{D}} z d\mu(z) \neq 0$.

Après avoir démontré les théorèmes 1 et 2 nous montrerons comment le théorème 1 explique le théorème de Halàsz, puis nous indiquerons quelques applications de nos théorèmes.

2. Préliminaires.

2.1. Le théorème de Stone-Weierstrass montre que l'ensemble des polynômes à coefficients complexes en z et $\overline{z}$ est dense dans l'espace des fonctions complexes continues sur $\overline{D}$, muni de la topologie de la convergence uniforme.

Il résulte d'abord de là qu'une mesure μ de support contenu dans $\overline{D}$ est complètement déterminée par la famille des intégrales $\int_{\overline{D}} z^\alpha \overline{z}^\beta d\mu(z)$ où α et $\beta \in \mathbb{N}$.

Notons que $z^\alpha \overline{z}^\beta$ peut se mettre sous l'une des formes $|z|^{2h} z^k$ et $|z|^{2h}\overline{z}^k$ où h et $k \in \mathbb{N}$.

En effet, si $h = \mathrm{Min}(\alpha, \beta)$, on a

$$z^\alpha \overline{z}^\beta = |z|^{2h} z^k \text{ avec } \quad k = \alpha - \beta \text{ si } \alpha \geq \beta,$$

$$\text{et} \quad z^\alpha \overline{z}^\beta = |z|^{2h} \overline{z}^k \text{ avec } \quad k = \beta - \alpha \text{ si } \alpha < \beta.$$

μ est donc déterminée par la famille des intégrales

$$\int_{\overline{D}} |z|^{2h} z^k d\mu(z) \text{ et } \int_{\overline{D}} |z|^{2h} \overline{z}^k d\mu(z) \text{ où } h \text{ et} k \in \mathbb{N}.$$

Si μ est une mesure de probabilité, il suffit de considérer les intégrales

$$\int_{\overline{D}} |z|^{2h} z^k d\mu(z) \text{ où } h \text{ et } k \in \mathbb{N} \text{ et } h + k > 0$$

puisque $\int_{\overline{D}} |z|^{2h} \overline{z}^k d\mu(z)$ est l'imaginaire conjugué de $\int_{\overline{D}} |z|^{2h} z^k d\mu(z)$ et $\int_{\overline{D}} d\mu(z) = 1$.

Nous poserons $M_{h,k}(\mu) = \int_{\overline{D}} |z|^{2h} z^k d\mu(z)$.

On voit d'autre part qu'une suite $\{\mu_n\}$ de mesures sur $\mathbb{C}$ de support contenu dans $\overline{D}$ converge vers une mesure limite μ si, et seulement si, pour chaque couple (α, β) d'entiers ≥ 0, la suite des intégrales $\int_{\overline{D}} z^\alpha \overline{z}^\beta d\mu_n(z)$ est convergente.

Si les μ_n sont des mesures de probabilité, la condition se réduit au fait que, pour chaque couple (h, k) d'entiers ≥ 0 avec $h + k > 0$, la suite $\{M_{h,k}(\mu_n)\}$ est convergente. La mesure limite μ est déterminée par les valeurs de $M_{h,k}(\mu) = \lim_{n \to \infty} M_{h,k}(\mu_n)$ pour h et $k \geq 0$ et $h + k > 0$.

2.2. Si μ est une mesure de probabilité sur $\mathbb{C}$ de support contenu dans $\overline{D}$, on a $M_{h,k}(\mu^{(\theta)}) = e^{ik\theta} M_{h,k}(\mu)$ (cf. § 1.2).

Cette mesure est donc invariante par la rotation d'angle θ si, et seulement si,

$$e^{ik\theta} M_{h,k}(\mu) = M_{h,k}(\mu) \text{ quels que soient } h \text{ et } k \in \mathbb{N} \text{ avec } h + k > 0,$$

c'est-à-dire $e^{ik\theta} = 1$ pour tout $k > 0$ pour lequel il existe un $h \in \mathbb{N}$ tel que $M_{h,k}(\mu) \neq 0$.

On voit ainsi que la mesure μ est invariante par rotation si, et seulement si, $M_{h,k}(\mu) = 0$ pour $k > 0$ et h quelconque $\in \mathbb{N}$.

Si elle n'est pas invariante par rotation, son ordre de symétrie est le plus grand commun diviseur des $k > 0$ tels que $M_{h,k}(\mu) \neq 0$ pour au moins un $h \in \mathbb{N}$.

Notons que, si l'ordre de symétrie est > 1, on a $\int_{\overline{D}} z d\mu(z) = 0$, puisque $M_{h,1}(\mu) = 0$ pour tout $h \in \mathbb{N}$ et $M_{0,1}(\mu) = \int_{\overline{D}} z d\mu(z)$.

On voit par ailleurs que, $\{\mu_n\}$ et $\{\mu'_n\}$ étant deux suites de mesures de probabilité, si, pour chaque n, μ'_n est une mesure déduite de μ_n par une rotation (pouvant dépendre de n) et si une de ces suites converge vers une mesure invariante par rotation, il en est de même de l'autre.

Cela résulte immédiatement de ce que, pour h et $k \in \mathbb{N}$,

$$|M_{h,k}(\mu'_n)| = |M_{h,k}(\mu_n)|.$$

C'est pour cette raison que, dans l'énoncé du théorème 1, on peut affirmer que, dans le cas (b) du 2), la suite $\{\mu_n\}$ ne converge pas vers une mesure invariante par rotation.

2.3. D'après le théorème de Halàsz mentionné au début du § 1.3, si F est une fonction multiplicative complexe de module ≤ 1, une des deux circonstances suivantes a lieu :

(a) $\dfrac{1}{x} \sum_{n \leq x} F(n)$ tend vers zéro quand x tend vers l'infini ; autrement dit, F possède une valeur moyenne nulle ;

(b) on a pour x tendant vers $+\infty$

$$\frac{1}{x} \sum_{n \leq x} F(n) = C x^{ia} \exp(iA(x)) + o(1), \tag{2}$$

où C est une constante complexe non nulle, a une constante réelle, et A une fonction réelle définie pour $x > 0$ assez grand et satisfaisant à

$$\operatorname*{Sup}_{x<x'\leq x^2} |A(x') - A(x)| = o(1) \text{ pour } x \text{ tendant vers } +\infty.$$

$|C|$ et a sont déterminés, mais A et C ne le sont pas.

En effet, si $\Phi(x) = \frac{1}{x}\sum_{n\leq x} F(n)$, quand x tend vers l'infini $|\Phi(x)|$ tend vers $|C|$ et, pour tout $\lambda > 0$, $\Phi(\lambda x)/\Phi(x)$ tend vers λ^{ia}. Mais on peut remplacer $A(x)$ par $A^*(x)$ satisfaisant à $A^*(x) = A(x) + \theta + o(1)$ en remplaçant aussi C par $Ce^{-i\theta}$.

On peut préciser lequel des cas (a) et (b) a lieu et, pour le cas (b), indiquer la valeur de la constante a et une fonction qu'on peut prendre pour $A(x)$ dans (2).

Il apparaît que l'on ne peut avoir

$$\sum \frac{1}{p}(1 - \operatorname{Re}(F(p)p^{-iu})) < +\infty \tag{3}$$

que pour un u réel au plus.

S'il n'y a aucun tel u, c'est le cas (a) qui a lieu.

Si (3) a lieu pour $u = a$, il y a deux possibilités :

Si $F(2^r) = -2^{ira}$ pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, c'est le cas (a) qui a lieu.

Si $F(2^r) \neq -2^{ira}$ pour au moins un $r \in \mathbb{N}^*$, on est dans le cas (b), où on peut prendre

$$A(x) = \sum_{p\leq x} \frac{1}{p}\operatorname{Im}(F(p)p^{-ia}).$$

On peut exprimer ces deux possibilités en disant que, si $A(x)$ est donné par cette formule, quand x tend vers l'infini, le produit $x^{-ia}\exp(-iA(x))\Big(\frac{1}{x}\sum_{n\leq x} F(n)\Big)$ tend vers une limite finie, qui est nulle si, et seulement si, $F(2^r) = -2^{ira}$ pour tout $r \in \mathbb{N}^*$.

2.4. Nous aurons aussi à utiliser les deux lemmes qui suivent.

2.4.1. LEMME 1. — *Soit $\theta(n) = A\log n + B_n$, où A est un nombre réel et $\{B_n\}$ une suite de nombres réels satisfaisant à*

$$\operatorname*{Sup}_{n<n'\leq n^2} |B_{n'} - B_n| = o(1) \quad (n \to \infty). \tag{4}$$

Pour que la suite $\{\exp(i\theta(n))\}$ soit convergente, il faut et il suffit que $A = 0$ et que la suite $\{B_n\}$ soit convergente.

Démonstration. — Supposons que la suite $\{\exp(i\theta(n))\}$ soit convergente.

La limite est forcément de module 1, soit $e^{i\varphi}$.

Pour tout λ réel > 1, la suite $\{\exp(i\theta([\lambda n]))\}$ tend vers $e^{i\varphi}$. Donc $\exp(i(\theta([\lambda n]) - \theta(n)))$ tend vers 1.

Mais $\theta([\lambda n]) - \theta(n) = A\log([\lambda n]/n) + B_{[\lambda n]} - B_n$.

$\log([\lambda n]/n)$ tend vers $\log\lambda$ et $B_{[\lambda n]} - B_n$ tend vers zéro, de sorte que $\exp(i(\theta([\lambda n]) - \theta(n)))$ tend vers λ^{iA}.

On a donc $\lambda^{iA} = 1$ pour tout λ réel > 1, d'où, par dérivation, $iA\log\lambda = 0$, d'où $A = 0$.

Alors $\theta(n) = B_n$ et $\exp(iB_n)$ tend vers $e^{i\varphi}$.

Du seul fait que $B_{n+1} - B_n$ tend vers zéro, ceci entraîne que la suite $\{B_n\}$ est convergente.

En effet, étant donné $\varepsilon > 0$ et $< \pi$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour $n \geq N_1$, $|\exp(iB_n) - e^{i\varphi}| \leq 2\sin\frac{\varepsilon}{2}$, ce qui implique que B_n appartient à l'un des intervalles

$$I_\lambda = [2\lambda\pi + \varphi - \varepsilon, 2\lambda\pi + \varphi + \varepsilon]\ ,\ \text{où } \lambda \in \mathbb{Z}.$$

Pour $n \geq N_1$, B_n et B_{n+1} appartiennent chacun à un des intervalles I_λ.

Mais il existe $N_2 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour $n \geq N_2$, $|B_{n+1} - B_n| < 2(\pi - \varepsilon)$.

Alors, si $n \geq \mathrm{Max}(N_1, N_2)$, l'intervalle I_λ contenant B_{n+1} est le même que celui qui contient B_n. Il existe donc un $\lambda \in \mathbb{Z}$ tel que, pour tout $n \geq \mathrm{Max}(N_1, N_2)$, $B_n \in I_\lambda$.

Par suite, pour n' et $n'' \geq \mathrm{Max}(N_1, N_2)$, $|B_{n''} - B_{n'}| \leq 2\varepsilon$.

On a ainsi démontré que la condition indiquée est nécessaire pour que la suite $\{\exp(i\theta(n))\}$ soit convergente.

Il est évident qu'elle est aussi suffisante.

2.4.2. Lemme 2. — *Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes de module ≤ 1.*

On a

$$1 - \mathrm{Re}(z_1 z_2) \leq 2(1 - \mathrm{Re} z_1) + 2(1 - \mathrm{Re} z_2), \tag{5}$$

$$1 - \mathrm{Re} z_1 \leq 2(1 - \mathrm{Re}(z_1 z_2)) + 2(1 - \mathrm{Re} z_2), \tag{6}$$

et

$$|\mathrm{Im}(z_1 + z_2 - z_1 z_2)| \leq (1 - \mathrm{Re}\ z_1) + (1 - \mathrm{Re}\ z_2). \tag{7}$$

Démonstration. — Posons $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$.

On a

$$1 - \mathrm{Re}(z_1 z_2) = 1 - x_1 x_2 + y_1 y_2 = (1 - x_1) + (1 - x_2) - (1 - x_1)(1 - x_2) + y_1 y_2. \tag{8}$$

Il apparaît que $(1 - x_1)(1 - x_2) \geq 0$ puisque $x_1 \leq 1$ et $x_2 \leq 1$, et

$$y_1 y_2 \leq \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2) \leq \frac{1}{2}((1 - x_1^2) + (1 - x_2^2)) \leq (1 - x_1) + (1 - x_2)$$

puisque, d'une part, $y_1^2 \leq 1 - x_1^2$ et $y_2^2 \leq 1 - x_2^2$ et, d'autre part,

$1 - x_1^2 = (1 - x_1)(1 + x_1) \leq 2(1 - x_1)$ et $1 - x_2^2 = (1 - x_2)(1 + x_2) \leq 2(1 - x_2)$.

Ceci démontre l'inégalité (5).

Maintenant, (8) donne

$$1 - \mathrm{Re}(z_1 z_2) \geq (1 - x_1) + (1 - x_2) - ((1 - x_1)(1 - x_2) + |y_1 y_2|). \tag{9}$$

Quel que soit $\lambda > 0$ on a

$$(1 - x_1)(1 - x_2) = \lambda(1 - x_1) \cdot \frac{1}{\lambda}(1 - x_2) \leq \frac{1}{2}(\lambda^2 (1 - x_1)^2 + \frac{1}{\lambda^2}(1 - x_2)^2)$$

et

$$|y_1 y_2| = \lambda |y_1| \cdot \frac{1}{\lambda}|y_2| \leq \frac{1}{2}(\lambda^2 \cdot y_1^2 + \frac{1}{\lambda^2} y_2^2),$$

et par suite

$$\begin{aligned}(1 - x_1)(1 - x_2) + |y_1 y_2| &\leq \frac{\lambda^2}{2}((1 - x_1)^2 + y_1^2) + \frac{1}{2\lambda^2}((1 - x_2)^2 + y_2^2) \\ &\leq \lambda^2 (1 - x_1) + \frac{1}{\lambda^2}(1 - x_2)\end{aligned}$$

puisque $(1 - x_1)^2 + y_1^2 = 1 - 2x_1 + x_1^2 + y_1^2 \leq 2(1 - x_1)$ et $(1 - x_2)^2 + y_2^2 = 1 - 2x_2 + x_2^2 + y_2^2 \leq 2(1 - x_2)$.

En prenant $\lambda = 1/\sqrt{2}$ on obtient

$$(1-x_1)(1-x_2) + |y_1 y_2| \leq \frac{1}{2}(1-x_1) + 2(1-x_2),$$

de sorte que (9) donne

$$1 - \mathrm{Re}(zz_2) \geq \frac{1}{2}(1-x_1) - (1-x_2),$$

ce qui est équivalent à (6).

Enfin on a $\mathrm{Im}(z_1 + z_2 - z_1 z_2) = y_1 + y_2 - (x_1 y_2 + x_2 y_1) = y_2(1-x_1) + y_1(1-x_2)$, ce qui donne immédiatement (7).

3. Démonstration du théorème 1.

μ_n étant la mesure définie au début du § 1.1 à partir de la fonction f, avec la notation $M_{h,k}$ introduite au § 2.1 on a

$$M_{h,k}(\mu_n) = \int_{\overline{D}} |z|^{2h} z^k d\mu_n(z) = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} F_{h,k}(m),$$

où $F_{h,k}(m) = |f(m)|^{2h} f(m)^k$.

$F_{h,k}$ est une fonction multiplicative de module ≤ 1. On peut donc lui appliquer le théorème de Halàsz, ce qui conduit à considérer la série

$$\sum \frac{1}{p}(1 - \mathrm{Re}(F_{h,k}(p)p^{-iu}), \text{ où } u \text{ est un nombre réel.}$$

3.1. Cas où $\sum(1/p)(1-|f(p)|) = +\infty$.

On voit que, dans ce cas, pour h et $k \in \mathbb{N}$ avec $h + k > 0$, on a quel que soit u réel

$$\sum \frac{1}{p}(1 - \mathrm{Re}(F_{h,k}(p)p^{-iu})) = +\infty$$

puisque $1 - \mathrm{Re}(F_{h,k}(p)p^{-iu}) \geq 1 - |f(p)|^{2h+k} \geq 1 - |f(p)|$,

et il en résulte, d'après le théorème de Halàsz, que la suite $\{M_{h,k}(\mu_n)\}$ tend vers zéro.

Ceci entraîne que la suite $\{\mu_n\}$ converge vers la mesure de Dirac au point 0.

3.2. Cas où $\sum(1/p)(1-|f(p)|) < +\infty$.

3.2.1. Comme, d'après le théorème des accroissements finis, on a pour tout $h \geq 0$

$$1-|f(p)|^{2h} \leq 2h(1-|f(p)|),$$

on voit que, pour tout $h \in \mathbb{N}$, la série $\sum \frac{1}{p}(1-F_{h,0}(p))$ est convergente.

D'après le théorème 2 de [1], qu'on peut d'ailleurs déduire facilement du théorème de Halàsz, ceci entraîne que, pour tout $h \in \mathbb{N}$, la suite $\{M_{h,0}(\mu_n)\}$ converge vers une limite non nulle (égale à 1 pour $h=0$).

3.2.2. On voit que, quels que soient $h \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathbb{R}$, il existe une constante complexe $C_{h,k,u}$ telle que l'on a pour x tendant vers $+\infty$

$$\sum_{p\leq x} \frac{1}{p}(1-F_{h,k}(p)p^{-iu}) = \sum_{p\leq x} \frac{1}{p}(1-f(p)^k p^{-iu}) + C_{h,k,u} + o(1). \tag{10}$$

Cela résulte de ce que

$$1-F_{h,k}(p)p^{-iu} = 1-f(p)^k p^{-iu} + f(p)^k p^{-iu}(1-|f(p)|^{2h})$$

et la série $\sum \dfrac{1}{p} f(p)^k p^{-iu}(1-|f(p)|^{2h})$ est absolument convergente puisque $|f(p)^k p^{-iu}(1-|f(p)|^{2h})| \leq 2h(1-|f(p)|)$.

En considérant les parties réelles des deux membres de (10), on voit que, pour $k \in \mathbb{N}^*$, quel que soit $h \in \mathbb{N}$, la série

$$\sum \frac{1}{p}(1-\mathrm{Re}(F_{h,k}(p)p^{-iu}))$$

est convergente ou divergente en même temps que la série

$$\sum \frac{1}{p}(1-\mathrm{Re}(f(p)^k p^{-iu})).$$

3.2.3. Supposons d'abord que

$$\sum \frac{1}{p}(1-\mathrm{Re}(f(p)^k p^{-iu})) = +\infty \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}^* \text{ et tout } u \text{ réel.}$$

Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $h \in \mathbb{N}$ on a

$$\sum \frac{1}{p}(1-\mathrm{Re}(F_{h,k}(p)p^{-iu})) = +\infty \text{ quel que soit } u \text{ réel,}$$

et il résulte du théorème de Halàsz que la suite $\{M_{h,k}(\mu_n)\}$ tend vers zéro.

Donc la suite $\{M_{h,k}(\mu_n)\}$ converge vers zéro quand $k > 0$ et vers une limite non nulle quand $k = 0$.

La suite $\{\mu_n\}$ converge donc vers une mesure limite μ telle que $M_{h,k}(\mu) = 0$ pour $k > 0$ et $M_{h,0}(\mu) \neq 0$ pour tout $h \in \mathbb{N}$.

D'après ce qu'on a vu au § 2.2, cette mesure est invariante par rotation. Elle n'est pas concentrée au point 0 puisque $M_{h,0}(\mu) \neq 0$ pour $h > 0$.

3.2.4. Supposons maintenant qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathbb{R}$ tels que

$$\sum \frac{1}{p}(1 - \mathrm{Re}(f(p)^k p^{-iu})) < +\infty. \tag{1}$$

Nous devons montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ et une suite $\{b_n\}$ de nombres réels satisfaisant à

$$\sup_{n<n'\leq n^2} |b_{n'} - b_n| = o(1) \quad (n \to \infty) \tag{11}$$

tels que la mesure μ'_n déduite de μ_n par la rotation d'angle $\theta_n = -(a \log n + b_n)$ converge vers une mesure μ qui n'est pas invariante par rotation.

Avant de faire cette démonstration remarquons que la suite $\{\theta_n\}$ n'est pas unique : le nombre a est bien déterminé mais la suite $\{b_n\}$ ne l'est pas. On peut remplacer la suite $\{b_n\}$ par une suite $\{b'_n\}$ assujettie à la seule condition que $b'_n - b_n$ tende vers une limite finie θ. La mesure μ est alors remplacée par la mesure μ' déduite de μ par la rotation d'angle $-\theta$.

En effet, supposons que la mesure μ'_n déduite de μ_n par la rotation d'angle $\theta_n = -(a \log n + b_n)$, où b_n satisfait à (11), converge vers une mesure μ non invariante par rotation.

Quels que soient h et $k \in \mathbb{N}$, avec $h + k > 0$, la suite $\{M_{h,k}(\mu'_n)\}$ converge vers $M_{h,k}(\mu)$. La mesure μ n'étant pas invariante par rotation, il existe $h \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}^*$ tels que $M_{h,k}(\mu) \neq 0$.

Considérons maintenant la mesure μ''_n déduite de μ_n par la rotation d'angle $\theta'_n = -(a' \log n + b'_n)$ où

$$\sup_{n<n'\leq n^2} |b'_{n'} - b'_n| = o(1) \quad (n \to \infty). \tag{12}$$

Si cette mesure converge vers une mesure μ', quels que soient h et $k \in \mathbb{N}$ avec $h + k > 0$, la suite $\{M_{h,k}(\mu''_n)\}$ est convergente.

Si on prend $h \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}^*$ tels que $M_{h,k}(\mu) \neq 0$, la suite $\{M_{h,k}(\mu''_n)/M_{h,k}(\mu'_n)\}$, où n est $\geq n_0$ tel que $M_{h,k}(\mu'_n) \neq 0$ pour $n \geq n_0$, est convergente.

Mais $M_{h,k}(\mu''_n) = M_{h,k}(\mu'_n)\exp(i(A\log n + B_n))$, où $A = k(a - a')$ et $B_n = k(b_n - b'_n)$.

On a $\displaystyle\sup_{n<n'\leq n^2} |B_{n'} - B_n| = o(1)$ et la suite $\{\exp(i(A\log n + B_n))\}$ est convergente.

D'après le lemme 1, on a $A = 0$, c'est-à-dire $a' = a$, et la suite B_n est convergente, c'est-à-dire que $b'_n - b_n$ tend vers une limite finie.

Inversement, si $a' = a$, et $b'_n - b_n$ tend vers une limite finie θ, on a (12) et, quels que soient h et $k \in \mathbb{N}$ avec $h + k > 0$, $M_{h,k}(\mu''_n)$ tend vers $M_{h,k}(\mu)e^{-ki\theta}$, de sorte que la mesure μ''_n converge vers la mesure μ' déduite de μ par la rotation d'angle $-\theta$.

3.2.5. Passons maintenant à la démonstration du résultat annoncé.

Soit E l'ensemble des couples (k, u), où $k \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathbb{R}$, pour lesquels on a (1), ensemble que nous avons supposé non vide.

On va voir qu'il existe $q \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que E est l'ensemble des couples $(\lambda q, \lambda\alpha)$ où $\lambda \in \mathbb{N}^*$.

Remarquons d'abord que, si les couples (k_1, u_1) et (k_2, u_2) appartiennent à E, le couple $(k_1 + k_2, u_1 + u_2)$ appartient aussi à E.

Cela résulte de l'inégalité (5) du lemme 2 en prenant

$$z_1 = f(p)^{k_1}p^{-iu_1} \ et \ z_2 = f(p)^{k_2}p^{-iu_2}.$$

On remarque aussi que, si (k_1, u_1) et $(k_2, u_2) \in E$ et $k_1 > k_2$, le couple $(k_1 - k_2, u_1 - u_2)$ appartient aussi à E.

Cela résulte de l'inégalité (6) en prenant cette fois

$$z_1 = f(p)^{k_1-k_2}p^{-i(u_1-u_2)} \text{ et } z_2 = f(p)^{k_2}p^{-iu_2}.$$

On sait par ailleurs que, pour un k fixé, il y a au plus un u réel pour lequel on a (1), c'est-à-dire pour lequel $(k, u) \in E$.

Donc les valeurs de k pour deux éléments distincts de E sont différentes.

Soit (q, α) l'élément de E pour lequel la valeur de k est la plus petite.

La première des remarques ci-dessus montre, par récurrence sur λ, que tous les couples $(\lambda q, \lambda\alpha)$ où $\lambda \in \mathbb{N}^*$ appartiennent à E.

On voit ensuite que E ne contient pas d'autres éléments.

En effet, soit $(k, u) \in E$.

On a $k \geq q$ et on peut écrire $k = \lambda q + r$ avec $\lambda \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leq r < q$.

Comme (k, u) et $(\lambda q, \lambda\alpha)$ appartiennent à E, si on avait $r > 0$, d'après notre deuxième remarque le couple $(r, u - \lambda\alpha)$ devrait appartenir à E, en contradiction avec le fait que q est la plus petite valeur de k pour les éléments de E.

On a donc $k = \lambda q$. De plus $u = \lambda\alpha$ puisque $\lambda\alpha$ est l'unique valeur de u pour laquelle $(\lambda q, u) \in E$.

3.2.6. Si k n'est pas multiple de q, on a

$$\sum \frac{1}{p}(1 - \mathrm{Re}(f(p)^k p^{-iu})) = +\infty \text{ pour tout } u \text{ réel}$$

et par suite, quel que soit $h \in \mathbb{N}$,

$$\sum \frac{1}{p}(1 - \mathrm{Re}(F_{h,k}(p)^{-iu})) = +\infty \text{ pour tout } u \text{ réel.}$$

D'après le théorème de Halàsz, il résulte de là que, si k n'est pas multiple de q, quel que soit $h \in \mathbb{N}$ la suite $\{M_{h,k}(\mu_n)\}$ converge vers zéro.

3.2.7. Quel que soit $\lambda \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\sum \frac{1}{p}(1 - \mathrm{Re}(f(p)^{\lambda q} p^{-i\lambda\alpha})) < +\infty$$

et par suite, pour tout $h \in \mathbb{N}$,

$$\sum \frac{1}{p}(1 - \mathrm{Re}(F_{h,\lambda q}(p) p^{-i\lambda\alpha})) < +\infty.$$

Il en résulte, toujours d'après le théorème de Halàsz, que, si on pose

$$A^*_{\lambda,h}(x) = \sum_{p \leq x} \frac{1}{p} \mathrm{Im}(F_{h,\lambda q}(p) p^{-i\lambda\alpha}),$$

quand n tend vers l'infini le produit

$$n^{-i\lambda\alpha} \exp(-iA^*_{\lambda,h}(n)) M_{h,\lambda q}(\mu_n)$$

tend vers une limite finie, qui est nulle si, et seulement si, $F_{h,\lambda q}(2^r) = -2^{i\lambda r\alpha}$ pour tout $r \in \mathbb{N}^*$.

On voit d'ailleurs que l'égalité $F_{h,\lambda q}(2^r) = -2^{i\lambda r\alpha}$ équivaut à $f(2^r)^{\lambda q} = -2^{i\lambda r\alpha}$.

En considérant les parties imaginaires des deux membres de (10) avec $k = \lambda q$ et $u = \lambda\alpha$, on voit qu'on a quand x tend vers $+\infty$

$$\sum_{p\leq x} \frac{1}{p}\mathrm{Im}(F_{h,\lambda q}(p)p^{-i\lambda\alpha}) = \sum_{p\leq x} \frac{1}{p}\mathrm{Im}(f(p)^{\lambda q}p^{-i\lambda\alpha}) - \mathrm{Im}C_{h,\lambda q,\lambda\alpha} + o(1),$$

c'est-à-dire

$$A^*_{\lambda,h}(x) = A_\lambda(x) - \mathrm{Im}C_{h,\lambda q,\lambda\alpha} + o(1)$$

où $A_\lambda(x) = \sum_{p\leq x} \frac{1}{p}\mathrm{Im}(f(p)^{\lambda q}p^{-i\lambda\alpha})$ (formule à retenir dans toute la suite).

Il en résulte que, quand n tend vers l'infini, le produit

$$n^{-i\lambda\alpha}\exp(-iA_\lambda(n))M_{h,\lambda q}(\mu_n)$$

tend vers une limite finie, qui est nulle si, et seulement si, $f(2^r)^{\lambda q} = -2^{i\lambda r\alpha}$ pour tout $r \in \mathbb{N}^*$.

3.2.8. Maintenant on voit que, étant donné λ_1 et $\lambda_2 \in \mathbb{N}^*$, l'expression $A_{\lambda_1+\lambda_2}(x) - A_{\lambda_1}(x) - A_{\lambda_2}(x)$ tend vers une limite finie quand x tend vers $+\infty$.

En effet, $A_{\lambda_1+\lambda_2}(x) - A_{\lambda_1}(x) - A_{\lambda_2}(x) = \sum_{p\leq x} \frac{1}{p}G(\lambda_1, \lambda_2, x)$

où

$$G(\lambda_1, \lambda_2, x) = \mathrm{Im}(f(p)^{(\lambda_1+\lambda_2)q}p^{-i(\lambda_1+\lambda_2)\alpha} - f(p)^{\lambda_1 q}p^{-i\lambda_1\alpha} - f(p)^{\lambda_2 q}p^{-i\lambda_2\alpha}).$$

En prenant dans l'inégalité (7) du lemme 2

$$z_1 = f(p)^{\lambda_1 q}p^{-i\lambda_1\alpha} \text{ et } z_2 = f(p)^{\lambda_2 q}p^{-i\lambda_2\alpha},$$

on voit que

$$|G(\lambda_1, \lambda_2, x)| \leq (1 - \mathrm{Re}(f(p)^{\lambda_1 q}p^{-i\lambda_1\alpha})) + (1 - \mathrm{Re}(f(p)^{\lambda_2 q}p^{-i\lambda_2\alpha}))$$

et, comme les couples $(\lambda_1 q, \lambda_1\alpha)$ et $(\lambda_2 q, \lambda_2\alpha)$ appartiennent à E, il en résulte que la série $\sum \frac{1}{p}G(\lambda_1, \lambda_2, x)$ est absolument convergente.

On déduit de là, par récurrence sur λ, que, pour tout $\lambda \in \mathbb{N}^*$, $A_\lambda(x) - \lambda A_1(x)$ tend vers une limite finie quand x tend vers $+\infty$ (évidemment nulle pour $\lambda = 1$).

Finalement, on voit que, pour tout $\lambda \in \mathbb{N}^*$ et tout $h \in \mathbb{N}$, quand x tend vers $+\infty$ le produit

$$n^{-i\lambda\alpha} \exp(-i\lambda A_1(n)) M_{h,\lambda q}(\mu_n)$$

tend vers une limite finie, qui est nulle si, et seulement si, $f(2^r)^{\lambda q} = -2^{i\lambda r\alpha}$ pour tout $r \in \mathbb{N}^*$.

En tenant compte de ce qui a été dit aux paragraphes 3.2.1, 3.2.6 et 3.2.7, on voit que, quels que soient k et $h \in \mathbb{N}$, quand n tend vers l'infini le produit

$$n^{-ik\alpha} \exp\left(-i\frac{k}{q}A_1(n)\right) M_{h,k}(\mu_n)$$

tend vers une limite finie.

Cette limite est non nulle si $k = 0$. Elle est nulle si k est > 0 et non multiple de q. Pour $k = \lambda q$, avec $\lambda \in \mathbb{N}^*$, elle est nulle si, et seulement si, $f(2^r)^{\lambda q} = -2^{i\lambda r\alpha}$ pour tout $r \in \mathbb{N}^*$.

3.2.9. On a $n^{-ik\alpha} \exp\left(-i\frac{k}{q}A_1(n)\right) M_{h,k}(\mu_n) = e^{ik\theta_n} M_{h,k}(\mu_n)$, où $\theta_n = -\alpha \log n - \frac{1}{q}A_1(n) = -(a \log n + b_n)$ avec $a = \alpha$ et $b_n = \frac{1}{q}A_1(n)$.

Pour $n' > n$,

$$|b_{n'} - b_n| = \frac{1}{q}\left| \sum_{n<p\le n'} \frac{1}{p}\mathrm{Im}\Big(f(p)^q p^{-i\alpha}\Big)\right| \le \frac{1}{q} \sum_{n<p\le n'} \frac{1}{p}\,.$$

Il en résulte que, pour n tendant vers l'infini,

$$\operatorname*{Sup}_{n<n'\le n^2} |b_{n'} - b_n| = o(1).$$

On a $e^{ik\theta_n} M_{h,k}(\mu_n) = M_{h,k}(\mu'_n)$, où μ'_n est la mesure déduite de μ_n par la rotation d'angle θ_n.

Ainsi, quels que soient h et $k \in \mathbb{N}$, la suite $\{M_{h,k}(\mu'_n)\}$ est convergente. Il en résulte que la suite des mesures μ'_n converge vers une mesure μ telle que, pour h et $k \in \mathbb{N}$ et $h + k > 0$,

$$M_{h,k}(\mu) = \lim_{n\to\infty} M_{h,k}(\mu'_n).$$

On a $M_{h,k}(\mu) \neq 0$ quand $k = 0$ et $M_{h,k}(\mu) = 0$ quand k est > 0 et non multiple de q. Quand $k = \lambda q$ avec $\lambda \in \mathbb{N}^*$, on a $M_{h,k}(\mu) = 0$ si, et seulement si, $f(2^r)^{\lambda q} = -2^{i\lambda r\alpha}$ pour tout $r \in \mathbb{N}^*$.

Si $f(2^r)^q \neq -2^{ir\alpha}$ pour au moins un $r \in \mathbb{N}^*$, on a $M_{h,q}(\mu) \neq 0$ pour tout $h \in \mathbb{N}$. Donc, d'après ce qu'on a vu au § 2.2, μ n'est pas invariante par rotation. De plus, comme on ne peut avoir $M_{h,k}(\mu) \neq 0$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ que pour k multiple de q, on voit que q est le plus grand commun diviseur des $k \in \mathbb{N}^*$ pour lesquels il existe un $h \in \mathbb{N}$ tel que $M_{h,k}(\mu) \neq 0$.

Donc μ possède une symétrie d'ordre q.

Si $f(2^r)^q = -2^{ir\alpha}$ pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, on a pour tout $r \in \mathbb{N}^*$

$$f(2^r)^{\lambda q} = \begin{cases} -2^{i\lambda r\alpha} \text{ si } \lambda \text{ est impair,} \\ \\ 2^{i\lambda r\alpha} \text{ si } \lambda \text{ est pair.} \end{cases}$$

Donc $M_{h,\lambda q}(\mu) = 0$ pour tout $h \in \mathbb{N}$ si λ est impair et $M_{h,\lambda q}(\mu) \neq 0$ pour tout $h \in \mathbb{N}$ si λ est pair.

Ainsi $M_{h,k}(\mu) = 0$ pour tout $h \in \mathbb{N}$ quand $k \in \mathbb{N}^*$ et n'est pas multiple de $2q$ et $M_{h,k}(\mu) \neq 0$ pour tout $h \in \mathbb{N}$ quand $k \in \mathbb{N}^*$ et est multiple de $2q$. Donc μ n'est pas invariante par rotation et possède une symétrie d'ordre $2q$.

Si l'ordre de symétrie de μ est 1, on a $q = 1$ et $f(2^r) \neq -2^{ir\alpha}$ pour au moins un $r \in \mathbb{N}^*$. Alors $M_{h,1}(\mu) \neq 0$ pour tout $h \in \mathbb{N}$.

En particulier $M_{0,1}(\mu) = \int_{\overline{D}} z d\mu(z) \neq 0$.

3.2.10. Notons que, d'après la remarque faite au § 3.2.4, comme, quel que soit $\lambda \in \mathbb{N}^*$, la différence $A_\lambda(x) - \lambda A_1(x)$ tend vers une limite finie quand x tend vers $+\infty$, au lieu de $b_n = \dfrac{1}{q} A_1(n)$ on peut aussi bien prendre

$$b_n = \frac{1}{\lambda q} A_\lambda(n) = \frac{1}{\lambda q} \sum_{p \leq n} \frac{1}{p} \mathrm{Im}(f(p)^{\lambda q} p^{-i\lambda\alpha})$$

avec λ quelconque $\in \mathbb{N}^*$.

4. Démonstration du théorème 2.

4.1. Supposons d'abord que la suite $\{\mu_n\}$ converge vers une mesure μ non invariante par rotation.

On est nécessairement dans le cas où $\sum \frac{1}{p}(1 - |f(p)|) < +\infty$ et il existe $k \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathbb{R}$ tels que l'on ait (1), puisqu'on sait que dans les autres cas la suite $\{\mu_n\}$ converge soit vers la mesure de Dirac au point 0, soit vers une mesure non concentrée au point 0 mais invariante par rotation.

On sait, d'après le § 3.2.5, qu'il existe $q \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que l'ensemble E des couples (k, u) où $k \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathbb{R}$ pour lesquels on a (1) est l'ensemble des couples $(\lambda q, \lambda\alpha)$ où $\lambda \in \mathbb{N}^*$. De plus, d'après le § 3.2.6, si $k \in \mathbb{N}^*$ et n'est pas multiple de q, la suite $\{M_{h,k}(\mu_n)\}$ tend vers zéro.

Quels que soient k et $h \in \mathbb{N}$, la suite $\{M_{h,k}(\mu_n)\}$ converge vers $M_{h,k}(\mu)$. Comme μ n'est pas invariante par rotation, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ et $h \in \mathbb{N}$ tels que $M_{h,k}(\mu) \neq 0$.

Ce k est nécessairement multiple de q, soit $k = \lambda q$ où $\lambda \in \mathbb{N}^*$.

On sait, d'après le § 3.2.8, que le produit

$$n^{-i\lambda\alpha} \exp(-i\lambda A_1(n)) M_{h,k}(\mu_n),$$

où $A_1(n) = \sum_{p \leq n} \frac{1}{p} \mathrm{Im}(f(p)^q p^{-i\alpha})$ tend vers une limite finie.

Comme $M_{h,k}(\mu_n)$ tend vers $M_{h,k}(\mu) \neq 0$, ceci entraîne que la suite $\{n^{-i\lambda\alpha} \exp(-i\lambda A_1(n))\}$ est convergente.

Mais $n^{-i\lambda\alpha} \exp(-i\lambda A_1(n)) = \exp(i\theta(n))$ où

$$\theta(n) = -\lambda\alpha \log n - \lambda A_1(n).$$

Comme, pour $n' > n$, $|A_1(n') - A_1(n)| \leq \sum_{n < p \leq n'} \frac{1}{p}$, on a pour n tendant vers $+\infty$

$$\operatorname*{Sup}_{n < n' \leq n^2} |A_1(n') - A_1(n)| = o(1).$$

Le lemme 1 montre que $\alpha = 0$ et que la suite $\{A_1(n)\}$ est convergente.

La série $\sum \frac{1}{p} \mathrm{Im}(f(p)^q)$ est donc convergente.

D'autre part, la série $\sum \frac{1}{p}(1 - \mathrm{Re}(f(p)^q))$ est convergente puisque le couple $(q, 0)$ appartient à E.

Donc la série $\sum \frac{1}{p}(1 - f(p)^q)$ est convergente.

4.2. Supposons maintenant qu'il existe un $k \in \mathbb{N}^*$ tel que la série $\sum \frac{1}{p}(1 - f(p)^k)$ soit convergente.

La série $\sum \frac{1}{p}(1 - \mathrm{Re}(f(p)^k))$ est convergente. Donc l'ensemble E contient le couple $(k, 0)$. Il existe donc $q \in \mathbb{N}^*$ tel que E est l'ensemble des couples $(\lambda q, 0)$ où $\lambda \in \mathbb{N}^*$. En particulier $k = \lambda_0 q$ pour un $\lambda_0 \in \mathbb{N}^*$.

On peut appliquer les résultats du § 3.2.9.

Si μ'_n est la mesure déduite de μ_n par la rotation d'angle $\theta_n = -\frac{1}{q}A_1(n)$, la suite $\{\mu'_n\}$ converge vers une mesure μ non invariante par rotation et qui possède une symétrie d'ordre q si $f(2^r)^q \neq -1$ pour au moins un $r \in \mathbb{N}^*$, d'ordre $2q$ si $f(2^r)^q = -1$ pour tout $r \in \mathbb{N}^*$.

On sait de plus que, si l'ordre de symétrie est 1, on a $\int_D z d\mu(z) \neq 0$.

On a vu au paragraphe 3.2.8 que, pour tout $\lambda \in \mathbb{N}^*$, la différence $A_\lambda(x) - \lambda A_1(x)$ tend vers une limite finie quand x tend vers l'infini. En particulier $A_{\lambda_0}(n) - \lambda_0 A_1(n)$ tend vers une limite finie quand n tend vers l'infini. Or $A_{\lambda_0}(n)$ tend vers une limite finie puisque la série $\sum \frac{1}{p}(1 - f(p)^{\lambda_0 q})$ est convergente. Donc la suite $\{A_1(n)\}$ tend vers une limite finie, soit $-q\theta$.

Alors, d'après la remarque faite au § 3.2.4, on peut remplacer $\theta_n = -\frac{1}{q}A_1(n)$ par $\theta_n = 0$ et on voit que la suite $\{\mu_n\}$ converge vers la mesure μ' déduite de μ par la rotation d'angle θ. Celle-ci est encore non invariante par rotation et a le même ordre de symétrie que μ.

Comme $\int_D z d\mu'(z) = e^{i\theta} \int_D z d\mu(z)$, si l'ordre de symétrie est 1, on a $\int_D z d\mu'(z) \neq 0$.

4.2.1. On voit que les $k \in \mathbb{N}^*$ pour lesquels la série $\sum \frac{1}{p}(1 - f(p)^k)$ est convergente sont les multiples de q.

Il n'y a pas convergence pour k non multiple de q puisque la série des parties réelles est divergente.

Il y a convergence pour $k = \lambda q$ où $\lambda \in \mathbb{N}^*$: la série des parties réelles est convergente puisque le couple $(0, \lambda q) \in E$ et la série des parties imaginaires est convergente puisque, quand n tend vers l'infini, $A_\lambda(n) = \lambda A_1(n) + (A_\lambda(n) - \lambda A_1(n))$ tend vers une limite finie.

5. Explication du théorème de Halàsz par le théorème 1.

Nous utilisons le fait que $\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} f(m) = \int_{\overline{D}} z d\mu_n(z) = M_{0,1}(\mu_n)$.

5.1. Remarquons d'abord qu'il résulte immédiatement de là que la fonction f possède une valeur moyenne nulle si la suite $\{\mu_n\}$ converge vers la mesure de Dirac au point 0.

Il en est de même si la suite $\{\mu_n\}$ converge vers une mesure μ non concentrée à l'origine mais invariante par rotation. Cela résulte de ce que, pour h et $k \in \mathbb{N}$, la suite $\{M_{h,k}(\mu_n)\}$ converge vers $M_{h,k}(\mu)$ et que $M_{h,k}(\mu) = 0$ pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $h \in \mathbb{N}$, en particulier $M_{0,1}(\mu) = 0$.

Il en est encore de même s'il existe une suite de nombres réels θ_n telle que la mesure μ'_n déduite de μ_n par la rotation d'angle θ_n converge vers une mesure μ non invariante par rotation et d'ordre de symétrie > 1.

En effet, pour h et $k \in \mathbb{N}$, la suite $M_{h,k}(\mu'_n)$ converge vers $M_{h,k}(\mu)$. Comme $M_{h,k}(\mu_n) = e^{-ik\theta_n} M_{h,k}(\mu'_n)$, on a quand n tend vers l'infini

$$M_{h,k}(\mu_n) = e^{-ik\theta_n} M_{h,k}(\mu) + o(1).$$

Mais $M_{h,k}(\mu) = 0$ pour tout $h \in \mathbb{N}$ si k est strictement inférieur à l'ordre de symétrie de μ. En particulier $M_{0,1}(\mu) = 0$.

5.2. Si on a $\sum \frac{1}{p}(1 - \mathrm{Re}(f(p)p^{-iu})) = +\infty$ pour tout u réel, on est dans un des trois cas suivants :

(a) on a $\sum \frac{1}{p}(1 - |(f(p)|) = +\infty$;

(b) on a $\sum \frac{1}{p}(1 - |(f(p)|) < +\infty$ et, quels que soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathbb{R}$,

$$\sum \frac{1}{p}(1 - \mathrm{Re}(f(p)^k p^{-iu})) = +\infty;$$

(c) on a $\sum \frac{1}{p}(1 - |(f(p)|) < +\infty$ et l'ensemble E des couples (k, u) où $k \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathbb{R}$, pour lesquels

$$\sum \frac{1}{p}(1 - \mathrm{Re}(f(p)^k p^{-iu})) < +\infty$$

est formé des couples $(\lambda q, \lambda\alpha)$ où $\lambda \in \mathbb{N}^*$, avec $q > 1$.

Dans le cas (a) la suite $\{\mu_n\}$ converge vers la mesure de Dirac au point 0.

Dans le cas (b) elle converge vers une mesure non concentrée à l'origine mais invariante par rotation.

Dans le cas (c), la mesure μ'_n déduite de μ_n par la rotation d'angle $\theta_n = -\left(\alpha \log n + \frac{1}{q}A_1(n)\right)$, où

$$A_1(x) = \sum_{p \leq x} \frac{1}{p}\mathrm{Im}(f(p)^q p^{-i\alpha}),$$

converge vers une mesure μ qui n'est pas invariante par rotation et a pour ordre de symétrie q ou $2q$.

Dans les trois cas, la fonction f possède une valeur moyenne nulle.

5.3. Supposons maintenant qu'il existe a réel tel que

$$\sum \frac{1}{p}(1 - \mathrm{Re}(f(p)p^{-ia})) < +\infty.$$

Alors on a $\sum \frac{1}{p}(1 - |f(p)|) < +\infty$ puisque $1 - \mathrm{Re}(f(p)p^{-ia}) \geq 1 - |f(p)|$, et l'ensemble E contient le couple $(1, a)$, donc est formé des couples $(\lambda, \lambda a)$ où $\lambda \in \mathbb{N}^*$ (on a $q = 1$ et $\alpha = a$).

La mesure μ'_n déduite de μ_n par la rotation d'angle

$$\theta_n = -(a \log n + A_1(n))$$

converge vers une mesure μ non invariante par rotation et dont l'ordre de symétrie est 2 si $f(2^r) = -2^{ira}$ pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, et 1 dans le cas contraire.

Donc, si $f(2^r) = -2^{ira}$ pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, f possède une valeur moyenne nulle.

D'après ce qu'on a vu au paragraphe 3.2.9, si $f(2^r) \neq -2^{ira}$ pour au moins un $r \in \mathbb{N}^*$, on a $M_{h,1}(\mu) \neq 0$ pour tout $h \in \mathbb{N}$, en particulier $M_{0,1}(\mu) \neq 0$.

Comme $M_{0,1}(\mu_n')$ tend vers $M_{0,1}(\mu)$ quand n tend vers l'infini et $M_{0,1}(\mu_n) = n^{ia}\exp(iA_1(n))M_{0,1}(\mu_n')$, on a pour n tendant vers l'infini

$$M_{0,1}(\mu_n) = M_{0,1}(\mu)n^{ia}\exp(iA_1(n)) + o(1),$$

d'où il résulte que, pour x tendant vers $+\infty$,

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leq x} f(n) = Cx^{ia}\exp(iA(x)) + o(1),$$

où $C = M_{0,1}(\mu) \neq 0$ et $A(x) = A_1(x) = \sum_{p\leq x} \frac{1}{p}\mathrm{Im}(f(p)p^{-ia})$.

D'après une remarque déjà faite, l'inégalité

$$|A(x') - A(x)| \leq \sum_{x<p\leq x'} \frac{1}{p} \text{ pour } x < x'$$

entraîne que, quand x tend vers $+\infty$,

$$\operatorname*{Sup}_{x<x'\leq x^2} |A(x') - A(x)| = o(1).$$

6. Quelques conséquences des théorèmes 1 et 2.

Dans ce qui suit, pour simplifier le langage, nous dirons que la fonction f "possède une distribution limite" si la suite $\{\mu_n\}$ correspondante converge vers une mesure limite μ. La "distribution limite" est cette mesure μ.

Si ceci a lieu, la fonction f possède une valeur moyenne égale à $\int_{\overline{D}} z d\mu(z)$ $(= M_{0,1}(\mu))$.

6.1. D'après le théorème 2, si la série $\sum \frac{1}{p}(1 - f(p))$ est convergente, la fonction f possède une distribution limite μ qui n'est pas invariante par rotation et a pour ordre de symétrie 1 si $f(2^r) \neq -1$ pour au moins un $r \in \mathbb{N}^*$, et 2 dans le cas contraire. De plus, on sait que, si l'ordre de symétrie est 1, on a $\int_{\overline{D}} z d\mu(z) \neq 0$, tandis que, d'après ce qu'on a vu au § 2.2, si cet ordre de symétrie est 2, on a $\int_{\overline{D}} z d\mu(z) = 0$.

Ceci explique le résultat que nous avons démontré dans [1] (théorème 2, page 275) d'après lequel, si la série $\sum \frac{1}{p}(1 - f(p))$ est convergente, la fonction f possède une valeur moyenne et celle-ci est nulle si, et seulement si, $f(2^r) = -1$ pour tout $r \in \mathbb{N}^*$.

6.2. On voit que, *si la fonction f est réelle, elle possède une distribution limite* (évidemment de support contenu dans le segment $[-1, +1]$).

En effet, si $\sum \frac{1}{p}(1 - |f(p)|) = +\infty$, la suite $\{\mu_n\}$ converge vers la mesure de Dirac au point 0.

Si $\sum \frac{1}{p}(1 - |f(p)|) < +\infty$, cette suite est convergente d'après le théorème 2 car la série $\sum \frac{1}{p}(1 - f(p)^2)$ est convergente puisque

$$1 - f(p)^2 = (1 - |f(p)|)(1 + |f(p)|) \leq 2(1 - |f(p)|).$$

Ceci explique le fait, démontré par Wirsing dans [5] (Satz 1.2.2, p. 416) que toute fonction multiplicative réelle de module ≤ 1 possède une valeur moyenne.

6.3. Le cas où $|f(n)| = 1$ pour tout n, de sorte que la mesure μ_n est de support contenu dans la circonférence $|z| = 1$, est intéressant parce qu'il permet d'étudier la distribution modulo 1 des fonctions additives réelles.

A la fonction additive réelle F, on associe la fonction f définie par $f(n) = \exp(2\pi i F(n))$.

La fonction F possède une distribution limite modulo 1 si, et seulement si, f possède une distribution limite. Elle est "distribuée uniformément modulo 1" si, et seulement si, f possède une distribution limite invariante par rotation (donc égale à l'unique mesure portée par la circonférence $|z| = 1$ qui est invariante par rotation).

On retrouve ainsi les conditions nécessaires et suffisantes que nous avons établies dans [2] pour que F soit distribuée uniformément modulo 1, et pour que F possède une distribution limite modulo 1 non uniforme.

6.4. Supposons maintenant que $f = f_1 f_2$, où f_1 et f_2 sont deux fonctions multiplicatives complexes de module ≤ 1.

6.4.1. *Si chacune des fonctions f_1 et f_2 possède une distribution limite non invariante par rotation, il en est de même de f.*

En effet, d'après le théorème 2, il existe q_1 et $q_2 \in \mathbb{N}^*$ tels que la série $\sum \frac{1}{p}(1 - f_1(p)^m)$ est convergente quand $m \in \mathbb{N}^*$ est multiple de q_1 et la série $\sum \frac{1}{p}(1 - f_2(p)^m)$ est convergente quand m est multiple de q_2.

Si m est un multiple commun de q_1 et q_2, ces deux séries sont convergentes. Les séries $\sum \frac{1}{p}(1 - \mathrm{Re}(f_1(p)^m))$ et $\sum \frac{1}{p}(1 - \mathrm{Re}(f_2(p)^m))$ sont alors convergentes, ainsi que les séries $\sum \frac{1}{p}\mathrm{Im}(f_1(p)^m)$ et $\sum \frac{1}{p}\mathrm{Im}(f_2(p)^m)$.

Comme, d'après l'inégalité (5) du lemme 2,

$$1 - \mathrm{Re}(f(p)^m) \leq 2(1 - \mathrm{Re}(f_1(p)^m)) + 2(1 - \mathrm{Re}(f_2(p)^m)),$$

la série $\sum \frac{1}{p}(1 - \mathrm{Re}(f(p)^m))$ est convergente.

La série $\sum \frac{1}{p}\mathrm{Im}(f(p)^m)$ l'est aussi car, d'après l'inégalité (7) du lemme 2,

$$\begin{aligned}&|\mathrm{Im}(f(p)^m) - (\mathrm{Im}(f_1(p)^m) + \mathrm{Im}(f_2(p)^m))| \\ &\qquad \leq (1 - \mathrm{Re}(f_1(p)^m)) + (1 - \mathrm{Re}(f_2(p)^m)).\end{aligned}$$

La série $\sum \frac{1}{p}(1 - f(p)^m)$ est donc convergente et le théorème 2 donne la conclusion annoncée.

On voit d'ailleurs facilemment que *l'ordre de symétrie de la distribution limite de f est un diviseur du plus petit commun multiple des ordres de symétrie des distributions limites de f_1 et f_2.*

6.4.2. *Si ni l'une ni l'autre des fonctions f_1 et f_2 ne possède une distribution limite invariante par rotation, il en est de même de f.*

En effet, d'après le théorème 1, on a

$$\sum \frac{1}{p}(1 - |f_1(p)|) < +\infty \text{ et } \sum \frac{1}{p}(1 - |f_2(p)|) < +\infty$$

et il existe deux couples (q_1, α_1) et (q_2, α_2), où q_1 et $q_2 \in \mathbb{N}^*$ et α_1 et $\alpha_2 \in \mathbb{R}$, tels que, pour tout $\lambda \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum \frac{1}{p}(1 - \mathrm{Re}(f_1(p)^{\lambda q_1} p^{-i\lambda\alpha_1})) < +\infty \text{ et } \sum \frac{1}{p}(1 - \mathrm{Re}(f_2(p)^{\lambda q_2} p^{-i\lambda\alpha_2})) < +\infty.$$

On a $1 - |f(p)| \leq (1 - |f_1(p)|) + (1 - |f_2(p)|)$ car

$$1 - |f(p)| = (1 - |f_1(p)|) + (1 - |f_2(p)|) - (1 - |f_1(p)|)(1 - |f_2(p)|),$$

et il en résulte que $\sum \frac{1}{p}(1 - |f(p)|) < +\infty$.

D'autre part, on voit que, pour $k = q_1 q_2$, on a

$$\sum \frac{1}{p}(1 - \mathrm{Re}(f_1(p)^k p^{-iq_2\alpha_1})) < +\infty \text{ et } \sum \frac{1}{p}(1 - \mathrm{Re}(f_2(p)^k p^{-iq_1\alpha_2})) < +\infty.$$

L'inégalité (5) du lemme 2 montre que

$$\sum \frac{1}{p}(1 - \mathrm{Re}(f(p)^k p^{-iu})) < +\infty \text{ pour } u = q_2\alpha_1 + q_1\alpha_2.$$

Le théorème 1 donne alors la conclusion annoncée.

6.4.3. *Si la fonction f_1 possède une distribution limite non concentrée au point* 0 *mais invariante par rotation et la fonction f_2 possède une distribution limite non invariante par rotation et d'ordre de symétrie* 1, *la fonction f possède une distribution limite non concentrée au point* 0 *et invariante par rotation.*

En effet, d'après le théorème 1, on a $\sum \frac{1}{p}(1 - |f_1(p)|) < +\infty$ et $\sum \frac{1}{p}(1 - \mathrm{Re}(f_1(p)^k p^{-iu})) = +\infty$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout u réel.

D'après le théorème 2, la série $\sum \frac{1}{p}(1 - f_2(p)^k)$ est convergente pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, de sorte que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum \frac{1}{p}(1 - \mathrm{Re}(f_2(p)^k)) < +\infty.$$

On a $\sum \frac{1}{p}(1 - |f_2(p)|) < +\infty$ puisque $1 - \mathrm{Re}(f_2(p)) \geq 1 - |f_2(p)|$, et on voit comme au paragraphe 6.4.2 que $\sum \frac{1}{p}(1 - |f(p)|) < +\infty$.

D'autre part, l'inégalité (6) du lemme 2 donne

$$1 - \mathrm{Re}(f_1(p)^k p^{-iu}) \leq 2(1 - \mathrm{Re}(f(p)^k p^{-iu})) + 2(1 - \mathrm{Re}(f_2(p)^k)),$$

d'où

$$1 - \mathrm{Re}(f(p)^k p^{-iu}) \geq \frac{1}{2}(1 - \mathrm{Re}(f_1(p)^k p^{-iu})) - (1 - \mathrm{Re}(f_2(p)^k)),$$

et on voit ainsi que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout u réel,

$$\sum \frac{1}{p}(1 - \mathrm{Re}(f(p)^k p^{-iu})) = +\infty.$$

Le théorème 1 donne alors la conclusion annoncée.

Remarquons qu'il résulte du théorème 1 de [1] et de ce que nous avons dit ici au paragraphe 6.1 que *l'hypothèse sur f_2 est satisfaite en particulier si f_2 possède une valeur moyenne non nulle.*

6.5. Les propositions des paragraphes 6.4.1 et 6.4.2 ont pour corollaires les résultats suivants :

F_1 et F_2 étant deux fonctions additives réelles, si chacune possède une distribution limite modulo 1 *non uniforme, il en est de même de $F_1 + F_2$; si ni l'une ni l'autre n'est distribuée uniformément modulo* 1, *il en est de même de $F_1 + F_2$.*

En fait, nous avons démontré dans [2] que l'ensemble des fonctions additives réelles qui possèdent une distribution limite modulo 1 non uniforme, et l'ensemble de celles qui ne sont pas distribuées uniformément modulo 1 sont des espaces vectoriels sur le corps des nombres rationnels.

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. DELANGE, Sur les fonctions arithmétiques multiplicatives, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup, (3) 78 (1961), 273-304.

[2] H. DELANGE, On the distribution modulo 1 of additive functions, J. Indian Math. Soc. (N.S.), 34 (1970), 215-235.

[3] H. DELANGE, Sur la distribution des valeurs des fonctions multiplicatives complexes, C. R. Acad. Sci. Paris, série A, 276 (1973), 161-164.

[4] G. HALÁSZ, Über die Mittelwerte Multiplikativer Zahlentheoretischer Funktionen, Acta Math. Acad. Sci. Hungar., 19 (1968), 365-403.

[5] E. WIRSING Das asymptotische Verhalten von Summen über multiplikativer Funktionen II, Acta Math. Acad. Sci. Hungar., 18 (1967), 411-467.

Manuscrit reçu le 13 décembre 1993.

Hubert DELANGE,
22 allée des Troènes
91440 Bures-sur-Yvette (France).