ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

LAURENT STOLOVITCH

Sur un théorème de Dulac

Annales de l'institut Fourier, tome 44, nº 5 (1994), p. 1397-1433

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1994__44_5_1397_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
44, 5 (1994), 1397-1433

SUR UN THÉORÈME DE DULAC

par Laurent STOLOVITCH

Table des matières.

1. Introduction et notations.

1.1. Rappels historiques.

Considérons les systèmes autonomes d'équations différentielles analytiques au voisinage du point fixe $0 \in \mathbb{C}^n$, de la forme

$$\frac{dx_i}{dt} \stackrel{\text{def}}{=} \dot{x}_i = \lambda_i x_i + f_i(x), \quad 1 \leq i \leq n \tag{1}$$

Mots-clés : Champs de vecteurs analytiques – Formes normales – Variétés invariantes – Petits diviseurs.
Classification A.M.S. : 34A34 – 30D05 – 34C40 – 58F35 – 58F36.

où les f_i sont des fonctions analytiques 1-plates au voisinage de $0 \in \mathbb{C}^n$ (i.e $f_i(0) = 0$, $Df_i(0) = 0$). Dans le but d'étudier la structure *fine* des solutions au voisinage du point fixe qu'est l'origine, on procède, classiquement, à une classification des classes d'équivalence du champ de vecteurs X défini par 1, par le groupe G(resp. $\hat{G}$) des difféomorphismes analytiques locaux (resp. formels) laissant invariante l'origine et tangents à l'identité en ce point.

Introduisons quelques notations classiques : soit $\hat{f} \in \mathbb{C}[[x_1, \ldots, x_n]]$ une séries formelles en les variables $x_1, \ldots, x_n$, à coefficients complexes. On écrira

$$\hat{f} = \sum_Q f_Q x^Q \text{ avec } Q = (q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{N}^n, x^Q = x_1^{q_1} \cdots x_n^{q_n} \text{ et } f_Q \in \mathbb{C}.$$

Si $Q = (q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{N}^n$, on posera $|Q| = q_1 + \cdots + q_n$ que l'on appellera *norme* de Q. Si k est un entier positif, $\mathbb{N}_k^n$ désignera l'ensemble des n-uples d'entiers Q de norme supérieure ou égale à k. Enfin, *l'ordre* de la série formelle $\hat{f}$ est le plus petit entier $\mathrm{ord}\hat{f}$ tel qu'il existe un multiindice Q, de norme $\mathrm{ord}\hat{f}$, vérifiant $f_Q \neq 0$. Soit k un entier supérieur ou égal à 2, nous dirons que les n nombres complexes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, satisfont une *relation de résonance d'ordre* k s'il existe un multiindice $Q = (q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{N}_2^n$ de norme k et un indice $1 \leq s \leq n$ tels que

$$(Q, \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} q_i \lambda_i = \lambda_s.$$

Le théorème de Poincaré-Dulac formel [Arn80], [Bru89] assure l'existence d'un changement de variables formel $x_i = y_i + \xi_i(y)$ qui transforme le système 1 en un système de la forme

$$\frac{dy_i}{dt} = \lambda_i y_i + \sum_{\substack{(Q,\lambda)=\lambda_i \\ Q \in N_2^n}} a_Q^i y^Q \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq n$$

que l'on appelle *forme normale.* Le changement de variables n'est pas unique : on transforme une forme normale en une autre par des changements de variables de la forme

$$y_i = z_i + \sum_{\substack{(Q,\lambda)=\lambda_i \\ Q \in N_2^n}} b_Q^i z^Q \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq n.$$

Ainsi, modulo ce type de transformations, on obtient une forme normale à laquelle nous nous référerons en l'appelant *la* forme normale.

Si les λ_i ne vérifient aucune relation de résonance, alors le système précédent est linéaire. Cependant, le *difféomorphisme normalisant* n'est pas systématiquement analytique; C.L. Siegel [Sie42], puis A. Bruno [Bru72], ont montré, que, si les λ_i vérifient en outre une condition arithmétique diophantienne, que nous préciserons par la suite, alors le système 1 est analytiquement linéarisable au voisinage de l'origine. Dans le cas des difféormorphismes de $(\mathbb{C}, 0)$, J.-C. Yoccoz [Yoc88] a démontré que la condition diophantienne en question est aussi nécessaire.

Lorsque il y a des résonances, deux cas de nature très différente se présentent :

- soit l'enveloppe convexe des λ_i dans le plan complexe ne contient pas l'origine; dans ce cas, on montre que la forme normale est polynomiale et même intégrable par quadratures. De plus, les difféomorphismes normalisants sont analytiques au voisinage de l'origine [Arn80].
- soit l'enveloppe convexe contient 0. En dimension 2, la classification analytique des champs de vecteurs dont la partie linéaire n'est ni nulle, ni nilpotente, est due à J.-P. Ramis et J. Martinet [RM82], [RM83], [MR85], [Mal82]. Lorsque la partie linéaire est nilpotente, des éléments de réponse ont été apportés par R. Moussu et D. Cerveau [MC88].

Pour une introduction détaillée sur la normalisation formelle et analytique des champs de vecteurs, nous renvoyons le lecteur à [DDS94], [AA88].

1.2. Position du problème.

Dans la suite, nous supposerons l'existence d'un vecteur d'entiers non-nul $r \in \mathbb{N}^n$ tel que $(r, \lambda) = 0$ et que toutes les relations de résonances sont engendrées par cette relation; c'est-à-dire que la relation $(Q, \lambda) = \lambda_s$ avec $Q \in \mathbb{N}_2^n$ entraîne $Q = lr + E_s$ où l est un entier non-nul et E_s désigne le s-ième vecteur de base, soit $Q = (lr_1, \dots, lr_{s-1}, lr_s + 1, lr_{s+1}, \dots, lr_n)$.

Nous écrirons $r = (r_1, \dots, r_p, 0, \dots, 0)$, les p premières composantes étant des entiers positifs premiers entre eux. Cette hypothèse amène quelques remarques :

Remarque 1.1. — Les valeurs propres λ_j avec $1 \leq j \leq p$ sont des valeurs propres simples. En effet, si l'on avait $\lambda_j = \lambda_{j'}$, pour des indices $j \leq p$ et j', les deux vecteurs d'entiers $r = (r_1, \dots, r_p, 0, \dots, 0)$ et $r' = r - r_j E_j + r_j E_{j'}$ vérifieraient $(R, \lambda) = 0$ tout en étant linéairement indépendants, ce qui n'est pas possible.

Avec nos notations, si une des valeurs propres est nulle, alors il ne peut y en avoir une deuxième comme nous venons de le voir ; on a alors $\lambda_1 = 0$ et $r = (1, 0, \ldots, 0)$.

Sous une telle hypothèse, la forme normale de Poincaré-Dulac s'écrit

$$\dot{y}_i = y_i(\lambda_i + f_i(u)), 1 \leq i \leq n$$

où l'on a posé $u = y^r$ et $f_i \in \mathbb{C}[[u]], f_i(0) = 0$. Si 0 appartient à l'intérieur de l'enveloppe convexe des valeurs propres, A. Bruno a démontré [Bru72], [Mar80], entre autre, que s'il existe deux séries formelles a et b en les variables $y_1, \ldots, y_n$, telles que $\lambda_i + f_i(u) = \lambda_i a(y) + \bar{\lambda}_i b(y)$, $1 \leq i \leq n$ et si les λ_i vérifient une condition arithmétique diophantienne, alors non seulement la forme normale est convergente mais aussi le difféomorphisme normalisant. En particulier, si le système 1 est formellement linéarisable et si les λ_i vérifient une condition arithmétique diophantienne alors il l'est aussi analytiquement. Cependant, en général, ni le difféomorphisme normalisant, ni la forme normale ne convergent au voisinage de l'origine [Bru72], [IP86].

Nous nous proposons cependant, de transformer, moyennant une condition arithmétique diophantienne sur les λ_i, le champ de vecteurs analytique 1 en une forme normale *préliminaire* par un changement de variables analytique. Le résultat obtenu est une normalisation partielle de champs de vecteurs accompagnée de l'existence de variétés invariantes. Il constitue une généralisation à une dimension quelconque, des théorèmes de H. Dulac [Dul23], [Dul04]. Plus précisément, H. Dulac a démontré

– dans [Dul04], que tout champ de vecteurs analytique de la forme

$$f(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + (\lambda y + g(x, y))\frac{\partial}{\partial y}$$

($\lambda \neq 0$, f, g 1-plates en $0 \in \mathbb{C}^2$ qui est une singularité isolée du champ de vecteurs) s'écrit, dans un système de coordonnées locales holomorphes au voisinage de $0 \in \mathbb{C}^2$ sous la forme

$$x^{p+1}(1 + \tilde{f}(x, y))\frac{\partial}{\partial x} + (\lambda y + x\tilde{g}(x, y))\frac{\partial}{\partial y}.$$

– dans [Dul23], que tout champ de vecteurs analytique de la forme

$$-qx\frac{\partial}{\partial x} + (py + g(x, y))\frac{\partial}{\partial y}$$

($p, q \in \mathbb{N}$, premiers entre eux et g 1-plate en $0 \in \mathbb{C}^2$) s'écrit, étant donnés deux entiers r, s suffisamment grands, dans un système de coordonnées locales holomorphes au voisinage de $0 \in \mathbb{C}^2$ sous la forme

$$-qx\frac{\partial}{\partial x} + py(1 + P(u) + x^r y^s \tilde{g}(x,y))\frac{\partial}{\partial y}$$

avec $u = x^p y^q$, P un polynôme de degré inférieur ou égal à n, $P(0) = 0$ et $r > pn$, $s > qn$.

Le résultat que nous nous proposons d'énoncer repose sur une condition arithmétique concernant les λ_i. Soit $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante d'entiers tels que $p_0 = 2$ et $\sum_{k\geq 0} \frac{1}{p_k} < +\infty$. Définissons alors les nombres

$$\omega(p_k) = \inf\{|(Q,\lambda) - \lambda_i| \mid |(Q,\lambda) - \lambda_i| \neq 0, \\ i = 1,\dots,n,\ Q \in \mathbb{N}^n,\ 2 \leq |Q| \leq p_k\}.$$

La condition arithmétique en question peut alors s'énoncer de la manière suivante :

$$(\omega) \qquad -\sum_{k\geq 0} \frac{\ln(\omega(p_{k+1}))}{p_k} < +\infty.$$

Remarque 1.2. — Bruno a démontré [Bru72] que la condition (ω) est équivalente à la condition

$$-\sum_{k\geq 0} \frac{\ln(\omega(2^{k+1}))}{2^k} < +\infty.$$

Nous nous proposons de démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 1.1. — *Si, outre les hypothèses citées ci-dessus, la condition arithmétique (ω) est satisfaite alors pour tout entier m, il existe des polynômes $P_{i,m} \in \mathbb{C}[u]$ sans terme constant et de degrés au plus égaux à m tels que, dans un système de coordonnées analytiques au voisinage de $0 \in \mathbb{C}^n$, le système 1 s'écrit*

$$\dot{y}_i = y_i(\lambda_i + P_{i,m}(u)) + u^{m+1}g_i(y), \ \ 1 \leq i \leq n$$

où $u = y^r$ et les g_i sont analytiques à l'origine. Si en outre, on a $|r| = 1$, c'est-à-dire lorsque $\lambda_1 = 0$, alors on a $g_i(0) = 0$ (ceci afin d'avoir $\mathrm{ord}(u^{m+1}g_i(y)) > m|r| + 1$).

Notre démonstration est inspirée de celles faites, dans le cas 2-dimensionnel, dans [MM80] [CS]. Cependant, en dimension n quelconque, nous aurons à faire face, comme nous le verrons, à des problèmes de *petits diviseurs* [Sie42], [Bru72], [Eli90]. De plus, nous ne distinguerons pas le cas où une des valeurs propres est nulle des autres cas. On trouvera des résultats sur les variétés invariantes dans [CKP78], [Bru72], [Pos86].

2. Preuve du théorème.

Avant d'entamer la preuve, commençons par faire une remarque concernant le résultat.

Remarque 2.1. — Il est classique que, par un changement de variables polynomial, l'on puisse transformer le système 1 en $\dot{z}_i = z_i(\lambda_i + P_{i,m}(u)) + \tilde{g}_i(z)$, $1 \leq i \leq n$, avec $u = z^r$ et les $\tilde{g}_i$ analytiques et $(m|r|+1)$-plates à l'origine. La difficulté du résultat réside donc dans l'appartenance du "reste" à l'idéal engendré par u^{m+1}.

Pour démontrer le résultat, nous allons raisonner par récurrence sur l'entier m. Nous commencerons donc par démontrer le résultat pour $m = 0$:

Proposition 2.1. — *Sous les hypothèses du théorème 1.1, il existe un système de coordonnées locales analytiques au voisinage de $0 \in \mathbb{C}^n$, $x = y + \xi(y)$, dans lequel le système 1 s'écrit sous la forme :*

$$\dot{y}_i = \lambda_i y_i + u g_i(y), \quad 1 \leq i \leq n \quad \text{où} \quad u = y^r$$

avec g_i analytique au voisinage de 0; si $|r| = 1$, on a $g_i(0) = 0$.

Preuve. — Effectuons le changement de variables formel tangent à l'identité au voisinage de 0, $x = y + \xi(y)$, dans le système 1; c'est-à-dire

$$x_j = y_j + \xi_j(y) \quad \text{où} \quad \xi_j = \sum_{Q \in \mathbb{N}_2^n} \xi_{j,Q} y^Q \quad \text{est 1-plate en 0 pour } 1 \leq j \leq n.$$

On obtient un système de la forme :

$$\dot{y}_j = \lambda_j y_j + \psi_j(y), \text{ avec } \psi_j = \sum_{Q \in \mathbb{N}_2^n} \psi_{j,Q} y^Q \text{ pour } 1 \leq j \leq n.$$

Les relations entre les ξ_j, ψ_j et f_j s'obtiennent en dérivant l'expression du difféomorphisme par rapport au *temps* t :

$$\frac{dx_j}{dt} = \frac{dy_j}{dt} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \xi_j}{\partial y_k} \frac{dy_k}{dt}.$$

On exprime alors les $\dot{x}_j$ et $\dot{y}_j$ dans les coordonnées (y_k), ce qui donne :

$$\begin{aligned}\frac{dx_j}{dt} &= \lambda_j x_j + f_j(x) = \lambda_j(y_j + \xi_j(y)) + f_j(y_1 + \xi_1(y), \dots, y_n + \xi_n(y))\\ \frac{dy_j}{dt} &= \lambda_j y_j + \psi_j(y),\end{aligned}$$

d'où la relation :

$$\begin{aligned}&\lambda_j(y_j + \xi_j(y)) + f_j(y_1 + \xi_1(y), \dots, y_n + \xi_n(y))\\ &\qquad = \lambda_j y_j + \psi_j(y) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \xi_j}{\partial y_k}(\lambda_k y_k + \psi_k(y)).\end{aligned}$$

Remarquons que pour $Q \in \mathbb{N}_2^n$, on a $\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial y^Q}{\partial y_k} \lambda_k y_k = (Q, \lambda) y^Q$. Par conséquent, on obtient les relations suivantes pour $1 \leq j \leq n$:

$$\sum_{Q \in \mathbb{N}_2^n} (\delta_{j,Q} \xi_{j,Q} + \psi_{j,Q}) y^Q = f_j(y + \xi) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \xi_j}{\partial y_k} \psi_k \tag{2}$$

avec $\delta_{j,Q} = (Q, \lambda) - \lambda_j$. On se propose alors de résoudre le problème formel de la manière suivante : Soit $\hat{\mathcal{I}}$ (resp. $\mathcal{I}$) l'idéal des séries formelles (resp. des fonctions analytiques) engendré par $u = y^r$. On construit alors les séries ξ_j et ψ_j par récurrence sur la norme $|Q|$ du multiindice Q, en posant pour tout $Q \in \mathbb{N}_2^n$:

– si $y^Q \in \hat{\mathcal{I}}$ alors

$$\begin{aligned}\psi_{j,Q} &= \left\{ f_j(y + \xi) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \xi_j}{\partial y_k} \psi_k \right\}_Q\\ \xi_{j,Q} &= 0\end{aligned}$$

– si $y^Q \notin \hat{\mathcal{I}}$ alors

$$\begin{aligned}\xi_{j,Q} &= \frac{1}{\delta_{j,Q}} \left\{ f_j(y + \xi) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \xi_j}{\partial y_k} \psi_k \right\}_Q\\ \psi_{j,Q} &= 0\end{aligned}$$

où $\{f(y)\}_Q$ désigne le coefficient de y^Q dans le développement de Taylor de f. Ceci détermine bien les séries ξ_j et ψ_j. En effet, soit $Q \in \mathbb{N}_2^n$ un multiindice ; supposons avoir calculé les termes $\xi_{j,Q'}$ et $\psi_{j,Q'}$ pour tous les multiindices Q' tels que $|Q'| < |Q|$. Or,

$$\left\{ f_j(y+\xi) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \xi_j}{\partial y_k} \psi_k \right\}_Q$$

s'exprime comme un polynôme en les $\xi_{j,Q'}$ et $\psi_{j,Q'}$ pour $|Q'| < |Q|$. Il est donc connu par récurrence. D'autre part, par hypothèse, si $\delta_{j,Q} = (Q,\lambda) - \lambda_j = 0$ alors $Q = lr + E_j$ avec $l \in \mathbb{N}^*$, donc $y^Q \in \hat{\mathcal{I}}$. Par conséquent, si $y^Q \notin \hat{\mathcal{I}}$ alors $\delta_{j,Q} \neq 0$.

Remarque 2.2. — Puisque les ψ_i ont tous leurs termes non-nuls dans l'idéal $\hat{\mathcal{I}}$, il en est de même pour les $\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \xi_j}{\partial y_k} \psi_k$. Par conséquent, pour tout multiindice $Q \in \mathbb{N}_2^n$ tel que $y^Q \notin \hat{\mathcal{I}}$, on a

$$\left\{ f_j(y+\xi) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \xi_j}{\partial y_k} \psi_k \right\}_Q = \{f_j(y+\xi)\}_Q.$$

Passons à la démonstration de la convergence de ξ. Reprenons les notations de Siegel : si $\phi = \sum_Q \phi_Q y^Q$ est une série formelle, nous notons $\bar{\phi} = \sum_Q |\phi_Q| y^Q$. Si $\eta = \sum_Q \eta_Q y^Q$, la notation $\eta \prec \phi$ signifie que, pour tout multiindice Q, $|\eta_Q| \leq |\phi_Q|$. On notera

$$\delta_Q = \inf_{1\leq k\leq n} \{|\delta_{k,Q}|\}, \quad \tilde{\xi}_Q = \sum_{k=1}^{n} |\xi_{k,Q}|,$$
$$\tilde{\xi}(y) = \sum_{Q\in\mathbb{N}_2^n} \tilde{\xi}_Q y^Q \quad \text{et} \quad \mathbb{N}_k^n \setminus \hat{\mathcal{I}} = \{Q \in \mathbb{N}_k^n \mid y^Q \notin \hat{\mathcal{I}}\}.$$

Faisons tout d'abord deux remarques que nous utiliserons constamment par la suite :

Remarque 2.3. — Pour tout $Q \in \mathbb{N}_2^n \setminus \hat{\mathcal{I}}$, $\delta_Q \neq 0$. De plus, $\tilde{\xi}(y) = \sum_{Q\in\mathbb{N}_2^n\setminus\hat{\mathcal{I}}} \tilde{\xi}_Q y^Q$ par construction. On a aussi $\tilde{\xi}(y) = \sum_{j=1}^{n} \bar{\xi}_j(y)$.

Remarque 2.4. — Soit $f \in \mathbb{C}[[x_1,\ldots,x_n]]$ une série formelle. Soit J un ensemble de monômes (éventuellement infini). Soit $\pi_J \bar{f}$ la projection de $\bar{f}$

sur J. On a alors $\pi_J \bar{f} \prec \bar{f}$. Dans la suite, J sera généralement les monômes d'un idéal ou d'un complémentaire d'un idéal dans un autre. De même, soient $f, g, \xi_1, \ldots, \xi_n$ des séries formelles en les variables $x_1, \ldots, x_n$ telles que $g(x_1, \ldots, x_n) = f(\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Alors, $\bar{g}(x_1, \ldots, x_n) \prec \bar{f}(\bar{\xi}_1, \ldots, \bar{\xi}_n)$. Il suffit, en effet, d'appliquer l'inégalité triangulaire à tous les modules de sommes dans les expressions des modules des coefficients de la série $f(\xi_1, \ldots, \xi_n)$.

Par construction, on a

$$\forall 1 \leq j \leq n, \forall Q \in \mathbb{N}_2^n \setminus \hat{\mathcal{I}}, \ \ |\xi_{j,Q}||\delta_{j,Q}| = |\{f_j(y+\xi)\}_Q| \leq \{\bar{f}_j(y+\bar{\xi})\}_Q$$

d'après la remarque précédente. En sommant, sur $1 \leq j \leq n$, il vient

$$\forall Q \in \mathbb{N}_2^n \setminus \hat{\mathcal{I}}, \ \ \delta_Q \sum_{j=1}^{n} |\xi_{j,Q}| \leq \sum_{j=1}^{n} |\xi_{j,Q}||\delta_{j,Q}| \leq \left\{ \sum_{j=1}^{n} \bar{f}_j(y+\bar{\xi}) \right\}_Q$$

car, d'après la remarque 2.3, $\forall 1 \leq j \leq n, \forall Q \in \mathbb{N}_2^n \setminus \hat{\mathcal{I}}, \ \ \delta_{j,Q} \neq 0$.

Les fonctions f_j étant analytiques et 1-plates au voisinage de l'origine, il existe deux constantes $a, b > 0$ telles que

$$\sum_{j=1}^{n} \bar{f}_j(x_1, \ldots, x_n) \prec \frac{a\left(\sum\limits_{j=1}^{n} x_j\right)^2}{1 - b\left(\sum\limits_{j=1}^{n} x_j\right)}.$$

On en déduit que

$$\forall Q \in \mathbb{N}_2^n, \ \ \left\{ \sum_{j=1}^{n} \bar{f}_j(y+\bar{\xi}) \right\}_Q \leq \left\{ \frac{a\left(\sum\limits_{j=1}^{n} y_j + \bar{\xi}_j\right)^2}{1 - b\left(\sum\limits_{j=1}^{n} y_j + \bar{\xi}_j\right)} \right\}_Q$$

car le développement de Taylor de $\dfrac{a\left(\sum\limits_{j=1}^{n} y_j + \bar{\xi}_j\right)^2}{1 - b\left(\sum\limits_{j=1}^{n} y_j + \bar{\xi}_j\right)}$ est une série à coefficients positifs. Finalement, on obtient :

$$\forall Q \in \mathbb{N}_2^n \setminus \hat{\mathcal{I}}, \ \ \delta_Q \tilde{\xi}_Q \leq \left\{ \frac{a\left(\sum\limits_{j=1}^{n} y_j + \tilde{\xi}\right)^2}{1 - b\left(\sum\limits_{j=1}^{n} y_j + \tilde{\xi}\right)} \right\}_Q . \tag{3}$$

Construisons, par récurrence sur la norme $|Q|$ du multiindice Q, la série $\sigma(y) = \sum_{Q \in \mathbb{N}_2^n} \sigma_Q y^Q$ de la manière suivante :

$$\forall Q \in \mathbb{N}_2^n \setminus (\mathbb{N}_2^n \setminus \hat{\mathcal{I}}) \quad \sigma_Q = 0$$

$$\forall Q \in \mathbb{N}_2^n \setminus \hat{\mathcal{I}} \quad \sigma_Q = \left\{ \frac{a\left(\sum_{j=1}^n y_j + \sigma\right)^2}{1 - b\left(\sum_{j=1}^n y_j + \sigma\right)} \right\}_Q .$$

Lemme 2.1. — *La série σ est convergente dans un voisinage de $0 \in \mathbb{C}^n$.*

Preuve. — Considérons la fonction

$$F(y_1, \ldots, y_n, v) = \frac{a\left(v + \sum_{i=1}^n y_i\right)^2}{1 - b\left(v + \sum_{i=1}^n y_i\right)} - v.$$

Les fonctions F et $\frac{\partial F}{\partial v}$ sont analytiques au voisinage de $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$; en outre, on a $F(0,0) = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial v}(0,0) = -1 \neq 0$. Donc, d'après le théorème des fonctions implicites, il existe une unique fonction $\tilde{\sigma}$ analytique au voisinage $0 \in \mathbb{C}^n$ telle que

$$\tilde{\sigma}(0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{a\left(\tilde{\sigma} + \sum_{i=1}^n y_i\right)^2}{1 - b\left(\tilde{\sigma} + \sum_{i=1}^n y_i\right)} = \tilde{\sigma}; \quad \text{on écrira } \tilde{\sigma} = \sum_{Q \in \mathbb{N}_2^n} \tilde{\sigma}_Q y^Q$$

car, au regard de l'équation qu'elle satisfait, la différentielle de $\tilde{\sigma}$ en 0 est nulle. Montrons alors, par récurrence sur la norme $|Q|$ du multiindice Q, que $\forall Q \in \mathbb{N}_2^n \setminus \hat{\mathcal{I}}$, $\sigma_Q = \tilde{\sigma}_Q$. En effet, pour tout multiindice $P \in \mathbb{N}_2^n \setminus \hat{\mathcal{I}}$, tel que $|P| = 2$ (de tels multiindices existent), on a

$$\tilde{\sigma}_P = \left\{ a\left(\sum_{j=1}^n y_j\right)^2 \right\}_Q = \sigma_P$$

Supposons la propriété vraie jusqu'à l'ordre $k \geq 2$. Soit $Q \in \mathbb{N}_2^n \setminus \hat{\mathcal{I}}$ tel que $|Q| = k+1$, alors :

$$\tilde{\sigma}_Q = \left\{ \frac{a\left(\sum\limits_{j=1}^{n} y_j + \tilde{\sigma}\right)^2}{1 - b\left(\sum\limits_{j=1}^{n} y_j + \tilde{\sigma}\right)} \right\}_Q = \left\{ \frac{a}{b^2} \sum_{p=2}^{|Q|} b^p \left(\sum_{j=1}^{n} y_j + \tilde{\sigma} \right)^p \right\}_Q$$

$$= \frac{a}{b^2} \sum_{p=2}^{|Q|} b^p \left\{ \left(\sum_{j=1}^{n} y_j + \tilde{\sigma} \right)^p \right\}_Q .$$

Or,

$$\left\{ \left(\sum_{j=1}^{n} y_j + \tilde{\sigma} \right)^p \right\}_Q = \sum_{k=0}^{p} C_p^k \left(\sum_{\substack{S_1, S_2 \in \mathbb{N}^n \\ S_1 + S_2 = Q}} \left(\left\{ \left(\sum_{j=1}^{n} y_j \right)^{p-k} \right\}_{S_1} \{\tilde{\sigma}^k\}_{S_2} \right) \right).$$

On a $S_1, S_2 \in \left(\mathbb{N}^n \setminus \hat{\mathcal{I}} \cup \{0\}\right)^2$. Si $k \neq p$ et si $|S_1| < p - k$ alors $\left\{ \left(\sum\limits_{j=1}^{n} y_j \right)^{p-k} \right\}_{S_1} = 0$; donc, les multiindices S_2 qui apparaissent effectivement dans la somme vérifient $|S_2| \leq |Q| + k - p$. Si $k = p$ alors $S_2 = Q$. Si $k \neq 0$ alors si $|S_2| \leq 2k - 1$ alors $\{\tilde{\sigma}^k\}_{S_2} = 0$. Si $k = 1$, alors pour $S_2 \in \mathbb{N}_2^n$ et $|S_2| \leq |Q| + 1 - p$, on a $\{\tilde{\sigma}^k\}_{S_2} = \tilde{\sigma}_{S_2} = \sigma_{S_2}$. Si $k \geq 2$, on a

$$\{\tilde{\sigma}^k\}_{S_2} = \sum_{Q_1 + \cdots + Q_k = S_2} \tilde{\sigma}_{Q_1} \cdots \tilde{\sigma}_{Q_k}$$

la somme portant sur les ensembles de k multiindices $Q_1, \ldots, Q_k$ qui vérifient

$$\forall 1 \leq j \leq k, \;\; Q_j \in \mathbb{N}_2^n, \;\; |Q_j| < |S_2| \leq |Q|.$$

De plus, puisque $Q \in \mathbb{N}_2^n \setminus \hat{\mathcal{I}}$, alors $\forall 1 \leq j \leq p', \;\; Q_j \in \mathbb{N}_2^n \setminus \hat{\mathcal{I}}$. Par hypothèse de récurrence, $\forall 1 \leq j \leq k, \;\; \tilde{\sigma}_{Q_j} = \sigma_{Q_j}$. D'où, il vient

$$\left\{ \left(\sum_{j=1}^{n} y_j + \tilde{\sigma} \right)^p \right\}_Q = \left\{ \left(\sum_{j=1}^{n} y_j + \sigma \right)^p \right\}_Q$$

c'est-à-dire

$$\tilde{\sigma}_Q = \left\{ \frac{a\left(\sum_{j=1}^{n} y_j + \tilde{\sigma}\right)^2}{1 - b\left(\sum_{j=1}^{n} y_j + \tilde{\sigma}\right)} \right\}_Q = \left\{ \frac{a\left(\sum_{j=1}^{n} y_j + \sigma\right)^2}{1 - b\left(\sum_{j=1}^{n} y_j + \sigma\right)} \right\}_Q = \sigma_Q,$$

d'où le résultat. □

Remarque 2.5. — Si les nombres $|(Q,\lambda) - \lambda_i|$, avec $Q \in \mathbb{N}_2^n \setminus \hat{\mathcal{I}}$, ne s'accumulent pas sur 0 lorsque $|Q| \to +\infty$, il existe alors une constante $\epsilon > 0$ qui les minore. La relation 3 devient alors

$$\forall Q \in \mathbb{N}_2^n \setminus \hat{\mathcal{I}}, \quad \epsilon\tilde{\xi}_Q \leq \left\{ \frac{a\left(\sum_{j=1}^{n} y_j + \tilde{\xi}\right)^2}{1 - b\left(\sum_{j=1}^{n} y_j + \tilde{\xi}\right)} \right\}_Q .$$

Dans ce cas, la démonstration de la proposition est terminée. En effet, il suffit de prendre la fonction σ, analytique au voisinage de l'origine, définie précédement, où l'on a remplacé a par a/ϵ. On montre alors, par récurrence sur la norme $|Q|$ du multiindice Q, que $\forall Q \in \mathbb{N}_2^n \setminus \hat{\mathcal{I}}, \quad \tilde{\xi}_Q \leq \sigma_Q$. Pour ce faire, on reprend textuellement la preuve de récurrence du lemme précédent en remplaçant, pour tout $Q \in \mathbb{N}_2^n \setminus \hat{\mathcal{I}}$, $\tilde{\sigma}_Q$ par $\tilde{\xi}_Q$ ainsi que l'égalité $\tilde{\sigma}_Q = \sigma_Q$ par l'inégalité $\tilde{\xi} \leq \sigma_Q$, les sommes et produits ne faisant intervenir que des nombres positifs.

Dans la suite nous nous intéresserons uniquement au cas où il y a effectivement des petits diviseurs.

Considérons la suite $\{\eta_Q\}_{Q \in \mathbb{N}_1^n \setminus \hat{\mathcal{I}}}$ definie par

1. $\forall P \in \mathbb{N}_1^n \setminus \hat{\mathcal{I}}$ tel que $|P| = 1$, $\eta_P = 1$ (de tels multiindices existent),
2. $\forall Q \in \mathbb{N}_2^n \setminus \hat{\mathcal{I}}$,

$$\delta_Q \eta_Q = \max_{\substack{Q_j \in \mathbb{N}_1^n, S \in \mathbb{N}^n \\ Q_1 + \cdots + Q_p + S = Q}} \eta_{Q_1} \cdots \eta_{Q_p},$$

le maximum étant pris sur les ensembles de $p+1$, $1 \leq p \leq |Q|$ multiindices $Q_1, \ldots, Q_p, S$ tels que $\forall 1 \leq j \leq p$, $Q_j \in \mathbb{N}_1^n$, $|Q_j| < |Q|$, $S \in \mathbb{N}^n$. Ces ensembles sont non-vides.

Cette suite est bien définie. En effet, si $Q \in \mathbb{N}_2^n \setminus \hat{\mathcal{I}}$, alors il existe des multiindices $Q_1, \ldots, Q_p, S$ tels que $Q = Q_1 + \ldots + Q_p + S$, $\forall 1 \leq j \leq$

p, $Q_j \in \mathbb{N}_1^n$, $|Q_j| < |Q|$, $S \in \mathbb{N}^n$; dans ce cas, $\forall 1 \leq j \leq p$, $Q_j \in \mathbb{N}_1^n \setminus \hat{\mathcal{I}}$. Le point suivant est primordial.

LEMME 2.2. — *Pour tout multiindice $Q \in \mathbb{N}_2^n \setminus \hat{\mathcal{I}}$, on a $\tilde{\xi}_Q \leq \sigma_Q \eta_Q$.*

Preuve. — On montre le résultat par récurrence sur la norme $|Q|$ du multiindice Q. A l'ordre 2, on a, pour tout $Q \in \mathbb{N}_2^n \setminus \hat{\mathcal{I}}$, $|Q| = 2$,

$$\delta_Q \tilde{\xi}_Q \leq \left\{ a \left(\sum_{i=1}^{n} y_i \right)^2 \right\}_Q = \sigma_Q.$$

Or, par définition, $1 \leq \delta_Q \eta_Q$. En effet, on a $Q = P + S$ avec $|P| = |S| = 1$, $(P, S) \in \left(\mathbb{N}_1^n \setminus \hat{\mathcal{I}}\right)^2$; donc, $1 = \eta_P \leq \delta_Q \eta_Q$.

Supposons le résultat vrai pour tout multiindice $Q \in \mathbb{N}_2^n \setminus \hat{\mathcal{I}}$ tel que $|Q| \leq k$ ($k \geq 2$). Soit alors un multiindice $Q \in \mathbb{N}_2^n \setminus \hat{\mathcal{I}}$ tel que $|Q| = k + 1$. L'inégalité 3 s'écrit

$$\begin{aligned} \delta_Q \tilde{\xi}_Q \leq \left\{ \frac{a\left(\sum\limits_{j=1}^{n} y_j + \tilde{\xi}\right)^2}{1 - b\left(\sum\limits_{j=1}^{n} y_j + \tilde{\xi}\right)} \right\}_Q &= \left\{ \frac{a}{b^2} \sum_{p \geq 2} b^p \left(\sum_{j=1}^{n} y_j + \tilde{\xi} \right)^p \right\}_Q \\ &= \frac{a}{b^2} \sum_{p=2}^{|Q|} b^p \left\{ \left(\sum_{j=1}^{n} y_j + \tilde{\xi} \right)^p \right\}_Q . \end{aligned}$$

Or,

$$\left\{ \left(\sum_{j=1}^{n} y_j + \tilde{\xi} \right)^p \right\}_Q = \sum_{k=0}^{p} C_p^k \left(\sum_{\substack{S_1, S_2 \in \mathbb{N}^n \\ S_1 + S_2 = Q}} \left(\left\{ \left(\sum_{j=1}^{n} y_j \right)^{p-k} \right\}_{S_1} \left\{ \tilde{\xi}^k \right\}_{S_2} \right) \right).$$

On a $S_1, S_2 \in \left(\mathbb{N}^n \setminus \hat{\mathcal{I}} \cup \{0\}\right)^2$. Si $k \neq p$ et si $|S_1| \leq p - k - 1$ alors $\left\{ \left(\sum\limits_{j=1}^{n} y_j \right)^{p-k} \right\}_{S_1} = 0$; donc, les multiindices S_2 qui apparaissent effectivement dans la somme vérifient $|S_2| \leq |Q| + k - p$. Si $k = p$ alors $S_2 = Q$. Si $k \neq 0$ et si $|S_2| \leq 2k - 1$ alors $\left\{ \tilde{\xi}^k \right\}_{S_2} = 0$ car l'ordre de $\tilde{\xi}$ est supérieur ou égal à 2. Si $k=1$, alors pour $S_2 \in \mathbb{N}_2^n$ et $|S_2| \leq |Q|+1-p$, on a $\left\{\tilde{\xi}^k\right\}_{S_2} = \tilde{\xi}_{S_2}$. Par hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned}\left\{\tilde{\xi}^k\right\}_{S_2} &\leq \eta_{S_2}\sigma_{S_2}\\ &\leq \left(\max_{S_1+S_2=Q}\eta_{S_2}\right)\sigma_{S_2},\end{aligned}$$

le maximum étant pris sur les couples de multiindices (S_1, S_2) tel que $2 \leq |S_2| < |Q|$. Si $k \geq 2$, on a

$$\left\{\tilde{\xi}^k\right\}_{S_2} = \sum_{Q_1+\cdots+Q_k=S_2} \tilde{\xi}_{Q_1}\cdots\tilde{\xi}_{Q_k}$$

la somme portant sur les ensembles de k multiindices $Q_1, \ldots, Q_k$ qui vérifient $\forall 1 \leq j \leq k,\ \ Q_j \in \mathbb{N}_2^n,\ \ |Q_j| < |S_2| \leq |Q|$. De plus, puisque $Q \in \mathbb{N}_2^n \setminus \hat{\mathcal{I}}$, alors $\forall 1 \leq j \leq p',\ \ Q_j \in \mathbb{N}_2^n \setminus \hat{\mathcal{I}}$. Par hypothèse de récurrence, $\forall 1 \leq j \leq k,\ \ \tilde{\xi}_{Q_j} \leq \eta_{Q_j}\sigma_{Q_j}$. Il vient alors

$$\begin{aligned}\left\{\tilde{\xi}^k\right\}_{S_2} &\leq \sum_{Q_1+\cdots+Q_k=S_2} \eta_{Q_1}\cdots\eta_{Q_k}\sigma_{Q_1}\cdots\sigma_{Q_k}\\ &\leq \max_{Q_1+\cdots+Q_k=S_2}\eta_{Q_1}\cdots\eta_{Q_k}\sum_{Q_1+\cdots+Q_k=S_2}\sigma_{Q_1}\cdots\sigma_{Q_k}\end{aligned}$$

le maximum et la somme portant sur les ensembles de k multiindices $Q_1, \ldots, Q_k$ qui vérifient $\forall 1 \leq j \leq k,\ \ Q_j \in \mathbb{N}_2^n,\ \ |Q_j| < |S_2|$. Ce maximum est inférieur au maximum

$$\max_{Q_1+\cdots+Q_{p'}+S=Q}\eta_{Q_1}\cdots\eta_{Q_{p'}}$$

portant sur les ensembles de $p'+1$ multiindices $Q_1, \ldots, Q_{p'}, S$, $1 \leq p' \leq |Q|$, qui vérifient $\forall 1 \leq j \leq p,\ \ Q_j \in \mathbb{N}_1^n \setminus \hat{\mathcal{I}},\ \ |Q_j| < |Q|,\ \ S \in \mathbb{N}^n \setminus \hat{\mathcal{I}} \cup \{0\}$. De plus, ce maximum est supérieur à 1 ; donc,

$$\begin{aligned}\left\{\left(\sum_{j=1}^n y_j + \tilde{\xi}\right)^p\right\}_Q &\leq \max_{Q_1+\cdots+Q_{p'}+S=Q}\eta_{Q_1}\cdots\eta_{Q_{p'}}\\ &\quad\times\sum_{k=0}^p C_p^k\left(\sum_{\substack{S_1,S_2\in\mathbb{N}^n\\ S_1+S_2=Q}}\left(\left\{\left(\sum_{j=1}^n y_j\right)^{p-k}\right\}_{S_1}\left\{\sigma^k\right\}_{S_2}\right)\right)\end{aligned}$$

le maximum portant sur les ensembles de $p'+1$ multiindices $Q_1,\dots,Q_{p'},S$, $1\le p'\le |Q|$, qui vérifient $\forall 1\le j\le p,\quad Q_j\in\mathbb{N}_1^n\setminus\hat{\mathcal{I}},\quad |Q_j|<|Q|,\quad S\in\mathbb{N}^n\setminus\hat{\mathcal{I}}\cup\{0\}$. En sommant sur $2\le p\le |Q|$, il vient alors

$$\delta_Q\tilde{\xi}_Q\le \max_{Q_1+\cdots+Q_{p'}+S=Q}\eta_{Q_1}\cdots\eta_{Q_{p'}}\left(\frac{a}{b^2}\sum_{p=2}^{|Q|}b^p\left\{\left(\sum_{j=1}^n y_j+\sigma\right)^p\right\}_Q\right),$$

le maximum portant sur les ensembles de $p'+1$ multiindices $Q_1,\dots,Q_{p'},S$, $1\le p'\le |Q|$, qui vérifient $\forall 1\le j\le p,\quad Q_j\in\mathbb{N}_1^n\setminus\hat{\mathcal{I}},\quad |Q_j|<|Q|,\quad S\in\mathbb{N}^n\setminus\hat{\mathcal{I}}\cup\{0\}$. Par définition, on a alors $\delta_Q\tilde{\xi}_Q\le\delta_Q\eta_Q\sigma_Q$, soit $\tilde{\xi}_Q\le\eta_Q\sigma_Q$ car $\delta_Q\ne 0$. □

Suivant la démonstration de Bruno [Bru72], nous allons montrer le

LEMME 2.3. — *Il existe une constante $c>0$ telle que $\forall Q\in\mathbb{N}_2^n\setminus\hat{\mathcal{I}},\ \eta_Q\le c^{|Q|}$.*

Il est clair, au regard de la définition de la suite η_Q, que η_Q est un produit de termes $1/\delta_{Q'}$ avec $|Q'|\le|Q|$. Pour un entier k, soit $\phi^{(k)}(Q)$ le nombre des $1/\delta_{Q'}$ intervenant dans ce produit et tels que $\delta_{Q'}<\omega(p_k)/2$. Le lemme précédent est une conséquence de la

PROPOSITION 2.2 (Estimation du nombre de petits diviseurs). — *Pour tout multiindice $Q\in\mathbb{N}_2^n\setminus\hat{\mathcal{I}}$, on a $\phi^{(k)}(Q)\le 2n\dfrac{|Q|}{p_k}$ si $|Q|\ge p_k+1$; et $\phi^{(k)}(Q)=0$ si $|Q|\le p_k$.*

Nous renvoyons la preuve à la section suivante.

Nous pouvons maintenant conclure quant à la majoration de η_Q. En effet, $\phi^{(k)}(Q)$ majore le nombre de facteurs $1/\delta_{Q'}$ figurant dans le produit définissant η_Q et vérifiant $\omega(p_{k+1})/2\le\delta_{Q'}<\omega(p_k)/2$. Soit l l'entier tel que $p_l+1\le|Q|<p_{l+1}+1$; on a alors

$$\eta_Q\le\prod_{k=0}^{l}\left(\frac{2}{\omega(p_{k+1})}\right)^{\phi^{(k)}(Q)}.$$

En prenant le Logarithme et en utilisant la proposition 2.2, on a

$$\begin{aligned}\ln\eta_Q&\le\sum_{k=0}^{l}2n\frac{|Q|}{p_k}\left(\ln\frac{2}{\omega(p_{k+1})}\right)\\&\le|Q|\left(-2n\sum_{k\ge0}\frac{\ln\omega(p_{k+1})}{p_k}+2n\ln2\sum_{k\ge0}\frac{1}{p_k}\right)\end{aligned}$$

puisque (ω) est satisfaite ; d'où $\eta_Q \leq c^{|Q|}$ pour une constante $c > 0$.

Remarque 2.6. — Comme le remarque Bruno [Bru72], il n'est pas nécessaire de supposer la convergence de $\sum_{k\geq 0} \frac{1}{p_k}$ dans le cas qui nous intéresse ici – à savoir – $\lim_{k\to+\infty} \omega(p_k) = 0$. En effet, à partir d'un certain rang k_0, on a $\omega(p_k) \leq \omega(p_{k_0}) \leq 1$; ce qui amène à

$$\sum_{k\geq k_0} \frac{1}{p_k} \leq \frac{1}{-\ln \omega(p_{k_0})} \sum_{k\geq k_0} \frac{-\ln \omega(p_{k+1})}{p_k} < +\infty.$$

La convergence de $\tilde{\xi} = \bar{\xi}_1 + \cdots + \bar{\xi}_n$, et donc celle de $\xi = (\xi_i)_{1\leq i\leq n}$, est alors immédiate. En effet, σ est analytique au voisinage de 0 donc il existe une constante $d > 0$ telle que pour tout multiindice $Q \in \mathbb{N}_2^n \setminus \hat{\mathcal{I}}$, $\sigma_Q \leq d^{|Q|}$. Par conséquent, d'après le lemme 2.2, on a, pour tout multiindice $Q \in \mathbb{N}_2^n \setminus \hat{\mathcal{I}}$, $\tilde{\xi}_Q \leq \sigma_Q \eta_Q \leq a^{|Q|}$ où $a \in \mathbb{R}_+^*$. Ceci montre la convergence du difféomorphisme *prénormalisant*.

Il nous reste à montrer que le champ de vecteurs, dans les nouvelles coordonnées, est analytique au voisinage de l'origine ; c'est-à-dire que les séries ψ_i convergent au voisinage de 0. Ceci se fait sans difficulté maintenant que l'on sait que ξ est convergente. En effet, reprenons l'équation 2, en la projetant cette fois sur $\hat{\mathcal{I}}$. Puisque, par construction, les séries ψ_i ont tous leurs termes non nuls dans l'idéal $\hat{\mathcal{I}}$ alors que $\sum_{|Q|\geq 2} \delta_{i,Q}\xi_{i,Q} y^Q$ n'en a aucun, on obtient, après une majoration large(remarque 2.4),

$$\bar{\psi}_j(y) \prec \bar{f}_j(y_1 + \bar{\xi}_1, \ldots, y_n + \bar{\xi}_n) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \bar{\xi}_j}{\partial y_k} \bar{\psi}_k. \tag{4}$$

La fonction $\bar{f}_j(y_1 + \bar{\xi}_1, \ldots, y_n + \bar{\xi}_n)$ est connue, analytique et 1-plate au voisinage de l'origine. On regarde donc les équations $v_j = \bar{f}_j(y_1 + \bar{\xi}_1, \ldots, y_n + \bar{\xi}_n) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \bar{\xi}_j}{\partial y_k} v_k$ dont les v_j sont les inconnues, pour $1 \leq j \leq n$. Ces équations s'écrivent sous la forme $(\mathrm{Id}_n - D\bar{\xi}(y))v = \bar{f}(y_1 + \bar{\xi}_1, \ldots, y_n + \bar{\xi}_n)$ avec $v = (v_j)_{1\leq j\leq n}$ et $f = (f_j)_{1\leq j\leq n}$. Or, pour y suffisamment petit, la matrice $(\mathrm{Id}_n - D\bar{\xi}(y))$ (Id_n désigne la matrice identité de $\mathbb{C}^n$) est inversible et $v = (\mathrm{Id}_n - D\bar{\xi}(y))^{-1}\bar{f}(y_1 + \bar{\xi}_1, \ldots, y_n + \bar{\xi}_n)$ est analytique au voisinage de l'origine, car la fonction $D\bar{\xi}(y)$ converge au voisinage de $0 \in \mathbb{C}^n$ et est nulle en ce point. On montre alors que $\psi_j \prec v_j$, pour $1 \leq j \leq n$. Ainsi, ψ_j appartient à l'idéal $\mathcal{I}$ des fonctions analytiques au voisinage de l'origine engendré par $u = y^r$; ce qui conclut la preuve de la proposition. □

2.1. Fin de la preuve du théorème.

Reprenons la démonstration par récurrence du théorème 1.1. Nous venons de montrer qu'il est vrai pour $m = 0$, c'était l'objectif de la proposition 2.1. Supposons maintenant le théorème vrai à l'ordre m. Le système 1 s'écrit donc, dans un système de coordonnées analytiques locales au voisinage de $0 \in \mathbb{C}^n$, sous la forme :

$$\dot{x}_j = x_j(\lambda_j + P_{j,m}(x^r)) + (x^r)^{m+1} f_j(x), \quad 1 \leq j \leq n \tag{5}$$

où les f_j sont analytiques à l'origine; si en outre $|r| = 1$ alors $f_j(0) = 0$, ceci afin d'assurer que $\operatorname{ord}(u^{m+1} f_j(x)) > m|r| + 1$. En effectuant le changement de coordonnées $x_j = y_j + \xi_j(y)$ analytiques au voisinage de l'origine, nous voulons transformer ce système en un système de la forme

$$\dot{y}_j = y_j(\lambda_j + P_{j,m+1}(y^r)) + (y^r)^{m+2} \tilde{g}_j(y), \quad 1 \leq j \leq n$$

où $P_{j,m+1}(U) \in \mathbb{C}[U]$ est un polynôme sans terme constant de degré inférieur ou égal à $m+1$ et $\tilde{g}_j(y)$ une fonction analytique, nulle en zéro lorsque $|r| = 1$. Ce changement de coordonnées se fait en deux étapes :

- la première étape consiste à faire un changement de variables polynomial $x_j = z_j + h_j(z)$, permettant de faire apparaître les termes résonnants $z_j u^{m+1} \partial_{z_j}$. On peut écrire $h_j = (z^r)^{m+1} \tilde{h}_j$; les polynômes $\tilde{h}_j$ sont de degré inférieur ou égal 1; si en outre $r = 1$, alors ils sont nuls en 0. Dans ce système de coordonnées locales, le système 5, s'écrit

  $$\dot{z}_j = z_j(\lambda_j + P_{j,m+1}(z^r)) + (z^r)^{m+1} g_j(z), \quad 1 \leq j \leq n$$

  où $P_{j,m+1}(U) \in \mathbb{C}[U]$ est un polynôme sans terme constant de degré inférieur ou égal à $m+1$ et $g_j(z)$ une fonction analytique telle que $g_j(0) = 0$ et $Dg_j(0) = 0$. De plus, il existe des nombres complexes c_j tels que $P_{j,m+1}(U) - P_{j,m}(U) = c_j U^{m+1}$.
- la deuxième étape consiste à transformer le "reste" en un élément de l'idéal $\mathcal{I}_{m+2}$ des fonctions analytiques engendré par $(y^r)^{m+2}$; c'est-à-dire que, dans un système de coordonnées locales analytiques au voisinage de l'origine $z_j = y_j + \xi_j(y)$, le système précédent s'écrit sous la forme 6.

Ces deux étapes peuvent se traiter simultanément; néanmoins, nous préférons les distinguer, quitte à accepter une certaine redondance.

Commençons par la première étape. Afin d'alléger l'écriture, nous la faisons dans le cas où $|r| \geq 2$. Le cas $|r| = 1$ se traite de manière identique, sauf qu'il y a un ordre de moins à enlever. Posons $R_{j,m}(x) =$

$x_jP_{j,m}(x^r)$, $\phi_j(x) = (x^r)^{m+1}f_j(x)$. En faisant le changement de variables $x_j = z_j + h_j(z)$, où h_j est un polynôme de valuation $(m+1)|r|$ et de degré $(m+1)|r|+1$, on obtient un système

$$\dot{z}_j = z_j(\lambda_j + P_{j,m}(z^r)) + \psi_j(z),\ \ 1 \le j \le n.$$

Les relations entre les ϕ_j, ψ_j et h_j s'obtiennent de la même manière que lors de la preuve de la proposition 2.1. On a alors, pour $1 \le j \le n$:

$$\text{(7)}\quad \sum_{Q\ \in \mathbb{N}^n_{(m+1)|r|}} (\delta_{j,Q}h_{j,Q} + \psi_{j,Q})z^Q = \phi_j(z+h) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial h_j}{\partial z_k}(R_{k,m} + \psi_k) + R_{j,m}(z+h) - R_{j,m}(z)$$

avec $\delta_{j,Q} = (Q,\lambda) - \lambda_j$. On résoud le problème formel de la manière suivante : Pour tout $1 \le j \le n$ et pour tout multiindice $Q \in \mathbb{N}^n_{(m+1)|r|}$, on pose :

– si $z^Q = z_j(z^r)^{m+1}$ ou $|Q| \ge (m+1)|r| + 2$ alors,

$$\psi_{j,Q} = \left\{ R_{j,m}(z+h) - R_{j,m}(z) + \phi_j(z+h) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial h_j}{\partial z_k}(R_{k,m} + \psi_k) \right\}_Q$$

$$h_{j,Q} = 0$$

– si $z^Q \ne z_j(z^r)^{m+1}$ et $|Q| \le (m+1)|r| + 1$ alors,

$$h_{j,Q} = \frac{1}{\delta_{j,Q}} \left\{ R_{j,m}(z+h) - R_{j,m}(z) + \phi_j(z+h) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial h_j}{\partial z_k}(R_{k,m} + \psi_k) \right\}_Q$$

$$\psi_{j,Q} = 0$$

où $\{f(z)\}_Q$ désigne le coefficient de z^Q dans le développement de Taylor de f. On a alors le

Lemme 2.4. — *La construction ci-dessus définit bien, par récurrence, les séries formelles ψ_j et les polynômes h_j et ils appartiennent à l'idéal $\hat{\mathcal{I}}_{m+1}$.*

Preuve. — Il s'agit de démontrer, par récurrence sur la norme $|Q|$ du multiindice Q, que

$$A_{j,Q} \equiv \left\{ R_{j,m}(z+h) - R_{j,m}(z) + \phi_j(z+h) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial h_j}{\partial z_k}(R_{k,m} + \psi_k) \right\}_Q = 0$$

si $z^Q \notin \hat{\mathcal{I}}_{m+1}$.

Pour tout multiindice Q tel que $|Q| = (m+1)|r|$, on a

$$A_{j,Q} = \{\phi_j(z)\}_Q = \left\{(z^r)^{m+1} f_j(z)\right\}_Q.$$

Donc, si $z^Q \notin \hat{\mathcal{I}}_{m+1}$, alors $A_{j,Q} = 0$. De plus, puisque $|Q| = (m+1)|r|$, si $z^Q \in \hat{\mathcal{I}}_{m+1}$, alors $Q = (m+1)r$, et donc $\delta_{j,Q} = -\lambda_j \neq 0$(si une des valeurs propres était nulle, on serait dans le cas $|r| = 1$ et cette étape n'aurait pas lieu d'être car on commencerait à l'ordre $(m+1)|r|+1)$; donc, $h_{j,Q}$ et $\psi_{j,Q}$ sont bien définis.

Soit $k_0 \geq (m+1)|r|$ un entier. Supposons que pour tout multiindice Q tel que $|Q| \leq k_0$ on ait

- $A_{j,Q} = 0$ si $z^Q \notin \hat{\mathcal{I}}_{m+1}$;
- les développements de Taylor à l'ordre k_0 de ψ_j et de h_j sont bien définis et appartiennent à $\hat{\mathcal{I}}_{m+1}$.

Commençons par réécrire les différents termes qui composent le membre de droite de l'équation 7.

$$\phi_j(z+h) = (z^r)^{m+1} f_j(z) + h_1(z) H_{1,j}(z, h_1, \ldots, h_n) \\ + \cdots + h_n(z) H_{n,j}(z, h_1, \ldots, h_n),$$

$H_{1,j} \ldots, H_{n,j}$ étant des séries formelles en les $2n$ variables $z_1, \ldots, z_n, h_1, \ldots, h_n$. De plus, on a :

$$(8)\ R_{j,m}(z+h) - R_{j,m}(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial R_{j,m}}{\partial z_k}(z).h_k + \frac{1}{2} \sum_{k,l} \frac{\partial^2 R_{j,m}}{\partial z_k \partial z_l}(z).h_k h_l \\ + \cdots \quad \text{et}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial h_j}{\partial z_k}(R_{k,m}(z) + \psi_k(z)) = \sum_{k=1}^{n} z_k \frac{\partial h_j}{\partial z_k} P_{k,m}(z^r) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial h_j}{\partial z_k} \psi_k(z).$$

Soient alors $1 \leq j \leq n$ et $Q \in \mathbb{N}^n_{k_0+1}$. De l'équation 7, on obtient que $A_{j,Q}$ s'écrit comme la somme du terme

$$\left\{(z^r)^{m+1} f_j(z) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial h_j}{\partial z_k} \psi_k(z)\right\}_Q \quad \text{et des termes}$$

$$\left\{h_1(z) H_{1,j} + \cdots + h_n(z) H_{n,j} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial R_{j,m}}{\partial z_k}(z).h_k \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial^2 R_{j,m}}{\partial z_k \partial z_l}(z).h_k h_l + \cdots \right\}_Q \quad \text{et} \quad \left\{\sum_{k=1}^{n} z_k \frac{\partial h_j}{\partial z_k} P_{k,m}(z^r)\right\}_Q.$$

Par hypothèse de récurrence, ils sont nuls si $z^Q \notin \hat{\mathcal{I}}_{m+1}$. De plus, si $|Q| \geq (m+1)|r|+1$, $z^Q \in \hat{\mathcal{I}}_{m+1}$ et $z^Q \neq z_j(z^r)^{m+1}$, alors $Q = (m+1)r+E_i$ avec $i \neq j$; donc $\delta_{j,Q} = \lambda_i - \lambda_j \neq 0$ car les valeurs propres sont simples. Cela permet de définir $h_{j,Q}$ et $\psi_{j,Q}$ de la manière décrite; les développements de Taylor de h_j et ψ_j à l'ordre k_0+1 appartiennent à $\hat{\mathcal{I}}_{m+1}$

Remarque 2.7. — Pour le dernier terme, nous avons utilisé le fait que, pour tout multiindice Q', si $h_{j,Q'} = 0$ alors $\left\{ z_k \dfrac{\partial h_j}{\partial z_k} \right\}_{Q'} = 0$.

Il est clair que le nouveau système obtenu à partir de ce changement de variables polynomial est analytique au voisinage de l'origine.

Ceci étant dit, nous supposons avoir réalisé la première étape, c'est-à-dire que le système est sous la forme

$$\dot{z}_j = z_j(\lambda_j + P_{j,m+1}(z^r)) + (z^r)^{m+1} g_j(z), \quad 1 \leq j \leq n$$

où $P_{j,m+1}(U) \in \mathbb{C}[U]$ est un polynôme sans terme constant, de degré inférieur ou égal à $m+1$ et $g_j(z)$ une fonction analytique telle que $g_j(0) = 0$ et $Dg_j(0) = 0$. On notera encore $\phi_j(z) = (z^r)^{m+1} g_j(z)$ et $R_{j,m+1}(z) = z_j P_{j,m+1}(z^r)$. Nous voulons que, dans un système de coordonnées $((m+1)|r|+1)$-plat à l'origine par rapport à l'identité $z_j = y_j + \xi_j(y)$ (c'est-à-dire que ξ_j est d'ordre $(m+1)|r|+2$), et tel que $\xi_j(y) \in \hat{\mathcal{I}}_{m+1}$, ce système s'écrive

$$\dot{y}_j = y_j(\lambda_j + P_{j,m+1}(y^r)) + \psi_j(y), \quad 1 \leq j \leq n$$

avec $\psi_j \in \hat{\mathcal{I}}_{m+2}$. Les relations entre les ϕ_j, ψ_j et ξ_j s'obtiennent de la même manière que lors de la preuve de la proposition 2.1. On a alors, pour $1 \leq j \leq n$:

$$\text{(9)} \quad \sum_{Q \in \mathbb{N}^n_{(m+1)|r|+2}} (\delta_{j,Q}\xi_{j,Q} + \psi_{j,Q}) y^Q = \phi_j(y+\xi) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \xi_j}{\partial y_k}(R_{k,m+1} + \psi_k) + R_{j,m+1}(y+\xi) - R_{j,m+1}(y)$$

avec $\delta_{j,Q} = (Q,\lambda) - \lambda_j$. On résoud le problème formel de la manière suivante : Pour tout $1 \leq j \leq n$ et pour tout multiindice $Q \in \mathbb{N}^n_{(m+1)|r|+2}$, on pose :

– si $y^Q \in \hat{\mathcal{I}}_{m+2}$ alors,

$$\psi_{j,Q} = \left\{ R_{j,m+1}(y+\xi) - R_{j,m+1}(y) + \phi_j(y+\xi) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \xi_j}{\partial y_k}(R_{k,m+1}+\psi_k) \right\}_Q$$

$$\xi_{j,Q} = 0$$

– si $y^Q \notin \hat{\mathcal{I}}_{m+2}$ alors,

$$\xi_{j,Q} = \frac{1}{\delta_{j,Q}} \left\{ R_{j,m+1}(y+\xi) - R_{j,m+1}(y) + \phi_j(y+\xi) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \xi_j}{\partial y_k}(R_{k,m+1}+\psi_k) \right\}_Q$$

$$\psi_{j,Q} = 0$$

où $\{f(y)\}_Q$ désigne le coefficient de y^Q dans le développement de Taylor de f.

LEMME 2.5. — *La construction ci-dessus définit bien, par récurrence, des séries formelles ξ_j et ψ_j solutions de 9 et qui appartiennent respectivement à l'idéal $\hat{\mathcal{I}}_{m+1}$ et $\hat{\mathcal{I}}_{m+2}$.*

Preuve. — Il s'agit de démontrer, par récurrence sur la norme $|Q|$ du multiindice Q, que

$$A_{j,Q} \equiv \left\{ R_{j,m+1}(y+\xi) - R_{j,m+1}(y) + \phi_j(y+\xi) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \xi_j}{\partial y_k}(R_{k,m+1}+\psi_k) \right\}_Q = 0 \quad \text{si } y^Q \notin \hat{\mathcal{I}}_{m+1}.$$

Pour tout multiindice Q tel que $|Q| = (m+1)|r| + 2$, on a

$$A_{j,Q} = \{\phi_j(y)\}_Q = \left\{(y^r)^{m+1} f_j(y)\right\}_Q.$$

Donc, si $y^Q \notin \hat{\mathcal{I}}_{m+1}$, alors $A_{j,Q} = 0$. De plus, puisque $|Q| = (m+1)|r| + 2$, si $y^Q \in \hat{\mathcal{I}}_{m+1}$ et $y^Q \notin \hat{\mathcal{I}}_{m+2}$, alors $\delta_{j,Q} \neq 0$; en effet, si $\delta_{j,Q} = 0$ alors $Q = (m+1)r + E_j$ et donc $|Q| < (m+1)|r| + 2$. Ainsi, $\xi_{j,Q}$ et $\psi_{j,Q}$ sont bien définis.

Soit $k_0 \geq (m+1)|r|+2$ un entier. Supposons que pour tout multiindice Q tel que $|Q| \leq k_0$ on ait

- $A_{j,Q} = 0$ si $y^Q \notin \hat{\mathcal{I}}_{m+1}$;
- les développements de Taylor à l'ordre k_0 de ψ_j (resp. ξ_j) appartiennent à $\hat{\mathcal{I}}_{m+2}$ (resp. $\hat{\mathcal{I}}_{m+1}$).

Commençons par réécrire les différents termes qui composent le membre de droite de l'équation 9.

$$\phi_j(y+\xi) = (y^r)^{m+1} f_j(y) + \xi_1(y) h_{1,j}(y, \xi_1, \dots, \xi_n) \\ + \cdots + \xi_n(y) h_{n,j}(y, \xi_1, \dots, \xi_n),$$

$h_{1,j} \dots, h_{n,j}$ étant des séries formelles en les $2n$ variables $y_1, \dots, y_n, \xi_1, \dots$, ξ_n. De plus, on a :

$$\begin{aligned} R_{j,m+1}(y+\xi) - R_{j,m+1}(y) = & \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial R_{j,m+1}}{\partial y_k}(y).\xi_k \\ & + \frac{1}{2} \sum_{k,l} \frac{\partial^2 R_{j,m+1}}{\partial y_k \partial y_l}(y).\xi_k \xi_l + \cdots, \end{aligned} \tag{10}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \xi_j}{\partial y_k}(R_{k,m+1}(y) + \psi_k(y)) = \sum_{k=1}^{n} y_k \frac{\partial \xi_j}{\partial y_k} P_{k,m+1}(y^r) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \xi_j}{\partial y_k} \psi_k(y).$$

Soient alors $1 \leq j \leq n$ et $Q \in \mathbb{N}^n_{k_0+1}$. De l'équation 7, on obtient que $A_{j,Q}$ s'écrit comme la somme du terme

$$\left\{ (y^r)^{m+1} f_j(y) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \xi_j}{\partial y_k} \psi_k(y) \right\}_Q \quad \text{et des termes}$$

$$\left\{ \xi_1(y) h_{1,j} + \cdots + \xi_n(y) h_{n,j} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial R_{j,m+1}}{\partial y_k}(y).\xi_k \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial^2 R_{j,m+1}}{\partial y_k \partial y_l}(y).\xi_k \xi_l + \cdots \right\}_Q \quad \text{et} \quad \left\{ \sum_{k=1}^{n} y_k \frac{\partial \xi_j}{\partial y_k} P_{k,m+1}(y^r) \right\}_Q .$$

Par hypothèse de récurrence, ils sont nuls si $y^Q \notin \hat{\mathcal{I}}_{m+1}$. De plus, puisque $|Q| \geq (m+1)|r| + 2$, si $y^Q \in \hat{\mathcal{I}}_{m+1}$ et $y^Q \notin \hat{\mathcal{I}}_{m+2}$, alors $\delta_{j,Q} \neq 0$. Cela permet de définir $\xi_{j,Q}$ et $\psi_{j,Q}$ de la manière décrite ; les développements de Taylor de ξ_j et ψ_j à l'ordre $k_0 + 1$ appartiennent respectivement à $\hat{\mathcal{I}}_{m+1}$ et $\hat{\mathcal{I}}_{m+2}$. □

Passons à la convergence des ξ_j ; nous procédons de manière similaire à la preuve de la convergence de la proposition 2.1. D'après le lemme précédent, $\xi_j \in \hat{\mathcal{I}}_{m+1}$ donc $y_k \dfrac{\partial \xi_j}{\partial y_k} \in \hat{\mathcal{I}}_{m+1}$. Dans ce cas, puisque $R_{j,m+1}(y) = y_j P_{j,m+1}(y^r)$, avec $P_{j,m+1}(0) = 0$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \xi_j}{\partial y_k} R_{k,m+1}(y) = \sum_{k=1}^{n} y_k \frac{\partial \xi_j}{\partial y_k} P_{k,m+1}(y^r) \in \hat{\mathcal{I}}_{m+2}.$$

De plus, par construction, ψ_j est un élément de l'idéal $\hat{\mathcal{I}}_{m+2}$. On en déduit que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \xi_j}{\partial y_k} (R_{k,m+1}(y) + \psi_k(y)) \in \hat{\mathcal{I}}_{m+2}.$$

De plus,

$$\phi_j(y+\xi) = \phi_j(y) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \phi_j}{\partial y_k}(y).\xi_k + \frac{1}{2} \sum_{k,l} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial y_k \partial y_l}(y).\xi_k \xi_l + \cdots$$

et $\dfrac{\partial \phi_j}{\partial y_k}(y)$ est $(m+1)|r|$-plate en 0, c'est-à-dire d'ordre supérieur ou égal à $(m+1)|r|+1$. En vertu du lemme précédent, ainsi que de l'égalité précédente et de l'égalité 8, on a, pour tout $1 \leq j \leq n$, pour tout multiindice $Q \in \mathbb{N}^n_{(m+1)|r|+2}$, tel que $y^Q \in \hat{\mathcal{I}}_{m+1}$ et $y^Q \notin \hat{\mathcal{I}}_{m+2}$,

$$\delta_{j,Q} \xi_{j,Q} = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial R_{j,m+1}}{\partial y_k}(y).\xi_k + \phi_j(y) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \phi_j}{\partial y_k}(y).\xi_k \right\}_Q$$

car, les ξ_i appartenant à $\hat{\mathcal{I}}_{m+1}$, les produits $\xi_{k_1} \cdots \xi_{k_l}$, avec $l \geq 2$, appartiennent à $\hat{\mathcal{I}}_{l(m+1)} \subset \hat{\mathcal{I}}_{m+2}$; en effet, puisque $l \geq 2$, alors $(l-1)m + l - 2 \geq 0$ donc $l(m+1) \geq m+2$.

Remarque 2.8. — L'ensemble des multiindices $Q \in \mathbb{N}^n_{(m+1)|r|+2}$, tels que $y^Q \in \hat{\mathcal{I}}_{m+1}$ et $y^Q \notin \hat{\mathcal{I}}_{m+2}$, n'est autre que $(m+1)r + \mathbb{N}^n_2 \setminus \hat{\mathcal{I}}$, le translaté de $\mathbb{N}^n_2 \setminus \hat{\mathcal{I}}$ par $(m+1)r$.

On a alors, pour tout multiindice $Q \in (m+1)r + \mathbb{N}^n_2 \setminus \hat{\mathcal{I}}$,

$$|\delta_{j,Q}||\xi_{j,Q}| \leq \left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \bar{R}_{j,m+1}}{\partial y_k}(y).\bar{\xi}_k + \bar{\phi}_j(y) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \bar{\phi}_j}{\partial y_k}(y).\bar{\xi}_k \right\}_Q .$$

On somme ces n inégalités, on minore chaque $|\delta_{j,Q}|$ par $\delta_Q = \inf_{1\leq j\leq n} |\delta_{j,Q}|$ qui est est non nul; et après avoir utilisé les majorations

$$\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n \frac{\partial \bar{R}_{j,m+1}}{\partial y_k}(y).\bar{\xi}_k \prec \left(\sum_{k,j=1}^n \frac{\partial \bar{R}_{j,m+1}}{\partial y_k}(y)\right).\sum_{j=1}^n \bar{\xi}_j \quad \text{et}$$
$$\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n \frac{\partial \bar{\phi}_j}{\partial y_k}(y).\bar{\xi}_k \prec \left(\sum_{k,j=1}^n \frac{\partial \bar{\phi}_j}{\partial y_k}(y)\right).\sum_{j=1}^n \bar{\xi}_j,$$

on obtient alors, pour tout multiindice $Q \in (m+1)r + \mathbb{N}_2^n \setminus \hat{\mathcal{I}}$,

$$\delta_Q\tilde{\xi}_Q \leq \left\{\left(\sum_{k,j=1}^n \frac{\partial \bar{R}_{j,m+1}}{\partial y_k}(y) + \sum_{k,j=1}^n \frac{\partial \bar{\phi}_j}{\partial y_k}(y)\right)\tilde{\xi} + \sum_{j=1}^n \bar{\phi}_j\right\}_Q \tag{11}$$

où, comme précédement, on a posé

$$\tilde{\xi}_Q = \sum_{k=1}^n |\xi_{k,Q}|, \quad \tilde{\xi}(y) = \sum_{Q\in\mathbb{N}^n_{(m+1)|r|+2}} \tilde{\xi}_Q y^Q \quad \text{et} \quad \mathbb{N}_k^n\backslash\hat{\mathcal{I}} = \{Q \in \mathbb{N}_k^n \mid y^Q \notin \hat{\mathcal{I}}\}.$$

Construisons, par récurrence sur la norme $|Q|$ du multiindice Q, la série $\sigma_{m+1}(y) = \sum_{Q\in(m+1)r+\mathbb{N}_2^n} \sigma_{Q,m+1}y^Q$ de la manière suivante :

$$\forall Q \in (m+1)r + \mathbb{N}_2^n \setminus (\mathbb{N}_2^n \setminus \hat{\mathcal{I}}) \quad \sigma_{Q,m+1} = 0$$
$$\forall Q \in (m+1)r + \mathbb{N}_2^n \setminus \hat{\mathcal{I}}$$
$$\sigma_{Q,m+1} = \left\{\left(\sum_{k,j=1}^n \frac{\partial \bar{R}_{j,m+1}}{\partial y_k}(y) + \sum_{k,j=1}^n \frac{\partial \bar{\phi}_j}{\partial y_k}(y)\right)\sigma_{m+1} + \sum_{j=1}^n \bar{\phi}_j\right\}_Q.$$

LEMME 2.6

La série σ_{m+1} est convergente dans un voisinage de $0. \in \mathbb{C}^n$,

- $\forall Q \in (m+1)r + \mathbb{N}_2^n \setminus \hat{\mathcal{I}}$, $\xi_Q \leq \sigma_{Q,m+1}\eta_{Q-(m+1)r}$

où $\{\eta_Q\}_{Q\in\mathbb{N}_1^n\setminus\hat{\mathcal{I}}}$ est la suite définie précédemment.

Preuve. — Considérons en effet la fonction

$$G(y,v) = \left(\sum_{k,j=1}^n \frac{\partial \bar{R}_{j,m+1}}{\partial y_k}(y) + \sum_{k,j=1}^n \frac{\partial \bar{\phi}_j}{\partial y_k}(y)\right)v + \sum_{j=1}^n \bar{\phi}_j - v.$$

La fonction $\left(\sum_{k,j=1}^{n} \frac{\partial \bar{R}_{j,m+1}}{\partial y_k}(y) + \sum_{k,j=1}^{n} \frac{\partial \bar{\phi}_j}{\partial y_k}(y)\right)$ est nulle en 0. Les fonctions G et $\frac{\partial G}{\partial v}$ sont analytiques en $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ et leurs valeurs en 0 sont respectivement 0 et -1. Le théorème des fonctions implicites donne alors l'existence d'une fonction analytique $\tilde{\sigma} = \sum_{Q} \tilde{\sigma}_Q y^Q$ au voisinage de $0 \in \mathbb{C}^n$, telle que $G(y, \tilde{\sigma}(y)) = 0$ et $\tilde{\sigma}(0) = 0$; de plus, $\tilde{\sigma}$ est du même ordre que la fonction $\sum_{j=1}^{n} \bar{\phi}_j$, c'est-à-dire supérieur ou égal à $(m+1)|r| + 2$.

On montre, par récurrence sur la norme du multiindice Q, que pour tout multiindice $Q \in (m+1)r + \mathbb{N}_2^n \setminus \hat{\mathcal{I}}$, on a

- $\tilde{\sigma}_Q = \sigma_{Q,m+1}$,
- $\xi_Q \leq \sigma_{Q,m+1} \eta_{Q-(m+1)r}$.

On remarquera que $\delta_Q = \delta_{Q+lr}$ avec $l \in \mathbb{N}$ car $(r, \lambda) = 0$. Pour tout multiindice $Q \in (m+1)r + \mathbb{N}_2^n \setminus \hat{\mathcal{I}}$ tel que $|Q| = (m+1)|r| + 2$, on a

$$\delta_Q \tilde{\xi}_Q \leq \left\{ \sum_{j=1}^{n} \bar{\phi}_j \right\}_Q = \tilde{\sigma}_Q = \sigma_{Q,m+1}.$$

Or, $1/\delta_{Q-(m+1)r} \leq \eta_{Q-(m+1)r}$ car on a $Q - (m+1)r = P + S$ avec $|P| = |S| = 1$, $(P, S) \in \left(\mathbb{N}_1^n \setminus \hat{\mathcal{I}}\right)^2$; donc, $1 = \eta_P \leq \delta_{Q-(m+1)r} \eta_{Q-(m+1)r}$; d'où le résultat. Posons, pour simplifier,

$$h(y) = \sum_{Q \in \mathbb{N}_1^n} h_Q y^Q \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k,j=1}^{n} \frac{\partial \bar{R}_{j,m+1}}{\partial y_k}(y) + \sum_{k,j=1}^{n} \frac{\partial \bar{\phi}_j}{\partial y_k}(y).$$

Soit $k_0 \geq (m+1)|r| + 2$ un entier et supposons la proposition vraie pour tout multiindice $Q \in (m+1)r + \mathbb{N}_2^n \setminus \hat{\mathcal{I}}$ tel que $|Q| \leq k_0$. Soit $Q \in (m+1)r + \mathbb{N}_2^n \setminus \hat{\mathcal{I}}$ un multiindice tel que $|Q| = k_0 + 1$. D'après la majoration 11, on a

$$\begin{aligned} \delta_Q \tilde{\xi}_Q &\leq \left\{ \left(\sum_{k,j=1}^{n} \frac{\partial \bar{R}_{j,m+1}}{\partial y_k}(y) + \sum_{k,j=1}^{n} \frac{\partial \bar{\phi}_j}{\partial y_k}(y) \right) \tilde{\xi} + \sum_{j=1}^{n} \bar{\phi}_j \right\}_Q \\ &\leq \sum_{\substack{Q_1 \in \mathbb{N}_1^n, Q_2 \in \mathbb{N}_{(m+1)|r|+2}^n \\ Q_1 + Q_2 = Q}} h_{Q_1} \tilde{\xi}_{Q_2} + \left\{ \sum_{j=1}^{n} \bar{\phi}_j \right\}_Q \end{aligned}$$

la somme portant sur les couples de multiindices $(Q_1,Q_2)\in \mathbb{N}_1^n\setminus\hat{\mathcal{I}}\times\left((m+1)r+\mathbb{N}_2^n\setminus\hat{\mathcal{I}}\right)$ tel que $|Q_1|,|Q_2|<|Q|$. Par hypothèse de récurrence, on a

$$\begin{aligned}\delta_Q\tilde{\xi}_Q &\le \sum_{\substack{Q_1\in\mathbb{N}_1^n,Q_2\in\mathbb{N}^n_{(m+1)|r|+2}\\ Q_1+Q_2=Q}} h_{Q_1}\eta_{Q_2-(m+1)r}\sigma_{Q_2,m+1}+\left\{\sum_{j=1}^n\bar{\phi}_j\right\}_Q\\ &\le \max_{\substack{Q_1\in\mathbb{N}_1^n,Q_2\in\mathbb{N}^n_{(m+1)|r|+2}\\ Q_1+Q_2=Q}}\eta_{Q_2-(m+1)r}\sum_{\substack{Q_1\in\mathbb{N}_1^n,Q_2\in\mathbb{N}^n_{(m+1)|r|+2}\\ Q_1+Q_2=Q}} h_{Q_1}\sigma_{Q_2,m+1}\\ &\quad+\left\{\sum_{j=1}^n\bar{\phi}_j\right\}_Q\end{aligned}$$

la somme et le maximum portant sur les couples de multiindices $(Q_1,Q_2)\in \mathbb{N}_1^n\setminus\hat{\mathcal{I}}\times\left((m+1)r+\mathbb{N}_2^n\setminus\hat{\mathcal{I}}\right)$ tel que $|Q_1|,|Q_2|<|Q|$. Or,

$$\begin{aligned}\max_{\substack{Q_1\in\mathbb{N}_1^n,Q_2\in\mathbb{N}^n_{(m+1)|r|+2}\\ Q_1+Q_2=Q}}\eta_{Q_2-(m+1)r} &= \max_{\substack{Q_1\in\mathbb{N}_1^n,Q_2\in\mathbb{N}_2^n\\ Q_1+Q_2=Q-(m+1)r}}\eta_{Q_2}\\ &\le \delta_{Q-(m+1)r}\eta_{Q-(m+1)r}\end{aligned}$$

le premier maximum portant sur les couples de multiindices $(Q_1,Q_2)\in \mathbb{N}_1^n\setminus\hat{\mathcal{I}}\times\left((m+1)r+\mathbb{N}_2^n\setminus\hat{\mathcal{I}}\right)$ tel que $|Q_1|,|Q_2|<|Q|$ alors que le deuxième porte sur les couples de multiindices $(Q_1,Q_2)\in\mathbb{N}_1^n\setminus\hat{\mathcal{I}}\times\mathbb{N}_2^n\setminus\hat{\mathcal{I}}$ tel que $|Q_1|,|Q_2|<|Q-(m+1)r|$. De plus, $1\le\delta_{Q-(m+1)r}\eta_{Q-(m+1)r}$. Donc, on obtient

$$\begin{aligned}\delta_Q\tilde{\xi}_Q &\le \delta_{Q-(m+1)r}\eta_{Q-(m+1)r}\\ &\qquad\times\left(\sum_{\substack{Q_1\in\mathbb{N}_1^n,Q_2\in\mathbb{N}^n_{(m+1)|r|+2}\\ Q_1+Q_2=Q}} h_{Q_1}\sigma_{Q_2,m+1}+\left\{\sum_{j=1}^n\bar{\phi}_j\right\}_Q\right)\end{aligned}$$

la somme portant sur les couples de multiindices $(Q_1,Q_2)\in \mathbb{N}_1^n\setminus\hat{\mathcal{I}}\times\left((m+1)r+\mathbb{N}_2^n\setminus\hat{\mathcal{I}}\right)$ tel que $|Q_1|,|Q_2|<|Q|$. D'autre part, par hypothèse de récurrence, on a

$$\begin{aligned}\sigma_{Q,m+1} &= \sum_{\substack{Q_1\in\mathbb{N}_1^n, Q_2\in\mathbb{N}^n_{(m+1)|r|+2}\\ Q_1+Q_2=Q}} h_{Q_1}\sigma_{Q_2,m+1} + \left\{\sum_{j=1}^n \bar{\phi}_j\right\}_Q \\ &= \sum_{\substack{Q_1\in\mathbb{N}_1^n, Q_2\in\mathbb{N}^n_{(m+1)|r|+2}\\ Q_1+Q_2=Q}} h_{Q_1}\tilde{\sigma}_{Q_2} + \left\{\sum_{j=1}^n \bar{\phi}_j\right\}_Q = \tilde{\sigma}_Q.\end{aligned}$$

De plus, puisque $(r,\lambda)=0$, alors $\delta_{Q-(m+1)r}=\delta_Q\neq 0$; on obtient donc

$$\tilde{\xi}_Q \leq \eta_{Q-(m+1)r}\sigma_{Q,m+1} \text{ et } \tilde{\sigma}_Q = \sigma_{Q,m+1}.$$

□

On conclut alors de manière identique à la preuve de la proposition 2.1 : la série $\tilde{\xi}$ est convergente au voisinage de l'origine. Il en est donc de même pour les séries ξ_j. La convergence des séries ψ_j en est une conséquence ; de plus, elles appartiennent à l'idéal $\hat{\mathcal{I}}_{m+2}$ donc $\psi_j \in \mathcal{I}_{m+2}$.

□

2.2. Preuve de la proposition d'estimation du nombre de petits diviseurs.

L'objet de cette section est de démontrer la propostion 2.2. Notre démonstration s'inspire de celle de A. Bruno [Bru72]. Dans cette section, k désignera un entier fixé. Rappelons que $\mathbb{N}_k^n \setminus \hat{\mathcal{I}} = \{Q \in \mathbb{N}_k^n \mid y^Q \notin \hat{\mathcal{I}}\}$, $\delta_Q = \inf_{1\leq i\leq n}|\delta_{i,Q}|$ et

$$\omega(p_k) = \inf\{|(Q,\lambda)-\lambda_i| \mid |(Q,\lambda)-\lambda_i| \neq 0, \\ i=1,\ldots,n,\ Q\in\mathbb{N}^n,\ 2\leq |Q|\leq p_k\}.$$

Nous rappelons enfin que la suite $\{\eta_Q\}_{Q\in\mathbb{N}_1^n\setminus\hat{\mathcal{I}}}$ est definie par

1. $\forall P \in \mathbb{N}_1^n \setminus \hat{\mathcal{I}}$ tel que $|P|=1$, $\eta_P = 1$ (de tels multiindices existent),
2. $\forall Q \in \mathbb{N}_2^n \setminus \hat{\mathcal{I}}$,

$$\delta_Q\eta_Q = \max_{\substack{Q_j\in\mathbb{N}_1^n, S\in\mathbb{N}^n\\ Q_1+\cdots+Q_p+S=Q}} \eta_{Q_1}\cdots\eta_{Q_p}$$

le maximum étant pris sur les ensembles de $p+1$, $1\leq p\leq |Q|$ multiindices $Q_1,\ldots,Q_p,S$ tels que $\forall 1\leq j\leq p$, $Q_j\in\mathbb{N}_1^n$, $|Q_j|\leq |Q|-1$, $S\in\mathbb{N}^n$. Ces ensembles sont non-vides.

Cette suite est bien définie. En effet, si $Q \in \mathbb{N}_2^n \setminus \hat{\mathcal{I}}$, alors il existe des multiindices $Q_1, \ldots, Q_p, S$ tels que $Q = Q_1 + \ldots + Q_p + S$, $\forall 1 \leq j \leq p$, $Q_j \in \mathbb{N}_1^n$, $|Q_j| \leq |Q|-1$, $S \in \mathbb{N}^n$; dans ce cas, $\forall 1 \leq j \leq p$, $Q_j \in \mathbb{N}_1^n \setminus \hat{\mathcal{I}}$. **Cette remarque sera constamment utilisée dans la suite.**

Il est clair, au regard de la définition de la suite η_Q, que η_Q est, pour $Q \in \mathbb{N}_2^n \setminus \hat{\mathcal{I}}$, un produit de termes $1/\delta_{Q'}$ avec $|Q'| \leq |Q|$ et $Q' \in \mathbb{N}_2^n \setminus \hat{\mathcal{I}}$. Soit $\phi^{(k)}(Q)$, pour $Q \in \mathbb{N}_2^n \setminus \hat{\mathcal{I}}$, le nombre des $1/\delta_{Q'}$ intervenant dans ce produit et tels que $\delta_{Q'} < \omega(p_k)/2$. Pour majorer ce nombre, nous considérons, pour tout entier k et pour tout indice $1 \leq j \leq n$, pour $Q \in \mathbb{N}_2^n \setminus \hat{\mathcal{I}}$, le nombre $\phi_j^{(k)}(Q)$ de $1/\delta_{Q'}$ intervenant dans η_Q tels que

- $\delta_{Q'} = |(Q', \lambda) - \lambda_j| = |\delta_{j,Q'}|$ et
- $\delta_{Q'} < \omega(p_k)/2$.

C'est le nombre de "petits diviseurs atteints par j". Nous poserons $\forall P \in \mathbb{N}_1^n \setminus \hat{\mathcal{I}}$ tel que $|P| = 1$, $\phi_j^{(k)}(P) = 0$. On a alors, pour tout $Q \in \mathbb{N}_2^n \setminus \hat{\mathcal{I}}$,

$$0 \leq \phi^{(k)}(Q) \leq \phi_1^{(k)}(Q) + \cdots + \phi_n^{(k)}(Q).$$

Pour tout entier k, pour tout indice $1 \leq j \leq n$, considérons la fonction définie sur $\mathbb{N}_2^n \setminus \hat{\mathcal{I}}$ par

$$\forall Q \in \mathbb{N}_2^n \setminus \hat{\mathcal{I}}, \quad \psi_j^{(k)}(Q) = \begin{cases} 1 & \text{si } \delta_Q = |\delta_{j,Q}| \text{ et } |\delta_{j,Q}| < \omega(p_k)/2 \\ 0 & \text{si } \delta_Q \neq |\delta_{j,Q}| \text{ ou } |\delta_{j,Q}| \geq \omega(p_k)/2. \end{cases}$$

Le lemme suivant va nous permettre de faire une récurrence.

LEMME 2.7. — *Soit $Q \in \mathbb{N}_2^n \setminus \hat{\mathcal{I}}$ tel que $\psi_j^{(k)}(Q) = 1$. Si $Q = P + P'$ avec $(P, P') \in \mathbb{N}_1^n \times \mathbb{N}_2^n$ et $|P| \leq p_k - 1$, alors $(P, P') \in \mathbb{N}_1^n \setminus \hat{\mathcal{I}} \times \mathbb{N}_2^n \setminus \hat{\mathcal{I}}$ et $\psi_j^{(k)}(P') = 0$.*

Remarque 2.9. — La suite d'entiers $\{p_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante et $p_0 = 2$. Par conséquent, l'ensemble des $P \in \mathbb{N}_1^n$ tels que $|P| \leq p_k - 1$ n'est pas vide.

Preuve. — En effet, il est clair que si $Q = P + P' \in \mathbb{N}_2^n \setminus \hat{\mathcal{I}}$ alors $(P, P') \in \mathbb{N}_1^n \setminus \hat{\mathcal{I}} \times \mathbb{N}_2^n \setminus \hat{\mathcal{I}}$. Deux cas se présentent :

1. Si $\delta_{P'} \neq |\delta_{j,P'}|$ alors, par définition, $\psi_j^{(k)}(P') = 0$.
2. Si $\delta_{P'} = |\delta_{j,P'}|$, alors on a $(Q, \lambda) - \lambda_j = (P', \lambda) - \lambda_j + (P, \lambda)$; donc $|(P, \lambda)| \leq |\delta_{j,Q}| + |\delta_{j,P'}|$, soit $|\delta_{j,P'}| \geq |(P, \lambda)| - |\delta_{j,Q}|$. Puisque $\psi_j^{(k)}(Q) = 1$, alors $\delta_Q = |\delta_{j,Q}| < \omega(p_k)/2$, d'où $-|\delta_{j,Q}| > -\omega(p_k)/2$.

D'autre part, puisque $P \in \mathbb{N}_1^n \setminus \hat{\mathcal{I}}$ alors $(P, \lambda) \neq 0$. Soit alors $1 \leq i \leq n$ un indice quelconque ; on a

$$0 \neq |(P, \lambda)| = |(P + E_i, \lambda) - \lambda_i| \\ \geq \inf\{|(P+E_i,\lambda)-\lambda_l| \mid |(P+E_i,\lambda)-\lambda_l| \neq 0,\ 1 \leq l \leq n\}.$$

De plus, $1 \leq |P| \leq p_k - 1$ donc $2 \leq |P + E_i| \leq p_k$. Or, par définition,

$$\inf\{|(P+E_i,\lambda) - \lambda_l| \mid |(P+E_i,\lambda) - \lambda_l| \neq 0,\ 1 \leq l \leq n\} \geq \\ \inf\{|(R,\lambda)-\lambda_l| \mid |(R,\lambda)-\lambda_l| \neq 0,\ l = 1,\dots,n,\ R \in \mathbb{N}^n,\ 2 \leq |R| \leq p_k\} \\ = \omega(p_k).$$

Il s'ensuit que $|(P, \lambda)| \geq \omega(p_k)$. D'où finalement, $|\delta_{j,P'}| \geq \omega(p_k)/2$ et $|\delta_{j,P'}| = \delta_{P'}$, c'est-à-dire, par définition de $\psi_j^{(k)}$, $\psi_j^{(k)}(P') = 0$.

□

On a alors, pour tout indice $1 \leq j \leq n$, pour tout entier k et pour tout $Q \in \mathbb{N}_2^n \setminus \hat{\mathcal{I}}$,

$$(12) \quad 0 \leq \phi_j^{(k)}(Q) \leq \psi_j^{(k)}(Q) + \max_{\substack{Q_j \in \mathbb{N}_1^n, S \in \mathbb{N}^n \\ Q_1 + \cdots + Q_p + S = Q}} (\phi_j^{(k)}(Q_1) + \cdots \phi_j^{(k)}(Q_p))$$

le maximum étant pris sur les ensembles de $p+1$, $1 \leq p \leq |Q|$ multiindices $Q_1, \dots, Q_p, S$ tels que $\forall 1 \leq i \leq p,\ Q_i \in \mathbb{N}_1^n,\ |Q_i| \leq |Q| - 1,\ S \in \mathbb{N}^n$. Ces ensembles sont non-vides et $\forall 1 \leq i \leq n, Q_i \in \mathbb{N}_1^n \setminus \hat{\mathcal{I}}$. La propostion 2.2 est alors une conséquence immédiate du résultat suivant.

LEMME 2.8. — *Pour tout multindice $Q \in \mathbb{N}_1^n \setminus \hat{\mathcal{I}}$*

$$\phi_j^{(k)}(Q) \begin{cases} = 0 \ si\ |Q| \leq p_k \\ \leq 2\left[\dfrac{|Q|}{p_k}\right] - 1 \ si\ |Q| \geq p_k + 1 \end{cases}$$

où $[a]$ désigne la partie entière de a.

Preuve. — Elle se fait par récurrence sur la norme $|Q|$ du multiindice Q. Commençons par le cas $|Q| \leq p_k$. Par définition, $\forall P \in \mathbb{N}_1^n \setminus \hat{\mathcal{I}}$ tel que $|P| = 1$, $\phi_j^{(k)}(P) = 0$. Soit $2 \leq k_0 \leq p_k$ un entier et supposons l'égalité vraie pour tout $Q' \in \mathbb{N}_1^n \setminus \hat{\mathcal{I}}$, tel que $|Q'| \leq k_0 - 1$. Soit $Q \in \mathbb{N}_2^n \setminus \hat{\mathcal{I}}$ tel que

$|Q| = k_0$. Dans ce cas, on a

$$\begin{aligned} 0 \neq |\delta_{j,Q}| &\geq \inf\{|(R,\lambda)-\lambda_l| \mid |(R,\lambda)-\lambda_l| \neq 0,\ l=1,\dots,n, \\ &\qquad R\in\mathbb{N}^n,\ 2\leq |R|\leq k_0\} \\ &\geq \inf\{|(R,\lambda)-\lambda_l| \mid |(R,\lambda)-\lambda_l| \neq 0,\ l=1,\dots,n, \\ &\qquad R\in\mathbb{N}^n,\ 2\leq |R|\leq p_k\} \\ &= \omega(p_k) \end{aligned}$$

car $k_0 \leq p_k$; on en déduit que $\psi_j^{(k)}(Q) = 0$ et donc

$$0 \leq \phi_j^{(k)}(Q) \leq \max_{\substack{Q_j\in\mathbb{N}_1^n, S\in\mathbb{N}^n \\ Q_1+\cdots+Q_p+S=Q}} (\phi_j^{(k)}(Q_1) + \cdots \phi_j^{(k)}(Q_p))$$

le maximum étant pris sur les ensembles de $p+1$, $1\leq p\leq |Q|$ multiindices $Q_1,\dots,Q_p,S$ tels que $\forall 1\leq i\leq p$, $Q_i\in\mathbb{N}_1^n$, $|Q_i|\leq |Q|-1$, $S\in\mathbb{N}^n$. Soient $Q_1,\dots,Q_p,S$ les multiindices qui réalise le maximum de cette inégalité. Puisqu'ils sont tous de norme inférieure à k_0-1 alors $\forall 1\leq i\leq p, \phi_j^{(k)}(Q_i) = 0$ par hypothèse de récurrence; on obtient donc $\phi_j^{(k)}(Q) = 0$.

Si $|Q| \geq p_k + 1$ alors supposons le maximum de l'inégalité 12 réalisé pour un entier p, et les multiindices $Q_1,\dots,Q_p$.

On a alors $0 \leq \phi_j^{(k)}(Q) \leq \psi_j^{(k)}(Q) + \phi_j^{(k)}(Q_1) + \cdots + \phi_j^{(k)}(Q_p)$. On peut ordonner les Q_i de sorte que $|Q_1| \geq \cdots \geq |Q_p| > 0$. Soit alors r tel que $|Q_r| \geq p_k + 1 > |Q_{r+1}|$ (Si toutes les normes sont inférieures à p_k, on pose $r = 0$). Deux cas se présentent :

1. Si $\psi_j^{(k)}(Q) = 0$, alors $0 \leq \phi_j^{(k)}(Q) \leq \phi_j^{(k)}(Q_1) + \cdots + \phi_j^{(k)}(Q_p)$.
   (a) Si $r = 0$ alors $\forall 1 \leq i \leq p$, $|Q_i| \leq p_k$; donc, par hypothèse de récurrence, $\forall 1\leq i\leq p$, $\phi_j^{(k)}(Q_i) = 0$ et donc $\phi_j^{(k)}(Q) = 0$.
   (b) Si $r > 0$ alors $0 \leq \phi_j^{(k)}(Q) \leq \phi_j^{(k)}(Q_1) + \cdots + \phi_j^{(k)}(Q_r)$; donc, par hypothèse de récurrence, on a
   $$0 \leq \phi_j^{(k)}(Q) \leq \left(2\left[\frac{|Q_1|}{p_k}\right]-1\right)+\cdots+\left(2\left[\frac{|Q_r|}{p_k}\right]-1\right) \leq 2\left[\frac{|Q|}{p_k}\right]-1.$$
2. $\psi_j^{(k)}(Q) = 1$, alors $0 \leq \phi_j^{(k)}(Q) \leq 1 + \phi_j^{(k)}(Q_1) + \cdots + \phi_j^{(k)}(Q_p)$.
   (a) Si $r = 0$ alors, par hypothèse de récurence, $\forall 1 \leq i \leq p$, $\phi_j^{(k)}(Q_i) = 0$; donc
   $$0 \leq \phi_j^{(k)}(Q) \leq 1 \leq 2\left[\frac{|Q|}{p_k}\right] - 1$$

car $|Q| \geq p_k + 1$.

(b) Si $r \geq 2$ alors, par hypothèse de récurrence, on a

$$\begin{aligned} 0 \leq \phi_j^{(k)}(Q) &\leq 1 + \left(2\left[\frac{|Q_1|}{p_k}\right] - 1\right) + \cdots + \left(2\left[\frac{|Q_r|}{p_k}\right] - 1\right) \\ &\leq 2\left[\frac{|Q|}{p_k}\right] - (r-1). \end{aligned}$$

(c) Si $r = 1$ alors $0 \leq \phi_j^{(k)}(Q) \leq 1 + \phi_j^{(k)}(Q_1)$. Deux cas se présentent :

i. Si $[|Q_1|/p_k] < [|Q|/p_k]$ alors $[|Q_1|/p_k] \leq [|Q|/p_k] - 1$ donc

$$0 \leq \phi_j^{(k)}(Q) \leq 1 + 2\left[\frac{|Q_1|}{p_k}\right] - 1 \leq 2\left(\left[\frac{|Q|}{p_k}\right] - 1\right) \leq 2\left[\frac{|Q|}{p_k}\right] - 1.$$

ii. Si $[|Q_1|/p_k] = [|Q|/p_k]$ alors on a $Q = Q_1 + S$ avec $(S, Q_1) \in \mathbb{N}^n \setminus \hat{\mathcal{I}} \times \mathbb{N}_1^n \setminus \hat{\mathcal{I}}$, et $|Q_1| \leq |Q| - 1$. On en déduit que $(S, Q_1) \in \mathbb{N}_1^n \setminus \hat{\mathcal{I}} \times \mathbb{N}_2^n \setminus \hat{\mathcal{I}}$, car $S \neq 0$ et si $|Q_1| = 1$ alors, puisque $p_k \geq 2$ et $|Q| \geq p_k + 1$, $0 = [|Q_1|/p_k] = [|Q|/p_k] \geq 1$ ce qui n'est pas possible. De plus, $|S| \leq p_k - 1$ car, puisque $[|Q_1|/p_k] = [|Q|/p_k]$ alors $(|Q| - |Q_1|)/p_k < 1$; donc $|S| < p_k$. D'après le lemme 2.7, on a alors $\psi_j^{(k)}(Q_1) = 0$. Appliquons l'inégalité 12 à Q_1, en écrivant que le maximum est réalisé pour p', $Q'_1, \ldots, Q'_{p'}$, on obtient

$$0 \leq \phi_j^{(k)}(Q) \leq 1 + \phi_j^{(k)}(Q'_1) + \cdots + \phi_j^{(k)}(Q'_{p'})$$

avec $Q_1 = Q'_1 + \cdots + Q'_{p'} + S'$, $Q'_j \in \mathbb{N}_1^n \setminus \hat{\mathcal{I}}$, $S' \in \mathbb{N}^n \setminus \hat{\mathcal{I}} \cup \{0\}$, et $\forall 1 \leq i \leq p'$, $|Q'_i| \leq |Q_1| - 1$. On a donc, $Q = Q'_1 + \cdots + Q'_{p'} + S' + S$; on ordonne ces multindices de manière décroissante ; soit alors r' tel que $|Q_{r'}| \geq p_k + 1 > |Q_{r'+1}|$. On applique les arguments précédents aux Q'_j (ceux du point (2)) ; dans les cas $(a), (b), (c)i$, on obtient les bonnes majorations :

$$0 \leq \phi_j^{(k)}(Q) \leq 2\left[\frac{|Q|}{p_k}\right] - 1.$$

Dans le dernier cas, c'est-à-dire le cas $r' = 1$ $(c)ii$, on a $[|Q'_1|/p_k] = [|Q_1|/p_k] = [|Q|/p_k]$ et $|Q'_1| < |Q_1| < |Q|$; on réapplique l'argument du cas $(c)ii$ en remarquant que l'on ne peut tomber dans ce dernier cas au plus $p_k - 1$ fois (car la norme du multiindice décroît au moins d'une unité à chaque étape. Dans le pire cas, c'est-à-dire $\tilde{r} = 1$ après chaque réduction, on finit par obtenir $[|\tilde{Q}_1|/p_k] < [|Q|/p_k]$).

□

3. Remarques concernant les petits diviseurs.

3.1. Sur l'absence de petits diviseurs en dimension 2.

En dimension 2, les démonstrations de la proposition 2.1 de H. Dulac [Dul04], [Dul23] ou celles [MM80], [CS] dont nous nous sommes inspirés pour ce travail, ne font apparaître aucune hypothèse de *petits diviseurs diophantiens* : en fait, elle est automatiquement vérifiée. Nous allons voir que, dans ce cas, les nombres $|(Q,\lambda) - \lambda_i|$, lorsqu'ils ne sont pas nuls, sont tous minorés par une constantes $\epsilon > 0$; ils ne s'accumulent pas sur 0 lorsque $|Q| \to +\infty$. La démonstration de la proposition 2.1 s'achève donc avec la remarque 2.5.

Dans le cadre qui est le nôtre, deux cas se présentent, tous deux traités par H. Dulac :

1. $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 \neq 0$. Le vecteur r est alors défini par $r = (1,0)$. Soit alors $Q = (q_1, q_2) \in \mathbb{N}_2^2$ un multiindice. On a, pour $i = 1,2$, $(Q,\lambda) - \lambda_j = q_2\lambda_2 - \lambda_j$. Dans tous les cas, on a $|(Q,\lambda) - \lambda_j| \geq (q_2 - 1)|\lambda_2| \geq |\lambda_2|$, si $q_2 \geq 2$.
2. $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} = -\dfrac{q}{p}$, p et q étant des entiers non-nuls premiers entre eux. Dans ce cas, le vecteur r est défini par $r = (p,q)$. Soit alors $Q = (q_1, q_2) \in \mathbb{N}_2^2$ un multiindice ; on peut l'écrire $Q = lr + Q'$ où $l \in \mathbb{N}$ et $Q' = (q_1', q_2')$ un multiindice tel que $q_1' < p$ ou $q_2' < q$. On a donc, pour $i = 1,2$, $(Q,\lambda) - \lambda_j = q_1'\lambda_1 + q_2'\lambda_2 - \lambda_j$. De plus, les nombres λ_1 et λ_2 sont alignés dans le plan complexe et le segment qui les joint contient l'origine. En désignant par θ l'argument de λ_1, on a $(Q,\lambda) - \lambda_j = e^{i\theta}(q_1'|\lambda_1| - q_2'|\lambda_2| + (-1)^{j-1}|\lambda_j|)$. Il devient alors clair que les modules de ces nombres ne peuvent s'accumuler sur 0 car $q_1' < p$ ou $q_2' < q$.

Ce fait n'est plus vrai, en général, en dimension $n > 2$ puisque les combinaisons linéaires à coefficients entiers positifs de deux des valeurs propres pourraient très bien s'accumuler sur la troisième, comme nous allons le voir.

3.2. Nécessité d'une condition arithmétique sur les λ_i.

Nous allons montrer, dans cette section, que pour que l'énoncé de la propostion 2.1 soit vrai en dimension $n > 2$, il est nécessaire d'imposer une condition arithmétique sur les λ_i. Nous ne démontrerons pas cependant que la condition (ω) est nécessaire.

Plus précisément, nous allons construire un contre-exemple en dimension 3. Cette construction est inspirée de celles faites par J.-P. Françoise dans sa thèse [Fra80]. La première valeure propre λ_1 sera prise nulle (donc $r = (1, 0, 0)$) tandis que les deux autres λ_2 et λ_3 seront prises de sorte que la condition de Bruno (ω) ne soit pas vérifiée; c'est-à-dire que l'on ne pourra trouver deux constantes positives a et b, telles que $|q_2\lambda_2 + q_3\lambda_3| \geq a \exp(-b(q_2 + q_3))$ pour tout multiindice $(q_2, q_3) \in \mathbb{N}^2$. Soit alors les nombres

$$\omega_k = \min\left(|q_2\lambda_2 + q_3\lambda_3| \neq 0,\ (q_2, q_3) \in \mathbb{N}^2,\ q_2 + q_3 \leq 2^k\right).$$

Il revient au même de supposer que

$$\lim_{k \to +\infty} -\frac{\ln \omega_k}{2^k} = +\infty.$$

Soit alors une suite de multiindice $\alpha^k = (\alpha_2^k, \alpha_3^k) \in \mathbb{N}_2^2$ telle que $\omega_k = |\alpha_2^k\lambda_2 + \alpha_3^k\lambda_3|$. Quitte à réindexer, on peut supposer les α^k tous distincts. Considérons une fonction analytique au voisinage de $0 \in \mathbb{C}^2$ de la forme

$$v(x_2, x_3) = \sum_{k \geq 0} a_k x_2^{\alpha_2^k} x_3^{\alpha_3^k} \quad \text{avec} \quad |a_k| = 1$$

ainsi que le sytème d'équations différentielles analytiques au voisinage de $0 \in \mathbb{C}^3$

$$\text{(13)} \qquad \begin{cases} \dot{x}_1 = & x_1 f(x_2, x_3) + v(x_2, x_3) \\ \dot{x}_2 = & \lambda_2 x_2 \\ \dot{x}_3 = & \lambda_3 x_3 \end{cases}$$

la fonction analytique f étant nulle à l'origine.

Nous allons transformer ce système sous une forme normale *préliminaire*. Les deux dernières équations étant déjà sous la forme requise, nous ne transformerons que la première en posant $x_1 = y_1 + \xi_1(y)($ $x_2 = y_2$ et $x_3 = y_3$), ce qui donne $\dot{y}_1 = \psi_1(y)$. On reprend alors la construction formelle faite dans la preuve de la proposition 2.1 ; $\hat{\mathcal{I}}$ désignant l'idéal engendré par $y^r = y_1$, posons, pour tout multiindice $Q \in \mathbb{N}_2^3$:

– si $y^Q \in \hat{\mathcal{I}}$ alors

$$\begin{aligned}\psi_{1,Q} &= \{(y_1+\xi_1(y))f(y_2,y_3)+v(y_2,y_3)-\frac{\partial \xi_1}{\partial y_1}\psi_1(y)\}_Q\\ \xi_{1,Q} &= 0\end{aligned}$$

– si $y^Q \notin \hat{\mathcal{I}}$ alors

$$\begin{aligned}\xi_{1,Q} &= \frac{1}{\delta_{1,Q}}\{(y_1+\xi_1(y))f(y_2,y_3)+v(y_2,y_3)\}_Q\\ &= \frac{1}{\delta_{1,Q}}\{\xi_1(y)f(y_2,y_3)+v(y_2,y_3)\}_Q\\ \psi_{1,Q} &= 0.\end{aligned}$$

Mais, ξ_1 n'a aucun terme non-nul dans $\hat{\mathcal{I}}$, donc ξ_1 ne dépend pas de y_1 ; on a donc :

– si $y^Q \in \hat{\mathcal{I}}$ alors

$$\begin{aligned}\psi_{1,Q} &= \{y_1 f(y_2,y_3)\}_Q\\ \xi_{1,Q} &= 0\end{aligned}$$

– si $y^Q \notin \hat{\mathcal{I}}$ alors

$$\begin{aligned}\xi_{1,Q} &= \frac{1}{\delta_{1,Q}}\{\xi_1(y)f(y_2,y_3)+v(y_2,y_3)\}_Q\\ \psi_{j,Q} &= 0.\end{aligned}$$

On choisit les termes de v de la manière suivante : Si $Q=(0,\alpha_2^k,\alpha_3^k)$ alors on prend a_k de module 1 et d'argument $\arg(\{\xi(y)f(y_2,y_3)\}_Q)$. Dans ce cas, on a :

$$\forall k\geq 0,\ \ |\xi_{1,(0,\alpha_2^k,\alpha_3^k)}|\geq \frac{1}{\omega_k}.$$

Il suit que la série $\sum_{k\geq 0}\xi_{1,(0,\alpha_2^k,\alpha_3^k)}x_2^{\alpha_2^k}x_3^{\alpha_3^k}$ divergent car

$$\lim_{k\to+\infty}\left(\frac{1}{\omega_k}\right)^{\frac{1}{|\alpha^k|}} = \lim_{k\to+\infty}\exp\left(\frac{1}{|\alpha_k|}\log\left(\frac{1}{\omega_k}\right)\right)=+\infty.$$

Ainsi, considérant la forme normale *préliminaire* analytique

$$\left\{\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 f(x_2,x_3)\\ \dot{x}_2 &= \lambda_2 x_2\\ \dot{x}_3 &= \lambda_3 x_3\end{aligned}\right. \tag{14}$$

il existe un système analytique 13, qui admet le système 14 comme forme normale *préliminaire* mais dont le difféomorphisme normalisant formel est divergent à l'origine.

Remarque 3.1. — Le système 14 est bien une forme normale *préliminaire* et non pas une forme normale. En effet, les formes normales formelles, pour le triplet de valeurs propres $(0, \lambda_2, \lambda_3)$, sont de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = & x_1 f_1(x_1) \\ \dot{x}_2 = & x_2(\lambda_2 + f_2(x_1)) \\ \dot{x}_3 = & x_3(\lambda_3 + f_3(x_1)) \end{cases}$$

les f_i étant des séries formelles en la variable x_1, 1-plates en 0.

4. Le cas à plusieurs résonances positives.

Dans cette section, nous montrons comment s'étend notre résultat lorsque les valeurs propres du système 1 vérifient des relations de résonances toutes engendrées par l relations $(R_j, \lambda) = 0$ où $R_j \in \mathbb{N}^n$, $1 \le j \le l$; les $\{R_j\}_{1 \le j \le l}$ étant libres sur $\mathbb{Q}$. Ceci signifie que s'il on a $(Q, \lambda) = \lambda_s$ pour un multiindice $Q \in \mathbb{N}_2^n$ et un indice $1 \le s \le n$ alors il existe $0 \ne (n_1, \dots, n_l) \in \mathbb{N}^l$ tel que $Q = n_1 R_1 + \dots + n_l R_l + E_j$ si $\lambda_j = \lambda_s$. Dans ce cas, les termes résonnants sont $(x^{R_1})^{n_1} \cdots (x^{R_l})^{n_l} x_j \partial_{x_i}$ avec $\lambda_i = \lambda_j$ et $0 \ne (n_1, \dots, n_l) \in \mathbb{N}^l$.

Soit $\hat{\mathcal{I}}$ (resp. $\mathcal{I}$) un idéal des séries formelles (resp. des fonctions analytiques) qui contient tous les "monômes résonnants" $(y^{R_1})^{n_1} \cdots (y^{R_l})^{n_l} x_j$ pour $0 \ne (n_1, \dots, n_l) \in \mathbb{N}^l$. On a alors la :

PROPOSITION 4.1. — *Sous les hypothèses précédentes et si la condition* (ω) *est satisfaite, il existe un système de coordonnées locales analytique au voisinage de* $0 \in \mathbb{C}^n$, $x = y + \xi(y)$, *dans lequel le système 1 s'écrit sous la forme :*

$$\dot{y}_i = \lambda_i y_i + g_i(y), \quad 1 \le i \le n$$

avec $g_i \in \mathcal{I}$, *c'est-à-dire* $g_i(y) = \sum_{j=1}^{l} g_{i,j}(y) y^{R_j}$; *si* $|R_j| = 1$, *alors on a* $g_{i,j}(0) = 0$.

La démonstration est identique en tout point à celle de la proposition 2.1 ; il en est de même pour l'estimation du nombre de *petits diviseurs*.

Ce résultat nous fournit des variétés invariantes analytiques. En effet, soit I_j l'ensemble des indices *résonnants* de R_j, c'est-à-dire, si $k \in I_j$ alors la $k$ième composante de R_j est non-nulle. Soit l'ensemble $NR = [1,n] \setminus (\cup_{j=1}^{l} I_j)$; il est constitué des indices qui ne *résonnent* pas (il peut être vide). Soit $\mathcal{I}$ l'idéal engendré par y_{i_j}, $i_j \in I_j$, et y_k, k parcourant un sous-ensemble A de NR. Alors d'après le théorème précédent, dans les nouvelles coordonnées, la variété

$$y_{i_j} = 0,\ i_j \in I_j,\ \ y_k = 0,\ \ k \in A$$

est invariante. Ce résultat, dans le cas d'une seule résonance, a été annoncé par J. Écalle [Eca92].

L'auteur exprime toute sa reconnaissance à B. Malgrange pour les remarques et suggestions qui ont permis d'améliorer la rédaction de cet article.

BIBLIOGRAPHIE

[AA88] V. ARNOLD et D.V. ANOSOV, Encyclopaedia of Mathematical Sciences : Dynamical Systems I, Springer-Verlag, 1988.

[Arn80] V. ARNOLD, Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires, Mir, 1980.

[Bru72] A.D. BRUNO, The analytical form of differential equations, Trans. Mosc. Math. Soc., 25 (1971), 131-288; 26 (1972), 199-239.

[Bru89] A.D. BRUNO, Local methods in nonlinear differential equations, Springer Series in Soviet Mathematics, Springer Verlag, 1989.

[CKP78] H. CAMACHO, N.H. KUIPER, et J. PALIS, The Topology of Holomorphic Flows with Singularity, I.H.E.S., 48 (1978), 5-38.

[CS] C. CAMACHO et P. SAD, Pontos singulares de equaçoes diferencais analiticas, 16 Coloquio Brasileiro de Matematica.

[DDS94] J. DELLA DORA et L. STOLOVITCH, Normal Forms of Differential Systems, 1994, Ed. E. Tournier, London Mathematical Society Lecture Note Series 193, p 143-184.

[Dul04] H. DULAC, Recherches sur les points singuliers des équations différentielles, J. Ecole Polytechnique, 2,9 (1904), 1-125.

[Dul23] H. DULAC, Sur les cycles limites, Bull. Soc Math. France, 51 (1923), 45-188.

[Eca92] J. ÉCALLE, Singularités non abordables par la géométrie, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 42, 1-2 (1992), 73-164.

[Eli90] L.H. ELIASSON, Generalisation of an estimate of small divisors by Siegel, pages 283–299, Rabinowitz, Zehnder editors, Academic Press, analysis, et cetera edition, 1990.

[Fra80] J.-P. FRANÇOISE, Singularités en géométrie locale isochore et applications à l'étude des champs de vecteurs, PhD thesis, Université Joseph Fourier Grenoble, France, 1980.

[IP86] Yu.S. IL'YASHENKO et A.S. PYARTLI, Materialization of resonances and divergence of normalizing series for polynomial differential equations, J. Soviet Math., 31 (1986), 300-313.

[Mal82] B. MALGRANGE, Travaux d'Ecalle et de Martinet-Ramis sur les systèmes dynamiques, Sém. Bourbaki 1981-1982, exp. 582 (1982).

[Mar80] J. MARTINET, Normalisation des champs de vecteurs holomorphes, Séminaire Bourbaki, 33 (1980-1981), 564.

[MC88] R. MOUSSU et D. CERVEAU, Groupes d'automorphismes de $(\mathbb{C},0)$ et équations différentielles $ydy+\cdots=0$, Bull. Soc. Math. France, 16 (1988), 459-488.

[MM80] J.-F. MATTEI et R. MOUSSU, Intégrales premières et holonomie, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., 13 (1980) 469-523.

[MR85] J. MARTINET et J.P. RAMIS, Analytic Classification of Resonant Saddles and Foci, 1985, North-Holland.

[Pos86] J. POSCHEL, On invariant manifolds of complex analytic mappings near fixed points, Expo. Math., 4, (1986), 97-109.

[RM82] J.-P. RAMIS et J. MARTINET, Problèmes de modules pour des équations différentielles non linéaires du premier ordre, I.H.E.S, 55 (1982), 63-164.

[RM83] J.-P. RAMIS et J. MARTINET, Classification analytique des équations différentielles non linéaires résonantes du premier ordre, Ann. Sci. E.N.S, 4ème série, 16 (1983), 571-621.

[Sie42] C.L. SIEGEL, Iterations of analytic functions, Ann. Math., 43 (1942) 807-812.

[Yoc88] J.-C. YOCCOZ, Linéarisation des germes de difféomorphismes holomorphes de $(\mathbb{C},0)$, C.R. Acad. Sci. Paris, 306 (1988) 55-58.

Manuscrit reçu le 9 mai 1994.

Laurent STOLOVITCH,
Institut Fourier
Laboratoire associé au CNRS
Université Joseph-Fourier
B.P. 74
38402 St Martin d'Hères Cedex (France).