ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

FRANZ KOHLER

Feuilletages holomorphes singuliers sur les surfaces contenant une coquille sphérique globale

Annales de l'institut Fourier, tome 45, nº 1 (1995), p. 161-182

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1995__45_1_161_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
45, 1 (1995), 161-182

FEUILLETAGES HOLOMORPHES SINGULIERS SUR LES SURFACES CONTENANT UNE COQUILLE SPHÉRIQUE GLOBALE

par Franz KOHLER

Nous nous intéressons aux surfaces analytiques complexes compactes minimales dont les nombres de Betti vérifient $b_1(S) = 1$ et $b_2(S) > 0$, ce sont des surfaces de la classe VII_0 de Kodaira. M. Inoue a donné les premiers exemples de telles surfaces et Ma. Kato a observé [6] que certaines de ces surfaces (les "paraboliques" et les "hyperboliques") faisaient parties d'une classe plus vaste de surfaces : les surfaces qui admettent une coquille sphérique globale (voir déf. §1). Ultérieurement, I. Nakamura a obtenu les mêmes surfaces par dégénérescence [8]. Le point de vue des coquilles sphériques globales est adopté dans [3] car il permet d'associer aux surfaces des germes d'applications holomorphes contractantes non inversibles et permet une présentation unifiée et notamment de donner une seule construction pour les surfaces dites "hyperboliques" et "moitié" (half-Inoue surfaces) que l'on appelle surfaces d'Inoue-Hirzebruch. En particulier toutes les surfaces connues contiennent une coquille sphérique globale et possèdent exactement $b_2(S)$ courbes rationnelles. Ces surfaces s'appellent les surfaces de Kato.

Cet article est motivé par le problème de savoir si une surface minimale avec $b_1(S) = 1$ et $b_2(S) > 0$ contient des courbes holomorphes. Plus précisément :

Problème (G. Dloussky). — Soit S une surface holomorphe compacte minimale avec $b_1(S) = 1$ et $b_2(S) > 0$, soit $\mathcal{F}$ un feuilletage singulier réduit sur S (les singularités sont des points isolés) et soit z_0 une singularité. D'après un théorème de Camacho-Sad [1] il existe un germe de courbe

---

Mots-clés : Feuilletage – Coquille sphérique globale.
Classification A.M.S. : 32J15.

invariante Γ passant par z_0. Est-ce-que la feuille de $\mathcal{F}$ qui contient Γ est une courbe holomorphe de S ?

Cet article répond par l'affirmative lorsque S est une surface de Kato et plus généralement décrit les singularités d'un feuilletage sur une surface contenant une C.S.G.(Coquille Sphérique Globale).

Au paragraphe 1 nous rappelons quelques faits sur les feuilletages et les surfaces de Kato. Au paragraphe 2 nous montrons que les courbes rationnelles des surfaces de Kato sont invariantes pour tout feuilletage, que les singularités des feuilletages sont les points d'intersections des courbes rationnelles, et que ces singularités sont d'ordre 1. Nous montrons de plus que les seules surfaces de Kato pouvant admettre un feuilletage sont les surfaces d'Inoue-Hirzebruch et les surfaces génériques. Ces dernières admettent au plus un seul feuilletage dont nous précisons les singularités. Au paragraphe 3 nous montrons que les surfaces d'Inoue-Hirzebruch admettent exactement deux feuilletages et que les indices des feuilletages aux points singuliers suivant les courbes rationnelles sont des entiers quadratiques non nuls.

Je remercie G. Dloussky pour son aide au cours de ce travail.

1. Préliminaires sur les feuilletages et les surfaces de Kato.

On suit la présentation de Suwa [9]. Dans tout ce qui suit M désigne une variété complexe de dimension 2 et O_M, Ω^p_M, Θ_M les faisceaux des germes des fonctions holomorphes, des p-formes holomorphes ($p = 1, p = 2$) et des champs de vecteurs holomorphes sur M. Le faisceau Ω^1_M est noté simplement Ω_M. Un *feuilletage singulier* sur M est la donnée d'un sous O_M-module $\mathcal{F}$ de Ω_M localement libre de rang 1. L'*annulateur* $\mathcal{F}^a$ de $\mathcal{F}$ est le sous O_M-module de Θ_M défini par

$$\mathcal{F}^a(U) = \{\theta \in \Theta(U) \ ; \ w(\theta) = 0 \ \ \forall w \in \mathcal{F}(U))\}.$$

Nous dirons que $\mathcal{F}$ est complet, ou que le feuilletage est *saturé* si $\mathcal{F}$ est égal à son *biannulateur* $\mathcal{F}^{a^a}$ défini par

$$\mathcal{F}^{a^a}(U) = \{w \in \Omega(U) \ ; w(\theta) = 0 \ \ \forall \theta \in \mathcal{F}^a(U)\}.$$

L'opération de saturation, qui fait passer de $\mathcal{F}$ à $\mathcal{F}^{a^a}$ consiste localement à diviser les coefficients de la 1-forme ω_z génératrice de $\mathcal{F}_z$ par le pgcd de ses coefficients. On dit que $\mathcal{F}$ est singulier en un point z de M si $\Omega_{M,z}/\mathcal{F}_z$ n'est pas libre. Cela signifie aussi que le générateur ω_z de $\mathcal{F}_z$ s'annule en z. On note $S(\mathcal{F})$ l'ensemble des points singuliers de $\mathcal{F}$. Supposons $\mathcal{F}$ *saturé*. Soit Π une application holomorphe non constante d'une surface N dans une surface M. On appelle image réciproque de $\mathcal{F}$ par Π le *saturé* du feuilletage associé au sous-module de Ω_N localement engendré par les images réciproques des éléments de $\mathcal{F}_z$,

$$(\Pi^{**}\mathcal{F})_z = \text{saturé}\{(\Pi^*\omega)_z, \omega \in \mathcal{F}_{\Pi(z)}\}.$$

Un des intérêts de cette opération apparaîtra dans les remarques 1 et 2.

Soit $m \in S(\mathcal{F})$ et $w = Adz_1 + Bdz_2$ l'expression d'un générateur de $\mathcal{F}_m$ dans les coordonnées (z_1, z_2) en m.

Posons $J(w)(m) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial B}{\partial z_1}(m) & \dfrac{\partial B}{\partial z_2}(m) \\ & \\ -\dfrac{\partial A}{\partial z_1}(m) & -\dfrac{\partial A}{\partial z_2}(m) \end{pmatrix}.$

On appelle valeurs propres de $\mathcal{F}$ en m les valeurs propres λ_1,λ_2 de $J(w)(m)$. Les définitions suivantes sont intrinsèques :

- Si $\lambda_1\ \lambda_2 \neq 0$ nous disons que la singularité de $\mathcal{F}$ en m est non nulle.
- Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ (resp.$\lambda_1 = \lambda_2$) nous disons ici que la singularité de $\mathcal{F}$ en m est non symétrique (resp. symétrique).
- Si $\lambda_1.\lambda_2 \neq 0$ et si $\lambda_1/\lambda_2 \in Q^*_-$ nous disons ici que la singularité de $\mathcal{F}$ en m est simple.

Soit ν l'ordre de $\mathcal{F}$ en m, c'est-à-dire la valuation de w en m. Notons A_ν et B_ν les composantes homogènes d'ordres ν de A et B. Eclatons le point m et soit $\Pi\ : \widetilde{M} \to M$ cette application. Le lieu singulier de $\Pi^{**}\mathcal{F}$ sur le diviseur exceptionnel, que l'on appelle *cône tangent* de $\mathcal{F}$ en m, est défini par l'équation homogène :

$$z_1 A_\nu + z_2 B_\nu = 0.$$

Sauf si cette expression est identiquement nulle. Dans ce cas on dit que $\mathcal{F}$ est dicritique au premier ordre en m.

On dit qu'une courbe C de S est invariante si $C\backslash(C \cap S(\mathcal{F}))$ est une feuille du feuilletage régulier induit par $\mathcal{F}$ sur $M\backslash S(\mathcal{F})$.

C. Camacho et P. Sad ont introduit la notion d'indice de $\mathcal{F}$ en un point singulier m relativement à un germe de courbe lisse invariant C en

m par :

$$i_m(\mathcal{F}, C) = -\mathrm{Res}_{z_1=0} \frac{\partial}{\partial z_2} \left(\frac{A}{B} \right) (z_1, 0)$$

où $\{z_2 = 0\}$ est une équation réduite de C en m.

Remarque 1. — Si on éclate un point régulier z d'un feuilletage $\mathcal{F}$ sur une surface S, alors la courbe exceptionnelle C est invariante par le feuilletage $\mathcal{F}'$ saturé éclaté de $\mathcal{F}$. De plus $\mathcal{F}'$ possède sur C une seule singularité qui est simple et d'indice -1.

Remarque 2. — Conservons les notations précédentes. Mais éclatons maintenant un point singulier de $\mathcal{F}$.

A) Supposons qu'en z, $\mathcal{F}$ est soit simple, soit non nulle et non symétrique, soit possède une seule valeur propre non nulle. Alors :

1) C est une courbe invariante

2) $\mathcal{F}'$ admet sur C deux singularités et on a :

- si z est simple, ces deux singularités sont simples,
- si z a une seule valeur propre non nulle, l'une de ces singularités est simple et l'autre a une seule valeur propre non nulle,
- si z est non nulle et non symétrique, ces singularités sont non nulles.

B) Si z est non nulle et symétrique alors il y a au plus une singularité qui peut apparaître sur C et cette singularité a une seule valeur propre non nulle .

Preuve. — C'est un calcul direct que nous laissons au lecteur.

1.1. Rappels sur les surfaces de Kato (voir [2]).

1.1.1. *Construction des surfaces de Kato.*

Notons $\mathbb{B}$ la boule unité de $\mathbb{C}^2$; $\mathbb{B}_\varepsilon = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \ ; \ |z_1|^2 + |z_2|^2 < 1 + \varepsilon\}, \Sigma = \partial\mathbb{B}$, et $b_i(S)$ le i-ème nombre de Betti de S.

1.1.2. Définition. — *Soit S une surface complexe et soit f une application définie au voisinage de Σ à valeur dans S et biholomorphe* *sur son image. On dit que f est une coquille sphérique globale si $S\backslash f(\Sigma)$ reste connexe.*

Une surface contenant une coquille sphérique globale est isomorphe à une surface construite de la manière suivante. Soit $\pi\ : W \to \mathbb{C}^2$ une succession de n éclatements au-dessus de $0 \in \mathbb{B}$ obtenue en éclatant à chaque étape un point sur la dernière courbe exceptionnelle construite.

Soient $C_1, C_2, \ldots, C_n$ les n courbes exceptionnelles de W.

Soit $\sigma\ : \overline{\mathbb{B}} \to \mathbb{B}^\pi = \pi^{-1}(\mathbb{B})$ une application holomorphe définie au voisinage de $\overline{\mathbb{B}}$ et biholomorphe sur son image dans $\mathbb{B}^\pi$ telle que $\sigma(0) \in C_n$.

Notons pour $\varepsilon > 0$ assez petit $\mathbb{B}^\pi_\varepsilon = \pi^{-1}(\mathbb{B}_\varepsilon)$.

L'application $\sigma\pi : \mathbb{B}^\pi_\varepsilon \to \mathbb{B}^\pi_\varepsilon$ envoie biholomorphiquement un voisinage du bord $\partial\mathbb{B}^\pi$ de $\mathbb{B}^\pi$ dans $\mathbb{B}^\pi_\varepsilon$ sur un voisinage du bord $\partial(\sigma(\mathbb{B}))$ de $\sigma(\mathbb{B})$; recollons ensuite ces deux voisinages par $\sigma\pi$. On obtient une surface analytique compacte notée $S(\pi, \sigma)$.

On appelle trace de $S(\pi, \sigma)$ le nombre complexe $\mathrm{tr}(D(\pi\sigma))(0)$, que l'on note $\mathrm{tr}(S(\pi, \sigma))$.

Décrivons le revêtement universel de $S(\pi, \sigma)$.

Soit $\mathrm{Ann}_\varepsilon(\pi, \sigma) = \pi^{-1}(\mathbb{B}_\varepsilon)\backslash\overline{\sigma(\mathbb{B}_\varepsilon)}$. Soit $g = \sigma\pi$, g envoie biholomorphiquement un voisinage du bord strictement pseudo convexe "extérieur" de $\mathrm{Ann}(\pi, \sigma)$ sur un voisinage du bord strictement pseudoconcave "intérieur" de $\mathrm{Ann}(\pi, \sigma)$.

Soit $\{A_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ une famille d'exemplaires de $\mathrm{Ann}_\varepsilon(\pi, \sigma)$, soit $\widetilde{S}$ la variété obtenue en recollant le bord pseudoconcave de A_i avec le bord pseudoconvexe de A_{i+1} par g. $(\widetilde{S}, \omega)$ est le revêtement universel de S.

1.1.3. Théorème (voir [2]). — *Soit S une surface de Kato.*

1) *Le revêtement universel $(\widetilde{S}, w)$ de S a deux bouts notés $\underline{0}$ et ∞. Notons $\underline{\widetilde{S}} = \widetilde{S} \cup \{\underline{0}\} \cup \{\infty\}$.*

L'application $g = \sigma\pi$ donne un automorphisme $\widetilde{g}$ de $\widetilde{S}$ dans $\widetilde{S}$

a) *$\widetilde{g}$ se prolonge continûment à $\underline{\widetilde{S}}$ en posant $\underline{\widetilde{g}}(\underline{0}) = \underline{0}$ et $\widetilde{g}(\infty) = \infty$*

b) *Soit V la composante pseudoconvexe du complémentaire de $\widetilde{f}(\Sigma)$ dans $\underline{\widetilde{S}}$, où $\widetilde{f}$ est un relèvement de la coquille sphérique globale f de S alors*

$$\underline{\widetilde{g}}(V) \text{ est relativement compacte dans } V \text{ et } \bigcap_{i\geq 0} \underline{\widetilde{g}}^i(V) = \{\underline{0}\}.$$

1.1.4. DÉFINITION ([2]). — *Soit S une surface de Kato, $(\widetilde{S}, w)$ son revêtement universel et C une courbe compacte de $\widetilde{S}$. On appelle effondrement de $\widetilde{S}$ sur la courbe C la donnée de $(\widehat{S}_C, P_C)$ où*

1) *$\widehat{S}_C$ est une surface n'ayant qu'un bout noté ∞*

2) *$P_C : \widetilde{S} \to \widehat{S}_C$ est une application analytique envoyant isomorphiquement un voisinage du bout ∞ dans $\widetilde{S}$ sur un voisinage du bout ∞ dans $\widehat{S}_C$.*

3) *$\widehat{C} := P_C(C)$ est une courbe exceptionnelle de première espèce de $\widehat{S}_C$.*

1.1.5. PROPOSITION ([2]). — *Soit S une surface de Kato, $(\widetilde{S}, w)$ son revêtement universel et $n = b_2(S)$.*

1) *Pour toute courbe compacte C de $\widetilde{S}$ il existe un effondrement $(\widehat{S}_C, P_C)$ de $\widetilde{S}$ sur C unique à isomorphisme près.*

De plus il existe $\widehat{O}_C \in \widehat{C} = P_C(C)$ tel que :

$P_C\, \widetilde{S} \backslash P_C^{-1}(\widehat{O}_C) \to \widehat{S}_C \backslash \{\widehat{O}_C\}$ soit un isomorphisme.

2) *Pour deux courbes compactes C et C' de $\widetilde{S}$ la relation $C \leq C'$ si et seulement si il existe une application $\pi_C^{C'} : \widehat{S}_{C'} \to \widehat{S}_C$ faisant commuter le diagramme :*

$$\begin{tikzcd} & \widetilde{S} \arrow[dl, "P_{C'}"'] \arrow[dr, "P_C"] & \\ \widehat{S}_{C'} \arrow[rr, "\pi_C^{C'}"'] & & \widehat{S}_C \end{tikzcd}$$

est une relation d'ordre total sur l'ensemble des courbes compactes de $\widetilde{S}$. De plus l'application $\pi_C^{C'}$ est unique.

3) *Si $C \leq C'$ il existe des courbes de $\widetilde{S}$ uniquement déterminées par C et C'*

$$C_0 = C,\ C_1,\ C_2, \ldots, C_{p-1},\ C_p = C'$$

telles que $\pi_C^{C'}$ se factorise en

$$\widehat{S}_{C'} \xrightarrow{\Pi_p} \widehat{S}_{C_{p-1}} \xrightarrow{\Pi_{p-1}} \widehat{S}_{C_{p-2}} \to \ldots \to \widehat{S}_{C_0} \xrightarrow{\Pi_1} \widehat{S}_C$$

où Π_r est l'éclatement de $\widehat{O}_{C_{r-1}} \in \widehat{C}_{r-1}$ et $\widehat{C}_r = \Pi_r^{-1}(\widehat{O}_{C_{r-1}})$.

En particulier $\mathbb{Z}$ opère sur l'ensemble des courbes ce qui nous permet de noter $C' = C + p$.

4) *On a de plus les diagrammes commutatifs suivants : pour toute courbe C du revêtement universel $\widetilde{S}$ de S, il existe un unique isomorphisme $\sigma^C_{C+n} : \widehat{S}_C \to \widehat{S}_{C+n}$ faisant commuter le diagramme où $n = b_2(S)$ est le nombre d'éclatements composant $\pi : B^\pi \to B$*

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{S} \arrow[r, "\widetilde{g}"] \arrow[d, "P_C"'] & \widetilde{S} \arrow[d, "P_{C+n}"] \\
\widehat{S}_C \arrow[r, "\sigma^C_{C+n}"'] & \widehat{S}_{C+n}
\end{tikzcd}$$

De plus pour tout C, $\sigma^C_{C+n}(\widehat{0}_C) = \widehat{0}_{C+n}$. $F_C := \Pi^{C+n}_C \sigma^C_{C+n}$, F_C est contractant en $\widehat{0}_C$.

On a aussi le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{S} \arrow[r, "\widetilde{g}"] \arrow[d, "P_C"'] & \widetilde{S} \arrow[d, "P_C"] \\
\widehat{S}_C \arrow[r, "F_C"'] & \widehat{S}_C
\end{tikzcd}$$

Soit $\widehat{C} = P_C(C)$. L'isomorphisme $\widetilde{g}$ envoie biholomorphiquement la courbe $\widehat{C}$ sur la courbe $\widehat{C} + n$.

1.1.6. Définition. — *On appelle surface générique une surface de Kato dont les courbes rationnelles sont de self-intersection -2 (générique = de trace non nulle).*

1.2. Quelques relations sur les feuilletages des surfaces de Kato.

1.2.1. LEMME. — *Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ deux feuilletages saturés de codimension 1 sur une surface complexe S et soit C une courbe de S. Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ coïncident sur $S\backslash C$ alors $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ coïncident sur tout S.*

1.2.2. PROPOSITION. — *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage sur S et $\widetilde{\mathcal{F}}$ le feuilletage de $\widetilde{S}$ obtenu par image réciproque de $\mathcal{F}$. Soit C une courbe compacte de $\widetilde{S}$. Soit $\widehat{\mathcal{F}}_C$ le feuilletage sur $\widehat{S}_C\backslash\widehat{O}_C$ obtenu par image directe via l'effondrement sur $\widehat{S}_C$. Alors $\widehat{\mathcal{F}}_C$ se prolonge à $\widehat{S}_C$ et vérifie la relation*

$$\widehat{\mathcal{F}}_{C+1} = (\pi_C^{C+1})^{**}(\widehat{\mathcal{F}}_C).$$

Preuve. — Soit $\widehat{\mathcal{F}}'_C$ le faisceau défini sur $\widehat{S}'_C = \widehat{S}_C\backslash\{\widehat{O}_C\}$ tel que pour tout ouvert U de $\widehat{S}'_C$, $\widehat{\mathcal{F}}'_C(U)$ soit le sous $\mathcal{O}_{\widehat{S}'_C}(U)$-module de $\Omega_{\widehat{S}'_C}(U)$ engendré par $\{P_{C_*}\omega\,;\omega\in\widetilde{\mathcal{F}}(p_C^{-1}(U))\}$. $\widehat{\mathcal{F}}'_C$ définit un feuilletage sur $\widehat{S}'_C$.

Ce feuilletage s'étend à tout $\widehat{S}_C$ en vertu du fait qu'un morphisme linéaire $X\ :\ L_{|S\backslash\{P\}}\to TS_{|S\backslash\{P\}}$, où S est une surface et $L_{|S\backslash\{P\}}$ est un fibré linéaire sur $S\backslash\{P\}$, s'étend en un morphisme d'un fibré linéaire L prolongeant $L_{|S\backslash\{P\}}$ dans TS. Ceci se démontre de manière analogue au théorème 1 [4].

Vérifions la relation $\widehat{\mathcal{F}}_{C+1} = \left(\pi_C^{C+1}\right)^{**}(\widehat{\mathcal{F}}_C)$. D'après le lemme il suffit de vérifier que $\widehat{\mathcal{F}}_{C+1}$ et $\left(\pi_C^{C+1}\right)^{**}(\widehat{\mathcal{F}}_C)$ coïncident sur $\widehat{S}_{C+1}\backslash C+1$. Soit $z\notin C+1$ il existe U ouvert contenant z tel que $\widehat{\mathcal{F}}_{C+1}(U)$ soit engendré par $P_{C+1_*}(\omega)$ où ω engendre $\widetilde{\mathcal{F}}(P_{C+1}^{-1}(U))$.

Par construction $P_{C_*}\omega$ engendre $\widehat{\mathcal{F}}_C(\pi_C^{C+1}(U))$ et par suite $P_{C+1_*}(\omega) = \pi_C^{C+1^*}(P_{C_*}(\omega))$ engendre $\left(\pi_C^{C+1}\right)^{**}(\widehat{\mathcal{F}}_C)(U)$.

1.2.3. PROPOSITION. — *Pour toute courbe compacte C de $\widetilde{S}$ on a la relation*

$$\widehat{\mathcal{F}}_{C+n} = (\sigma_{C+n}^C)_*(\widehat{\mathcal{F}}_C) \quad \text{où } n = b_2(S).$$

Preuve. — Notons $C_i = \widehat{C}+i$.

Soit $P_{C+n}(\widetilde{g}(z))\in\widehat{S}_{C+n}\backslash\{\hat{O}_{C+n}\}$. Soit U un voisinage de z dans $\widetilde{S}$ tel que ω engendre $\widetilde{\mathcal{F}}(U)$, $\widetilde{g}_*\omega$ engendre $\widetilde{\mathcal{F}}(\widetilde{g}(U))$, $P_{C_*}(\omega)$ engendre $\widehat{\mathcal{F}}_C(P_C(U))$ et $(\sigma_{C+n}^C)_*(P_{C_*}\omega)$ engendre $(\sigma_{C+n}^C)_*(\widehat{\mathcal{F}}_C)((\sigma_{C+n}^C P_C)(U))$.

D'après le diagramme de la proposition 1.1.5 $(\sigma_{C+n}^{C} P_C)_* \omega = (P_{C+n}\widetilde{g})_* \omega$ et $(P_{C+n}\widetilde{g})_*\omega$ engendre $\widehat{\mathcal{F}}_{C+n}((P_{C+n}\widetilde{g})(U)) = \widehat{\mathcal{F}}_{C+n}((\sigma_{C+n}^{C} P_C)(U))$.

2. Étude des feuilletages sur les surfaces de Kato.

2.1. Lieu singulier d'un feuilletage sur une surface de Kato.

2.1.1. THÉORÈME. — *Soit $(S, \mathcal{F})$ un feuilletage d'une surface de Kato. Alors les singularités de $\mathcal{F}$ sont sur les courbes rationnelles de S.*

Preuve. — Supposons qu'il existe un point singulier z de $\mathcal{F}$ qui ne soit pas sur ces courbes. Ce point détermine une famille $\{z_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ de points de $\widetilde{S}$ qui sont singuliers pour $\widetilde{\mathcal{F}}$. Soit C une courbe compacte de $\widetilde{S}$ et B une boule centrée en $\widehat{O}_C$. On peut choisir un relèvement $\widetilde{f}$ de la coquille sphérique globale f de S tel que, pour tout $i \geq 0$, $P_C(z_i) \in B$. Choisissons pour chaque $i \geq 0$ un ouvert U_i contenant z_i tel que U_i ne rencontre pas les courbes de $\widetilde{S}$ et tel que $P_C(U_i) \subseteq B$. Soit ω_i une 1-forme qui engendre $\widetilde{\mathcal{F}}(U_i)$. Alors $P_{C_*}\omega_i$ engendre $\widehat{\mathcal{F}}_C(P_C(U_i))$ et $P_{C_*}\omega_i(P_C(z_i)) = 0$. Ainsi $P_C(z_i) \in S(\widehat{\mathcal{F}}_C)$ pour tout $i \geq 0$. Soit V la composante pseudoconvexe du complémentaire de $\widetilde{f}(\Sigma)$. D'après la proposition 1.1.3 $\bigcap\limits_{i\geq 0} \underline{\widetilde{g}^i}(V) = \{\underline{0}\}$ par suite $\bigcap\limits_{i\geq 0} P_C(\underline{\widetilde{g}^i}(V)) = \{\widehat{O}_C\}$. Les singularités de $\widehat{\mathcal{F}}_C$ ne sont pas isolées, ce qui est impossible.

2.1.2. THÉORÈME. — *Soit S une surface de Kato de trace nulle* (§1.1.1) *et θ un champ de vecteurs global sur S. Alors les zéros de θ sont sur les courbes rationnelles de S.*

Preuve. — Le lieu singulier de θ est composé de courbes et de points isolés. Si le champ θ s'annule sur une courbe autre qu'une courbe rationnelle, cette courbe est nécessairement elliptique. La surface S est alors de trace non nulle (voir [2] II Th. 2.4). Supposons que le champ θ ne s'annule en dehors des courbes qu'en des points isolés. Ce champ de vecteurs est réduit en dehors des courbes rationnelles. Le lieu singulier de θ et le lieu singulier du feuilletage induit par θ coïncident en dehors des courbes. Mais d'après le théorème 2.1.1 on sait que le feuilletage n'a pas de singularités en dehors des courbes rationnelles.

Remarque. — Les seules surfaces de Kato de trace non nulle possédant un champ de vecteurs global sont les surfaces d'Inoue et d'après ([2] II.1.31) on sait que ces champs de vecteurs s'annulent sur les courbes rationnelles et sur la courbe elliptique.

2.2. Existence de feuilletage sur les surfaces de Kato.

2.2.1. PROPOSITION. — *Soit S une surface de Kato et $\mathcal{F}$ un feuilletage de S. Pour toute courbe compacte C de $\widetilde{S}$ et toute 1-forme réduite $\widehat{\omega}_C$ qui définit le feuilletage $\widehat{\mathcal{F}}_C$ au voisinage de $\widehat{O}_C$ on a la relation $F_C^*\widehat{\omega}_C = \lambda_C\,\widehat{\omega}_C$ où λ_C est une application holomorphe définie au voisinage de $\widehat{O}_C$ et λ_C ne peut s'annuler que sur les courbes.*

Preuve. — Soit $\widehat{\omega}_C$ une 1-forme définissant le feuiletage $\widehat{\mathcal{F}}_C$ au voisinage de $\widehat{O}_C$. D'après la proposition 1.2.2 on a $(\pi_C^{C+n})^*\widehat{\omega}_C = \lambda'_C\,\widehat{\omega}_{C+n}$. On déduit de la proposition 1.2.3 la relation

$$(\sigma_{C+n}^C)^*(\pi_C^{C+n})^*\widehat{\omega}_C = (\lambda'_C \circ \sigma_{C+n}^C)(\sigma_{C+n}^c)^*\widehat{\omega}_{C+n} = (\lambda'_C \circ \sigma_{C+n}^C)\widehat{\omega}_C\,;$$

d'où $(F_C)^*\widehat{\omega}_C = \lambda_C\,\widehat{\omega}_C$.

En dehors des courbes rationnelles, $\mathcal{F}$ est non singulier et F_C est un isomorphisme. Ainsi $\lambda_C \neq 0$ en dehors de ces courbes.

2.2.2. THÉORÈME. — *Soit S une surface de Kato et C une courbe compacte de $\widetilde{S}$. Soit $\widehat{\omega}_C$ une 1-forme réduite définie au voisinage de $\widehat{O}_C$ telle que $F_C^*\widehat{\omega}_C = \lambda_c\widehat{\omega}_C$ où λ_C est holomorphe au voisinage de $\widehat{O}_C$. Alors il existe sur S un feuilletage unique $\mathcal{F}$ tel que $\widehat{\omega}_C$ définisse le feuilletage $\widehat{\mathcal{F}}_C$ au voisinage de $\widehat{O}_C$.*

Remarquons d'abord qu'à partir d'un voisinage V de $\widehat{O}_C$, on peut reconstruire une surface isomorphe à S, en recollant un anneau $A = \pi_C^{C+n}(V)\backslash\sigma_{C+n}^C(V)$ par F_C.

Preuve. — Soit $\alpha\ : A \to S$ l'application quotient donnée par le recollement. Considérons sur A le feuilletage saturé défini par $\pi_C^{C+n*}\,\widehat{\omega}_C$.

Le feuilletage $\mathcal{F}$ sur S sera défini par image directe locale de $(\pi_C^{C+n})^*\,\widehat{\omega}_C$ par α. Vérifions que cette construction est possible.

Sur un voisinage W de la partie pseudoconvexe du bord de l'anneau le feuilletage est donné par la forme $(\pi_C^{C+n})^*\,\widehat{\omega}_C$. Ce feuilletage induit sur la partie pseudoconcave du bord de l'anneau un feuilletage défini par la forme $(\sigma^C_{C+n}\pi^{C+n}_C)_*(\pi^{C+n}_C)^*\widehat{\omega}_C|_W = \sigma^C_{C+n*}\widehat{\omega}_C|_W$. Mais la forme $\widehat{\omega}_C$ vérifie la relation $F^*_C\widehat{\omega}_C = \lambda_C\widehat{\omega}_C$. D'où $\pi^{C+n*}_C\widehat{\omega}_C = (\lambda_C \circ (\sigma^C_{C+n})^{-1})\sigma^C_{C+n*}\widehat{\omega}_C$. Ainsi le feuilletage induit par l'image directe de $\sigma^C_{C+n}\pi^{C+n}_C$ coïncide avec celui défini au voisinage du bord pseudoconcave par $\pi^{C+n*}_C\widehat{\omega}_C$.

2.3. Étude globale des singularités du feuilletage.

2.3.1. THÉORÈME. — *Soit S une surface de Kato et supposons que S possède un feuilletage holomorphe $\mathcal{F}$ alors :*

1) *les courbes rationnelles sont invariantes pour le feuilletage $\mathcal{F}$;*

2) *si z_0 est une singularité de $\mathcal{F}$ alors z_0 est d'ordre 1 et z_0 est à l'intersection de deux courbes rationnelles ;*

3) *la surface S est soit du type Inoue-Hirzebruch, soit générique. Dans ce deuxième cas S possède au plus un seul feuilletage et les singularités sont simples.*

Preuve.

PARTIE A : On suppose que tous les points $\widehat{O}_C$ sont singuliers pour le feuilletage $\widehat{\mathcal{F}}_C$.

1[re] *étape :* On va montrer qu'il existe une courbe compacte C_0 de S telle que $\widehat{O}_{C_0}$ soit une singularité de $\widehat{\mathcal{F}}_{C_0}$ d'ordre 1.

Pour chaque courbe compacte C de $\widetilde{S}$ notons $\omega_C = A_C dz_1 + B_C dz_2$ une 1-forme qui engendre $\widehat{\mathcal{F}}_C$ au voisinage de $\widehat{O}_C$ et ν_C l'ordre de ω_C en $\widehat{O}_C$.

Considérons la multiplicité $I_{\widehat{O}_C}(\widehat{\mathcal{F}}_C)$ de $\widehat{\mathcal{F}}_C$ en $\widehat{O}_C$, qui est définie comme la multiplicité d'intersection en $\widehat{O}_C$ de A_C et B_C. Une définition intrinsèque est encore donnée par :

$$I_{\widehat{O}_C}(\widehat{\mathcal{F}}_C) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{(\widehat{S}_C,\widehat{O}_C)}/\widehat{\mathcal{F}}_{(C,\widehat{O}_C)}\Theta_{(\widehat{S}_C,\widehat{O}_C)}.$$

Notons $I_C(\omega_C) = \sum_{s\in C} I_s(\omega_C)$.

D'après [6] p. 513 on a les formules suivantes :

Si $\widehat{O}_C$ est dicritique :

$$I_{\widehat{O}_C}(\widehat{\mathcal{F}}_C) = \nu_C^2 + \nu_C - 1 + I_{C+1}(\widehat{\mathcal{F}}_{C+1}).$$

Si $\widehat{O}_C$ est non dicritique :

$$I_{\widehat{O}_C}(\widehat{\mathcal{F}}_C) = \nu_C^2 - (\nu_C + 1) + I_{C+1}(\widehat{\mathcal{F}}_{C+1}).$$

Si pour toute courbe compacte C on a $\nu_C > 1$, alors

$$I_C(\widehat{\mathcal{F}}_C) > I_{C+1}(\widehat{\mathcal{F}}_{C+1}) > \ldots > I_{C+n}(\widehat{\mathcal{F}}_{C+n})$$

mais via l'isomorphisme σ_{C+n}^C on a $(\sigma_{C+n}^C)_*(\widehat{\mathcal{F}}_C) = \widehat{\mathcal{F}}_{C+n}$ d'où $I_C(\widehat{\mathcal{F}}_C) = I_{C+n}(\widehat{\mathcal{F}}_{C+n})$.

Cette situation est impossible. Par suite il existe une certaine courbe $\widehat{C}_0$ telle que $\widehat{O}_{C_0}$ soit une singularité d'ordre 1 de $\widehat{\mathcal{F}}_{C_0}$.

2^e *étape :*

On va voir que les valeurs propres de $\widehat{\mathcal{F}}_{C_0}$ en $\widehat{O}_{C_0}$ ne sont pas toutes les deux nulles.

On sait déjà que $\widehat{O}_{C_0}$ est une singularité d'ordre 1. Supposons que les valeurs propres de $\widehat{\mathcal{F}}_{C_0}$ en $\widehat{O}_{C_0}$ soient toutes les deux nulles. Reprenons les calculs de [6] p. 516. Dans une carte (x, y) appropriée de $\widehat{S}_{C_0}$ en $\widehat{O}_{C_0}$ on peut supposer que

$$J_{\widehat{O}_{C_0}}(\omega_{C_0}) = \begin{pmatrix} 0 & +1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \omega_{C_0} = B_1(x, y)dx + (y + A_1(x, y))dy$$

avec $\nu(A_1) \geq 2$ et $\nu(B_1) \geq 2$. Le cône tangent de ω_{C_0} est réduit à un point qui est l'origine de la carte (x, t) où $\pi_{C_0}^{C_0+1}(x, t) = (x, tx) = (x, y)$

$$\omega_{C_0+1}(x, t) = (xB_1(x, t) + t^2)dx + x(t + xA_1(x, t))dt$$

où

$$B_2(x, t) = \frac{B_1(x, tx) + tA_1(x, tx)}{x^2} \quad A_2(x, t) = \frac{A_1(x, tx)}{x^2}.$$

Par commodité revenons dans les variables (x, y) et remarquons que ω_{C_0+1} est du type suivant :

$$\omega_{C_0+1} = (xB_2(x, y) + py^2)dx + x(y + xA_2(x, y))dy \quad \text{où} \quad p \in \mathbb{N}.$$

Supposons $B_2(0) = b_0 \neq 0$. Le cône tangent de ω_{C_0+1} est donné par l'équation $b_0 x^2 = 0$ par suite ω_{C_0+2} ne possède de singularité sur $C_0 + 2$ qu'au point (0,0) de la carte (t, y) où $\pi_{C_0+1}^{C_0+2}(t, y) = (ty, y) = (x, y)$

$$\omega_{C_0+2} = y(tb_0 + py + B_3(t, y))dt + t((p + 1)y + tb_0 + A_3(t, y))dy$$

où $\nu(A_3) \geq 2 \quad \nu(B_3) \geq 2$.

Le cône tangent de ω_{C_0+2} est donné par l'équation homogène

$$ty(2tb_0 + (2p+1)y) = 0.$$

On remarque que la multiplicité des zéros de l'équation du cône tangent est 1. Par suite d'après le lemme de [6] p. 515, en éclatant encore une fois en $\widehat{O}_{C_0+2}$ la 1-forme a une valeur propre non nulle en chacun de ses zéros sur $\widehat{C}_0 + 3$.

D'après la remarque 2 avoir une valeur propre non nulle est un cas stable par éclatement. De la périodicité des courbes et de l'invariance de $\widehat{\mathcal{F}}_C$ par σ_C^{C+n} $\widehat{O}_{C_0}$ devrait avoir une valeur propre non nulle ce qui donne une contradiction.

Supposons $b_0 = 0$; le cône tangent de ω_{C_0+1} est de la forme

$$x(y - c_1 x)(y - c_2 x) = 0$$

si $c_1 \neq c_2$ les singularités de ω_{C+2} sur $\widehat{C} + 2$ ont toutes une valeur propre non nulle d'après le lemme [6] p. 515

si $c_1 = c_2 = c$

si $\widehat{O}_{C_0+2} = \left[\dfrac{\partial}{\partial y}\right]$ alors toujours d'après le lemme [6] p. 515, ω_{C_0+2} possède une valeur propre non nulle en $\widehat{O}_{C_0+2}$. Sinon, plaçons-nous dans la carte (x,t) où $\pi_{C_0+1}^{C_0+2}(x,t) = (x, tx) = (x,y)$

$$\omega_{C_0+2} = ((p+1)t^2 + \frac{B_2(x,tx)}{x} + tA_2(x,tx))dx + x(t + A_2(x,tx))dt.$$

Posons $b_{10} = \dfrac{\partial B_2}{\partial x}(0)$ et $b_{01} = \dfrac{\partial B_2}{\partial y}(0)$ on obtient les relations

$$-2c = \frac{b_{01} + A_2(0)}{(p+1)}, \quad c^2 = \frac{b_{10}}{p+1}.$$

Effectuons le changement de variable $t = T + c$ et $x = X$

$$\omega_{C_0+2} = ((p+1)T^2 + X(..))dX + X(T + c + A_2(X, (T+c)X))dT$$

si $A_2(0) + c \neq 0$ alors $J(\omega_{C_0+2})(\widehat{O}_{C_0})$ possède une valeur propre non nulle

si $A_2(0) + c = 0$ alors ω_{C_0+2} est de la même forme que ω_{C_0+1} et comme l'ordre de ω_{C_0+n} est 1 on ne revient pas toujours dans ce cas.

3^e *étape :* Nous allons montrer que les courbes rationnelles sont invariantes pour le feuilletage $\mathcal{F}$.

1) Montrons que si $\widehat{\mathcal{F}_C}$ en $\widehat{O}_C$ possède une singularité non nulle alors cette singularité est nécessairement non symétrique.

Supposons qu'en $\widehat{O}_C$ la singularité de $\widehat{\mathcal{F}_C}$ soit non nulle et symétrique. D'après la remarque 2 la singularité de $\widehat{\mathcal{F}_C}$ sur $\widehat{C+1}$ a une seule valeur propre non nulle. Les singularités de $\widehat{\mathcal{F}}_{C+2}$ sur $\widehat{C+2}$ sont simples ou ont une seule valeur propre non nulle. En éclatant des singularités simples ou qui ont une seule valeur propre non nulle on obtient des singularités simples ou qui ont une seule valeur propre non nulle. Mais via l'isomorphisme σ^C_{C+n}, $\widehat{O}_C$ devrait être simple ou avoir une seule valeur propre non nulle ce qui n'est pas le cas.

2) Montrons que chaque courbe $\widehat{C}$ de $\widehat{S}_C$ possède deux singularités du feuilletage $\widehat{\mathcal{F}_C}$. Chacune d'elle est soit non nulle et non symétrique soit possède une seule valeur propre non nulle.

On sait que la singularité de $\widehat{\mathcal{F}_C}$ en $\widehat{O}_{C_0}$ est soit non nulle et non symétrique soit a une seule valeur propre non nulle. En éclatant en $\widehat{O}_{C_0}$ d'après la remarque 2 on obtient deux singularités qui soit sont non nulle et non symétrique soit ont une seule valeur propre non nulle. Ce cas est globalement stable par éclatement. Donc sur chaque courbe $\widehat{C} \geq \widehat{C}_0$ le feuilletage $\widehat{\mathcal{F}_C}$ possède deux singularités qui soit sont non nulle et non symétrique soit ont une seule valeur propre non nulle. Maintenant considérons une courbe $C < C_0$. Il existe un entier k, $k = p.n.$ où $n = b_2$, tel que $\sigma^{C+(p-1)n}_{C+pn} \dots \sigma^{C+n}_{C+2n}\, \sigma^C_{C+n} = \sigma^C_{C+k}$ envoie la courbe $\widehat{C}$ sur $\widehat{C}+k$ où $\widehat{C}+k \geq \widehat{C}_0$. Les feuilletages sur $\widehat{S}_{C+k}$ et $\widehat{S}_C$ sont isomorphes par σ^C_{C+k}. Ainsi les singularités de $\widehat{\mathcal{F}_C}$ sur $\widehat{C}$ sont du même type que celles de $\widehat{\mathcal{F}_{C+k}}$ sur $\widehat{C}+k$.

3) En application immédiate de la remarque 2, on peut montrer que les courbes rationnelles sont des courbes invariantes par $\widehat{\mathcal{F}}$.

4^e *étape :* Nous allons montrer que S est une surface d'Inoue-Hirzebruch.

1) Pour chaque courbe C de $\widetilde{S}$, la surface $\widehat{S}_{C+1}$ est obtenue en éclatant $\widehat{S}_C$ en $\widehat{O}_C$. Si pour une courbe $\widehat{C}$ le point $\widehat{O}_C$ est à l'intersection de deux courbes compactes $\widehat{C}$ et $\widehat{C}'$ de $\widehat{S}_C$ alors les deux singularités de $\widehat{\mathcal{F}}_{C+1}$ sur $\widehat{C}+1$ se trouvent nécessairement aux points d'intersections des transformées strictes de $\widehat{C}$ et $\widehat{C}'$. Le point $\widehat{O}_{C+1}$ est un point singulier de $\widehat{\mathcal{F}}_{C+1}$ sur $\widehat{C}+1$ donc est l'un des deux point $\widehat{C}+1 \cap \widehat{C}$ ou $\widehat{C}+1 \cap \widehat{C}'$. Ainsi on éclate toujours à l'intersection de deux courbes compactes.

On obtient une surface d'Inoue-Hirzebruch. En effet, par définition ces surfaces vérifient $\sigma_n(S) = 3n$ (voir [3]). La self-intersection des courbes doit baisser au maximum. Dans l'article original d'Inoue de telles surfaces sont celles où les points $\widehat{O}_C$ sont à l'intersection de deux courbes compactes.

D'après [3] les surfaces d'Inoue-Hirzebruch ne possèdent pas de champ de vecteurs globaux. Ainsi, dans ce cas, $\mathcal{F}$ ne peut être défini par un champ de vecteurs global.

2) Supposons maintenant que l'on n'éclate jamais à l'intersection de deux courbes. Alors toutes les courbes sont de self-intersection -2 et d'après [2] p. 5, $\operatorname{tr}(S) \neq 0$.

Montrons que ce cas est impossible. Pour cela montrons d'abord que tous les feuilletages $\widehat{\mathcal{F}_C}$ en $\widehat{O}_C$ ont une seule valeur propre non nulle. Remarquons que l'on se trouve nécessairement dans l'un des deux cas extrêmes :

– tous les feuilletages $\widehat{\mathcal{F}_C}$ en $\widehat{O}_C$ ont une seule valeur propre nulle,

– tous les feuilletages $\widehat{\mathcal{F}_C}$ en $\widehat{O}_C$ ont des valeurs propres non nulles et non symétriques.

Supposons que l'on soit dans le second cas. Notons $i_{\widehat{O}_C}$ l'indice de $\widehat{\mathcal{F}}_C$ en $\widehat{O}_C$ suivant $\widehat{C}$. On remarque que $i_{\widehat{O}_C} \neq 0$. Calculons l'indice $i_{\widehat{O}_{C+n}}$ en fonction de $i_{\widehat{O}_C}$. Eclatons $\widehat{S}_C$ en $\widehat{O}_C$.On a : $i_A(\widehat{\mathcal{F}}_{C+1}, \widehat{C}) = i_{\widehat{O}_C} - 1$ où $\{A\} = \widehat{C} \cap \widehat{C}+1$ (voir [1] p. 585). Comme A est une singularité non nulle de $\widehat{\mathcal{F}_{C+1}}$ on a d'après [1] Remarque 2.1 : $i_A(\widehat{\mathcal{F}}_{C+1}, C+1) = \dfrac{1}{i_{\widehat{O}_C} - 1}$. D'après la formule des résidus de l'appendice [1] on a : $i_{\widehat{O}_{C+1}} = -\dfrac{i_{\widehat{O}_C}}{i_{\widehat{O}_C} - 1}$.

Par récurrence finie on obtient $i_{\widehat{O}_{C+n}} = -\dfrac{i_{\widehat{O}_C}}{n i_{\widehat{O}_C} - 1}$. Mais $i_{\widehat{O}_{C+n}} = i_{\widehat{O}_C}$ ainsi $i_{\widehat{O}_C} = 0$. Ce qui est impossible. En conclusion toutes les singularités des $\widehat{\mathcal{F}}_C$ en $\widehat{O}_C$ ont une seule valeur propre non nulle.

Soit $\widehat{\omega}_C = A_C\, dz_1 + B_C\, dz_2$ une 1-forme génératrice de $\widehat{\mathcal{F}}_C$ en $\widehat{O}_C$ dans les coordonnées (z_1, z_2). La courbe $\widehat{C}$ a pour équation $\{z_2 = 0\}$. $\widehat{C}$ est une courbe invariante par $\widehat{\mathcal{F}}_C$ ainsi $A(z_1, 0) = 0$. On a :

$$J_{\widehat{O}_C}(\omega) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \square \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Par un calcul direct on vérifie que les valeurs propres de la singularité de $\widehat{\mathcal{F}}_{C+1}$ au point $\widehat{C} \cap \widehat{C}+1$ sont $(\lambda_1, \lambda_2 - \lambda_1)$. On vérifie de même qu'au point $\widehat{O}_{C+1}$ les valeurs propres sont $(\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_2)$. Supposons que $\lambda_1 = 0$. Les valeurs propres au point $\widehat{O}_{C+1}$ sont $(-\lambda_2, \lambda_2)$ donc $\widehat{O}_{C+1}$ est simple. Mais ceci n'est pas possible, ainsi $\lambda_2 = 0$.

Voyons maintenant que S ne peut être une surface générique. Effondrons la surface $\widetilde{S}$ sur une courbe compacte C. On sait d'après la proposition 2.2.1 que $F_C^* w_C = \lambda_C \widehat{w}_C$ où λ_C est holomorphe au voisinage de $\widehat{O}_C$.

De plus d'après le théorème [2] II 1.31 le germe F_C est formellement conjugué au germe $N(x,y) = (t^n x\, y^n, ty)$. Posons $N = \varphi F_C \varphi^-1$ où φ est un biholomorphisme formel avec $\varphi(0) = 0$ et $\psi = \varphi^-1$. La forme $w = \varphi_* \widehat{w}_C$ vérifie

$$N^* w = \alpha w(\square)$$

où α est une série formelle. En utilisant la définition de N et la relation d'invariance de F_C on vérifie que $\psi_2(x,0) = 0$.

Posons $w = A_1\, dx + B\, dy$. On a les relations suivantes :

$$A_1(x,y) = A_C(\psi(x,y)) \frac{\partial \psi_1}{\partial x}(x,y) + B_C(\psi(x,y)) \frac{\partial \psi_2}{\partial x}(x,y)$$

$$B(x,y) = A_C(\psi(x,y)) \frac{\partial \psi_1}{\partial y}(x,y) + B_C(\psi(x,y)) \frac{\partial \psi_2}{\partial y}(x,y).$$

On montre par un calcul direct que $A(x,0) = 0, \dfrac{\partial B}{\partial x}(0) \neq 0$ et que $\dfrac{\partial A_1}{\partial y}(0) = 0$. Ainsi on peut écrire $w = yAdx + Bdy$ avec $A(0) = 0$.

On déduit de la relation $N^* w = \alpha w$ que

$$(*) \qquad t^{n+1} y^n \widetilde{A} B = (n t^{n+1} x y^n \widetilde{A} + t\widetilde{B}) A$$

avec $\widetilde{A}(x,y) = A(t^n x y^n, ty)$ et $\widetilde{B}(x,y) = B(t^n x y^n, ty)$.

Supposons que $\dfrac{\partial B}{\partial y}(0) \neq 0$ alors $\nu(\widetilde{B}) = 1$.

Comparons alors les ordres des membres de droite et de gauche de $(*)$ on a : $n + \nu(\widetilde{A}) + 1 = 1 + \nu(A)$, ce qui est impossible. Comparons à nouveau ces ordres sachant que $\dfrac{\partial B}{\partial y}(0) = 0$, on obtient : $n + \nu(\widetilde{A}) + 1 = n + 1 + \nu(A)$ d'où $\nu(A) = \nu(\widetilde{A})$. Posons $A = y^m + \ldots$.

Montrons maintenant que $B(0,y)=0$. Supposons que $B(0,y)\neq 0$ alors $N^*w(0,y)\,.\,\dfrac{\partial}{\partial y}=tB(0,y)$ d'où $\alpha(0,0)\neq 0$; mais d'après ($\square$)

$$t^{n+1}y^n\widetilde{A}(0,y)=\alpha(0,y)A(0,y)\ \text{ et }\ A(0,y)\neq 0.$$

Ce qui est impossible pour une question d'ordre.

Posons $A(x,y)=y^mP(y)+xQ(x,y)$, où $P(0)\neq 0$.

$$B(x,y)=xB'(x,y)\ \text{ et }\ B'(x,y)=R(y)+xT(x,y)\ \text{ où }\ R(0)\neq 0.$$

Comparons les termes d'ordre 1 en x dans la formule ($*$).

On obtient :

$$t^mP(ty)R(y)=n\,t^my^mP(ty)P(y)+R(ty)P(y).$$

Pour $y=0$ on a :

$$t^mP(0)R(0)=P(0)R(0)$$

d'où $t^m=1$ alors $|t|=1$ ce qui est impossible.

5^e *étape :* Montrons que les points singuliers du feuilletage $\mathcal{F}$ sur S sont les points d'intersections des courbes rationnelles prises deux à deux et que ces singularités sont d'ordre 1.

Ceci se vérifie facilement sachant que l'on éclate toujours à l'intersection de deux courbes compactes de $\widehat{S}_C$ et que sur chacune de ces courbes il n'y a que deux singularités du feuilletage $\widehat{\mathcal{F}}_C$.

PARTIE B : On suppose maintenant qu'il existe une courbe compacte C_0de $\widetilde{S}$ telle que $\widehat{O_{C_0}}$ ne soit pas singulier pour $\widehat{\mathcal{F}}_{C_0}$.

On peut montrer en utilisant les remarques 1 et 2 que toutes les singularités du feuilletage $\mathcal{F}$ sont simples, que les courbes rationnelles sont invariantes et que les points singuliers sont les points d'intersection des ces courbes prises deux à deux.

Nous allons montrer que S est une surface générique. Plaçons-nous dans une carte (x,y) centrée en un point $\widehat{O}_C$ non singulier pour $\widehat{\mathcal{F}}_C$.

La courbe $\widehat{C}=\{y=0\}$ est invariante par $\widehat{\mathcal{F}}_C$,$\widehat{w}_C=dy$ et d'après la proposition 2.2.1, $\dfrac{\partial F_2}{\partial x}=0$ où $F_C=(F_1,F_2)$.

Soit (x', y') une carte centrée en $\widehat{O}_{C+n}$ où $\widehat{C} + n = \{y' = 0\}$.

Posons $\sigma_C^{c+n} = (\sigma_1, \sigma_2)$. Cette application est un biholomorphisme et vérifie $\sigma_C^{c+n}(x, 0) = (\sigma_1(x, 0), 0)$ ainsi $\dfrac{\partial \sigma_1}{\partial x}(0) \neq 0$ et $\dfrac{\partial \sigma_2}{\partial y}(0) \neq 0$.

Posons $\pi_C^{c+n} = (\pi_1, \pi_2)$ alors $\pi_2(\sigma_1, \sigma_2) = F_2(y)$. On a $\pi_2(x', y') = \pi_2(y')$. Mais comme π est une transformation quadratique on a $\pi_2(y') = y$.

Par suite $F_2(y) = \dfrac{\partial \sigma_2}{\partial y}(0)y + \ldots$ d'où $F_2'(0) \neq 0$. Mais le $\det(DF_C(\widehat{O}_C)) = 0$ donc $\dfrac{\partial F_1}{\partial x}(0) = 0$ et par suite $\mathrm{tr} DF_C(\widehat{O}_C) = F_2'(0) \neq 0$. Ainsi S est une surface générique et le feuilletage est donné par dy.

3. Feuilletage sur les surfaces d'Inoue-Hirzebruch.

3.1. THÉORÈME. — *Les surfaces d'Inoue-Hirzebruch possèdent exactement deux feuilletages et les indices de ces feuilletages par rapport aux courbes rationnelles sont des entiers quadratiques non nuls.*

Preuve. — Les surfaces d'Inoue-Hirzebruch sont définies par des germes d'applications holomorphes $F(z) = (z_1^p z_2^q, z_1^r z_2^s)$ où $\det \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \pm 1$. Posons $A(F) = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$. Pour toute surface d'Inoue-Hirzebruch S et toute courbe compacte C de $\widetilde{S}$ le germe F_C en $\widehat{O}_C$ est isomorphe au germe F en 0 (voir [2] p. 5) et ce germe d'après la remarque préliminaire à la preuve du théorème 2.2.2 permet de reconstruire une surface isomorphe à S. Donc à isomorphisme près on travaille au voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^2$ avec comme germes de courbes les germes $\{z_1 = 0\}$ et $\{z_2 = 0\}$. Remarquons les faits suivants concernant les matrices $A(F)$ (voir [3] p. 667) :

– La matrice $A(F)$ contient au plus un terme nul et ce terme est soit p soit r.

– $|\det A(F)| = 1$.

Quelles sont les matrices $A(F)$ ayant une seule valeur propre ?

$A(F)$ possède une seule valeur propre si et seulement si $\mathrm{tr}(A(F)) = 2$ et $\det(A(F)) = 1$. Soit $A(F)$ une telle matrice.

Deux cas sont à envisager :

Cas 1. $p = 0$ et $s = 2$ d'où $qr = 1$ par suite $q = r = 1$ et $A(F) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $\det A(F) = -1$, donc ce cas est impossible.

Cas 2. $p = 1$ et $s = 1$ d'où $1 - qr = 1$ et par suite $r = 0$ donc $A(F) = \begin{pmatrix} 1 & q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\det A(F) = 1$ D'après [3] p. 667 si $A(F) = \begin{pmatrix} 1 & q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ alors toutes les courbes compactes du revêtement universel de $S(F)$ sont de self intersections -2 c'est-à-dire d'après [2] p. 5 $S(F)$ est une surface de trace non nulle donc ne peut être une surface d'Inoue-Hirzebruch.

En conclusion les matrices $A(F)$ possèdent deux valeurs propres distinctes.

Soit λ_0 et μ_0 les valeurs propres de la matrices $\begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}$, $\lambda_0 \neq \mu_0$.

Soit $\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} c_0 \\ d_0 \end{pmatrix}$ deux vecteurs propres associés respectivement aux valeurs propres λ_0 et μ_0.

Considérons les 1-formes $\omega_1 = a_0 z_2 dz_1 + b_0 z_1 dz_2$ et $\omega_2 = c_0 z_2 dz_1 + d_0 z_1 dz_2$. Ces 1-formes vérifient l'équation $F^*\omega = \alpha\omega$ avec respectivement $\alpha_1 = \lambda_0 z_1^{p+r-1}\ z_2^{q+s-1}$ et $\alpha_2 = \mu_0 z_1^{p+r-1} z_2^{q+s-1}$. D'après le théorème 2.2.2 ω_1 et ω_2 définissent deux feuilletages sur $S(F)$. Vérifions que ce sont les seuls feuilletages possibles.

Soit ω un germe de 1-forme invariante par F au voisinage de 0. D'après le théorème 2.3.1 on sait que les germes de courbes $\{z_1 = 0\}$ et $\{z_2 = 0\}$ en 0 sont invariants par ω, par suite $\omega = A\omega_1 + B\omega_2$. De plus l'ordre de ω est 1, ainsi on peut supposer B inversible. On a :

$$F^*\omega = U\omega$$

$$F^*(A\omega_1 + B\omega_2) = U(A\omega_1 + B\omega_2)$$

$$\alpha_1(A \circ F)\omega_1 + \alpha_2(B \circ F)\omega_2 = U(A\omega_1 + B\omega_2)$$

d'où

$$(1) \begin{cases} \alpha_1(A \circ F) = UA \\ \alpha_2(B \circ F) = UB. \end{cases}$$

En remplaçant α_2 par son expression on obtient :

$$\mu_0 z_1^{p+r-1}\ z_2^{q+s-1}(B \circ F) = UB$$

B étant inversible on a par suite $U = z_1^{p+r-1}\ z_2^{q+s-1} V$ où $V(0) \neq 0$.

On a d'après le système (1)

$$\lambda_0(A \circ F) = V\,A \ \ (2).$$

Supposons que A n'est pas identiquement nulle. Si $A(0) = 0$ alors $V(z_1, 0)A(z_1, 0) = 0$ donc z_2 divise A. De même z_1 divise A. Posons $A = z_1^\gamma z_2^\varepsilon A'$ où $A'(z_1, 0) \neq 0$ et $A'(0, z_2) \neq 0$.

Remplaçons A par son expression dans l'équation (2) on a :

$$\lambda_0 z_1^{p\gamma+r\varepsilon}\ z_2^{q\gamma+s\varepsilon}\ A'(F) = z_1^\gamma\ z_2^\varepsilon V\ A'$$

$$\lambda_0\ z_1^{p\gamma+r\varepsilon-\gamma}\ z_2^{q\gamma+s\varepsilon-\varepsilon}\ A'(F) = V\ A'$$

d'où $p\gamma + r\varepsilon = \gamma$ et $q\gamma + s\varepsilon = \varepsilon$. Deux cas sont à envisager : si $p = 0 \Rightarrow\ \ r\varepsilon = \gamma$ alors

$$\begin{aligned} &rq\gamma + rs\varepsilon = r\varepsilon \\ &rq\gamma + s\gamma = \gamma \\ &rq + s = 1 \end{aligned}$$

par suite $s = 0$ et $rq = 1$ ou $s = 1$ et $rq = 0$. Dans chacun de ces cas deux coefficients de la matrice $A(F)$ sont nuls ce qui est impossible. Si $r = 0$ alors $p = 1$. s ne pouvant pas être nul on a $q = 0$ et $s = 1$, et la matrice $A(F)$ a deux coefficients nuls ce qui est impossible. Ainsi $A(0) \neq 0$. D'après le système (1) on a $\dfrac{A}{B} = \dfrac{\lambda_0}{\mu_0}\ \dfrac{A \circ F}{B \circ F}$ d'où $\dfrac{A(0)}{B(0)} = \dfrac{\lambda_0}{\mu_0}\ \dfrac{A(0)}{B(0)}$ donc $\lambda_0 = \mu_0$ ce qui est faux. Par suite $\omega = B\omega_2$ avec B inversible donc les formes ω et ω_2 définissent le même feuilletage sur $S(F)$.

Sur les surfaces d'Inoue-Hirzebruch les courbes forment un ou deux cycles sans arbres.

Soit t le nombre de courbes rationnelles d'un cycle.

Appelons x_i l'indice au point d'intersection de C_i avec C_{i-1} du feuilletage $\mathcal{F}$ suivant C_i. Montrons par l'absurde que les x_i sont non nuls. Supposons que $x_0 = 0$. On déduit d'après la remarque 2 et la preuve du théorème 2.4.1 partie A, $3^{\text{ème}}$ étape 2) qu'au point $\widehat{O}_C$, le feuilletage $\widehat{\mathcal{F}}_C$ possède une seule valeur propre non nulle. On connaît d'après la preuve du théorème 3, la 1-forme qui engendre $\widehat{\mathcal{F}}_{\widehat{O}_C}$. On vérifie facilement que $\lambda_2 = 0$. Soit $A = \widehat{C} \cap \widehat{C} + 1$ et $B = \widehat{C}' \cap \widehat{C} + 1$. Un calcul élémentaire permet de déterminer les valeurs propres de $\widehat{\mathcal{F}}_{\widehat{O}_C}$ en A et B. Celles-ci sont respectivement $(\lambda_1, -\lambda_1)$ et $(\lambda_1, 0)$. Ainsi nécessairement $\widehat{O}_{C+1} = B$. On est ramené à la situation initiale et la self intersection de $\widehat{C}'$ a diminué de 1. Ceci est en contradiction avec la périodicité des courbes. En effet, cette périodicité assure que les self intersections des courbes dans les surfaces $\widehat{S}_C$ forment une suite périodique de période n ([3] p. 664). Or ici les valeurs absolues des self intersections des transformées strictes de $\widehat{C}'$ peuvent être arbitrairement grandes, donc les $x_i \neq 0$.

En appliquant à chaque courbe rationnelle de S le Théorème de l'indice [1] p. 592 et la remarque [1] p. 585 on a le système suivant :

$$\begin{cases} x_1 + \dfrac{1}{x_2} = -n_1 \\ x_2 + \dfrac{1}{x_3} = -n_2 \\ \vdots \\ x_t + \dfrac{1}{x_1} = -n_t. \end{cases}$$

Ces équations permettent d'exprimer x_t comme fraction rationnelle de x_1 à coefficients dans $\mathbb{Q}$. La dernière équation $x_t + \dfrac{1}{x_1} = -n_t$ fait apparaître x_1 comme solution d'un polynôme de degré 2 à coefficients entiers.

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. CAMACHO, P. SAD, Invariant varieties through singularities of holomorphic vector fields, Annals of Math., 115 (1982), 579-595.

[2] J. CARELL, A. HOWARD, C. KOSNIOWSKI, Champs de vecteurs holomorphes sur des surfaces complexes compactes, Math. Annalen, 204 (1973), 73–81.

[3] G. DLOUSSKY, mémoire de la S.M.F., Structure des surfaces de Kato, tome 112, n° 14 (1984).

[4] G. DLOUSSKY, Une construction élémentaire des surfaces d'Inoue-Hirzebruch, Math. Ann., 280 (1988), 663-682.

[5] X. GOMEZ - MONT, Singularité d'équations differentielles, Astérisque, n° 150-151 (1987).

[6] Ma. KATO, Compact complex manifolds Containing global spherical shells I, Proc. Internat. Sympos. Algebraic Geometry (Nagota, ed) Kyoto (1977), Kinokuniya p.45-84.

[7] J.F. MATTEI, R. MOUSSU, Holonomie et intégrale premières, Annales de l'Ecole Normale Supérieure, tome 13, n° 4 (1980), 469-523.

[8] I. NAKAMURA, Towards classification of non-kählerian complex surfaces, Sugaku Expositions, 2 (1989), 209-229.

[9] T. SUWA, Unfoldings of complex analytic foliations with singularities. Japan. J. Math., Vol 9, n° 1 (1983).

Manuscrit reçu le 8 juillet 1993,
révisé le 28 novembre 1994.

Franz KOHLER,
Université d'Angers
Département de Mathématiques
2, bd Lavoisier
49045 Angers Cedex 01 (France).