ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

MOHAMMED EL HAOUARI

Rétractes d'un espace

Annales de l'institut Fourier, tome 45, nº 4 (1995), p. 1079-1089

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1995__45_4_1079_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
45, 4 (1995), 1079-1089

RÉTRACTES D'UN ESPACE

par Mohammed EL HAOUARI

Introduction.

L'existence de rétractes d'un espace donné X constitue l'une des premières applications de la théorie d'homotopie. Le problème qui suit naturellement est le dénombrement des types d'homotopies de ces rétractes. L'exemple du produit infini de sphères $\times_n S^n$ montre la nécessité d'introduire des conditions de finitude si l'on espère un nombre fini de rétractes. Clairement, on doit aussi commencer par dénombrer les types d'homotopie rationnelle de rétractes.

Considérons alors un C.W. complexe X simplement connexe, de type fini. Un premier résultat dû à L. Renner [R] établit la finitude du nombre de types d'homotopie rationnelle de rétractes de X sous l'hypothèse suivante :

(*) L'algèbre de cohomologie $H^*(X;\mathbb{Q})$ est finiment engendrée (ie noethérienne).

L'objet de ce papier est d'obtenir le même résultat sous l'hypothèse :

(**) L'algèbre de Lie d'homotopie rationnelle, $\pi_*(\Omega X)\otimes\mathbb{Q}$ est finiment engendrée.

Remarquons que si la catégorie de Lusternik-Schnirelmann de X est finie (ie cat $X<\infty$) et si X vérifie l'hypothèse : $(**')$ dim $\pi_*(\Omega X)\otimes\mathbb{Q}<\infty$ alors d'après le théorème de dichotomie [FHT1], X vérifie : $(*')$ dim $H^*(X,\mathbb{Q})<\infty$.

Mots-clés : Rétractes d'un espace – Modèles minimaux – Semi-groupes fortement π-réguliers.
Classification math. : 55P62 – 55P10.

En particulier, les espaces elliptiques vérifient ($*'$) et ($**'$) et donc ces espaces n'admettent qu'un nombre fini de types d'homotopie de rétractes qui sont nécessairement elliptiques. Notons aussi que la classe des espaces vérifiant (**) est beaucoup plus vaste que celle des espaces vérifiant ($**'$), puisque, d'après [FHT2] elle contient de nombreux espaces $\mathbb{Q}$-hyperboliques : $\pi_*(\Omega X) \otimes \mathbb{Q}$ possède une croissance exponentielle.

Remarquons que tout espace $\mathbb{Q}$-formel satisfaisant ($**'$) satisfait (*) et, par dualité, tout espace $\mathbb{Q}$-coformel satisfaisant ($*'$) satisfait (**).

Finalement, il existe des espaces qui satisfont l'hypothèse (**) et non (*), par exemple, considérer le $5^{\text{ième}}$ étage de Postnikov de $X = K(\mathbb{Q}, 2) \bigvee K(\mathbb{Q}, 3)$. De même, il existe des espaces qui satisfont l'hypothèse (*) et non (**), [L].

1. Une condition nécessaire pour que l'algèbre de Lie d'homotopie rationnelle soit finiment engendrée.

Soit X un C.W. complexe, simplement connexe, de type fini, et tel que l'algèbre de Lie graduée $L = \pi_*(\Omega X) \otimes \mathbb{Q}$ soit finiment engendrée.

Notons par X_0 le rationnalisé de X ; et par $[X_0, X_0]$ le monoïde des classes d'homotopies rationnelles des applications continues de X_0 dans X_0, et par $\pi_*[X_0, X_0]$ l'image dans End $(\pi_*(X) \otimes \mathbb{Q})$ de $[X_0, X_0]$ par l'application naturelle :

$$\pi_* : [X_0, X_0] \to \mathrm{End}(\pi_*(X) \otimes \mathbb{Q}) \cong \mathrm{End}(\pi_*(\Omega X) \otimes \mathbb{Q}).$$

Notons $M_N(\mathbb{Q})$ le semi-groupe des matrices carrées d'ordre N, muni de la topologie de Zariski.

THÉORÈME 1.1. — *Si X est un C.W. complexe, simplement connexe, de type fini, et tel que l'algèbre de Lie graduée $\pi_*(\Omega X) \otimes \mathbb{Q}$ soit finiment engendrée, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que le semi-groupe $\pi_*[X_0, X_0]$ soit un fermé, au sens de Zariski, dans $M_N(\mathbb{Q})$.*

Démonstration.

1) Existence de N :

Fixons une présentation de l'algèbre de Lie $L = \pi_*(\Omega X) \otimes \mathbb{Q}$:

$$0 \longrightarrow \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{L}(V) \longrightarrow L \longrightarrow 0$$

où V est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{R}$ désigne l'idéal des relations.

Si $x \in V$, notons par $|x|$ le degré de x.

Soit $m = \sup\{|x| \text{ tel que } x \in V\}$ et $W = \{x \in L = \pi_*(\Omega X) \otimes \mathbb{Q}$ tel que $|x| \leqslant m\}$. Il est clair que W est de dimension finie N. De plus, toute application linéaire, f de L dans L, qui respecte la structure d'algèbre de Lie, est déterminée par sa restriction à W, et est donc définie par une matrice de $M_N(\mathbb{Q})$. Ainsi un élément de $\pi_*[X_0, X_0]$ est complètement déterminé par une matrice de $M_N(\mathbb{Q})$.

2) Montrons que c'est un fermé :

2.1) Nous allons d'abord rappeler la construction du modèle de Quillen [Q], et des modèles bigradué et filtré [O] d'une $\mathbb{Q}$-algèbre de Lie différentielle graduée :

1.2. Foncteur de Quillen. Modèle bigradué. Modèle filtré.

1.2.1. Foncteur de Quillen [Q].

Une $\mathbb{Q}$-l.d.g. (L, d) est une $\mathbb{Q}$-algèbre de Lie graduée connexe $L = \bigoplus_{p\geqslant 1} L_p$, munie d'une différentielle d de degré -1, vérifiant : $d[x, y] = [dx, y] + (-1)^{|x|}[x, dy]$.

Une $\mathbb{Q}$-l.d.g. (L, d) est dite libre si L est une algèbre de Lie graduée libre sur un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $V = \bigoplus_{p>0} V_p$; on la note $(L, d) = (\mathbb{L}(V), d)$. Elle est dite minimale si $L = \mathbb{L}(V)$ et la différentielle d est décomposable, c'est-à-dire $d(V) \in \mathbb{L}^{\geqslant 2}(V)$.

Si (L, d) est une $\mathbb{Q}$-l.d.g. connexe, il existe une $\mathbb{Q}$-l.d.g. minimale unique à isomorphisme près $(\mathbb{L}(V), d)$ et un morphisme de $\mathbb{Q}$-algèbres de Lie :

$$\varphi : (\mathbb{L}(V), d) \to (L, d)$$

induisant un isomorphisme en homologie. $(\mathbb{L}(V), d)$ est appelé modèle minimal de (L, d).

Quillen a construit un foncteur λ entre la catégorie des espaces rationnels simplement connexes et celle des $\mathbb{Q}$-algèbres de Lie différentielles graduées LDG, induisant un isomorphisme au niveau des catégories homotopiques :

$$\lambda : \{ \text{ espaces rationnels simplement connexes } \} \to LDG.$$

Ainsi, étant donné un espace topologique X, simplement connexe, il existe un modèle minimal $(\mathbb{L}(V), d)$ de $\lambda(X)$. On le note $\mathcal{L}_X$. Il vérifie :

$V_n \cong H_{n+1}(X; \mathbb{Q})$ comme espaces vectoriels, et

$H_*(\mathbb{L}(V), d) \cong \pi_*(\Omega X) \otimes \mathbb{Q}$ comme algèbres de Lie.

Dans la catégorie des $\mathbb{Q}$-algèbres de Lie différentielles graduées LDG, Oukili a développé les notions de modèles bigradué et filtré. Nous allons rappeler de quoi il s'agit :

1.2.2. Modèle bigradué.

Soit L une $\mathbb{Q}$-algèbre de Lie, il existe un modèle minimal $(\mathbb{L}(Z), d) \xrightarrow{\rho} (L, 0)$, vérifiant :

(i) Z est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel bigradué : $Z = \bigoplus_{p,q \geqslant 0} Z_p^q$

(ii) $d : Z_p^q \to \mathbb{L}(Z)_{p-1}^{q-1}$

(iii) $H_0(\mathbb{L}(Z), d) \xrightarrow{\rho_*} L$ est un isomorphisme, et $H_+(\mathbb{L}(Z), d) = 0$.

$(\mathbb{L}(Z), d) \xrightarrow{\rho} (L, 0)$ est défini à isomorphisme près. Il est appelé le modèle bigradué de L.

1.2.3. Modèle filtré.

Soit (L, d) une $\mathbb{Q}$-algèbre de Lie différentielle graduée connexe et $(\mathbb{L}(Z), d) \xrightarrow{\rho} H(L, d)$ son modèle bigradué, il existe alors une différentielle D sur $\mathbb{L}(Z)$ et un morphisme :

$\pi : (\mathbb{L}(Z), D) \to (L, d)$ tels que :

(i) $D - d : Z_p^q \to (L, d)_{p-1}^{\leqslant q-2}$

(ii) $\forall v \in (\mathbb{L}(V))_0 : \pi_*[v] = \rho(v)$

(iii) π induit un isomorphisme en homologie.

En plus, cette construction est unique à isomorphisme près.

$\pi : (\mathbb{L}(V), D) \to (L, d)$ est appelé modèle filtré de (L, d).

Le modèle filtré de X est le modèle filtré de $\lambda(X)$.

Remarque. — Les notions de modèles bigradué et filtré ont été introduites, dans le cas des $\mathbb{Q}$-algèbres différentielles graduées commutatives, par S. Halperin et J.D. Stasheff [HS]. Ces modèles ont été étudiés par Y. Félix dans [F]. Dans le cas non commutatif, une construction de ces modèles est donnée dans [E].

2.2) Le semi-groupe $\pi_*[X_0, X_0]$ est un fermé au sens de Zariski dans $M_N(\mathbb{Q})$ d'après le lemme suivant :

LEMME 1.2.4. — *La réalisation d'une application linéaire $f : W \to W$ par une application continue $g : X_0 \to X_0$ détermine une suite d'obstructions $O_n(f)$, qui sont des polynômes en les coefficients de la matrice $M(f) \in M_n(\mathbb{Q})$ et telle que :* $\pi_*[X_0, X_0] = \bigcap_n O_n(f)^{-1}(0)$.

Preuve du lemme. — Fixons une présentation de l'algèbre de Lie $L = \pi_*(\Omega X) \otimes \mathbb{Q} : 0 \to \mathcal{R} \to \mathbb{L}(V) \to L \to 0$ où V est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{R}$ désigne l'idéal des relations.

Pour montrer le lemme, nous allons d'abord donner des obstructions à la réalisation d'une application linéaire f de W dans W par un morphisme f de $(\mathbb{L}(Z), D)$ dans $(\mathbb{L}(Z), D)$, lorsque $\pi : (\mathbb{L}(Z), D) \to (L, d)$ désigne un modèle filtré de X. Ainsi nous établissons des obstructions à la réalisation d'une application linéaire f de W dans W par une application continue du rationnalisé de X dans lui-même.

Soit alors $f : W \to W$ un homomorphisme gradué de matrice M :

1) Le premier type d'obstructions $O_1(f)$ porte sur les images des relations $\mathcal{R}$ dans $\mathbb{L}(V)$, et sur la structure d'algèbre de Lie :

$O_1(f) : f/_{\mathcal{R}} = 0$ et $f([v_1, v_2]) - [f(v_1), f(v_2)] = 0$, pour tout v_1, v_2 dans W.

2) Le second type d'obstruction porte sur la différentielle, et la loi de dérivation :

$$O_1'(f) : df(v) - f(dv) = 0 \text{ pour tout } v \text{ dans } V \subset W,$$

et

$$df([v_1, v_2]) - [dfv_1, v_2] + (-1)^{|v|}[v_1, dfv_2] = 0.$$

Il est clair que les équations $O_1(f)$ et $O'_1(f)$ sont polynomiales.

Les autres obstructions se lisent sur le processus de construction d'une application $\tilde{f}$ induisant f :

3) Remarquons que si $z_0 \in Z_0$ alors $\rho_*[z_0] \in V \subset W$.

Soit $\alpha_0 \in \mathbb{L}(Z_0)$ tel que $f\rho_*[z_0] = \rho^*(\alpha_0)$, on pose alors : $\tilde{f}(z_0) = \alpha_0$; et on prolonge à $\mathbb{L}(Z_0)$.

4) Soit $z_1 \in Z_1 : Dz_1 = dz_1$.

Comme $[\tilde{f}dz_1] \in \pi_*(\Omega X) \otimes \mathbb{Q}$ et $\rho_*[\tilde{f}dz_1] = f\rho_*[dz_1] = 0$, $\tilde{f}dz_1$ est un bord. Donc $\tilde{f}dz_1 = dw_1$ avec $w_1 \in (\mathbb{L}(Z))_1$. Posons alors $\tilde{f}(z_1) = w_1$ et prolongeons $\tilde{f}$ à $\mathbb{L}(Z_0 \oplus Z_1)$. On voit ainsi que les obstructions $O_1(f)$ et $O'_1(f)$ sont suffisantes pour construire $\tilde{f}$ sur $\mathbb{L}(Z_{\leqslant 1})$.

5) Soit $z_2 \in Z_2$: $Dz_2 = dz_2 + d_0 z_2$, $d_0 z_2 \in \mathbb{L}(Z_0)$ et $D(\tilde{f}(dz_2)) = \tilde{f}(Ddz_2) = 0$

Donc : $\tilde{f}(dz_2) = dw_2$, avec $w_2 \in (\mathbb{L}(Z))_2$.

Pour définir $\tilde{f}$ sur Z_2, il est nécessaire que : $[\tilde{f}(d_0 z_2)] - [d_0 w_2] = 0$. Ceci constitue l'obstruction $O_2(f)$. En effet, supposons $\tilde{f}_*([d_0 z_2]) = [d_0 w_2]$: on obtient : $\tilde{f}(d_0 z_2) = d_0 w_2 + D\gamma$ avec $\gamma \in \mathbb{L}(Z)_1$ et $\tilde{f}Dz_2 = \tilde{f}(dz_2) + \tilde{f}(d_0 z_2) = dw_2 + d_0 w_2 + D\gamma = D(w_2 + \gamma)$.

Posons alors $\tilde{f}(z_2) = w + \gamma \in \mathbb{L}(Z)_2$.

De plus, l'obstruction $O_2(f)$ se lit sur la matrice M de f et est une équation polynomiale.

Plus généralement, nous pouvons définir une suite d'obstructions $O_n(f), n \geqslant 2$, polynomiales en les coefficients de la matrice de M de la manière suivante :

Soit $z \in Z_n$, $Dz = dz + d_{n-2}z + \ldots + d_0 z$ où d_i baisse la graduation inférieure de n-i-unités. Ecrivons $Dz = D'z + d_0 z$ avec $d_0 z \in \mathbb{L}(Z)_0$. On a alors : $D\tilde{f}Dz = D\tilde{f}D'z + D\tilde{f}d_0 z = 0$. Donc $D\tilde{f}D'z = 0$, il existe alors $v \in \mathbb{L}(Z)_n$ et $\alpha \in \pi_*(\Omega X) \otimes \mathbb{Q}$ tels que : $\tilde{f}D'z = Dv - \nu(\alpha)$ où $\nu : \pi_*(\Omega X) \otimes \mathbb{Q} \to \mathbb{L}(Z_0)$ est une section du modèle bigradué φ : $(\mathbb{L}(Z), d) \to \pi_*(\Omega X) \otimes \mathbb{Q}$.

L'équation $\tilde{f}_*[d_0 z] - [\nu(\alpha)] = 0$ représente l'obstruction $O_n(f)$. En effet, supposons qu'elle est vérifiée, on obtient :

$$\tilde{f}d_0 z = \nu(\alpha) + D\gamma, \text{ avec } \gamma \in \mathbb{L}(Z)_1.$$

Ceci fournit :

$$\tilde{f}Dz = \tilde{f}D'z + \tilde{f}d_0z = Dv - \nu(\alpha) + \nu(\alpha) + \delta(\gamma) = D(v+\gamma).$$

Posons alors : $\tilde{f}(z) = v + \gamma$ dans $\mathbb{L}(Z)_{\leqslant n}$. L'obstruction $O_n(f)$ à la construction de $\tilde{f}(z)$ se lit bien sur la matrice M de f et est une équation polynomiale.

2. Semi-groupe fortement π-régulier.

Soit V un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension n; clairement les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(a) Les composés : $e(V) \subset V \xrightarrow{f} f(V)$ et $f(V) \subset V \xrightarrow{f} e(V)$ sont des isomorphismes.

(b) rg $e=$ rg $f=$ rg $ef=$ rg fe.

DÉFINITION 2.1 [R]. — *Soit $S \subset M_n(\mathbb{Q}) \cong \operatorname{End} V$, notons $E(S)$ l'ensemble des idempotents de S. Soient e et f deux éléments de $E(S)$:*

On dit que e et f sont équivalents, et on note $e \sim f$ s'il existe une suite d'éléments de $E(S)$: $e_0 = e, e_1, ..., e_n = f$ telle que pour tout i=0,...,$n-1$: e_i et e_{i+1} vérifient les conditions a) ou b).

DÉFINITION 2.2 [R]. — *Soit S un semi-groupe avec élément neutre. Nous dirons que a divise b dans S, s'il existe $u, v \in S$ tels que : $uav = b$. Nous notons $a|b$ si a divise b et $a \approx b$ si $a|b$ et $b|a$.*

S est dit fortement π-régulier si pour tout $x \in S$, il existe un entier $m > 0$, et un sous-groupe H de S tels que : $x^m \in H$.

PROPOSITION 2.3 [R]. — *Si $S \subset M_n(\mathbb{Q})$ est un semi-groupe alors :*

i) *$E(S)/_\sim$ est fini.*

ii) *Si S est fortement π-régulier alors $a \sim b \Rightarrow a \approx b$.*

THÉORÈME 2.4 [R]. — *Si X est un C.W. complexe, simplement connexe, de type fini, et tel que l'algèbre de Lie graduée $\pi_*(\Omega X) \otimes \mathbb{Q}$ soit finiment engendrée, alors $\pi_*[X_0, X_0]$ est fortement π-régulier.*

Démonstration. — Puisque $\pi_*[X_0, X_0]$ est un semi-groupe fermé au sens de Zariski de $M_N(\mathbb{Q})$ il suit, d'après ([*P*], théorème 3.18), que $\pi_*[X_0, X_0]$ est fortement π-régulier.

3. Démonstration du résultat principal.

Dans toute la suite, nous supposons que X est un espace rationnel, simplement connexe, de type fini et tel que $\pi_*(\Omega X)$ soit finiment engendré comme $\mathbb{Q}$-algèbre de Lie.

Notons :

$R(X)$ l'ensemble des rétractes de X,

$[R(X)]$ l'ensemble des classes d'homotopies de rétractes de X,

$E[X, X] = \{f | f \in [X, X] \quad \text{et} \quad f^2 = f\}$.

Si Y est un élément de $R(X)$, il existe p_Y tel que $p_Y \circ i_Y = \mathrm{id}_Y$. Posons $f_Y = i_Y \circ p_Y$, alors on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f_Y} & X \\ {\scriptstyle p_Y}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle i_Y} \\ Y & \xrightarrow{=} & Y \end{array}$$

Il est clair que $f_Y \in E[X, X]$ et que Y est un espace rationnel, simplement connexe.

Notons $\tilde{R}(X)$ l'ensemble des applications f_Y, avec $Y \in R(X)$; et par S l'ensemble des applications linéaires $\pi_*(f_Y)$ avec $f_Y \in \tilde{R}(X)$.

THÉORÈME 3.1. — *Si X un espace rationnel, simplement connexe, de type fini, avec $\pi_*(\Omega X)$ finiment engendré comme algèbre de Lie, alors, à équivalence d'homotopie rationnelle près, il n'existe qu'un nombre fini de rétractes de X.*

Démonstration. — Notons $E\pi_*[X, X] \subset \pi_*[X, X]$ l'image dans End $(\pi_*(X))$ de $E[X, X]$ par l'application naturelle :

$$\pi_* : [X, X] \to \mathrm{End}(\pi_*(X)) = \mathrm{End}(\pi_*(\Omega X)).$$

Pour démontrer le théorème, il suffit d'après la proposition 2.3 de construire une application surjective $h : S/_\sim \subset E\pi_*[X, X]/_\sim \to [R(X)]$.

Pour cela, nous allons d'abord établir deux lemmes :

Lemme 3.2. — *Soient Y et Z deux rétractes de X. Si $e = f_Y$ et $f = f_Z$ sont tels que $\pi_*(e) \approx \pi_*(f)$ dans $\pi_*([X,X])$ alors $e \approx f$ dans $[X,X]$.*

Lemme 3.3. — *Soient Y et Z deux rétractes de X, Si $e = f_Y$ et $f = f_Z$ sont tels que $e \approx f$ dans $[X,X]$ alors Y et Z ont le même type d'homotopie.*

Preuve du lemme 3.2. — Par hypothèse, il existe u, v, a, b dans $[X,X]$ tels que :

$$\pi_*(uev) = \pi_*(f) \text{ et } \pi_*(afb) = \pi_*(e).$$

Considérons alors $x = fuevf$. Il est clair que $fx = xf = x$ et $\pi_*(x) = (\pi_*(f)\pi_*(uev)\pi_*(f)) = \pi_*(f)$.

Montrons d'abord qu'il existe $x^* \in [X,X]$ tel que $fx^* = x^*f = x^*$ et $xx^* = x^*x = f$: On considère pour cela le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f=fz"] \arrow[d, "pz"'] & X \\ Z \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "="] & Z \arrow[u, "iz"'] \end{tikzcd}$$

Posons $\varphi = p_Z x i_Z : Z \to Z$; on a alors :

$$\pi_*(\varphi) = \pi_*(p_Z x i_Z) = \pi_*(p_Z f i_Z) = \pi_*(p_Z i_Z p_Z i_Z) = \pi_*(\mathrm{id}_Z) = \mathrm{id}_{\pi_*(Z)}.$$

Par le théorème de Whitehead, il existe $\psi : Z \to Z$ tel que $\psi\varphi \sim_{\mathbb{Q}} \varphi\psi \sim_{\mathbb{Q}} \mathrm{id}_Z$.

Ainsi, si on pose $x^* = i_Z \psi p_Z$, on obtient :

$$x^*x = i_Z\psi p_Z x = i_Z\psi p_Z i_Z \varphi p_Z = i_Z \psi\varphi p_Z = i_Z p_Z = f \text{ dans } [X,X].$$

De même : $xx^* = f$ et $fx^* = x^*f = x^*$.

Finalement, on obtient : e/x car $x = (fu)e(vf)$ et x/f car $f = xx^*$. Ce qui donne e/f. De manière identique, on peut montrer que f/e, et conclure que $e \approx f$.

Preuve du lemme 3.3. — Puisque $e \approx f$ dans $[X,X]$, il existe u, v, x, y dans $[X,X]$ tels que : $f = xey$ et $ufv = e$.

On pose alors : $\psi = p_Z f v i_Y : Y \to Z$ et $\varphi = p_Y e u i_Z : Z \to Y$. Il est clair que : $\varphi\psi = p_Y e u i_Z p_Z f v i_Y = p_Y e u f f v i_Y = p_Y e u f v i_Y = p_Y e e i_Y = p_Y e i_Y = p_Y i_Y p_Y i_Y = \mathrm{id}_Y$. Ainsi $\pi_*(\varphi) \circ \pi_*(\psi) : \pi_*(Y) \to \pi_*(Y)$ est l'application $\mathrm{id}_{\pi_*(Y)}$. De même, si $\theta = p_Z f x i_Y$ et $\theta' = p_Y y f i_Z$ on trouve :

$$\pi_*(\theta) \circ \pi_*(\theta') = \mathrm{id}_{\pi_*(Z)}.$$

Finalement, les deux applications : $\pi_*(\varphi) : \pi_*(Z) \to \pi_*(Y)$ et $\pi_*(\theta) : \pi_*(Y) \to \pi_*(Z)$ sont surjectives entre $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels.

D'autre part, $\pi_*(i) : \pi_*(Y) \to \pi_*(X)$ est injective et $\pi_*(X)$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de type fini, il en est de même de $\pi_*(Y)$. De même, $\pi_*(Z)$ est de type fini. Donc les deux surjections sont des isomorphismes, et par suite Y et Z ont le même type d'homotopie.

Fin de la démonstration du théorème. — Considérons alors $h : S/_\sim \subset E\pi_*[X,X]/_\sim \to [R(X)]$ définie, pour tout élément $[\pi_*(f_Y)]$ de $S/_\sim$ par : $h([\pi_*(f_Y)]) = [Y]$. Puisque $\pi_*[X,X]$ est entièrement déterminé par sa restriction à W, si $[\pi_*(f_Y)]$ et $[\pi_*(f_Z)]$ sont deux éléments de $S/_\sim$ tels que $\pi_*(f_Y) \sim \pi_*(f_Z)$ alors $\pi_*(f_Y) \approx \pi_*(f_Z)$ dans $\pi_*[X,X]$ car $\pi_*[X,X]$ est fortement π-régulier. Le lemme 3.2. implique alors que $f_Y \approx f_Z$ dans $[X,X]$ et donc d'après le lemme 3.3. Y et Z ont le même type d'homotopie. Ce qui achève la démonstration du théorème.

Remerciement. — Je tiens à remercier le Professeur J.-C. Thomas pour ses précieuses remarques et son aide pour l'élaboration de cet article.

BIBLIOGRAPHIE

[E] M. EL HAOUARI, p-Formalité des espaces, J. Pure and Appl. Algebra, 78 (1992), 27-47.

[F] Y. FÉLIX, Dénombrement des types de K-homotopie. Théorie de la déformation, Mémoire de la S.M.F., 3 (1980).

[FHT1] Y. FÉLIX, S. HALPERIN et J.-C. THOMAS, The homotopy Lie algebra for finite complexes, Publ. de l'I.H.E.S., 56 (1980), 387-410.

[FHT2] Y. FÉLIX, S. HALPERIN et J.-C. THOMAS, Hopf algebras of polynomials growth, J. of Algebra, 125 (1989), 408-417.

[H] S. HALPERIN, Lectures on minimal models, Mémoire de la S.M.F., 9-19 (1983).

[HS] S. HALPERIN, J.-D. STASHEFF, Obstructions to homotopy equivalences, Advances in Math., 32 (1979), 233-279.

[L] J.-M. LEMAIRE, A finite complex whose rational homotopy is not finitly generated in "H-spaces". (Actes de la Réunion de Neuchâtel (Suisse) Août 1970, ed. F. Sigrist). Lectures Notes in Mathemactics, 196 (1971), 114-120.

[O] A. OUKILI, Sur l'homologie d'une algèbre différentielle (de Lie), thèse 3ème cycle, Nice, 1978.

[P] M. PUTCHA, Linear algebraic monoids, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1988.

[Q] D. QUILLEN, Rational homotopy theory, Annals of Math., (2) (90) (1969), 205-295.

[R] L. RENNER, The homotopy types of retractes of a fixed space, J. Pure and Appl. Algebra, 69 (1990), 295-299.

Manuscrit reçu le 22 septembre 1994,
accepté le 14 mars 1995.

Mohammed EL HAOUARI,
Université des Sciences et Technologies de Lille
U.F.R. de Mathématiques
URA-GAT-751
59655 Villeneuve d'Ascq (France).