Annales de l'institut Fourier

Pietro Corvaja

Une application nouvelle de la méthode de Thue

Annales de l'institut Fourier, tome 45, nº 5 (1995), p. 1177-1203
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1995__45_5_1177_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
45, 5 (1995), 1177-1203

UNE APPLICATION NOUVELLE DE LA MÉTHODE DE THUE

par Pietro CORVAJA

1. Introduction.

Soit K une extension de degré n du corps des nombres rationnels $\mathbf{Q}$. La célèbre inégalité de Liouville affirme que la distance de tout élément α de K à un nombre rationnel β vérifie

$$|\alpha - \beta| \geqslant (2H(\alpha)H(\beta))^{-n}$$

où $H(\cdot)$ désigne la hauteur de Weil. L'inégalité de Liouville est optimale : on peut démontrer, à l'aide du principe de Dirichlet ou du théorème de Minkowski en géométrie des nombres, que pour tout $\epsilon > 0$ il existe une infinité de couples $(\alpha, \beta) \in K \times \mathbf{Q}$ vérifiant $\alpha \neq \beta$ et

$$|\alpha - \beta| < (H(\alpha)H(\beta))^{-n+\epsilon}.$$

D'autre part le théorème de Roth affirme que pour tout α *fixé* et pour tout $\epsilon > 0$ il n'existe qu'un nombre fini de rationnels β vérifiant

$$|\alpha - \beta| < H(\beta)^{-2-\epsilon};$$

en d'autres termes il existe une fonction $c_1(\alpha, \epsilon)$ telle que pour tout nombre rationnel β de hauteur $H(\beta) > c_1(\alpha, \epsilon)$ on ait

$$|\alpha - \beta| > H(\beta)^{-2-\epsilon}.$$

Mots-clés : Approximation diophantienne - Méthode de Thue.
Classification math. : 11J.

La méthode de démonstration de Roth ne permet pas de calculer la fonction $c_1(\alpha,\epsilon)$; des méthodes effectives permettant le calcul de $c_1(\alpha,\epsilon)$ pour certaines valeurs de ϵ (dépendantes du degré du corps K) ont été développées à partir des travaux de Baker sur les formes linéaires de logarithmes des nombres algébriques (*voir* par exemple l'introduction de [B2]). D'autres résultats ont été démontrés plus récemment par Bombieri en utilisant la méthode de Dyson [B2]. Les résultats effectifs obtenus sont très loin de l'exposant de Roth $2+\epsilon$, mais ils ont un intérêt théorique car ils permettent la résolution effective d'une vaste classe d'équations diophantiennes.

On se propose dans ce travail d'améliorer l'inégalité de Liouville sur la distance $|\alpha-\beta|$ sous une condition du type $H(\beta) > H(\alpha)^{c_2}$ pour presque tout couple $(\alpha,\beta) \in K \times \mathbf{Q}$, avec une constante c_2 dépendant du corps K. Le problème peut s'énoncer de manière suivante :

PROBLÈME. — *Soit K un corps de nombres, $n = [K : \mathbf{Q}]$. Existe-t-il trois nombres réels positifs c_2, c_3, ϵ tels que pour tout $(\alpha,\beta) \in K \times \mathbf{Q}$ avec $H(\beta) > H(\alpha)^{c_2}$ on a*

$$|\alpha-\beta| > c_3(H(\beta))^{-n+\epsilon} \ ?$$

Quelle est la valeur minimale de c_2 ?

La méthode de Thue-Siegel-Dyson permet de traiter ce problème, ainsi que la méthode effective de Baker-Feldmann. Pourtant les résultats que l'on obtient ne sont pas optimaux, la valeur de c_2 étant très grande comme fonction du degré n de l'extension K. Par une variante de la méthode de Thue-Dyson, nous démontrons dans ce papier des résultats ineffectifs, au sens qu'ils sont valables en dehors d'un sous-ensemble fini de $K \times \mathbf{Q}$ qui n'est pas calculable par notre méthode. Le théorème principal est le suivant :

THÉORÈME 1.1. — *Soit K une extension de degré n du corps des nombres rationnels $\mathbf{Q}$, s un réel, $0 < s < 1$. L'inégalité*

$$|\alpha-\beta| < \left(H(\alpha)^{2/s} H(\beta)^s\right)^{\frac{-n}{1-\frac{1}{s\sqrt{n}}}}$$

n'a qu'un nombre fini de solutions $(\alpha,\beta) \in K \times \mathbf{Q}$ avec $\alpha \neq \beta$.

A titre d'exemple choisissons $s = \dfrac{2}{3}$ dans le théorème 1.1 : on obtient le

COROLLAIRE 1.2. — *Soient K, n comme dans l'énoncé du théorème. Il existe une constante $c_3 = c_3(K)$ telle que pour tout couple $(\alpha, \beta) \in K \times \mathbf{Q}$ vérifiant*

$$H(\beta) > H(\alpha)^{10}$$

on ait

$$|\alpha - \beta| > c_3\,(H(\beta))^{-\frac{29}{30}\cdot\frac{n}{1-\frac{3}{2\sqrt{n}}}}\,.$$

Dès que le degré n est au moins 507 l'inégalité du corollaire est plus forte que celle de Liouville, mais la constante c_3 n'est pas effective. On a donc résolu le problème avec une constante $c_2 = 10$. On pourrait remplacer 10 par $3 + 2\sqrt{2}$ quand n est suffisamment grand.

Le théorème de Roth peut s'énoncer de la manière suivante : pour tout nombre algébrique α de degré n et tout réel $\mu > 2$ il existe une constante $c_4(\alpha, \mu)$ telle que $|\alpha - \beta| > c_4 H(\beta)^{-\mu}$ pour tout nombre rationnel $\beta \neq \alpha$. En choisissant $s = 2/\sqrt{n}$ dans le théorème 1.1 nous pouvons calculer la valeur de $c_4(\alpha, 4\sqrt{n})$ pour presque tout élément α d'un corps de nombres fixé : nous obtenons le

COROLLAIRE 1.3. — *Soient K, n comme dans l'énoncé du théorème principal; pour presque tout couple $(\alpha, \beta) \in K \times \mathbf{Q}$, $\alpha \neq \beta$ on a*

$$|\alpha - \beta| > H(\alpha)^{-2n\sqrt{n}} H(\beta)^{-4\sqrt{n}}\,.$$

Ce corollaire est toujours ineffectif : on ne sait pas déterminer explicitement les couples "exceptionnels" (α, β) satisfaisant l'inégalité inverse de celle du corollaire 1.3.

Le théorème 1.1 sera démontré dans la troisième section : le corollaire 3.3 fournit une généralisation du théorème 1.1 à une extension d'un corps de nombres quelconque; on peut en plus considérer des distances en plusieurs places. Le corollaire 1.2 se compare bien avec les résultats connus quand n est grand; en particulier la fonction $c_2(n)$ est bornée, alors que par la méthode de Thue-Dyson classique (*voir* le "Principe de Thue-Siegel" de [BM], p. 179 et [B1], théorème 2, p. 285) on ne peut pas prendre $c_2(n) < \sqrt{n}$.

La contribution originale de ce travail consiste en la construction du polynôme d'interpolation : au lieu d'utiliser le lemme de Siegel, classique en approximation diophantienne, on utilise une construction explicite qui fait l'objet du paragraphe suivant.

L'auteur est reconnaissant à Michel Laurent qui a relu cet article et apporté des améliorations.

2. Construction du polynôme d'interpolation.

2.1. Valeurs absolues et hauteurs.

Pour toute place v d'un corps de nombres k on considère la valeur absolue normalisée par rapport à k correspondant à la place v, à savoir la seule valeur absolue $|\cdot|_v$ telle que, pour tout nombre rationnel x, on ait

$$|x|_v = |x|_w^{[k_v:\mathbf{Q}_w]/[k:\mathbf{Q}]};$$

ici w est l'unique place de $\mathbf{Q}$ au-dessous de v et la valeur absolue correspondante est normalisée de la manière usuelle. Avec cette normalisation la formule du produit s'écrit

$$\prod_v |\alpha|_v = 1 \qquad \text{pour tout } \alpha \in k^*,$$

où le produit se fait sur toutes les places de k. En plus pour la hauteur de Weil logarithmique absolue on a la formule

$$h(\alpha) = \sum_v \log^+ |\alpha|_v$$

où la somme se fait encore sur toutes les places du corps k. Nous utiliserons le symbole $H(\cdot)$ pour la hauteur multiplicative, à savoir $H(\cdot) = \exp(h(\cdot))$. Remarquons qu'avec ces normalisations l'inégalité de Liouville s'écrit

$$|\alpha_1 - \alpha_2|_v > (2H(\alpha_1)H(\alpha_2))^{-1}$$

pour $\alpha_1 \neq \alpha_2$ et pour toute place v de K.

Soit maintenant $P \in k[X_1, \ldots, X_n]$ un polynôme à coefficients dans k. Pour toute place v de k on définit la *hauteur locale* H_v de P comme

$$H_v(P) = \max_I |a_I|_v$$

où les a_I sont les coefficients du polynôme P :

$$P(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{I=(i_1,\ldots,i_n)} a_I X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n}.$$

Enfin la *hauteur* d'un polynôme P se définit comme le produit des hauteurs locales :

$$H(P) = \prod_v H_v(P).$$

On remarque que grâce à la formule du produit la hauteur d'un polynôme est invariante par multiplication par une constante non nulle ; en particulier pour tout polynôme $P \in k[X_1, \ldots, X_n]$ il existe un scalaire $\lambda \in k^*$ tel que le polynôme $Q = \lambda P$ ait ses coefficients dans l'anneau des entiers de k et vérifie $H(Q) = H(P)$.

Pour toute place v du corps de nombres k on désigne par Ω_v le complété d'une clôture algébrique du complété k_v de k : Ω_v est alors isomorphe soit au corps des nombres complexes $\mathbf{C}$, dans le cas où v est une valeur absolue archimédienne, soit au corps $\mathbf{C}_p$, dans le cas où la valuation v est p-adique ; toutefois il convient de considérer sur Ω_v le prolongement de la valeur absolue $|\cdot|_v$, qui ne coïncide pas forcément avec la valeur absolue complexe ou la valeur absolue $p-$adique usuelle. Avec ces conventions on a le lemme suivant qui sera utilisé dans la suite :

LEMME 2.1. — *Soit n un entier $\geqslant 1$, k, v, Ω_v comme ci-dessus ; pour tout polynôme $P \in k[X_1, \ldots, X_n]$ on a la majoration*

$$H_v(P) \leqslant \max\left\{|P(z_1, \ldots, z_n)|_v : (z_1, \ldots, z_n) \in \Omega_v^n ; |z_1|_v = \ldots = |z_n|_v = 1\right\}.$$

Preuve. — Supposons que le polynôme P soit donné par

$$P(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{I=(i_1, \ldots, i_n)} a_I X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n} ;$$

si v est une place archimédienne il existe un plongement $\sigma_v : k \to \mathbf{C}$, qui se prolonge à un isomorphisme continu de Ω_v sur $\mathbf{C}$, tel que pour tout $z \in \Omega_v$ on ait

$$|z|_v = |\sigma_v(z)|^{[k_v:\mathbf{R}]/[k:\mathbf{Q}]}.$$

On regarde le polynôme $\sigma_v(P)$ comme une fonction analytique de $\mathbf{C}^n \to \mathbf{C}$; l'inégalité de Cauchy sur le polydisque unité de $\mathbf{C}^n$ s'écrit alors

$$|a_I| \leqslant \max\left\{|P(z_1, \ldots, z_n)| \ : \ (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbf{C}^n, |z_1| = \ldots = |z_n| = 1\right\}$$

pour tout indice I.

En élevant les deux côtés à la puissance $[k_v : \mathbf{R}]/[k : \mathbf{Q}]$ on obtient le résultat cherché. Dans le cas ultramétrique on dispose d'une inégalité analogue à celle de Cauchy (*voir* par exemple [A], chap. 4, corollaire 4.1.11) qui nous permet de conclure de la même façon. □

Définissons enfin la hauteur locale en une place v d'une matrice définie sur k comme le maximum des valeurs absolues de ses mineurs d'ordre maximal.

2.2. Construction de la matrice d'interpolation.

Soient d_1, d_2 deux réels vérifiant $d_1 \geqslant d_2 > 0$; on appelle *indice* d'un polynôme $P \in \mathbf{C}[X_1, X_2]$ en un point $\alpha \in \mathbf{C}^2$ par rapport au *poids* $\mathbf{d} = (d_1, d_2)$ la quantité

$$\mathrm{Ind}_\alpha P = \min\left\{ \frac{\mathbf{i}}{\mathbf{d}} := \frac{i_1}{d_1} + \frac{i_2}{d_2} \mid \Delta^{\mathbf{i}} P(\alpha) \neq 0 \right\}$$

où $\mathbf{i} = (i_1, i_2)$ et $\Delta^{\mathbf{i}}$ est l'opérateur différentiel

$$\Delta^{\mathbf{i}} = \frac{1}{i_1! i_2!} \left(\frac{\partial}{\partial X_1}\right)^{i_1} \left(\frac{\partial}{\partial X_2}\right)^{i_2}.$$

Soient n un entier $\geqslant 1$, $\alpha_1 = (\alpha_{11}, \alpha_{12}), \ldots, \alpha_n = (\alpha_{n1}, \alpha_{n2})$ des points de k^2, k étant un corps de nombres, $t_1, \ldots, t_n$ des réels compris entre 0 et 2 ; le but de cette section est de construire un polynôme $P \in k[X_1, X_2]$ non identiquement nul ayant un indice au moins t_h au point α_h pour $h = 1, \ldots, n$; on veut en plus pouvoir contrôler sa hauteur. On utilise pour cela une construction explicite introduite par M. Laurent dans des démonstrations de transcendance dans [L1] (par la même méthode l'auteur a obtenu dans [C] une preuve du théorème de Roth ; on renvoie à [LMN], [L2] et [W] pour une application de cette construction aux minorations de formes linéaires de logarithmes). On note $\mathcal{G}_t$ pour $0 \leqslant t \leqslant 2$ l'ensemble

$$\mathcal{G}_t = \left\{ \mathbf{i} = (i_1, i_2) \in \mathbf{N}^2 \mid i_1 \leqslant d_1, i_2 \leqslant d_2 \text{ et } \frac{i_1}{d_1} + \frac{i_2}{d_2} \leqslant t \right\};$$

(remarquons que $\mathcal{G}_2 = \{0, \ldots, [d_1]\} \times \{0, \ldots, [d_2]\}$). On note aussi pour $\mathbf{a} = (a_1, a_2), \mathbf{i} = (i_1, i_2)$,

$$\binom{\mathbf{a}}{\mathbf{i}} = \binom{a_1}{i_1}\binom{a_2}{i_2}.$$

Considérons la matrice suivante :
(2.1)

$$A(X_1, X_2) = \begin{array}{c} \mathbf{a} \in \mathcal{G}_2 \\ \begin{pmatrix} \binom{\mathbf{a}}{\mathbf{i}_h} \alpha_{h1}^{a_1 - i_{h1}} \alpha_{h2}^{a_2 - i_{h2}} \\ \binom{\mathbf{a}}{\mathbf{i}_{n+1}} X_1^{a_1 - i_{n+1,1}} X_2^{a_2 - i_{n+1,2}} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \mathbf{i}_h \in \mathcal{G}_{t_h}; h = 1, \ldots, n \\ \mathbf{i}_{n+1} \in \mathcal{G}_s. \end{array}$$

Il s'agit d'une matrice à coefficients polynomiaux de format $(|\mathcal{G}_{t_1}| + \ldots + |\mathcal{G}_{t_n}| + |\mathcal{G}_s|) \times [d_1 + 1] \cdot [d_2 + 1]$ où l'indice de colonne $\mathbf{a}$ varie dans $\mathcal{G}_2$; elle se compose de $n + 1$ blocs de lignes indexées par les ensembles $\mathcal{G}_{t_1}, \ldots, \mathcal{G}_{t_n}, \mathcal{G}_s$. On choisit les paramètres $t_1, \ldots, t_n, s$ de manière que la matrice A ait plus de lignes que de colonnes ; on introduit la fonction $V(t)$ de la variable $t \in [0, 2]$:

$$V(t) = \underset{x_1 + x_2 \leqslant t}{\int_0^1 \int_0^1} dx_1 dx_2 \tag{2.2}$$

de manière que

$$|\mathcal{G}_t| = d_1 d_2 V(t) + O(d_1),$$

où le symbole O, ici comme dans la suite, doit être considéré pour d_1, d_2 tendant vers l'infini avec leur rapport fixé. Notons γ la quantité d_2/d_1 que l'on suppose < 1. Le nombre de lignes est $d_1 d_2 (V(s) + \sum_h V(t_h)) + O(d_1)$, le nombre de colonnes est $d_1 d_2 + O(d_1)$; il s'ensuit que, si

$$V(s) + \sum_{h=1}^{n} V(t_h) > 1,$$

alors pour d_1 suffisament grand la matrice A a plus de lignes que de colonnes. On va voir que sous certaines conditions sur les paramètres $s, t_1, \ldots, t_n$ la matrice $A(X_1, X_2)$ est de rang maximal, égal au nombre de colonnes. On utilise un lemme de zéros, dit lemme de Dyson, que voici :

LEMME DE DYSON. — *Soient $d_1 \geqslant d_2 > 0$ nombres réels, $P(X_1, X_2) \in \mathbf{C}[X_1, X_2]$, $P \not\equiv 0$ un polynôme de bidegré majoré par (d_1, d_2), m un entier $\geqslant 2$, $\alpha_h = (\alpha_{h1}, \alpha_{h2}) \in \mathbf{C}^2$ pour $h = 1, \ldots, m$. Supposons que pour $h \neq k$ les conditions d'admissibilité*

$$\alpha_{h1} \neq \alpha_{k1}, \qquad \alpha_{h2} \neq \alpha_{k2}$$

soient vérifiées. Alors, si le polynôme $P(X_1, X_2)$ a un indice égal à τ_h au point α_h pour $h = 1, \ldots, m$, on a la majoration

$$\sum_{h=1}^{m} V(\tau_h) \leqslant 1 + \left(\frac{m-1}{2}\right) \frac{d_2}{d_1}.$$

La preuve de ce résultat se trouve, par exemple, dans [B1], theorem 1, ou dans [V], main theorem. On va l'utiliser sous la forme suivante :

Corollaire. — *Soit $A(X_1, X_2)$ la matrice définie par (2.1), $\beta = (\beta_1, \beta_2) \in \mathbf{C}^2$. Supposons que*

$$\begin{aligned} &\alpha_{h1} \neq \alpha_{k1}, \quad \alpha_{h2} \neq \alpha_{k2} \qquad \textit{si } h \neq k \\ &\beta_1 \neq \alpha_{h1}, \quad \beta_2 \neq \alpha_{h2} \qquad \textit{pour tout } h = 1, \ldots, n \end{aligned} \tag{2.3}$$

et que les paramètres $s, t_1, \ldots, t_n$ vérifient

$$V(s) + \sum_{h=1}^{n} V(t_h) > 1 + \frac{n}{2} \frac{d_2}{d_1}. \tag{2.4}$$

Alors la matrice $A(\beta_1, \beta_2)$ est de rang maximal.

Preuve. — Toute solution non triviale du système linéaire associé à la matrice $A(\beta)$ serait un contre-exemple au lemme de Dyson si l'on prenait $m = n + 1,\ \alpha_{n+1} = \beta,\ \tau_h = t_h$ pour $h \leqslant n,\ t_{n+1} = s$. □

Notons γ le rapport d_2/d_1 que l'on suppose < 1. On supposera dorénavant que les paramètres $s, t_1, \ldots, t_n$ vérifient

$$1 + \frac{n}{2}\gamma < V(s) + \sum_{h=1}^{n} V(t_h) < 1 + n\gamma; \tag{2.5}$$

en plus on supposera vérifiée la condition d'admissibilité (2.3) ; le corollaire au lemme de Dyson garantit alors qu'il existe une sous-matrice $M(X_1, X_2)$, obtenue à partir de la matrice $A(X_1, X_2)$ en effaçant certaines lignes, telle que $\det M(\beta_1, \beta_2) \neq 0$. On peut en plus supposer que la sous-matrice $M(X_1, X_2)$ contienne toutes les lignes du dernier bloc de $A(X_1, X_2)$, car elles sont linéairement indépendantes. Notons donc $\mathcal{G}'_{t_h}$ le sous-ensemble de $\mathcal{G}_{t_h}$ formé par les indices des lignes du $h-$ième bloc de M. Appelons $\delta(X_1, X_2)$, ou simplement δ, le déterminant de la sous-matrice $M(X_1, X_2)$. L'idée de la méthode consiste à étudier le comportement du polynôme δ aux voisinages des points α_h, en remarquant que quand β "approche" α_h

les lignes du dernier bloc de $M(\beta)$ se rapprochent des lignes du bloc h-ième et donc le déterminant est "petit". Plus précisément au paragraphe 2.3 on minore l'indice du mineur δ ; au paragraphe 2.4 on majore la hauteur du mineur, en obtenant ainsi une version explicite du lemme de Siegel qui sera utilisée au troisième chapitre pour démontrer le théorème principal.

2.3. Minoration de l'indice du polynôme $\delta(X_1, X_2)$.

On observe d'abord que si dans la matrice A on spécialise (X_1, X_2) en un point α_h, pour une valeur de h entre 1 et n, certaines lignes du $(n+1)$−ième bloc coïncident avec des lignes du h−ième bloc, donc la matrice $A(X_1, X_2)$ a un déterminant nul. L'objectif de cette section est la démonstration d'un énoncé quantitatif reliant le nombre de lignes qui coïncident après spécialisation en un point α_h à l'indice du déterminant au même point. Avant d'énoncer la proposition principale de ce paragraphe il convient de donner une définition :

DÉFINITION. — Pour t, s dans l'intervalle $[0,2]$ avec $V(s) + V(t) \leqslant 1$ on note $u = u(s,t)$ la solution de l'équation $V(u) = V(t) + V(s)$. On définit ensuite la fonction $W(s,t)$ par

$$W(s,t) = \underset{x_1+x_2\leqslant u}{\int_0^1\int_0^1} (x_1+x_2)dx_1dx_2 - \underset{x_1+x_2\leqslant s}{\int_0^1\int_0^1} (x_1+x_2)dx_1dx_2 - \underset{x_1+x_2\leqslant t}{\int_0^1\int_0^1} (x_1+x_2)dx_1dx_2. \tag{2.6}$$

On remarque que, u étant défini de manière symétrique en s et t, la fonction W est une fonction symétrique. Le but de ce paragraphe est la preuve de la proposition suivante :

PROPOSITION 2.2. — *Le déterminant $\delta(X_1,X_2)$ de la matrice $M(X_1, X_2)$ construite au paragraphe 2.2 a un indice au point α_h minoré par*

$$\mathrm{Ind}_{\alpha_h}\delta(X_1, X_2) \geqslant d_1d_2W(s,t_h) - 2nd_1d_2\gamma + O(d_1).$$

On démontre la proposition à l'aide des deux lemmes suivants :

LEMME 2.3. — *Soient k un corps, n, N deux entiers $\geqslant 1$, $(f_{lm})_{l,m=1,\dots,N}$ une matrice polynôme avec $f_{lm} \in k[X_1,\dots,X_n]$, $\delta(X_1,\dots,X_n)$ son* *déterminant. Pour tout* $\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_n) \in \mathbf{N}^n$ *on a*

$$\Delta^{\mathbf{i}}\delta(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{\mathbf{j}_1+\ldots+\mathbf{j}_N=\mathbf{i}} \det\left(\Delta^{\mathbf{j}_l} f_{lm}\right)_{lm},$$

où la somme est étendue à toutes les décompositions de l'indice $\mathbf{i}$ *comme une somme de* N *éléments de* $\mathbf{N}^n$.

LEMME 2.4. — *Pour* $\mathbf{i} \in \mathbf{N}^2$ *définissons le vecteur ligne à coefficients polynomiaux*

$$A_{\mathbf{i}}(X_1, X_2) = \left(\binom{\mathbf{a}}{\mathbf{i}} X_1^{a_1-i_1} X_2^{a_2-i_2}\right)_{\mathbf{a}}$$

où l'indice de colonne $\mathbf{a}$ *varie dans* $\mathcal{G}_2$ *; Alors, pour tout indice de dérivation* $\mathbf{j}$ *tel que* $\mathbf{i} + \mathbf{j} \in \mathcal{G}_2$, *on a l'identité*

$$\Delta^{\mathbf{j}} A_{\mathbf{i}} = \frac{(j_1+i_1)!}{j_1!} \frac{(j_2+i_2)!}{j_2!} A_{\mathbf{i}+\mathbf{j}}(X_1, X_2).$$

Preuve. — Le lemme 2.4 consiste en une vérification élémentaire. On démontre le lemme 2.3 par récurrence sur la longueur $|\mathbf{i}| = i_1 + \ldots + i_n$ de l'indice $\mathbf{i}$. Le cas $\mathbf{i} = 0$ étant trivial, on peut supposer sans perte de généralité que l'indice $\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_n)$ vérifie $i_1 \geqslant 1$ et que l'identité du lemme soit valable avec $\mathbf{i} - (1, 0, \ldots, 0)$ au lieu de $\mathbf{i}$. On sait donc que

$$\Delta^{(i_1-1, i_2, \ldots, i_n)}\, \delta(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{\mathbf{j}_1+\ldots+\mathbf{j}_N=(i_1-1, i_2, \ldots, i_n)} \det\left(\Delta^{\mathbf{j}_l} f_{lm}\right)_{lm};$$

en dérivant les deux membres une fois par rapport à la variable X_1 on obtient

$$\left(\frac{\partial}{\partial X_1}\right) \Delta^{(i_1-1, i_2, \ldots, i_n)} \delta(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{\mathbf{j}_1+\ldots+\mathbf{j}_N=(i_1-1, i_2, \ldots, i_n)} \sum_{h=1}^{N} \det\left(\left(\frac{\partial}{\partial X_1}\right)^{\delta_{hl}} \Delta^{\mathbf{j}_l} f_{lm}\right)_{lm} \tag{2.7}$$

avec δ_{hl} le symbole de Kronecker; on remarque que pour tout indice $\mathbf{j} = (j_1, \ldots, j_n) \in \mathbf{N}^n$ on a la relation

$$\frac{\partial}{\partial X_1} \circ \Delta^{\mathbf{j}} = \left(\frac{\partial}{\partial X_1}\right) \frac{1}{j_1! \cdots j_n!} \left(\frac{\partial}{\partial X_1}\right)^{j_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial X_n}\right)^{j_n} = (j_1+1)\Delta^{(1,0,\ldots,0)+\mathbf{j}};$$

de (2.7) on déduit donc

$$\left(\frac{\partial}{\partial X_1}\right)\Delta^{(i_1-1,i_2,\dots,i_n)}\delta(X_1,\dots,X_n)$$
$$= \sum_{\mathbf{j}_1+\dots+\mathbf{j}_N=(i_1-1,i_2,\dots,i_n)} \sum_{h=1}^{N}(\mathbf{j}_{h,1}+1)\det\left(\Delta^{\mathbf{j}_l+\delta_{hl}(1,0,\dots 0)}f_{lm}\right)_{lm};$$

dès que h prend tous les valeurs de l'ensemble $\{1,\dots,n\}$ et que $(\mathbf{j}_1,\dots,\mathbf{j}_n)\in\mathbf{N}^{nN}$ décrit les décompositions de $\mathbf{i}-(1,0,\dots,0)$ en somme de N éléments, les vecteurs $(\mathbf{j}'_1,\dots,\mathbf{j}'_N)=(\mathbf{j}_1,\dots,\mathbf{j}_h+(1,0,\dots,0),\dots,\mathbf{j}_N)$ décrivent les décompositions de $\mathbf{i}$; on peut donc réécrire l'identité précédente sous la forme

$$\left(\frac{\partial}{\partial X_1}\right)\Delta^{(i_1-1,i_2,\dots,i_n)}\delta(X_1,\dots,X_n) = i_1\cdot\Delta^{\mathbf{i}}\delta(X_1,\dots,X_n)$$
$$= \sum_{\mathbf{j}'_1+\dots+\mathbf{j}'_N=\mathbf{i}}\det\left(\Delta^{\mathbf{j}'_l}f_{lm}\right)_{lm}\sum_{h=1}^{N}\mathbf{j}'_{h,1}$$

et comme $\sum_{h=1}^{N}\mathbf{j}'_{h,1}=\mathbf{i}_1=i_1$ le facteur i_1 se simplifie et l'identité devient celle du lemme. □

Preuve de la proposition 2.2. — Fixons $h\in\{1,\dots,n\}$, $\mathbf{j}\in\mathbf{N}^2$ tels que $\Delta^{\mathbf{j}}\delta(\alpha_{h1},\alpha_{h2})\neq 0$; on se propose de minorer la quantité $\dfrac{\mathbf{j}}{\mathbf{d}}=\dfrac{j_1}{d_1}+\dfrac{j_2}{d_2}$. D'après le lemme 2.3, $\Delta^{\mathbf{j}}\delta(\alpha_{h1},\alpha_{h2})$ s'écrit

$$\Delta^{\mathbf{j}}\delta(\alpha_{h1},\alpha_{h2}) = \sum_{\sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{G}_s}\mathbf{j}(\mathbf{i})=\mathbf{j}}\det\begin{pmatrix}(A_{\mathbf{i}}(\alpha_{11},\alpha_{12}))_{\mathbf{i}\in\mathcal{G}'_{t_1}}\\ \vdots\\ (A_{\mathbf{i}}(\alpha_{n1},\alpha_{n2}))_{\mathbf{i}\in\mathcal{G}'_{t_n}}\\ \left(\Delta^{\mathbf{j}(\mathbf{i})}A_{\mathbf{i}}(\alpha_{11},\alpha_{12})\right)_{\mathbf{i}\in\mathcal{G}_s}\end{pmatrix} \tag{2.8}$$

où la somme est faite sur les fonctions $\mathcal{G}_s\ni\mathbf{i}\mapsto\mathbf{j}(\mathbf{i})\in\mathbf{N}^2$ avec $\sum_{\mathbf{i}}\mathbf{j}(\mathbf{i})=\mathbf{j}$. Si $\Delta^{\mathbf{j}}\delta(\alpha_{h1},\alpha_{h2})\neq 0$ il existe une décomposition de $\mathbf{j}$ de la forme

$$\mathbf{j}=\sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{G}_s}\mathbf{j}(\mathbf{i})$$

telle que le déterminant dans la formule (2.8) ne soit pas nul. On applique le lemme 2.4 pour réécrire la matrice dans (2.8) sous la forme

$$\begin{pmatrix} (A_{\mathbf{i}}(\alpha_{11}, \alpha_{12}))_{\mathbf{i} \in \mathcal{G}'_{t_1}} \\ \vdots \\ (A_{\mathbf{i}}(\alpha_{n1}, \alpha_{n2}))_{\mathbf{i} \in \mathcal{G}'_{t_n}} \\ \frac{(\mathbf{i}+\mathbf{j}(\mathbf{i}))!}{\mathbf{i}!\mathbf{j}(\mathbf{i})!} \left(A_{\mathbf{j}(\mathbf{i})+\mathbf{i}}(\alpha_{h1}, \alpha_{h2})\right)_{\mathbf{i} \in \mathcal{G}_s} \end{pmatrix};$$

on en déduit que :

1) la fonction $\mathbf{i} \mapsto \mathbf{i} + \mathbf{j}(\mathbf{i})$ envoie $\mathcal{G}_s$ dans $\mathcal{G}_2$, parce que $A_{\mathbf{i}} \equiv 0$ pour $\mathbf{i} \notin \mathcal{G}_2$;

2) elle est injective, car dans le cas contraire deux lignes du dernier bloc seraient proportionnelles ;

3) son image est contenue dans le complémentaire de $\mathcal{G}'_{t_h}$, car sinon une ligne du dernier bloc serait proportionnelle à une du h—ième bloc.

Pour utiliser ces trois informations on a besoin d'un dernier lemme :

LEMME 2.5. — *Soient t, c deux réels avec $0 < t < 2$, $0 < c < 1$, $\mathcal{H}$ un sous-ensemble de $\mathcal{G}_2$ avec $|\mathcal{H}| = d_1 d_2 c$, $\mathcal{H} \cap \mathcal{G}_t = \varnothing$. Soit v la solution de l'équation $V(v) = V(t) + c$; on a la minoration*

$$\sum_{\mathbf{h} \in \mathcal{H}} \frac{\mathbf{h}}{\mathbf{d}} \geqslant \sum_{\mathbf{h} \in \mathcal{G}_v \backslash \mathcal{G}_t} \frac{\mathbf{h}}{\mathbf{d}} + O(d_1). \tag{2.9}$$

Preuve. — Les ensembles $\mathcal{H}$, $\mathcal{G}_v \backslash \mathcal{G}_t$ ont un même cardinal à un $O(d_1)$ près; on les décompose en les réunions disjointes $\mathcal{H} = (\mathcal{H} \cap \mathcal{G}_v) \cup (\mathcal{H} \cap (\mathcal{G}_2 \backslash \mathcal{G}_v))$, $\mathcal{G}_v \backslash \mathcal{G}_t = (\mathcal{H} \cap \mathcal{G}_v) \cup ((\mathcal{G}_v \backslash \mathcal{G}_t) \cap (\mathcal{G}_2 \backslash \mathcal{H}))$. La différence $\sum_{\mathbf{h} \in \mathcal{H}} \frac{\mathbf{h}}{\mathbf{d}} - \sum_{\mathbf{h} \in \mathcal{G}_v \backslash \mathcal{G}_t} \frac{\mathbf{h}}{\mathbf{d}}$ s'écrit alors

$$\sum_{\mathbf{h} \in \mathcal{H} \cap (\mathcal{G}_2 \backslash \mathcal{G}_v)} \frac{\mathbf{h}}{\mathbf{d}} - \sum_{\mathbf{h} \in (\mathcal{G}_v \backslash \mathcal{G}_t) \cap (\mathcal{G}_2 \backslash \mathcal{H})} \frac{\mathbf{h}}{\mathbf{d}}.$$

On remarque que les deux sommes ci-dessus sont faites sur deux ensembles de même cardinal à un $O(d_1)$ près ; la fonction qui apparaît dans la première somme est minorée par v alors que la fonction dans la seconde somme est majorée par la même quantité v, d'où le lemme.

Fin de la démonstration de la proposition 2.2. — On appelle $\mathcal{H}$ l'ensemble

$$\{\mathbf{h}\ :\mathbf{h}=\mathbf{i}+\mathbf{j}(\mathbf{i}) \text{ pour un } \mathbf{i}\in\mathcal{G}_s\}\cap(\mathcal{G}_2\backslash\mathcal{G}_{t_h}).$$

D'après les remarques 1), 2) et 3), $\mathcal{H}$ a un cardinal $\geqslant|\mathcal{G}_s|-|\mathcal{G}_{t_h}\backslash\mathcal{G}'_{t_h}|$; en utilisant (2.9) on obtient

$$\frac{\mathbf{j}}{\mathbf{d}}=\sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{G}_s}\frac{\mathbf{j}(\mathbf{i})}{\mathbf{d}}=\sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{G}_s}\frac{\mathbf{i}+\mathbf{j}(\mathbf{i})}{\mathbf{d}}-\sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{G}_s}\frac{\mathbf{i}}{\mathbf{d}}\geqslant\sum_{\mathbf{h}\in\mathcal{H}}\frac{\mathbf{h}}{\mathbf{d}}-\sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{G}_s}\frac{\mathbf{i}}{\mathbf{d}}. \tag{2.10}$$

Comme les paramètres $s,t_1,\dots,t_n$ vérifient (2.5), on sait que $\mathcal{G}'_{t_h}$ contient tous les éléments de $\mathcal{G}_{t_h}$ sauf au plus $n\gamma d_1d_2$ éléments, donc $|\mathcal{H}|\geqslant|\mathcal{G}_s|-d_1d_2n\gamma$. En appliquant le lemme 2.5 avec $c=V(s)-n\gamma$ et t_h au lieu de t on déduit de (2.10)

$$\frac{\mathbf{j}}{\mathbf{d}}\geqslant\sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{G}_v\backslash\mathcal{G}_{t_h}}\frac{\mathbf{i}}{\mathbf{d}}.-\sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{G}_s}\frac{\mathbf{i}}{\mathbf{d}}+O(d_1);$$

si on remplace les sommes de Riemann ci-dessus par les intégrales correspondantes on obtient

$$\frac{\mathbf{j}}{\mathbf{d}}\geqslant d_1d_2\left[\int_0^1\int_0^1_{t_h<x_1+x_2<v}(x_1+x_2)dx_1dx_2-\int_0^1\int_0^1_{x_1+x_2<s}(x_1+x_2)dx_1dx_2\right]+O(d_1),$$

avec pour v la solution de $V(v)=V(s)+V(t_h)-n\gamma$; comme la fonction x_1+x_2 est $\leqslant 2$ dans le carré $[0,1]\times[0,1]$, on peut minorer

$$\int_0^1\int_0^1_{t_h<x_1+x_2<v}(x_1+x_2)dx_1dx_2\geqslant\int_0^1\int_0^1_{t_h<x_1+x_2<u}(x_1+x_2)dx_1dx_2-2n\gamma$$

si l'on prend comme u la solution de $V(u)=V(t_h)+V(s)$ comme dans la proposition 2.2. L'indice du polynôme δ est alors minoré par $d_1d_2(W(s,t_h)-2n\gamma)+O(d_1)$ ce qui constitue l'estimation cherchée. □

2.4. Majoration de la hauteur du polynôme $\delta(X_1,X_2)$.

Soit v une place de k; on se propose de majorer la hauteur locale $H_v(\delta)$ en utilisant l'inégalité du lemme 2.1. Soit alors $z=(z_1,z_2)$ un point de Ω_v^2 de module $|z_1| = |z_2| = 1$. La matrice $M(z)$ se décompose en $n+1$ blocs de lignes :

$$M(z) = \begin{pmatrix} M_1 \\ \vdots \\ M_n \\ M_{n+1}(z) \end{pmatrix}$$

où pour $h = 1, \dots, n$ le bloc M_h est de la forme

$$M_h = \quad \left(\binom{\mathbf{a}}{\mathbf{i}} \alpha_{h1}^{a_1-i_1} \alpha_{h2}^{a_2-i_2} \right) \begin{array}{l} \mathbf{a} \in \mathcal{G}_2 \\ \mathbf{i} \in \mathcal{G}'_{t_h} \end{array}$$

pour un sous-ensemble $\mathcal{G}'_{t_h} \subset \mathcal{G}_{t_h}$; la matrice M_{n+1} est le dernier bloc de la matrice $A(X_1, X_2)$ définie dans la formule (2.1) avec (X_1, X_2) spécialisé au point z. Le déterminant $\delta(z)$ de $M(z)$ se décompose alors en une somme de produits de mineurs des M_h. Le nombre de ces produits est clairement $\leqslant ([d_1+1][d_2+1])! \leqslant \exp(d_1 d_2 \log(d_1 d_2))$. Il en découle pour $H_v(\delta)$ l'estimation

$$\log H_v(\delta(z)) \leqslant \sum_{h=1}^{n+1} \log H_v(M_h) + O(d_1 d_2 \log d_1). \tag{2.11}$$

(On rappelle que l'on avait défini la hauteur locale d'une matrice comme le maximum de ses mineurs d'ordre maximal.) Or un mineur de rang maximal de M_h pour $h = 1, \dots, n$ s'écrit sous la forme

$$\sum_{\sigma : \mathbf{i} \mapsto \sigma(\mathbf{i})} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{\mathbf{i} \in \mathcal{G}'_{t_h}} \binom{\sigma(\mathbf{i})}{\mathbf{i}} \alpha_{h1}^{\sigma_1(\mathbf{i})-i_1} \alpha_{h2}^{\sigma_2(\mathbf{i})-i_2}$$

où la somme se fait sur les fonctions injectives $\sigma : \mathcal{G}'_{t_h} \to \mathcal{G}_2$, $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$. Il y a donc au plus $([d_1+1][d_2+1])!$ termes dans la somme ci-dessus ; on en déduit que l'on peut majorer

(2.12)

$$\log H_v(M_h) \leqslant \max_{\sigma} \sum_{\mathbf{i} \in \mathcal{G}'_{t_h}} \log \left| \binom{\sigma(\mathbf{i})}{\mathbf{i}} \alpha_{h1}^{\sigma_1(\mathbf{i})-i_1} \alpha_{h2}^{\sigma_2(\mathbf{i})-i_2} \right|_v + O(d_1 d_2 \log d_1).$$

On majore les coefficients binomiaux $\binom{\sigma(\mathbf{i})}{\mathbf{i}}$ par $|2^{d_1+d_2}|_v$ si v est une place archimédienne, par 1 si v est une place ultramétrique, c'est-à-dire que l'on utilise la majoration

$$\left| \binom{\sigma(\mathbf{i})}{\mathbf{i}} \right|_v \leqslant 2^{\epsilon_v (d_1+d_2)},$$

avec $\epsilon_v = [k_v : \mathbf{Q}_v]/[k : \mathbf{Q}]$ pour toute place archimédienne v et $\epsilon_v = 0$ pour les places ultramétriques ; de (2.12) on obtient, pour $h = 1, \dots, n$,

$$\begin{aligned} \log H_v(M_h) &\leqslant \max_{\sigma} \sum_{\mathbf{i} \in \mathcal{G}'_{t_h}} \{\epsilon_v(d_1 + d_2)\log 2 + (\sigma_1(\mathbf{i}) - i_1)\log^+ |\alpha_{h1}|_v \\ &\quad + (\sigma_2(\mathbf{i}) - i_2)\log^+ |\alpha_{h2}|_v\} + O(d_1 d_2 \log d_1) \\ &\leqslant (d_1 + d_2)\left|\mathcal{G}'_{t_h}\right| \epsilon_v \log 2 + \sum_{\mathbf{i} \in \mathcal{G}_{t_h}} (\sigma_1(\mathbf{i}) - i_1)\log^+ |\alpha_{h1}|_v \\ &\quad + \sum_{\mathbf{i} \in \mathcal{G}_{t_h}} (\sigma_2(\mathbf{i}) - i_2)\log^+ |\alpha_{h2}|_v + O(d_1 d_2 \log d_1). \end{aligned} \tag{2.13}$$

Notons $\mathcal{G}''_{t_h}$ l'ensemble de cardinal $|\mathcal{G}'{}_{t_h}|$ formé par les éléments de la forme $\sigma(\mathbf{i})$. Pour estimer les sommes au deuxième membre dans (2.13) on utilise le lemme suivant :

LEMME 2.6. — *Soit $\mathcal{G} \subset \mathcal{G}_2$, $|\mathcal{G}| = c \cdot d_1 d_2$, avec $c < 1$. On a l'encadrement*

$$d_1^2 d_2 \frac{c^2}{2} + O(d_1 d_2) \leqslant \sum_{\mathbf{a} \in \mathcal{G}} a_1 \leqslant d_1^2 d_2 \left(c - \frac{c^2}{2}\right) + O(d_1 d_2)$$
$$d_1 d_2^2 \frac{c^2}{2} + O(d_1 d_2) \leqslant \sum_{\mathbf{a} \in \mathcal{G}} a_2 \leqslant d_1 d_2^2 \left(c - \frac{c^2}{2}\right) + O(d_1 d_2).$$

La preuve est analogue de celle du lemme 2.5. □

On utilise les inégalités de gauche dans le lemme 2.6 pour minorer la somme des nombres i_1 et i_2 dans l'inégalité (2.13), en prenant comme ensemble $\mathcal{G}$ l'ensemble $\mathcal{G}'_{t_h}$; on utilise les inégalités de droite du lemme 2.6 avec $\mathcal{G}''_{t_h}$ au lieu de $\mathcal{G}$ pour majorer la somme des nombres $\sigma_1(\mathbf{i})$ et $\sigma_2(\mathbf{i})$; on obtient donc

$$\sum_{\mathbf{i} \in \mathcal{G}'_{t_h}} (a_1 - i_1) \leqslant d_1^2 d_2 \left(\left|\mathcal{G}'_{t_h}\right| - \left|\mathcal{G}'_{t_h}\right|^2\right) + O(d_1 d_2);$$

on suppose $t_h \leqslant 1$ pour tout $h = 1, \dots, n$ (donc $|\mathcal{G}_{t_h}| \leqslant 1/2$) ; comme la fonction $c \mapsto c - c^2$ est croissante dans l'intervalle $[0, 1/2]$ et $\left|\mathcal{G}'_{t_h}\right| \leqslant |\mathcal{G}_{t_h}| = V(t_h) d_1 d_2 + O(d_1)$, on obtient de l'inégalité ci-dessus que

$$\sum_{\mathbf{i} \in \mathcal{G}'_{t_h}} (\sigma_1(\mathbf{i}) - i_1) \leqslant d_1^2 d_2 (V(t_h) - V(t_h)^2) + O(d_1 d_2);$$

il résulte de cette estimation (et de l'estimation analogue pour la somme des quantités $\sigma_2(\mathbf{i}) - i_2$) que l'on peut déduire de (2.13) la majoration

$$\begin{aligned}\log H_v(M_h) \leqslant d_1 d_2\{[(V(t_h) - V(t_h)^2](d_1 \log^+ |\alpha_{h1}|_v + d_2 \log^+ |\alpha_{h2}|_v) \\ + \epsilon_v V(t_h)(d_1 + d_2)\log 2\} + O(d_1 d_2 \log d_1).\end{aligned} \tag{2.14}$$

Pour le dernier bloc $M_{n+1}(z)$ on majore encore la valeur absolue des coefficients binomiaux par $2^{(d_1+d_2)\epsilon_v}$ et leur produit par $2^{(d_1+d_2)|\mathcal{G}_s|\epsilon_v}$; on aura donc

$$\log H_v(M_{n+1}) \leqslant (d_1 + d_2)|\mathcal{G}_s|\epsilon_v \log 2 + O(d_1 d_2 \log d_1).$$

Reportant alors dans (2.11) on obtient pour la hauteur globale du polynôme $\delta(X_1, X_2)$ l'estimation

$$\begin{aligned}\log H(\delta) &= \sum_v \log H_v(\delta) \\ &\leqslant d_1 d_2 \sum_{h=1}^{n} [V(t_h) - V(t_h)^2]\left[d_1 \sum_v \log^+ |\alpha_{h1}|_v + d_2 \sum_v \log^+ |\alpha_{h2}|_v\right] \\ &\quad + (d_1 + d_2)\left(\sum_{v|\infty} \epsilon_v\right)\left(|\mathcal{G}_s| + \sum_{h=1}^{n} |\mathcal{G}'_{t_h}|\right)\log 2 + O(d_1 d_2 \log d_1);\end{aligned}$$

les termes $\sum_v \log^+ |\alpha_{hi}|_v$ constituent les hauteurs des nombres algébriques α_{hi} ; la somme sur les places infinies des quantités ϵ_v est égale à 1 et la somme $|\mathcal{G}_s| + \sum_h |\mathcal{G}'_{t_h}|$ est égale à l'ordre de la matrice $M(X_1, X_2)$, donc à $d_1 d_2 + O(d_1)$; on peut donc conclure

$$\begin{aligned}\log H(\delta(X_1, X_2)) \leqslant d_1 d_2 \sum_{h=1}^{n} \{[V(t_h) - V(t_h)^2][d_1 h(\alpha_{h1}) + d_2 h(\alpha_{h2})]\} \\ + d_1 d_2 (d_1 + d_2)\log 2 + O(d_1 d_2 \log d_1).\end{aligned}$$

Les arguments utilisés pour estimer les hauteurs locales des sous-matrices M_h s'appliquent aussi bien dans l'estimation des degrés partiels du déterminant δ. On démontre la

PROPOSITION. — *Le déterminant $\delta(X_1, X_2)$ de la matrice $M(X_1, X_2)$ vérifie*

$$\begin{aligned}\deg_{X_1} \delta &\leqslant [V(s) - V(s)^2] d_1^2 d_2 + O(d_1 d_2) \\ \deg_{X_2} \delta &\leqslant [V(s) - V(s)^2] d_1 d_2^2 + O(d_1 d_2).\end{aligned}$$

Preuve. — Il suffit de remarquer que les degrés partiels sont des valuations sur l'anneau $k[X_1, X_2]$. Le bloc M_{n+1} , indexé par $\mathcal{G}_s$ est le seul qui contient des polynômes de degré non nul; tout mineur est alors une somme de produits de de la forme

$$\prod_{\mathbf{i}} \binom{\mathbf{a}(\mathbf{i})}{\mathbf{i}} X_1^{a_1(\mathbf{i})-i_1} X_2^{a_2(\mathbf{i})-i_2}$$

où $\mathbf{i}$ varie dans $\mathcal{G}_s$ et $\mathbf{i} \mapsto \mathbf{a}(\mathbf{i})$ est une application injective. Le lemme 2.6 donne l'estimation cherchée. □

On peut résumer les résultats de ce chapitre dans la proposition suivante :

PROPOSITION 2.7. — *Soient n un entier $\geqslant 1$, $t_1, \ldots, t_n, s$ des réels dans l'intervalle $[0,1]$, d_1, d_2 des réels positifs avec $d_2/d_1 = \gamma < 1$. Supposons que*

$$1 + \frac{n}{2}\gamma < V(s) + \sum_{h=1}^{n} V(t_h) < 1 + n\gamma \tag{2.15}$$

où la fonction V est définie par (2.2). Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta$, $(n+1)$ points du plan k^2 vérifiant les conditions d'admissibilité

$$\alpha_{hi} \neq \alpha_{ki} \qquad \text{pour } h \neq k,\ i = 1,2,$$
$$\beta_i \neq \alpha_{hi} \qquad \text{pour } h = 1, \ldots, n;\ i = 1,2.$$

Notons $W(s,t)$ la fonction définie par (2.6) et $M(t)$ la fonction

$$M(t) = V(t) - V(t)^2; \tag{2.16}$$

il existe un polynôme $\delta(X_1, X_2) \in k[X_1, X_2]$ qui vérifie $\delta(\beta_1, \beta_2) \neq 0$ et

$$\mathrm{Ind}_{\alpha_h} \delta(X_1, X_2) \geqslant d_1 d_2 W(s, t_h) - 2n\gamma d_1 d_2 + O(d_1) \qquad h = 1, \ldots, n$$

$$\text{(2.17)}\quad \log H\left(\delta(X_1, X_2)\right)$$
$$\leqslant d_1 d_2 \left\{ (d_1 + d_2) \log 2 + \sum_{h=1}^{n} M(t_h)[d_1 h(\alpha_{h1}) + d_2 h(\alpha_{h2})] \right\} + O(d_1 d_2 \log d_1)$$

$$\deg_{X_i} \delta(X_1, X_2) \leqslant M(s) d_i d_1 d_2 + O(d_1 d_2) \qquad i = 1,2.$$

Si on compare la proposition 2.7 avec le résultat que l'on peut déduire du lemme de Siegel (*voir* [BV]), on voit que l'avantage de la proposition 2.7

consiste dans le fait que le polynôme δ construit comme le déterminant d'une matrice d'interpolation ne s'annule pas au point β. La méthode classique, introduite par Dyson, fait appel au lemme de Dyson qui, appliqué au polynôme construit au moyen du lemme de Siegel, garantit que ce dernier ne peut avoir un indice important au point β, si ses indices aux points α_h sont suffisamment grands ; si on part d'un polynôme P ayant des indices t_h aux points α_h vérifiant $\sum_h V(t_h) < 1$ on peut construire un polynôme Q en choisissant une convenable dérivée $Q = \Delta^{\mathbf{i}} P$ qui ne s'annule pas au point β ; le lemme de Dyson permet de borner la quantité $\frac{\mathbf{i}}{\mathbf{d}}$ par la solution s de l'équation $V(s) + \sum_h V(t_h) = 1 + \frac{n}{2}\gamma$; les indices de Q aux points α_h seront alors $\geqslant t_h - s$, d'où la nécessité de prendre $t_h > s$. Or l'estimation pour la hauteur du polynôme P, et donc de Q, donnée par le lemme de Siegel est du type

$$\log H(P) \leqslant \frac{1}{V(s)} \sum_{h=1}^{n} M(t_h)[d_1 h(\alpha_{h1}) + d_2 h(\alpha_{h2})];$$

donc la contrainte sur le paramètre s conduit à une "mauvaise" dépendance de la hauteur en fonction des points α_h. La nouveauté de la méthode du déterminant d'interpolation, à savoir le fait d'appliquer le lemme de Dyson à la matrice d'interpolation et non à une solution du système linéaire associé, permet d'éviter cet inconvénient. Comme on l'a remarqué, la fonction $W(s,t)$, qui remplace la fonction $t - s$ dans la minoration de l'indice, est une fonction symétrique, ce qui nous permet, dans les cas où il importe d'améliorer les estimations en fonction de la hauteur des points α_h, de choisir le paramètre s "grand" et les paramètres t_h "petits".

3. Preuve des théorèmes principaux.

On utilise les résultats de la deuxième section pour obtenir la version suivante du principe de Thue, qui généralise celle donnée par Bombieri [B1], Theorem 4 (*voir* aussi [BM], p. 179]) :

Proposition 3.1. — *Soit k un corps de nombres, n un entier $\geqslant 3$, $(\alpha_{11}, \dots, \alpha_{n1}, \beta_1)$, $(\alpha_{12}, \dots, \alpha_{n2}, \beta_2)$ deux points de k^{n+1} satisfaisant les hypothèses de la proposition 2.7, $S_1, \dots, S_n$ des ensembles finis et disjoints de places de k, $t_1, \dots, t_n, s$ des réels dans l'intervalle* $[0,2]$. *Notons encore V, M, W les fonctions définies par (2.2),(2.16),(2.6) respectivement, et γ la* *quantité*

$$\gamma = \frac{\log 4 + M(s)h(\beta_1) + \sum_{h=1}^{n} M(t_h)h(\alpha_{h1})}{\log 4 + M(s)h(\beta_2) + \sum_{h=1}^{n} M(t_h)h(\alpha_{h2})}.$$

Supposons

$$1 + \frac{n\gamma}{2} < V(s) + \sum_{h=1}^{n} V(t_h) < 1 + n\gamma.$$

Alors si pour des réels positifs a_v, $v \in S = S_1 \cup \ldots \cup S_n$, *les inégalités*

$$(3.1) \qquad 0 < |\alpha_{hi} - \beta_i|_v < \left(4 \prod_{h=1}^{n} H(\alpha_{hi})^{M(t_h)} H(\beta_i)^{M(s)} \right)^{\frac{-a_v}{W(s,t_h)-2n\gamma}}$$

sont vérifiées pour $i = 1, 2$ *et pour tout* $v \in S_h$, $h = 1, \ldots, n$, *on a*

$$\sum_{v \in S} a_v \leqslant 2.$$

Preuve. — La preuve consiste à évaluer le polynôme construit au paragraphe précédent au point (β_1, β_2) et à majorer sa valeur absolue en chaque place; la formule du produit donne la relation ci-dessus. Soit alors $\delta(X_1, X_2)$ le polynôme qui paraît dans la proposition 2.7, construit à partir des données $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta, t_1, \ldots, t_n, s, \gamma$. Majorons la valeur absolue $|\delta(\beta)|_v$ en distinguant deux cas :

1^er^ cas. $v \in S = S_1 \cup \ldots \cup S_n$.

Il existe alors h tel que $v \in S_h$. La formule de Taylor au point $(\alpha_{h1}\alpha_{h2})$ s'écrit :

$$\delta(\beta) = \sum_{\mathbf{i}=(i_1,i_2)} \Delta^{\mathbf{i}}\delta(\alpha_{h1}, \alpha_{h2})(\beta_1 - \alpha_{h1})^{i_1}(\beta_2 - \alpha_{h2})^{i_2}$$

d'où

$$\begin{aligned} \log|\delta(\beta)|_v \leqslant {} & \log(\deg_{X_1}\delta(X_1, X_2) + 1) + \log(\deg_{X_2}\delta(X_1, X_2) + 1) \\ & + \max_{\mathbf{i}} \log|\Delta^{\mathbf{i}}\delta(\alpha_{h1}, \alpha_{h2}|_v + \log \max\nolimits_{\mathbf{i}}^{*} |\alpha_{h1} - \beta_1|_v^{i_1} \cdot |\alpha_{h2} - \beta_2|_v^{i_2}, \end{aligned}$$

où $\max^*$ désigne le maximum fait sur les couples (i_1, i_2) tels que $\Delta^{\mathbf{i}}\delta(\alpha_{h1}, \alpha_{h2}) \neq 0$. On préfère écrire ce maximum sous la forme

$$\begin{aligned} & -\min\nolimits_{\mathbf{i}}^{*} \left(\frac{i_1}{d_1} + \frac{i_2}{d_2} \right) \min \left\{ d_1 \log \frac{1}{|\alpha_{h1} - \beta_1|_v}, d_2 \log \frac{1}{|\alpha_{h2} - \beta_2|_v} \right\} \\ & = -\mathrm{Ind}_{\alpha_h}\delta(X_1, X_2) \min \left\{ d_1 \log \frac{1}{|\alpha_{h1} - \beta_1|_v}, d_2 \log \frac{1}{|\alpha_{h2} - \beta_2|_v} \right\}; \end{aligned}$$

remarquant que $\log\deg\delta(X_1,X_2)=O(\log d_1)$ on peut écrire

$$(3.2)\quad \log|\delta(\beta)|_v \leqslant \max_{\mathbf{i}}\log|\Delta^{\mathbf{i}}\delta(\alpha_{h1},\alpha_{h2})|_v +$$
$$-\mathrm{Ind}_{\alpha_h}\delta(X_1,X_2)\min\left\{d_1\log\frac{1}{|\alpha_{h1}-\beta_1|_v}, d_2\log\frac{1}{|\alpha_{h2}-\beta_2|_v}\right\}+O(\log d_1).$$

Pour estimer le maximum des dérivées au point $(\alpha_{h1},\alpha_{h2})$ on utilise le lemme 2.1 appliqué au polynôme $\delta_{\alpha_h}(X_1,X_2):=\delta(X_1-\alpha_{h1},X_2-\alpha_{h2})$:

$$\max_{\mathbf{i}}\log|\Delta^{\mathbf{i}}\delta(\alpha_{h1},\alpha h2)|_v = H_v(\delta_{\alpha_h})$$
$$\max\left\{|\delta(z_1,z_2)|_v\ (z_1,z_2)\in\Omega_v^2, |z_1-\alpha_{h1}|_v=1; |z_2-\alpha_{h2}|_v=1\right\}.$$

Comme v est une place de S_h on peut supposer $|\alpha_{hi}-\beta_i|_v<1$ pour $i=1,2$; en particulier si v est ultramétrique et $|z_i-\alpha_{hi}|_v=1$ alors

$$|z_i|_v \leqslant \max\{|z_i-\alpha_{hi}|_v, |\alpha_{hi}|_v\} \leqslant \max\{1,|\alpha_{hi}-\beta_i+\beta_i|_v\} \leqslant \max\{1,\beta_i|_v\};$$

si v est archimédienne considérons la valeur absolue $\|\cdot\|_v$ normalisée par rapport à $\mathbf{Q}$ et majorons $\|z_i\|_v \leqslant \|\beta_i\|_v+\|\alpha_{hi}-\beta_i\|_v+\|\alpha_{hi}-z_i\|_v$, d'où $\|z_i\|_v\leqslant 2+\|\beta_i\|_v\leqslant 2\max\{1,\|\beta\|_v\}$; en élevant à la puissance $\epsilon_v=\dfrac{[k_v:\mathbf{Q}_v]}{[k:\mathbf{Q}]}$ on a

$$|z_i|_v \leqslant 2^{\epsilon_v}\max\{1,|\beta_i|_v\}.$$

Donc en général

$$\begin{aligned}\max_{\mathbf{i}}|\Delta^{\mathbf{i}}\delta(\alpha_{h1},\alpha_{h2})|_v &\leqslant \max\{|\delta(z_1,z_2)|_v\ :(z_1,z_2)\in\Omega_v^2, |z_i-\alpha_{hi}|_v=1\}\\ &\leqslant \left(\deg_{X_1}\delta+1\right)\left(\deg_{X_2}\delta+1\right)H_v(\delta)\\ &\quad (2^{\epsilon_v}\max\{1,|\beta_1\})^{\deg_{X_1}\delta}(2^{\epsilon_v}\max\{1,|\beta_2\})^{\deg_{X_2}\delta}\end{aligned}$$

avec bien sûr $\epsilon_v=0$ pour les places ultramétriques, comme au paragraphe 2.4. Reportant dans (3.2) nous obtenons

(3.3)
$$\begin{aligned}\log|\delta(\beta)|_v &\leqslant \deg_{X_1}\delta\log^+|\beta_1|_v+\deg_{X_2}\delta\log^+|\beta_2|_v\\ &+\epsilon_v(\deg_{X_1}\delta+\deg_{X_2}\delta)\log 2+\log H_v(\delta)\\ &-\mathrm{Ind}_{\alpha_h}\delta\min\left\{d_1\log\frac{1}{|\alpha_{h1}-\beta_1|_v}, d_2\log\frac{1}{|\alpha_{h2}-\beta_2|_v}\right\}+O(d_1).\end{aligned}$$

$2^{\text{ème}}$ cas. $v \notin S_1 \cup \ldots \cup S_n$.

De la formule de Taylor à l'origine

$$\delta(\beta_1, \beta_2) = \sum_{\mathbf{i}} \Delta^{\mathbf{i}} \delta(0,0) \beta_1^{i_1} \beta_2^{i_2}$$

il s'ensuit que

$$|\delta(\beta_1, \beta_2)|_v \leqslant (\deg_{X_1} \delta + 1)(\deg_{X_2} \delta + 1) H_v (\delta) \max\{1, |\beta_1|_v\}^{\deg_{X_1} \delta} \max\{1, |\beta_2|\}_v^{\deg_{X_2} \delta},$$

c'est-à-dire

(3.4)
$$\log|\delta(\beta_1, \beta_2)|_v \leqslant \log H_v(\delta) + \deg_{X_1} \delta \log^+ |\beta_1|_v + \deg_{X_2} \delta \log^+ |\beta_2|_v + O(\log d_1).$$

La formule du produit appliquée au nombre algébrique $\delta(\beta_1, \beta_2)$ sous la forme

$$-\sum_{v \in S_1 \cup \ldots \cup S_n} \log|\delta(\beta_1, \beta_2)|_v \leqslant \sum_{v \notin S_1 \cup \ldots \cup S_n} \log|\delta(\beta_1, \beta_2)|_v$$

donne en vertu de (3.3), (3.4)

$$\sum_{h=1}^{n} \operatorname{Ind}_{\alpha_h} \delta \sum_{v \in S_h} \min\left\{ d_1 \log \frac{1}{|\alpha_{h1} - \beta_1|_v}, d_2 \log \frac{1}{|\alpha_{h2} - \beta_2|_v} \right\}$$
$$\leqslant \log H(\delta) + \deg_{X_1} \delta h(\beta_1) + \deg_{X_2} \delta h(\beta_2) + \log 2(\deg_{X_1} \delta + \deg_{X_2} \delta) + O(d_1).$$

Les estimations pour les indices, les degrés partiels et la hauteur du polynôme δ donnés par la proposition 2.7 permettent de réécrire la relation ci-dessus sous la forme

(3.5)
$$d_1 d_2 \sum_{h=1}^{n} \left(W(s, t_h) - 2n \frac{d_2}{d_1} \right) \sum_{v \in S_h} \min\left\{ d_1 \log \frac{1}{|\alpha_{h1} - \beta_1|_v}, d_2 \log \frac{1}{|\alpha_{h2} - \beta_2|_v} \right\}$$
$$\leqslant d_1 d_2 M(s) \left[d_1 h(\beta_1) + d_2 h(\beta_2) \right]$$
$$+ d_1 d_2 \left[(d_1 + d_2) \log 4 + \sum_{h=1}^{n} M(t_h)(d_1 h(\alpha_{h1}) + d_2 h(\alpha_{h2})) \right] + O(d_1 d_2 \log d_1).$$

(On a utilisé l'estimation $\left(1 + \dfrac{d_2}{d_1}\right) M(s) \leqslant 1$ pour remplacer le terme $\log 2 + M(s)(1 + \gamma) \log 2$ par $\log 4$.) Choisissons les paramètres d_1, d_2 de la forme

$$d_1 = d\left(\log 4 + \sum_{h=1}^{n} M(t_h)h(\alpha_{h2}) + M(s)h(\beta_2)\right)$$
$$d_2 = d\left(\log 4 + \sum_{h=1}^{n} M(t_h)h(\alpha_{h1}) + M(s)h(\beta_1)\right)$$

et posons $\gamma = \dfrac{d_2}{d_1}$. Supposons maintenant que l'inégalité (3.1) soit vérifiée ; faisant tendre d vers l'infini dans l'inégalité (3.5) et comparant les termes principaux on déduit

$$\sum_{h=1}^{n} \sum_{v\in S_h} a_v \leqslant 2.$$

□

Corollaire 3.2. — *Soit k un corps de nombres, n un entier $\geqslant 3$, $\kappa > 2$, $S_1,\dots,S_n$, des ensembles finis de places de k, $t_1,\dots,t_n, s$ des réels dans l'intervalle $[0,1]$ vérifiant*

$$V(s) + \sum_{h=1}^{n} V(t_h) = 1.$$

Alors le système

(3.6)
$$0 < \prod_{v\in S_h} |\alpha_h - \beta|_v \leqslant \left(H(\alpha_h)^{M(t_h)} H(\beta)^{M(s)/n}\right)^{\frac{-\kappa}{W(s,t_h)}} \qquad (h = 1,\dots,n)$$

n'a qu'un nombre fini de solutions $(\alpha_1,\dots,\alpha_n,\beta) \in k^{n+1}$.

Preuve. — Supposons par l'absurde qu'il y ait une infinité de solutions $(\alpha_1^{(j)},\dots,\alpha_n^{(j)},\beta^{(j)})$ pour $j = 0,1,\dots$; numérotons-les de manière à ce que la suite

$$M(s)h(\beta^{(j)}) + \sum_{h=1}^{n} M(t_h)h(\alpha_h^{(j)})$$

soit croissante. Notons $b_v^{(j)}$ (pour $v \in S$) et $\lambda_h^{(j)}$ (pour $h = 1,\dots,n$) respectivement les quantités

$$b_v^{(j)} = \frac{-W(s,t_h)\log|\alpha_h^{(j)} - \beta^{(j)}|_v}{M(t_h)h(\alpha_h^{(j)}) + \frac{M(s)}{n}h(\beta^{(j)})},$$
$$\lambda_h^{(j)} = \frac{M(t_h)h(\alpha_h^{(j)}) + \frac{M(s)}{n}h(\beta^{(j)})}{\sum_k M(t_k)h(\alpha_k^{(j)}) + M(s)h(\beta^{(j)})}.$$

L'hypothèse que $(\alpha_1^{(j)}, \dots, \alpha_n^{(j)}, \beta^{(j)})$ soit une solution du système (3.6) entraîne que

$$\sum_{v \in S_h} b_v^{(j)} \geqslant \kappa \qquad \text{pour } h = 1, \dots, n; \ j = 0, 1, \dots$$

L'inégalité de Liouville

$$-\log |\alpha_h - \beta|_v \leqslant h(\alpha_h) + h(\beta) + \log 2$$

garantit que les nombres $b_v^{(j)}$ sont majorés uniformément ; les nombres $\lambda_h^{(j)}$ sont $\leqslant 1$ et vérifient pour tout j $\sum_{h=1}^{n} \lambda_h^{(j)} = 1$; quitte à extraire une sous-suite de la suite $(\alpha_1^{(j)}, \dots, \alpha_n^{(j)}, \beta^{(j)})$ on peut donc supposer que les suites $b_v^{(j)}$, $\lambda_h^{(j)}$ convergent pour $j \to \infty$ vers des limites b_v, λ_h respectivement ; on aura bien évidemment

$$\sum_h \lambda_h = 1. \tag{3.7}$$

Il existe alors un nombre $0 < \epsilon < 1$ avec $\dfrac{\kappa}{1+\epsilon} > 2$ tel que le système

$$-\log |\alpha_h - \beta|_v \geqslant \left(M(s)h(\beta) + \sum_{k=1}^{n} M(t_k)h(\alpha_k) \right) \frac{b_v \lambda_h}{(1+\epsilon)W(s, t_h)} \qquad (h = 1, \dots, n; v \in S_h)$$

ait une infinité de solutions. Par des arguments élémentaires de continuité il existe un réel $\gamma_0 > 0$ avec la propriété suivante :

pour tout $0 < \gamma < \gamma_0$ il existe $t_1' \geqslant t_1, \dots, t_n' \geqslant t_n, s' \geqslant s, \epsilon' < \epsilon$ tels que

$$1 + \frac{n\gamma}{2} < V(s') + \sum_{h=1}^{n} V(t_h') < 1 + n\gamma,$$

$$\sum_{v \in S_h} b_v > 2(1 + \epsilon') \qquad h = 1 \dots, n \tag{3.8}$$

et que le système

$$-\log |\alpha_h - \beta|_v \geqslant \left(\log 4 + M(s')h(\beta) + \sum_{k=1}^{n} M(t_k')h(\alpha_k) \right) \frac{b_v \lambda_h}{(1+\epsilon')[W(s, t_h') - 2n\gamma]} \qquad (h = 1, \dots, n; v \in S_h)$$

ait une infinité de solutions que l'on note encore $(\alpha_1^{(j)}, \ldots, \alpha_n^{(j)}, \beta^{(j)})$. Comme la suite

$$M(s)h(\beta^{(j)}) + \sum_{h=1}^{n} M(t_h)h(\alpha_h^{(j)})$$

tend vers l'infini on peut déterminer deux indices j_1, j_2 tels que

$$\gamma := \frac{\log 4 + M(s)h(\beta^{(j_1)}) + \sum_{h=1}^{n} M(t_h)h(\alpha_h^{(j_1)})}{\log 4 + M(s)h(\beta^{(j_2)}) + \sum_{h=1}^{n} M(t_h)h(\alpha_h^{(j_2)})} < \gamma_0.$$

On applique la proposition 3.1 avec $(\alpha_1^{(j_i)}, \ldots, \alpha_n^{(j_i)}, \beta^{(j_i)})$ au lieu de $(\alpha_{1i}, \ldots, \alpha_{ni}, \beta_i)$ pour $i = 1, 2$; $(t'_1, \ldots, t'_n, s')$ au lieu de $(t_1, \ldots, t_n, s)$, $\dfrac{b_v \lambda_h}{1+\epsilon'}$ au lieu de a_v ; comme

$$\sum_{v \in S} a_v = \sum_{h=1}^{n} \sum_{v \in S_h} \frac{b_v \lambda_h}{1+\epsilon'}$$

la conclusion $\sum_v a_v \leqslant 2$ de la proposition 3.1 contredit les relations (3.7), (3.8). □

Le corollaire suivant généralise les résultats annoncés dans l'introduction.

Corollaire 3.3. — *Soient $n \geqslant 3, m \geqslant 1$ des entiers naturels, K_2 une extension de degré n d'un corps de nombres K_1, $w_1, \ldots, w_m$ des places de K_1. Supposons que les valeurs absolues correspondantes, notées $\| \cdot \|_{w_j}$, soient normalisées par rapport à K_1 et soient prolongées à l'extension K_2 de manière à ce que K_2 soit contenu dans le completé K_{1w_j} de K_1. Soit s un réel, $0 < s < 1$; alors il n'existe qu'un nombre fini de couples $(\alpha, \beta) \in K_2 \times K_1$, $\alpha \neq \beta$ vérifiant*

$$\prod_{j=1}^{m} \|\alpha - \beta\|_{w_j} < \left(H(\alpha)^{2/s} H(\beta)^s\right)^{\frac{-n}{1-\frac{1}{s\sqrt{n}}}}. \tag{3.9}$$

Preuve. — Soit k la clôture galoisienne de K_2/K_1 ; pour toute place w_j notons encore $\| \cdot \|_{w_j}$ un prolongement de la valeur absolue $\| \cdot \|_{w_j}$ au corps k. Prenons un système de représentants $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$ du goupe de Galois $\mathrm{Gal}(k/K_1)$ modulo le stabilisateur de K_2 ; pour tout $h = 1, \ldots, n$ soit $\| \cdot \|_{w_{jh}}$ la valeur absolue de $\sigma_h^{-1} K_2$ définie par

$$\|x\|_{w_{jh}} = \|\sigma_h(x)\|_{w_j}.$$

On a le fait suivant :

LEMME. — *Posons, pour tout $h = 1, \ldots, n$ et tout $\alpha \in K_2$, $\alpha_h = \sigma_h^{-1}(\alpha)$; alors pour tout couple $(\alpha, \beta) \in K_2 \times K_1$ et tout indice j, $1 \leqslant j \leqslant m$ on a*

$$\|\alpha_h - \beta\|_{w_{jh}} = \prod_{v|w_{jh}} |\alpha_h - \beta|_v^{1/n}$$

où le produit est étendu à toutes les places du corps k au-dessus de la place w_{jh}, considérée comme place du corps $\sigma_h^{-1}(K_2)$ et les valeurs absolues $|\cdot|_v$ sont normalisées par rapport au corps k.

Preuve du lemme. — Pour simplifier écrivons w au lieu de w_j et w_h au lieu de w_{jh}. Les valeurs absolues $\|\cdot\|_{w_h}$ sont normalisées par rapport au corps K_1, donc pour tout élément $x \in \sigma_h^{-1}(K_2)$ on a

$$|x|_v = \|x\|_{w_h}^{\frac{[K_1:\mathbf{Q}]}{[K_{1w}:\mathbf{Q}_w]}\cdot\frac{[k_v:\mathbf{Q}_w]}{[k:\mathbf{Q}]}}.$$

Remarquons d'abord que comme $K_2 \subset K_{1w}$, donc $K_{2w} = K_{1w}$, on a aussi $(\sigma_h^{-1}(K_2))_{w_h} = K_{1w}$. L'exposant dans l'identité précédente s'écrit alors

$$\begin{aligned}\frac{[K_1:\mathbf{Q}]}{[K_{1w}:\mathbf{Q}_w]}\cdot\frac{[k_v:\mathbf{Q}_w]}{[k:\mathbf{Q}]} &= \frac{[K_1:\mathbf{Q}]}{[\sigma_h^{-1}(K_2)_{w_h}:\mathbf{Q}_w]}\frac{[K_2:K_1]}{[K_2:K_1]}\cdot\frac{[k_v:\mathbf{Q}_w]}{[k:\mathbf{Q}]}\\ &= \frac{[K_2:\mathbf{Q}]}{[(\sigma_h^{-1}(K_2))_w\mathbf{Q}_w]}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{[k_v:\mathbf{Q}_w]}{[k:\mathbf{Q}]}\\ &= \frac{[k_v:(\sigma_h^{-1}(K_2))_{w_h}]}{[k:\sigma_h^{-1}(K_2)]}\cdot\frac{1}{n}.\end{aligned}$$

Comme la somme des degrés locaux est égale au degré total on a, pour tout $x \in \sigma_h^{-1}(K_2)$,

$$\prod_{v|w_h} |x|_v = \|x\|_{w_h}^{1/n}.$$

Prenant $x = \alpha_h - \beta = \sigma_h^{-1}(\alpha - \beta)$ on obtient le lemme 3.4. □

Fin de la preuve du corollaire. — Posons, pour $h = 1, \ldots, n$,

$$S_h = \{v \in M_k :\ \exists j, 1 \leqslant j \leqslant m,\ v|w_{jh}\}.$$

Pour toute solution $(\alpha, \beta) \in K_2 \times K_1$ de l'inégalité (3.9) on obtient, grâce au lemme 3.4, une solution $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta) \in k^{n+1}$ du système

$$\prod_{v\in S_h} |\alpha_h - \beta|_v \leqslant \Big(H(\alpha_h)^{2/s}H(\beta)^s\Big)^{\frac{-1}{1-\frac{1}{s\sqrt{n}}}}.$$

On applique le corollaire 3.2 avec $t_h = t = \sqrt{\dfrac{2-s^2}{n}}$ pour tout h ; la condition $V(s) + \sum_h V(t_h) = 1$ est bien vérifiée car $V(s) = s^2/2$, $V(t) = t^2/2$ et $nt^2/2 + s^2/2 = 1$; clairement

$$\begin{aligned} M(t_h) &\leqslant \frac{t^2}{2}, \\ M(s) &= \frac{s^2}{2} - \frac{s^4}{4} = \frac{s^2}{2}\left(1 - \frac{s^2}{2}\right). \end{aligned}$$

Rappelons que

$$W(s,t) = \underset{s<x_1+x_2<u(s,t)}{\int_0^1\int_0^1} (x_1+x_2)dx_1dx_2 - \underset{x_1+x_2<t}{\int_0^1\int_0^1}(x_1+x_2)dx_1dx_2$$

et que la région $\{x \in [0,1]^2 \ : \ s < x_1 + x_2 < u(s,t)\}$ a une mesure égale à $V(t) = t^2/2$, donc

$$W(s,t_h) \geqslant s\frac{t^2}{2}\left(1 - \frac{2t}{3s}\right) = \frac{s}{n}\left(1 - \frac{s^2}{2}\right)\left(1 - \frac{2t}{3s}\right).$$

De la minoration ci-dessus et des inégalités précédentes pour $M(s), M(t)$ on déduit

$$\begin{aligned} \frac{M(t_h)}{W(s,t_h)} &\leqslant \frac{nt^2/2}{s(1-s^2/2)(1-2t/3s)} = \frac{1}{s}\left(1 - \frac{2t}{3s}\right)^{-1}, \\ \frac{M(s)}{W(s,t_h)} &\leqslant \frac{s}{2}n\left(1 - \frac{2t}{3s}\right)^{-1}. \end{aligned}$$

Grâce au choix de t on a

$$1 - \frac{2t}{3s} = 1 - \frac{2}{3s}\sqrt{\frac{2-s^2}{n}} \geqslant 1 - \frac{1}{s\sqrt{n}}.$$

L'inégalité (3.9) entraîne alors le système d'inégalités (3.6), avec $\kappa = \dfrac{2}{1 - \frac{1}{s\sqrt{n}}}$ et le corollaire 3.2 fournit le résultat de finitude cherché.

□

BIBLIOGRAPHIE

[A] Y. AMICE, Les nombres p–adiques, Presses Universitaires de France, 1975.

[B1] E. BOMBIERI, On the Thue-Siegel-Dyson theorem, Acta Math., 148 (1982), 255-296.

[B2] E. BOMBIERI, Effective diophantine approximation on G_m, Annali Sc. Norm. Sup. Pisa, 20 (1993), 61-89.

[B-M] E. BOMBIERI, J. MUELLER, On effective mesures of irrationality for $\sqrt[r]{a/b}$ and related numbers, J. reine ang. Math., 342 (1983), 173-196.

[B-V] E. BOMBIERI, J. VAALER, On Siegel's lemma, Inv. Math., 73 (1983), 11-33.

[C] P. CORVAJA, Le théorème de Roth par un déterminant d'interpolation, C.R.A.S., t. 312 (1992), 517-521.

[L1] M. LAURENT, Sur quelques résultats récents de transcendance, Astérisque, 198-199-200 (1991), 209-230.

[L2] M. LAURENT, Linear forms in two logarithms and interpolation determinants, Acta Arith., 66-2 (1994), 182-199.

[L-M-N] M. MIGNOTTE, M. LAURENT, Y. NESTERENKO, Formes linéaires en deux logarithmes et déterminants d'interpolation, J. Number Theory (à paraître).

[T] A. THUE, Ueber Annäherungswerte algebraischer Zahlen, J. reine ang. Math., 135 (1909), 284-305.

[V] C. VIOLA, On Dyson's Lemma, Annali Sc. Norm. Pisa, 12 (1985), 105-135.

[W] M. WALDSCHMIDT, Linear independence of logarithms of algebraic numbers, Madras Lecture Notes in Mathematics (1992).

Manuscrit reçu le 13 février 1995,
accepté le 13 juin 1995.

Pietro CORVAJA,
U.R.A. 763 du C.N.R.S. "Problèmes diophantiens"
Université de Paris 6
Mathématiques
4, Place Jussieu, B.P. 172
75252 Paris.
corvaja@mathp6.jussieu.fr
ou crvjpt01@cidoc.iuav.unive.it