ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

STÉPHANE SIMON

Champs totalement radiaux sur une structure de Thom-Mather

Annales de l'institut Fourier, tome 45, nº 5 (1995), p. 1423-1447

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1995__45_5_1423_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
45, 5 (1995), 1423–1447

CHAMPS TOTALEMENT RADIAUX SUR UNE STRUCTURE DE THOM-MATHER

par Stéphane SIMON (*)

0. Introduction.

En 1965, Marie-Hélène Schwartz a publié deux notes [Schw1], [Schw2] (développées dans une publication de l'Université de Lille [Schw3]) introduisant les champs radiaux comme champs de r-repères pour définir (par obstruction) des classes de Chern singulières en cohomologie, sur un ensemble analytique complexe muni d'une stratification analytique de Whitney; puis successivement dans [Schw4], [Schw5] et enfin en 1991 dans [Schw6], elle définit des champs de vecteurs sortants de certains tubes (inspirés de ceux construits dans [Schw1], [Schw2], [Schw3]), qu'elle appelle encore radiaux et montre qu'ils vérifient un théorème de Poincaré-Hopf stratifié.

Nous étudions ici des champs stratifiés dits «totalement radiaux», précédemment introduits par H.C. King et D. Trotman (dans [KiTr], sous l'appellation de «champs radiaux») : sur un ensemble stratifié abstrait, muni de ses données de contrôle, un tel champ (continu sur les strates) est sortant des hypersurfaces de niveau des fonctions tubulaires des tubes de contrôle.

M.-H. Schwartz a montré dans [Schw6] l'existence de champs radiaux (continus), sur un ensemble analytique réel muni d'une stratification analytique de Whitney. Au numéro 1.6, nous montrons l'existence de champs totalement radiaux continus sur un ensemble stratifié (plongé) muni d'une stratification (C)-régulière au sens de K. Bekka.

(*) Ce travail a été réalisé dans l'équipe de Topologie et Singularité de l'U.R.A. 225 du C.N.R.S. à l'Université de Provence.
Mots-clés : Ensemble stratifié abstrait – Champ radial – Relèvement continu contrôlé – Théorème de Poincaré-Hopf.
Classification math. : 57N80 – 57R25 – 58A35.

En fait, nous traitons d'abord le cas plus général d'un ensemble stratifié abstrait (e.s.a.) : au numéro 1.2, nous comparons la définition de radialité totale du numéro 1.1 avec la définition de radialité donnée dans [Schw6]. Puis au numéro 1.3, nous montrons qu'il existe un champ totalement radial sur tout e.s.a. de profondeur de stratification finie. Les deux démonstrations diffèrent de par la nature de l'espace de départ, topologique pour les e.s.a., opposée à géométrique (presque dans un sens riemannien) pour les ensembles analytiques réels Whitney-stratifiés; mais aussi, de par l'emploi systématique du formalisme des ensembles stratifiés dû à J. N. Mather [Math1], [Math2].

La preuve consiste essentiellement en une récurrence sur la profondeur (et non pas sur la dimension) de la stratification et en l'utilisation d'un théorème de relèvement contrôlé de champ de vecteurs. Ce théorème fournit un champ totalement radial par rapport aux strates de plus forte profondeur et contrôlé par rapport aux strates de moindre profondeur, à chaque étape de la récurrence. M.-H. Schwartz évalue les angles entre les différents champs et espaces tangents pour montrer l'existence de champs radiaux. Ici, nous utilisons systématiquement le théorème de relèvement contrôlé et même continu contrôlé quand l'espace stratifié est (C)-régulier au sens de K. Bekka. H. C. King et D. Trotman ont obtenu un résultat similaire de façon indépendante, les démonstrations étant aussi assez différentes.

Aux numéros 1.4 et 1.5, on trouve en perturbant légèrement le champ précédent (par transversalité), un champ à singularités isolées.

Enfin au numéro 1.6, on s'intéresse à l'existence de champs totalement radiaux sur un ensemble (C)-régulier (donc plongé dans une variété lisse, [Bekk1]) : on prouve alors l'existence d'un champ totalement radial continu (via un théorème de relèvement continu et contrôlé dû à K. Bekka [Bekk2]). De plus, on donne un résultat de prolongement en un champ totalement radial, d'un champ totalement radial déjà défini sur une partie fermée, réunion de strates (un squelette par exemple). Finalement, on conclut par un résultat de conservation des indices.

Nous utilisons ensuite les résultats du paragraphe 1 pour montrer au paragraphe 2 un théorème de Poincaré-Hopf stratifié. M.-H. Schwartz a montré dans [Schw4], [Schw5], [Schw6], que le théorème de Poincaré-Hopf est encore valable sur un ensemble analytique réel (compact) muni d'une stratification (B)-régulière, quand le champ est supposé radial [Schw3], [Schw4], [Schw5], [Schw6] et uniformément sortant ou rentrant du bord (dans [Schw6], [Schw7], elle montre aussi une sorte de réciproque, toujours dans le cas singulier). Les propriétés des champs radiaux (continus) interviennent de deux manières : d'une part, par la conservation des indices et d'autre part, d'une façon plus essentielle, par le fait que les champs sont sortants des strates. Des exemples simples d'espaces et de champs stratifiés (voir par exemple [Schw6]) montrent que la définition usuelle de l'indice d'un champ de vecteurs (continu) ne permet pas de déduire de théorème de Poincaré-Hopf, si les champs ne sont pas sortants des strates.

Dans [KiTr], H. C. King et D. Trotman étendent le résultat de M.-H. Schwartz sur le théorème de Poincaré-Hopf, à des espaces singuliers plus généraux (theorem 2) et, en modifiant la définition de l'indice, à des champs génériques (theorem 10). En particulier, on autorise un comportement presque quelconque du champ le long du bord. Notons aussi que dans [Gore2], M. Goresky propose une définition de fonction de Morse sur un ensemble (B)-régulier, qu'il appelle π-fibre car elles sont croissantes dans la direction normale aux strates. Il annonce alors (sans démonstration), des inégalités de Morse pour ce type de fonction et bien sûr, une égalité pour la dernière des inégalités; cette égalité se lit alors comme un théorème de Poincaré-Hopf appliqué au champ gradient $(\mathrm{grad}\, f_{|X})_{X\in\Sigma}$ d'une fonction de Morse π-fibre f. Ce champ est stratifié mais n'est pas continu en général; d'autre part il n'est pas totalement radial.

Dans ce travail, nous fournissons une démonstration d'un théorème similaire à celui de M.-H. Schwartz, dans un contexte (C)-régulier sans bord, le champ étant totalement radial, continu, et stratifié; il n'y a donc pas de bord proprement dit. La preuve, assez simple, utilise essentiellement le théorème de Poincaré-Hopf lisse et l'existence des *fonctions tapissantes régulières* de [Bekk2]. Le plan de la preuve est celui de M.-H. Schwartz [Schw4], [Schw5], [Schw6]. Puis nous déduisons du résultat précédent, un théorème de Poincaré-Hopf sur les e.s.a. (le champ n'est alors plus nécessairement continu), retrouvant un résultat de [KiTr] démontré par d'autres méthodes.

Ce travail n'aurait pu aboutir sans l'aide de David Trotman, qui a dirigé la thèse dont il est extrait. Je tiens à le remercier pour d'innombrables discussions, pour ses multiples remarques et suggestions et pour ses encouragements amicaux. Je remercie également J.-P. Brasselet pour ses précieux commentaires et ses nombreux conseils.

1. Construction des champs totalement radiaux.

1.1. Rappels et définitions.

Soit (A, Σ) un ensemble stratifié abstrait du type Thom-Mather (voir [Math1], [Math2], [Bekk1], [Thom], [Vero3]) où Σ désigne l'ensemble des strates. En particulier, A est un espace topologique localement compact et sa topologie admet une base dénombrable. De plus, Σ constitue une partition localement finie de A en sous-ensembles localement fermés (les strates) qui sont des variétés C^∞ (dans la topologie induite). Les strates vérifient la condition de frontière (*i.e.* si $X, Y \in \Sigma$ et $X \cap \overline{Y} \neq \emptyset$ alors $X \subseteq \overline{Y}$). La relation d'ordre partiel $X \subseteq \overline{Y}$ sera notée $X \leq Y$ et la relation d'ordre strict associée $X < Y$. Rappelons aussi que A est muni d'un système de données de contrôle $(T_X, \pi_X, \rho_X)_{X \in \Sigma}$ où T_X est un voisinage de X dans A, $\pi_X : T_X \to X$ une rétraction continue et $\rho_X : T_X \to \mathbb{R}_+$ une application continue telle que $\rho_X^{-1}(0) = X$. On suppose en outre, que pour toute strate Y telle que $T_X \cap Y \neq \phi$, $(\pi_X, \rho_X)_{|T_X \cap Y} : T_X \cap Y \to X \times \mathbb{R}_+^*$ est une submersion C^∞. Le système de données de contrôle vérifie enfin les conditions de compatibilité usuelles (*i.e.* $\pi_X \circ \pi_Y = \pi_X$, $\rho_X = \rho_X \circ \pi_Y$ avec $X < Y$). D'autre part, les hypothèses sur A entraînent que A est métrisable. Donc si X, Y sont deux strates de Σ telles que $\overline{X} \cap Y = X \cap \overline{Y} = \emptyset$ (*i.e.* X, Y sont incomparables), alors les tubes T_X, T_Y peuvent être pris disjoints. On peut aussi supposer que $T_X \cap Y \neq \emptyset$ si et seulement si $X < Y$ et que les strates sont connexes.

On remarquera que si A est un espace topologique complètement régulier [Bour], tel que toute partie ouverte soit un espace de Lindelöf et F une partie fermée, alors il existe une fonction continue $f : A \to [0,1]$ telle que $f^{-1}(0) = F$.

DÉFINITION 1 (*cf.* [Math1], [Math2] et [Thom]). — *On appelle champ de vecteurs stratifié (sur A) une famille $(v_X)_{X \in \Sigma}$ de champs de vecteurs sur X, pour tout X dans Σ. On dit qu'un champ de vecteurs stratifié v est de* classe *C^k si sa restriction v_X à chaque strate X est de classe C^k ($k \geq 0$).*

DÉFINITION 2 (*cf.* [Math1], [Math2] et [Thom]). — *Soit v un champ de vecteurs stratifié. On dit que v est contrôlé sur A si, pour toute strate X de Σ, il existe un voisinage ouvert U de X dans T_X, le tube de contrôle autour de X, tel que $v(\rho_X) = 0$ et $\pi_{X*}(v) = v \circ \pi_X$ sur U.*

En général, on prendra la trace de T_X sur U, ce qui nous permettra de supposer v contrôlé dans T_X.

DÉFINITION 3 (*cf.* [KiTr]). — *Soit v un champ de vecteurs stratifié. On dit que v est totalement radial relativement à une strate X de Σ si :*

(i) *v est de classe C^0 ;*

(ii) *il existe un voisinage ouvert T'_X de X dans T_X tel que $v(\rho_X) > 0$ sur $T'_X \setminus X$.*

On dit qu'un champ de vecteurs stratifié v est totalement radial (sur A) si v est totalement radial relativement à chaque strate X de Σ. Par abus de langage on dit aussi que v est totalement radial à X sur un ouvert U de A si $v(\rho_X) > 0$ sur $U \setminus X$.

DÉFINITION 4 (*cf.* [Vero3]). — *Soient (A, Σ) un e.s.a. et X une strate de Σ. On appelle profondeur de la strate X l'entier naturel :*

$$\operatorname{depth}_\Sigma(X) = \max\big\{\ell \in \mathbb{N} \mid X = X_0 < X_1 < \cdots < X_\ell \\ \text{avec } X_i \in \Sigma \text{ pour } 1 \leq i \leq \ell\big\}.$$

De même, on définit la profondeur de la stratification :

$$\operatorname{depth}(\Sigma) = \sup_{X \in \Sigma} \operatorname{depth}_\Sigma(X).$$

Par abus de langage, on parle quelquefois de la profondeur de A à la place de la profondeur de la stratification Σ de A, quand Σ est fixée.

Remarque. — Noter que $\operatorname{depth}_\Sigma(X)$ est toujours fini (quand Σ est supposée localement finie), tandis que $\sup_{X \in \Sigma} \dim(X)$ fini entraîne $\operatorname{depth}(\Sigma)$ fini. En outre, on peut avoir $\operatorname{depth}(\Sigma)$ fini sans que $\sup_{X \in \Sigma} \dim(X)$ ne soit fini. D'autre part, $\operatorname{depth}(\Sigma) = 0$ si et seulement si A est une variété lisse (non nécessairement de dimension pure), réunion de composantes connexes.

1.2. Comparaison avec les champs de M.-H. Schwartz.

Noter tout d'abord que la définition d'un champ totalement radial dépend du choix de la famille de fonctions de contrôle $(\rho_X)_{X \in \Sigma}$ et s'entend comme $v(\rho_{X \mid T'_X \cap Y}) > 0$ pour toute strate Y telle que $X < Y$. La définition n'est donc pas intrinsèque.

D'autre part, la condition énoncée ici n'est pas équivalente à celle donnée dans [Schw6], théorème 3.1.5 et définition 3.1.6, (qui dépend, d'une stratification de Whitney analytique réelle, d'une triangulation compatible pour la définition des tubes paramétriques $T_{\epsilon_i}(V_i)$, d'une famille de fermés (M_i) et de fonctions (μ_i) et du choix d'une métrique riemannienne) car les champs radiaux ne sont pas sortants simultanément de tous les voisinages tubulaires de toutes les strates (près de la frontière).

Plus précisément, rappelons brièvement les conditions que vérifie un champ radial ([Schw6]). Soit W un sous-ensemble analytique réel d'une variété (analytique réelle) M, M étant munie d'une stratification analytique réelle $\mathcal{S}$ de Whitney telle que W soit réunion de strates de $\mathcal{S}$. Pour chaque strate V_i de $\mathcal{S}$ incluse dans W, soit M_i un fermé de la variété ambiante M inclus dans V_i. Un champ radial est alors un champ stratifié continu (et même rugueux quand la condition (W) de [Verd] est satisfaite) sur W (en tant que section du fibré $T_W(M)$, restriction du fibré tangent de M à W) sans zéro au voisinage de la frontière $\dot{V}_i$ de V_i et à singularités isolées appartenant à M_i, ceci pour chaque V_i. De plus il est sortant du bord des tubes géodésiques $\Theta_{c\mu_i}(M_i)$ pour tout $c \in]0,1]$ (d'où l'appellation).

Par contre, on n'impose pas de condition particulière sur le comportement du champ par rapport aux strates V_j adhérentes à V_i (*i.e.* $V_j \subset \overline{V_i}$). Il peut être dirigé vers V_i, c'est-à-dire «rentrant» en les points d'une intersection de tubes paramétriques $T_{\epsilon_j}(V_j) \cap T_{\epsilon_i}(V_i)$ (*i.e.* en dehors du fermé M_i) et même en certains points de l'intersection $\Theta_{c\mu_i}(M_i) \cap T_{\epsilon_j}(V_j)$ arbitrairement proches de V_i, si ϵ_j est assez petit.

Cependant, pour raison de continuité et de l'absence de singularité sur un voisinage de $\dot{V}_i$ dans V_i, sa position limite ne peut être rentrante (en fait on n'a pas besoin de plus pour le théorème de Poincaré-Hopf). M.-H. Schwartz montre au paragraphe 6 de [Schw6] qu'étant donné un champ radial v, on peut toujours lui associer un champ (qu'elle appelle) sortant de tubes semi-géodésiques (globaux) ayant mêmes singularités et mêmes indices que v. La nécessité d'une telle construction provient du fait qu'en les points où v est obtenu par raccordement de deux champs issus de strates incidentes, v peut ne pas être sortant des tubes semi-géodésiques. Remarquons qu'un champ sortant n'est toujours pas totalement radial au sens de la définition 1.1.3. Le résultat précédent permet alors à M.-H. Schwartz de déduire le théorème de Poincaré-Hopf pour les champs radiaux continus.

Ici les idées sont similaires, mais le champ n'est bien sûr pas continu sur A. De plus, il est sortant tout le long des hypersurfaces de niveau des fonctions distance. Ce qui permet d'obtenir plus rapidement le théorème de Poincaré-Hopf, sans nécessiter de constructions auxiliaires. Nous ne faisons pas d'hypothèse particulière quant aux singularités d'un champ totalement radial. Par contre dans les applications (voir le paragraphe 2), le champ admettra des singularités isolées.

M.-H. Schwartz définit dans un cadre analytique complexe (au paragraphe 4 de [Schw6]) la notion de champ préradial (qui est essentiellement défini comme étant un champ continu, vérifiant un théorème de proportionnalité) et montre qu'on peut lui associer (convenablement) un champ radial. J.-P. Brasselet et M.-H. Schwartz ont montré dans [BrSc], qu'un champ radial est préradial; rappelons aussi le résultat principal de l'article précité : les classes de Chern-MacPherson [MacP] ne sont autres que les classes de Chern-Schwartz, identifiées par isomorphisme d'Alexander.

Donc la formule d'indice de Poincaré-Hopf est encore valable pour les champs préradiaux. H. C. King et D. Trotman généralisent aussi la notion de radialité totale présentée ici en définissant des champs semi-radiaux [KiTr] pour lesquels la formule d'indice s'applique encore. Ceux-ci sont des champs non (nécessairement) continus tels qu'il n'existe pas de suite de points d'un tube de contrôle T_X autour d'une strate X, s'accumulant sur X, en lesquels le champ est «vertical descendant». Ces deux notions (préradialité et semi-radialité) sont *a priori* fort différentes compte tenu de leurs définitions.

1.3. Existence des champs totalement radiaux.

Dans ce numéro, nous prouvons l'existence de champs totalement radiaux sur un ensemble stratifié abstrait. La démonstration s'effectue en plusieurs étapes, et par récurrence sur $\operatorname{depth}(\Sigma)$: au lemme 1, on construit un champ stratifié, sortant des strates d'une profondeur donnée, dans l'intersection d'un voisinage de ces strates, et d'un voisinage d'une strate incidente; à la proposition 1, on «recolle» ce champ avec le champ donné par la récurrence; enfin, au lemme 2, on termine la construction d'un champ totalement radial, grâce à une combinaison linéaire convenable des champs précédents.

On suppose désormais que $\operatorname{depth}(\Sigma)$ *est fini.*

THÉORÈME 1. — *Soit* (A,Σ) *un ensemble stratifié abstrait, alors il existe un champ de vecteurs (stratifié) totalement radial sur* A.

Démonstration. — Nous allons raisonner par récurrence sur la profondeur de la stratification. Si $\operatorname{depth}(\Sigma)=0$, il n'y a rien à prouver.

Hypothèse de récurrence : soit (A', Σ') un ensemble stratifié abstrait de profondeur inférieure ou égale à n ; il existe un champ totalement radial sur A'.

Soit (A, Σ) un ensemble stratifié abstrait de profondeur $n+1$ et X une strate de profondeur maximale $n+1$. On peut supposer que X est l'unique strate vérifiant cette propriété.

Appliquons l'hypothèse de récurrence à $(A', \Sigma') = (A \setminus X, \Sigma - \{X\})$. Soit v un champ totalement radial sur A' ; on va modifier ce champ sur un voisinage de X pour le rendre totalement radial à X.

On commence par construire un champ « totalement radial » tout près de X pour chaque strate Y telle que $X < Y$, puis on recollera les différents champs ainsi obtenus.

Soit Y une strate incidente à X de profondeur k, *i.e.* $X < Y$ et $\mathrm{depth}_\Sigma(Y) = k$ avec $k < n+1$. Soient T_X (resp. T_Y) un tube de contrôle ouvert autour de X (resp. Y). On considère la restriction de l'ensemble stratifié abstrait (A, Σ) à $T_X \cap T_Y$: $(A^Y, \Sigma^Y) = (A, \Sigma)_{|T_X \cap T_Y}$.

Autrement dit, on considère la restriction du système de contrôle de (A, Σ) à $T_X \cap T_Y$ (remarquer que les strates $Z \in \Sigma$ pour $Z < Y$ n'intersectent pas A^Y).

LEMME 1. — *Il existe un champ de vecteurs η_Y sur (A^Y, Σ^Y), contrôlé par rapport au système de contrôle de (A^Y, Σ^Y), tel que $\eta_Y(\rho_X) > 0$ sur $T_X \cap T_Y$.*

Démonstration. — On pose :

$$u_X = \frac{\mathrm{grad}\, \rho_X}{\|\mathrm{grad}\, \rho_X\|}\Big|_{Y \cap T_X}.$$

Le champ de vecteurs u_X est C^∞ sur $Y \cap T_X$. Soit $\pi_{Y|} : T_X \cap T_Y \to Y$ la restriction de la rétraction du tube de contrôle T_Y (Fig. 1).

Alors $\pi_{Y|}$ est une submersion contrôlée. D'après [Math1], il existe un relèvement contrôlé η_Y de u_X à (A^Y, Σ^Y) tout entier, compatible avec $\pi_{Y|}$ (*i.e.* $\pi_{Y|*}(\eta_Y) = u_X \circ \pi_{Y|}$ et $(\pi_Z, \rho_Z)_{|*}(\eta_Y) = (\eta_Y \circ \pi_Z, 0)$ sur $A^Y \cap T_Z$ pour $Y \leq Z$). De plus en restreignant T_Y si nécessaire, on a :

$$\begin{aligned} \eta_Y(\rho_X) &= \eta_Y(\rho_X \circ \pi_Y) \\ &= (\pi_{Y*}\eta_Y)(\rho_X) \quad \text{(par compatibilité } \rho_X \circ \pi_Y = \rho_X) \\ &= u_X(\rho_X) \quad \text{(grâce à la condition de contrôle).} \end{aligned}$$

Or $u_X(\rho_X) > 0$ sur $Y \cap T_X$ par définition de u_X. □

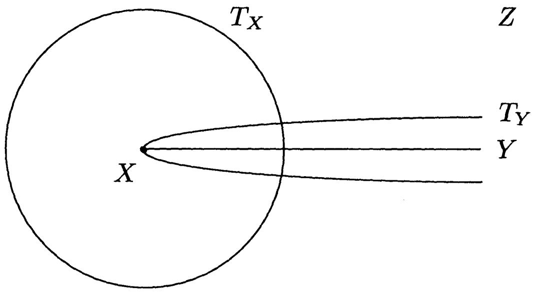

Figure 1. L'intersection $Y \cap T_X$ est une partie ouverte de Y.

Noter qu'*a priori* le champ obtenu n'est pas contrôlé par rapport aux strates Z telles que $X < Z < Y$, notre méthode consiste à l'annuler sur la frontière pour le rendre contrôlé par rapport à ces strates.

Revenons à (A, Σ) et soit η_Y le champ donné par le lemme précédent. Posons $F = A \setminus (T_X \cap T_Y)$; c'est un fermé de A qui contient X (Fig. 2).

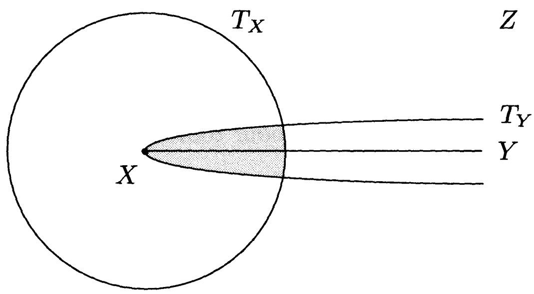

Figure 2. La partie $T_X \cap T_Y = A \setminus F$ est grisée; la composante η_Y est nulle sur F (et non nulle sur $A \setminus F$).

Soit $f : A \to [0,1]$ une fonction continue positive telle que $f^{-1}(0) = F$ (*cf.* le numéro 1). Changeons η_Y en

$$f \cdot \mathrm{e}^{-\|\eta_Y\|^2} \eta_Y.$$

C'est un champ défini, *borné* sur A et nul sur F. Remarquons que $v + \eta_Y$ est totalement radial à toute strate Z de Σ telle que $Y \leq Z$. En effet, comme η_Y est contrôlé, en restreignant les tubes de contrôle si nécessaire, on peut supposer $\eta_Y(\rho_Z) = 0$ et $v(\rho_Z) > 0$ sur $T_Z \setminus Z$ pour toute strate $Z \in \Sigma$ telle que $Y \leq Z$.

La composante η_Y (contrôlée par rapport aux strates $Z \geq Y$), nous permettra d'obtenir la radialité totale d'une somme du type $v + \beta\eta_Y$, relativement à la strate X. Cette construction est différente d'un prolongement par parallélisme (outil de M.-H. Schwartz), car on ne s'intéresse pas ici, à la continuité « globale » des champs.

Étudions la condition de radialité totale du champ $w_Y = v + \beta\eta_Y$ par rapport à X où β est une fonction continue convenable de A dans $[0,1]$.

On cherche à déterminer β de telle sorte que $w_Y(\rho_X) > 0$ sur un voisinage de $T_X \cap Y$ dans A. Posons :

$$v_Y = \eta_Y(\rho_X)\, \mathrm{e}^{-(v(\rho_X)^2 + \|v\|^2)} v.$$

Le champ v_Y est nul sur F et non nul sur $(A \setminus F) \setminus Y = T_X \cap T_Y \setminus Y$.

PROPOSITION 1. — *Soit Y une strate de Σ telle que $X < Y$. Il existe un champ de vecteurs $\widetilde{w}_Y$ sur A et un voisinage ouvert U_Y de $T_X \cap Y$ dans $T_X \cap T_Y$ tels que :*

$$\begin{cases} \widetilde{w}_Y(\rho_X) > 0 \text{ sur } U_Y, \\ \widetilde{w}_Y(\rho_Y) > 0 \text{ sur } U_Y \setminus Y, \\ \widetilde{w}_Y(\rho_Z) > 0 \text{ sur } (U_Y \cap T_Z) \setminus Z \text{ pour toute strate } Z \text{ telle que } Y < Z. \end{cases}$$

Démonstration. — Posons :

$$\beta = 1 - \frac{v_Y(\rho_X)}{\eta_Y(\rho_X)} = 1 - \mathrm{e}^{-(\|v(\rho_X)\|^2 + \|v\|^2)} v(\rho_X)$$

qui est positive et bornée.

Soient V, V' deux ouverts de A tels que (Fig. 3) :

$$\overline{T_X \cap Y} \subset V, \quad \overline{V} \subset V'.$$

Soit aussi $\ell : A \to [0,1]$ une fonction continue telle que :

$$\ell_{|\overline{V}} \equiv 1, \quad \ell_{|A \setminus V'} \equiv 0.$$

Enfin, posons :

$$\widetilde{w}_Y = v_Y + \ell\beta\eta_Y.$$

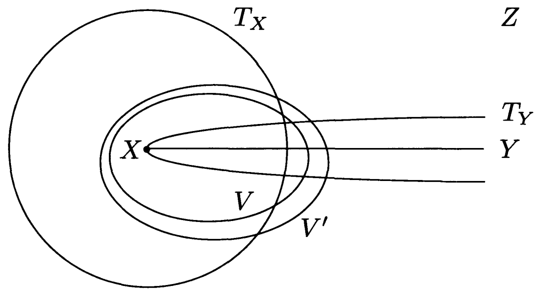

Figure 3.

Alors $\widetilde{w}_Y(\rho_X)$ est strictement positif sur un voisinage U_Y de $T_X \cap Y$. En effet :

$$\begin{aligned}\widetilde{w}_Y(\rho_X) &= v_Y(\rho_X) + \ell\beta\eta_Y(\rho_X), \quad \text{mais } \ell_{|V} \equiv 1\\ &= v_Y(\rho_X) + \beta\eta_Y(\rho_X)\\ &= \eta_Y(\rho_X) \qquad\qquad \text{qui est positif.}\end{aligned}$$

Les deux autres inégalités sont immédiates car η_Y est contrôlé donc $\eta_Y(\rho_Y) = \eta_Y(\rho_Z) = 0$.

De plus, on peut supposer que U_Y est la trace sur T_X d'un tube ouvert T''_Y autour de Y tel que $v(\rho_Y) > 0$ sur $T''_Y \setminus Y$. En effet, en supposant que T_Y est le voisinage de radialité de v, il existe un voisinage ouvert T''_Y de Y inclus dans T_Y, tel que $T''_Y \cap T_X \subset T_Y \cap T_X \cap V$, et on peut poser $U_Y = T''_Y \cap T_X$. $\square$

On applique le lemme précédent à toutes les strates incidentes à X. Remarquons que l'on ne perturbe v que dans T_X ; dès lors, si X et Y sont incomparables, on ne modifie pas la radialité de v dans T_Y. Noter à ce stade que l'ensemble $I_X = \{Y \in \Sigma \mid X < Y\}$ est fini.

On va recoller ces différents champs entre eux.

On supposera désormais que les champs sont bornés (en multipliant au besoin par une fonction strictement positive convenable).

LEMME 2. — *Pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$, il existe un champ $w^{(k)}$ défini sur $A \setminus X$, totalement radial à chaque strate Y telle que $k \leq \mathrm{depth}_\Sigma(Y) \leq n$ sur un voisinage ouvert $U_Y^{(k)}$ de $T_X \cap Y$ dans A et tel que $w^{(k)}(\rho_X) > 0$ sur un voisinage ouvert $U_X^{(k)}$ de $T_X \cap \Big(\bigcup_{k \leq \mathrm{depth}_\Sigma(Y) \leq n} Y\Big)$ dans A.*

Démonstration. — On procède par récurrence descendante sur k.

Le cas $k = n$ résulte de la proposition 1.3.1.

Soit k un entier strictement plus petit que n. On fait alors l'hypothèse de récurrence suivante : *il existe un champ* $w^{(k+1)}$ *vérifiant les hypothèses de l'énoncé à l'ordre* $k+1$.

Soient Z une strate de profondeur k et Y une strate de profondeur au moins $k+1$ telle que $X < Y < Z$. Soient $U_Y^{(k+1)}$ le voisinage de $T_X \cap Y$ donné par l'hypothèse de récurrence, qu'on peut supposer de la forme $\rho_Y^{-1}([0,\epsilon[\,) \cap T_X$ pour un ϵ assez petit, et $U_Y^{(k+1)}(\frac{1}{2})$ un voisinage ouvert de $T_X \cap Y$ dans A de la forme $\rho_Y^{-1}([0,\frac{1}{2}\epsilon[\,) \cap T_X$. On remarquera que $U_Y^{(k+1)}(\frac{1}{2})$ est strictement inclus dans $U_Y^{(k+1)}$.

Soit U_Z le voisinage de $T_X \cap Z$, inclus dans $T_X \cap T_Z$ donné par la proposition 1.3.1 (avec $Y = Z$). Posons :

$$V_Z = U_Z \setminus \Big(\overline{\bigcup_{X<Y<Z} U_Y^{(k+1)}(\tfrac{1}{2})} \Big).$$

Soient maintenant :

- f_Z une fonction continue de A dans $[0,1]$ telle que $f_Z^{-1}(0) = A \setminus V_Z$;
- g_Z une fonction du même type telle que

$$g_Z^{-1}(0) = A \setminus \bigcup_{X<Y<Z} U_Y^{(k+1)}.$$

Le champ

$$w^{(k)} = f_Z \widetilde{w}_Z + g_Z w^{(k+1)}$$

(où $\widetilde{w}_Z$ est donné par la proposition 1.3.1) convient car il est totalement radial aux strates Y sur $\bigcup_{X<Y<Z} U_Y^{(k+1)}(\frac{1}{2})$, totalement radial à X sur chaque U_Y et sur V_Z, et totalement radial à Z sur V_Z et sur $U_Z \cap \Big(\bigcup_{X<Y<Z} U_Y^{(k+1)} \Big)$ par la proposition 1.3.1 et la convexité de l'ensemble des champs de vecteurs totalement radiaux. Pour compléter la récurrence, on peut poser :

$$\begin{cases} U_Y^{(k)} = U_Y^{(k+1)}(\frac{1}{2}) & \text{si } X < Y < Z, \\ U_Z^{(k)} = U_Z, \\ U_X^{(k)} = V_Z \cup \Big(\bigcup_{X<Y<Z} U_Y^{(k+1)} \Big). \end{cases}$$

□

Suite de la preuve du théorème 1. — Soit $w^{(0)}$ le champ donné par le lemme 1.3.2 avec $k = 0$. Il reste à recoller ce champ avec v. L'ensemble $X \cup \Big(\bigcup_{X<Z} U_Z^{(0)}\Big)$ est un voisinage ouvert de X dans A; soient T_X^1 un voisinage fermé de X inclus dans l'ouvert

$$X \cup \Big(\bigcup_{X<Z} U_Z^{(0)}\Big)$$

(X est fermé) et α_1, α_2 deux fonctions continues de A dans $[0,1]$ comme précédemment telles que :

$$\alpha_1^{-1}(0) = A \setminus T_X, \quad \alpha_2^{-1}(0) = T_X^1.$$

Alors le champ

$$w = \alpha_1 w^{(0)} + \alpha_2 v$$

est « totalement radial » sur A, avec $T'_X = \overset{\circ}{T_X^1}$, mais n'est pas défini sur X. Soit donc u un champ de vecteurs C^∞ à singularités isolées sur X (qui existe en vertu du théorème de transversalité élémentaire de Thom). Posons enfin :

$$v_1(x) = \begin{cases} w(x) & \text{si } x \in A', \\ u(x) & \text{si } x \in X. \end{cases} \qquad \square$$

Le résultat suivant, dû à K. Bekka, est un conséquence de l'existence de fonctions tapissantes régulières [Bekk2].

Proposition 2 (K. Bekka). — *Soit B un espace (C)-régulier. Alors il existe un champ totalement radial sur B.*

Corollaire 1. — *Soient A un ensemble stratifié abstrait, B une réunion de strates et v un champ (stratifié) sur B tels que si $X \in \Sigma$ et $X \subseteq \overline{B}$ alors il existe un voisinage U de X dans A tel que $v(\rho_X) > 0$ sur $U \cap B \setminus X$. Alors il existe un champ w totalement radial sur A et prolongeant v.*

Démonstration. — D'après le théorème 1.3.1 il existe un champ radial v_1 sur A. On pose alors :

$$w(x) = \begin{cases} v(x) & \text{si } x \in B, \\ v_1(x) & \text{sinon.} \end{cases} \qquad \square$$

1.4. Stabilité des champs totalement radiaux.

On démontre ici la stabilité des champs totalement radiaux.

Pour chaque strate X de Σ, l'ensemble des sections C^∞ du fibré tangent à X muni de la C^∞-topologie de Whitney et noté $\Gamma(X)$ est un espace vectoriel muni d'une topologie. Considérons

$$\Gamma(A) = \prod_{X \in \Sigma} \Gamma(X)$$

le produit direct des ensembles de champs de vecteurs. Munissons $\Gamma(A)$ de la topologie dont une sous-base est constituée par les produits d'ouverts des différents $\Gamma(X)$. Cette topologie est évidemment plus fine que la topologie produit.

Proposition 3. — *L'ensemble*

$$\mathcal{R}(A) = \{v \in \Gamma(A) \mid v \textit{ est totalement radial}\}$$

est ouvert dans $\Gamma(A)$.

Démonstration. — Pour un champ totalement radial v donné, on va montrer qu'il existe dans $\Gamma(A)$ une boule de rayon δ (dépendant de v), telle que si w est un champ de vecteurs stratifié proche d'ordre δ de v alors w appartient à $\mathcal{R}(A)$.

Soit $Y \in \Sigma$, considérons $\{X \in \Sigma \mid X < Y\}$. Pour chaque strate X telle que $X < Y$, soit T'_X le voisinage de radialité de v.

Posons $F = A \setminus \bigcup_{X<Y} T'_X$. C'est un fermé de A tel que $F \cap (\overline{Y} \setminus Y) = \emptyset$. Par normalité, il existe deux ouverts V et V' dans A tels que :

$$F \subset V, \quad \overline{Y} \setminus Y \subset V', \quad \overline{V} \cap \overline{V'} = \emptyset.$$

Remarquer qu'on a alors $\overline{V} \subset A \setminus \overline{V'}$ et que la famille $(T'_X)_{X \in \Sigma}$ peut être choisie localement finie.

Soit $y \in Y$.

• Si y est dans $\overline{V}$, prenons un voisinage ouvert relativement compact K_y de y dans Y qui ne rencontre pas V'.

• Si y n'est pas dans $\overline{V}$, prenons un voisinage ouvert relativement compact K_y de y dans Y ne rencontrant qu'un nombre fini de T'_X et inclus dans $(A \setminus \overline{V}) \cap \bigcap_{\{X<Y \mid y \in T'_X\}} T'_X$.

Comme Y est paracompact et que $Y \subseteq \bigcup_{y \in Y} K_y$, il existe un recouvrement localement fini $(\widetilde{K}_y)_{y\in\widetilde{Y}}$ de Y par des fermés (donc des compacts) plus fin que $(K_y)_{y\in Y}$.

Pour chaque $y \in \widetilde{Y}$, posons :

$$\delta_y = \begin{cases} 1 & \text{si } y \in \overline{V} \cap \widetilde{Y}, \\ \dfrac{1}{2} \min\limits_{\{X<Y \mid y\in T'_X\}} \inf\limits_{\widetilde{K}_y} \dfrac{v(\rho_X)}{\|\operatorname{grad} \rho_X\|} & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a alors $\delta_y > 0$ pour tout $y \in \widetilde{Y}$ car $(T'_X)_{X\in\Sigma}$ est localement fini.

Si Y est une strate de profondeur maximale, posons $\delta_Y \equiv 1$ sur Y. Sinon, soit δ_Y une fonction continue et strictement positive sur Y telle que $\delta_Y(z) < \delta_y$ si $z \in \widetilde{K}_y$. Considérons enfin $\delta = \sum\limits_{Y\in\Sigma} \delta_Y$, où l'on a prolongé δ_Y par 0 à l'extérieur de Y.

Soit $w \in \Gamma(A)$ tel que $\|w - v\| < \delta$.

Soient $X, Y \in \Sigma$ telles que $X < Y$. En un point $y \in Y \cap T'_X$, on a :

$$\begin{aligned} w(\rho_X) &= (w - v)(\rho_X) + v(\rho_X) \\ &\geq v(\rho_X) - \|w - v\| \cdot \|\operatorname{grad} \rho_X\| \\ &\geq v(\rho_X) - \delta \|\operatorname{grad} \rho_X\| \\ &\geq v(\rho_X) - \tfrac{1}{2} v(\rho_X) \\ &> 0. \end{aligned}$$

Donc w est totalement radial et $w \in \mathcal{R}(A)$. Finalement $\mathcal{R}(A)$ est ouvert. □

1.5. Singularités.

THÉORÈME 2. — *Soit (A, Σ) un ensemble stratifié abstrait. Il existe un champ de vecteurs (stratifié) C^∞ totalement radial à singularités isolées sur A.*

Démonstration. — D'après la proposition 1.4.3, $\mathcal{R}(A)$ est ouvert dans $\Gamma(A)$. D'après le théorème de transversalité élémentaire de Thom, les champs C^∞ à singularités isolées forment un ouvert dense de $\Gamma(X)$ pour tout X de Σ qu'on peut noter $\mathcal{S}(X)$. Soit $\mathcal{S}(A)$ le produit des $\mathcal{S}(X)$. C'est un ouvert dense de $\Gamma(A)$. Donc $\mathcal{S}(A) \cap \mathcal{R}(A)$ est un ouvert non vide de $\Gamma(A)$, de sorte qu'il existe un champ totalement radial de classe C^∞ sur A à singularités isolées. □

Il est clair que si le champ v du corollaire 1.3.1 est à singularités isolées alors w peut aussi être choisi à singularités isolées.

1.6. Champs totalement radiaux continus.

On se place maintenant dans un contexte plongé *i.e.* $A \hookrightarrow M^m$, où M^m est une variété lisse (C^∞) de dimension m. On suppose que A est muni d'une stratification (C)-régulière (*cf.* [Bekk1]). K. Bekka a montré que sous ces hypothèses A peut être muni d'une structure d'espace stratifié abstrait où les tubes sont des ouverts de M^m et les applications π_X, ρ_X sont de classe C^1 dans M^m pour tout X de Σ. De plus les ρ_X sont les applications de Thom définissant la (C)-régularité de A.

DÉFINITION 5. — *Un champ de vecteurs stratifié* continu *sur A est un champ stratifié qui est une section continue du fibré $T_A M$, restriction du fibré tangent TM à A.*

K. Bekka a montré dans [Bekk2] le théorème suivant de relèvement continu et contrôlé de champ de vecteurs sur un espace (C)-régulier (*via* les fonctions tapissantes régulières) :

THÉORÈME 3 [Bekk2]. — *Pour toute submersion contrôlée $g : M^m \to N^n$ et tout champ de vecteurs C^∞ η sur N^n, il existe un champ de vecteurs continu contrôlé ξ sur (A, Σ), tel que $g_*(\xi) = \eta \circ g$.*

M. Shiota a démontré dans [Shio] un théorème analogue pour les espaces (B)-réguliers. Nous signalons d'autre part que la condition (A) de Whitney n'est pas suffisante pour assurer l'existence d'un relèvement *continu* et *contrôlé* car elle n'entraîne (par exemple) pas que l'espace soit topologiquement localement trivial.

DÉFINITION 6. — *Soit (A, Σ) un ensemble stratifié abstrait. On dit qu'une strate X de Σ est* maximale *(resp.* minimale*) si et seulement si elle est de profondeur maximale (resp. nulle).*

Sous les hypothèses de (C)-régularité et muni du résultat de K. Bekka, nous pouvons renforcer les conclusions du théorème 1.3.1.

PROPOSITION 4. — *Soit (A, Σ) un espace (C)-régulier, il existe un champ totalement radial continu sur A.*

Démonstration. — Il s'agit d'adapter la preuve du théorème 1.3.1 à cette situation. Il suffit de remplacer les fonctions continues $f, \beta, \ell, f_Z, g_Z, \alpha_1, \alpha_2 : A \to [0,1]$ qu'on utilise tout au long de la preuve du théorème 1 par des fonctions C^∞ de M^m dans $[0,1]$ et de relever les champs avec le théorème 1.6.3 de K. Bekka.

Il reste cependant un point à modifier : il faut ajouter une étape en fin de preuve pour obtenir la continuité du champ sur X (strate maximale).

Notons toujours u un champ à singularités isolées sur X et relevons ce champ sur le voisinage de radialité T'_X de X par π_X en un champ qu'on note ξ. En restreignant les tubes de contrôle si nécessaire, on peut supposer que ξ est contrôlé dans les $T'_Y \cap T'_X$ pour $Y \in \Sigma$. Ensuite, recollons ξ au champ totalement radial w déjà défini avec des fonctions C^∞ de la façon suivante : soit T^1_X un voisinage ouvert de X inclus dans T'_X. Soient α_1, α_2 deux fonctions C^∞ de M^m dans $[0,1]$ telles que :

$$\alpha_1^{-1}(0) = M^m \setminus T^1_X, \quad \alpha_2^{-1}(0) = X.$$

Alors $v_1 = \alpha_1 \xi + \alpha_2 w$ est le champ recherché sur A (C^∞ sur les strates). □

Le relèvement de u sur T'_X est ici à rapprocher d'un prolongement par parallélisme comme le fait M.-H. Schwartz.

THÉORÈME 4. — *Soit (A, Σ) un espace (C)-régulier. Alors il existe un champ totalement radial continu à singularités isolées sur A.*

Démonstration. — Soit v le champ donné par la proposition 1.6.4. On va perturber ce champ sur chaque strate de façon à le rendre à singularités isolées.

Si X est maximale alors par construction v n'a que des singularités isolées sur X.

Supposons par récurrence que v n'ait que des zéros isolés sur le squelette $\{Y \in \Sigma \mid \mathrm{depth}_\Sigma(Y) \geq 1\}$ et soit X une strate minimale (on a utilisé le théorème 1.6.3 pour assurer la continuité du champ). Sans perte de généralité, on peut supposer que X est l'unique strate minimale. Utilisons la construction de la proposition 1.4.3. Soit $\eta_X \in \Gamma(X)$ une perturbation assez petite de v_X telle que $\|\eta_X\| < \delta_X$ et $\eta_X + v_X$ soit à singularités isolées. Par construction, on a encore $(v_X + t\eta_X)(\rho_Y) > 0$ sur $T'_Y \cap X$ pour tout $t \in [0,1]$ et pour toute Y telle que $Y < X$. Donc le champ $v_X + t\eta_X$ n'a pas de singularité dans tout l'ouvert $\bigcup_{Y<X} T'_Y \cap X$.

Soit maintenant $f : M^m \to [0,1]$ telle que :

$$f^{-1}(0) = F, \quad f^{-1}(1) = A \setminus \bigcup_{Y<X} T'_Y.$$

Le champ $w = v + f\eta_X$ convient. □

Ce résultat est similaire (mais non identique) au théorème 3.1.5 et au corollaire du théorème 6.1.1 de [Schw6] qui sont énoncés dans un cadre Whitney-stratifié.

Présentons maintenant le résultat de prolongement suivant :

COROLLAIRE 2. — *Soient (A, Σ) un espace (C)-régulier, B une partie fermée de A réunion de strates de Σ, et v un champ totalement radial continu sur B (pas nécessairement à singularités isolées). Pour toute strate X de $\Sigma \cap B$, soit U_X un ouvert de X tel que $\overline{U_X}^A \subset X$. Alors il existe un champ totalement radial continu sur A, w tel que $w_{|U_X} = v_{|U_X}$ pour toute strate $X \in \Sigma \cap B$.*

Démonstration. — Notons Σ^B la stratification de B induite par Σ.

On raisonne par récurrence sur $\mathrm{depth}(\Sigma^B)$.

Si $\mathrm{depth}(\Sigma^B) = 0$, on applique la méthode de preuve de la proposition 1.6.4 et dans ce cas $w_{|B} = v$.

Supposons alors le résultat démontré pour $\mathrm{depth}(\Sigma^B) \leq d$. Si Σ^B est de profondeur $d+1$, soit X une strate minimale de Σ^B, X est ouverte dans B donc $B' = B \setminus X$ est fermé dans A. On peut supposer que X est l'unique strate vérifiant cette propriété. Appliquons l'hypothèse de récurrence à B' et $v' = v_{|B'}$. On obtient alors un champ w' totalement radial sur A et « prolongeant » v'.

Relevons maintenant v_X sur T_X (dans A) *via* π_X en un champ w_X. Le relèvement est continu contrôlé et un calcul analogue à celui effectué au lemme 1.3.1 montre que w_X est totalement radial aux strates Y ($Y < X$) telles que $\mathrm{depth}_{\Sigma^B}(Y) \geq 1$. En restreignant si nécessaire T_X, on peut supposer w_X contrôlé dans T_X tout entier. Ensuite, annulons-le en dehors de T_X : on obtient un champ continu sur A (on a supposé $T_X \cap Y = \emptyset$ si $Y < X$). Par une méthode analogue à celle utilisée dans la preuve du théorème 1.6.4, on peut annuler w' sur un voisinage bien choisi de $\overline{U_X}^A$, en le multipliant par une fonction positive convenable; le champ résultant est encore noté w'. Faisons la somme de ces deux champs et posons $w = w' + w_X$. □

COROLLAIRE 3. — *Soient (A, Σ) un espace (C)-régulier, B une partie fermée de A réunion de strates de Σ et v un champ totalement radial continu sur B. Notons :*

$$\mathrm{Sing}(v) = \{x \in B \mid v(x) = 0\}.$$

Alors il existe un champ totalement radial continu sur A, w tel que :

$$\begin{cases} \operatorname{Sing}(w) \cap U_B = \operatorname{Sing}(v), \\ w_{|U_X} = v_{|U_X} \textit{pour toute strate } X \textit{ de } B \end{cases}$$

où

$$\operatorname{Sing}(w) = \{x \in A \mid w(x) = 0\},$$

U_B désigne un voisinage ouvert de B dans A et U_X un voisinage ouvert de $\operatorname{Sing}(v) \cap X$ *dans X pour toute strate X de B.*

Démonstration. — Soit U_X un voisinage ouvert de $\operatorname{Sing}(v) \cap X$ dans X tel que $\overline{U_X}^A \subset X$ pour tout X de Σ^B. On applique alors le corollaire 1.6.2 aux ouverts U_X. L'existence de U_B s'ensuit car w est totalement radial, donc n'a pas de singularité près de la frontière. □

COROLLAIRE 4. — *Si v est à singularités isolées alors w peut être construit à singularités isolées.*

Démonstration. — C'est immédiat en appliquant le corollaire 1.6.3. □

Le corollaire précédent est analogue au lemme 3.1.2 de [Schw6] (mais dans un contexte un peu plus général).

PROPOSITION 5. — *Soient (M, Σ) une variété lisse munie d'une stratification (C)-régulière, v un champ totalement radial continu sur M et $z \in X \subset M$ une singularité isolée de v appartenant à une strate X de Σ. Alors* $\operatorname{Ind}(v, z) = \operatorname{Ind}(v_{|X}, z)$.

Démonstration. — Une méthode similaire à celle de J. Milnor [Miln] s'applique. Si z est un zéro non dégénéré alors le résultat est immédiat. Sinon, on perturbe v localement sur X de telle sorte que les singularités soient non dégénérées. □

Le résultat précédent correspond au théorème de conservation des indices 3.3.1 a) de [Schw6].

2. Une démonstration d'un théorème de Poincaré-Hopf singulier.

2.1. Un théorème de Poincaré-Hopf singulier.

Soit A un sous-ensemble compact d'une variété lisse M^m. On suppose que A est muni d'une stratification Σ (C)-régulière. K. Bekka a montré dans [Bekk1] que A peut alors être muni d'une structure d'ensemble stratifié abstrait. D'autre part, la stratification Σ' obtenue en ajoutant aux strates de Σ, les composantes connexes de $M^m \setminus A$, constitue une stratification (C)-régulière de M^m.

THÉORÈME 1. — *Soit A un sous-ensemble compact d'une variété lisse M, A étant muni d'une stratification (C)-régulière Σ. Notons Σ' la stratification (C)-régulière induite sur M telle que $M^m \setminus A$ soit réunion finie de strates ouvertes $(X_i)_{1\leq i\leq n}$. Alors pour tout champ de vecteurs continu v, totalement radial sur A à singularités isolées on a :*

$$\chi(A) = \sum_{v(x)=0} \operatorname{Ind}(v_{|X}, x)$$

où $\chi(A)$ désigne la caractéristique d'Euler-Poincaré homologique de A et $\operatorname{Ind}(v_{|X}, x)$ l'indice du champ de vecteurs $v_{|X}$ au zéro isolé $x \in X$, pour X strate de Σ' dans A.

Démonstration. — Comme v est totalement radial sur A et que A est un fermé réunion de strates, il existe un champ totalement radial continu (stratifié) w sur M^m tel que $w = v$ sur un voisinage des singularités de v (corollaire 1.6.4). Donc on peut supposer que w est sans singularité sur $T'_X \setminus X$ pour toute strate X de A, où l'on a noté T'_X un voisinage de radialité de X dans M^m (que l'on peut choisir relativement compact). Soit f_i une fonction tapissante régulière (voir [Bekk2]) définie sur un voisinage de la frontière ∂X_i de X_i (qui est C^∞ sur cette strate) pour $1 \leq i \leq n$. Pour des ϵ_i assez petits, les hypersurfaces de niveau $f_i^{-1}(\epsilon_i)$ (disjointes) des f_i sont incluses dans la réunion des voisinages de radialité $\bigcup_{Y\in\Sigma} T'_Y$; notons N la variété lisse à bord $\bigcup_{i=1}^{n} f_i^{-1}(\epsilon_i)$ contenant A. La restriction $w_{|N}$ du champ totalement radial w est alors un champ de vecteurs continu sur N, sortant le long du bord ∂N et sans zéro sur le bord (rappelons que le champ est C^∞ sur $M^m \setminus A$). En effet, la construction de K. Bekka (voir [Bekk2]) entraîne que le gradient $\operatorname{grad} f_X$ est combinaison linéaire à coefficients positifs des $\operatorname{grad}\rho_Y$ avec $Y < X$ pour toute strate X de Σ'. Par application du théorème de Poincaré-Hopf ordinaire pour les champs sortants sur une variété lisse à bord on a :

$$\chi(N) = \sum_{w(x)=0} \operatorname{Ind}(w_{|N}, x).$$

D'autre part, comme A peut être muni d'une structure d'ensemble stratifié abstrait d'après [Bekk1], A est triangulable (voir [Gore1], [John], [Vero1]), et donc A est homéomorphe à un polyèdre compact. Or un polyèdre compact est un A.N.R. compact (grâce à un résultat classique sur les polyèdres, voir [Brow], th. 2, p. 39). Par conséquent, si les tubes T'_X ont été choisis assez petits, il existe une rétraction continue $r : N \to A$.

Soit $h : N \hookrightarrow \mathbb{R}^{2m}$ un plongement C^∞ de N dans $\mathbb{R}^{2m}$. Notons T_N le fibré normal à $h(N)$ dans $\mathbb{R}^{2m}$ (voir par exemple [Hirs]) et p la projection de ce fibré. Soit aussi $\pi : N \times [0,1] \to N$, une isotopie ambiante de N telle que $\pi(N,1) = N'$, où N' désigne un voisinage assez petit de A dans N pour que $(1-s)h(y) + sh \circ r(y) \in T_N$ pour $s \in [0,1]$ et $y \in N'$. Posons $\pi_1 = \pi(\,\cdot\,,1)$. Considérons alors l'application continue :

$$\varphi : N \times [0,2] \longrightarrow N$$

définie par

$$(x,t) \mapsto \begin{cases} \pi(x,t) & \text{si } 0 \le t \le 1, \\ h^{-1} \circ p\big\{(2-t)h \circ \pi_1(x) & \\ \qquad\qquad +(t-1)h \circ r \circ \pi_1(x)\big\} & \text{si } 1 < t \le 2. \end{cases}$$

Dès lors, φ constitue une rétraction par déformation de N sur A; donc $\chi(N) = \chi(A)$. De plus comme w est totalement radial, on a par conservation des indices (proposition 1.6.5) : pour tout zéro x du champ v dans A, $\mathrm{Ind}(w,x) = \mathrm{Ind}(v_{|X},x)$ où X est la strate de A contenant x.

Finalement : $\chi(A) = \sum_{v(x)=0} \mathrm{Ind}(v_{|X},x)$. $\square$

2.2. Une généralisation aux ensembles stratifiés abstraits.

M. Teufel [Teuf], H. Natsume [Nats] et A. Verona [Vero2] ont montré que tout ensemble stratifié abstrait de dimension finie n, peut être plongé de manière (B)-régulière (*i.e.* l'image du plongement stratifié peut être munie d'une stratification (B)-régulière) dans un espace $\mathbb{R}^N$ pourvu que N soit assez grand. H. Natsume et A. Verona ont montré que $N = 2n+1$ convient; cette valeur est d'ailleurs minimale. Récemment, L. Noirel a montré dans [Noir] que l'on peut exiger la (W)-régularité (*cf.* [Verd]) et même la semi-algébricité des strates de l'image quand l'e.s.a. est compact.

En utilisant ce résultat, nous allons montrer que l'on peut étendre le théorème précédent aux ensembles stratifiés abstraits. Le champ ne sera évidemment plus continu sur A, mais la restriction du champ à chaque strate le sera.

THÉORÈME 2. — *Soient A un ensemble stratifié abstrait compact et v un champ totalement radial sur A, à singularités isolées. Alors on a :*

$$\chi(A) = \sum_{v(x)=0} \operatorname{Ind}(v_{|X}, x).$$

Démonstration. — Notons h un plongement stratifié (B)-régulier de A dans $\mathbb{R}^N$. Comme $h(A)$ peut être muni d'une stratification (B)-régulière les composantes connexes de $\mathbb{R}^N \setminus h(A)$ peuvent être ajoutées aux strates de $h(A)$ pour former une stratification (B)-régulière de $\mathbb{R}^N$. En particulier, $\mathbb{R}^N$ est muni d'une stratification (C)-régulière et $h(A)$ est réunion (finie) de strates. Le champ transporté $w = h_*(v)$ (sur chaque strate) est totalement radial relativement aux fonctions tubulaires $((h^{-1})^*(\rho_X))_{X\in\Sigma}$, mais n'est pas continu en général. Nous allons donc le modifier strate par strate sur l'image $h(A)$ de telle sorte qu'il le devienne. La méthode est similaire à celle utilisée dans le corollaire 1.6.2.

On fait une récurrence sur la profondeur de la stratification Σ de $h(A)$. Si $\operatorname{depth}(\Sigma) = 0$, il n'y a rien à prouver. Faisons l'hypothèse de récurrence que l'on peut changer w en un champ w' continu et totalement radial ayant mêmes singularités que w et mêmes indices que v quand $h(A)$ est compact de profondeur inférieure ou égale à n.

Soit maintenant $h(A)$ de profondeur $n+1$. En enlevant une strate minimale X (*i.e.* $\operatorname{depth}_\Sigma(X) = 0$), que l'on peut supposer unique, à $h(A)$, on obtient un espace A' compact de profondeur n, auquel on applique l'hypothèse de récurrence. Notons w' le champ obtenu sur A'. Il s'agit alors de recoller $w_{|X}$ à w'.

On procède maintenant par récurrence décroissante sur la profondeur des strates en commençant par une strate Y de profondeur maximale (que l'on peut supposer unique). Grâce au théorème de relèvement continu et contrôlé sur les espaces (C)-réguliers (*cf.* [Bekk2]), on peut relever par π_Y (rétraction contrôlée associée à Y), le champ $w'_{|Y}$ en un champ continu et contrôlé w''_Y sur un voisinage T_Y de Y dans $h(A)$. Le voisinage T_Y étant choisi de telle sorte qu'il ne contienne pas d'autres singularités que celles de $w'_{|Y}$ (les points singuliers d'un champ totalement radial « sont à l'intérieur » des strates). On annule alors ce champ relevé w''_Y en dehors de T_Y et on fait la somme des deux champs : $w' + w''_Y$ puis on change w' en $w' + w''_Y$. Ce champ est continu sur Y et encore totalement radial. On poursuit de la même manière pour les strates Z telles que $Y < Z < X$, la différence étant que le champ relevé (par π_Z) w''_Z sera totalement radial par rapport aux strates du dessous et contrôlé par rapport aux strates du dessus.

Le champ résultant w'' est totalement radial et continu sur $h(A)$, ses points singuliers sont les mêmes que ceux de w et les indices en ces points sont les mêmes que ceux de v. En effet, à chaque étape de la récurrence on ne modifie pas le champ dans un voisinage des singularités (dans la strate correspondante) de w et le champ final est totalement radial d'où le résultat par conservation des indices. On termine en appliquant le théorème 2.1.1 à w''. □

PROPOSITION. — *Soient A un ensemble stratifié abstrait compact et v un champ contrôlé à singularités isolées sur A. Alors on a :*

$$\chi(A) = \sum_{v(x)=0} \operatorname{Ind}(v_{|X}, x).$$

Démonstration. — Il suffit d'ajouter une composante totalement radiale à v, le long de la frontière des strates, de telle sorte que le champ résultant v' soit totalement radial sur A. Puis on applique le théorème 2.2.2 à v'. □

BIBLIOGRAPHIE

[Bekk1] K. BEKKA, (C)-régularité et trivialité topologique, Singularity theory and its applications, Warwick, 1989, Part I, p. 42-62, Lecture Notes in Math. 1462, Springer-Verlag Berlin, 1991.

[Bekk2] K. BEKKA, Continuous vector fields and Thom's isotopy theorems, Prépublication, Université de Rennes, 1992, 10 p.

[Bour] N. BOURBAKI, Éléments de mathématiques, Topologie générale, chap. 5 à 10, CCLS Diffusion, Paris, 1974.

[Brow] R.F. BROWN, The Lefschetz fixed point theorem, Scott, Foresman and Company, Glenview, Illinois London, 1971.

[BrSc] J.-P. BRASSELET et M.-H. SCHWARTZ, Sur les classes de Chern d'un ensemble analytique complexe, Caractéristique d'Euler-Poincaré, Séminaire E.N.S. 1978-1979, Astérisque 82-83 (1981), 93-147.

[Gore1] M. GORESKY, Triangulations of stratified objects, Proc. Amer. Math. Soc., vol. 72 (1978), 193-200.

[Gore2] M. GORESKY, Whitney stratified chains and cochains, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 267, n° 1 (1981), 175-196.

[Hirs] M.W. HIRSCH, Differential topology, Graduate Texts in Math. 33, Springer-Verlag New York, 1988.

[John] F.E.A. JOHNSON, On the triangulation of stratified sets and singular varieties, Trans. Amer. Math. Soc., 275, n° 1 (1983), 333-343.

[KiTr] H.C. KING and D. TROTMAN, Poincaré-Hopf theorems on stratified spaces, Prépublication de l'U.R.A. 225, 1993, 15 p.

[MacP] R. MACPHERSON, Chern classes on singular algebraic varieties, Annals of Math., vol. 100 (1974), 423-432.

Math1] J.N. MATHER, Notes on topological stability, Harvard University, 1970, 75 p.

Math2] J.N. MATHER, Stratifications and mappings, Dynamical systems, M.M. Peixoto ed., Academic Press, New York, 1973, 195-232.

[Miln] J. MILNOR, Topology from the differentiable viewpoint, University Press of Virginia, Charlottesville, 1965.

[Nats] H. NATSUME, The realization of abstract stratified sets, Kodai Math. J., n° 3 (1980), 1-7.

[Noir] L. NOIREL, Les stratifications de Whitney coniques sont (W)-régulières, manuscrit, 1993.

[Schw1] M.-H. SCHWARTZ, Classes caractéristiques définies par une stratification d'une variété complexe, C. R. Acad. Sciences Paris, t. 260 (1965), 3262-3264.

[Schw2] M.-H. SCHWARTZ, Classes caractéristiques définies par une stratification d'une variété complexe, C. R. Acad. Sciences Paris, t. 260 (1965), 3535-3537.

[Schw3] M.-H. SCHWARTZ, Classes obstructrices d'un sous-ensemble analytique complexe d'une variété analytique complexe, Publication de l'Université de Lille, 1965.

[Schw4] M.-H. SCHWARTZ, Champs radiaux et préradiaux associés à une stratification, C. R. Acad. Sciences Paris, t. 303, n° 6 (1986), 239-241.

[Schw5] M.-H. SCHWARTZ, Une généralisation du théorème de Hopf sur les champs sortants, C. R. Acad. Sciences Paris, t. 303, n° 7 (1986), 307-309.

[Schw6] M.-H. SCHWARTZ, Champs radiaux sur une stratification analytique, Travaux en cours, Hermann, Paris, 1991.

[Schw7] M.-H. SCHWARTZ, Un problème d'homologie dans l'espace des vecteurs tangents à une stratification, C. R. Acad. Sciences Paris, t. 314 (1992), 833-836.

[Shio] M. SHIOTA, Piecewise linearization of real analytic functions, R.I.M.S. 20, Kyoto University, 1984, 727-792.

[Teuf] M. TEUFEL, Abstract prestratified sets are (B)-regular, J. Diff. Geom., n° 16 (1981), 529-536,.

[Thom] R. THOM, Ensembles et morphismes stratifiés, Bull. Amer. Math. Soc., 75 (1969), 240-284.

[Verd] J.-L. VERDIER, Stratification de Whitney et théorème de Bertini-Sard, Inventiones Math. 36 (1976), 295-312.

[Vero1] A. VERONA, Triangulation of stratified fibre bundles, Manuscripta Math., 30 (1980), 425-445.

[Vero2] A. VERONA, Embeddings of abstract stratifications, Prépublication, 1981, 19 p.

[Vero3] A. VERONA, Stratified mappings-Structure and triangulability, Lecture Notes in Math. 1102, Springer-Verlag Berlin, 1984.

Manuscrit reçu le 20 juin 1994,
révisé le 15 janvier 1995,
accepté le 23 juin 1995.

Stéphane SIMON,
Université de Savoie
Laboratoire de Mathématiques
Campus scientifique
F-73376 Le-Bourget-du-Lac Cedex.
simon@univ-savoie.fr.