

ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

PHILIPPE DU BOIS
OLLIVIER HUNAUT

Classification des formes de Seifert rationnelles des germes de courbe plane

Annales de l'institut Fourier, tome 46, n° 2 (1996), p. 371-410

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1996__46_2_371_0

© Annales de l'institut Fourier, 1996, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

CLASSIFICATION DES FORMES DE SEIFERT RATIONNELLES DES GERMES DE COURBE PLANE

par

P. DU BOIS et O. HUNAUT

0. Introduction.

0.1. — Soit $f : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ un germe de fonction holomorphe ayant une singularité isolée en l'origine. Si ε et η sont des réels positifs, on note B_η^0 le disque ouvert de rayon η et de centre 0 dans \mathbb{C} , et S_ε^{2n+1} (resp. B_ε^{2n+2}) la sphère (resp. la boule) de rayon ε , centrée en l'origine de \mathbb{C}^{n+1} . On pose :

$$Y = S_\varepsilon^{2n+1} \setminus (f^{-1}(B_\eta^0) \cap S_\varepsilon^{2n+1}).$$

D'après J. Milnor, l'application $\phi = f/|f|$, de Y sur S^1 , est une fibration localement triviale, qui ne dépend pas de ε et η quand $\eta \ll \varepsilon \ll 1$. Soit F une fibre de ϕ ; on dit que F est la *fibre de Milnor de f* . Le bord de F est isotope à l'entrelacs

$$K(f) = S_\varepsilon^{2n+1} \cap f^{-1}(0).$$

Le *type topologique de f* est la classe d'homéomorphismes conservant l'orientation de la paire $(B_\varepsilon^{2n+2}, f^{-1}(0) \cap B_\varepsilon^{2n+2})$. Milnor a montré que l'entrelacs de f détermine le type topologique de f . De plus, F a le type d'homotopie d'un bouquet de n -sphères et est difféomorphe à $f^{-1}(\eta) \cap B_\varepsilon^{2n+2}$, voir [Mi1].

Soit ν le champ de vecteurs normal orienté à F dans S_ε^{2n+1} et $i_+ : F \rightarrow S_\varepsilon^{2n+1} \setminus F$ l'application définie par $i_+(P) = P + \alpha\nu(P)$ pour un

petit réel positif α et P dans F . La *forme de Seifert* $A(f)$ de $K(f)$ est la forme bilinéaire sur $H_n(F, \mathbb{Z})$ définie, pour tout u et v dans $H_n(F, \mathbb{Z})$ par

$$A(f)(u, v) = \text{Lk}(u, i_+(v))$$

où Lk est le nombre d'enlacement dans S^{2n+1} .

Les propriétés classiques de la forme de Seifert sont :

- $A(f)$ est unimodulaire ;
- la forme d'intersection $S(f)$ sur $H_n(F, \mathbb{Z})$ est donnée par

$$S(f) = A(f) + (-1)^n A^T(f) ;$$

- l'endomorphisme h_* induit par la monodromie de la fibration est donné par

$$h_* = (-1)^{n+1} A(f)^{-1} A^T(f) ;$$

- le polynôme caractéristique de la monodromie est

$$\Delta(f)(t) = \pm \det(tA(f) + (-1)^n A^T(f)).$$

En posant $tu = h_*(u)$ pour tout cycle u , on munit $H_n(F, \mathbb{Z})$ d'une structure de $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -module. Les relations ci-dessus entre $A = A(f)$, $S = S(f)$ et h_* entraînent que pour u et v dans $H_n(F, \mathbb{Z})$, nous avons :

$$S(u, v) = A(u, (1-t)v) = A(u, v) + (-1)^n A(v, u).$$

Rappelons que deux formes bilinéaires A_1 et A_2 définies sur des \mathbb{Z} -modules libres M_1 et M_2 de rang respectif n_1 et n_2 sont *Witt-équivalentes* si $A_1 \oplus (-A_2)$ est identiquement nulle sur un sous-module N de $M_1 \oplus M_2$ de rang $\frac{1}{2}(n_1 + n_2)$; on appelle *métaboliseur* un tel sous-module.

D'après A. Durfee [Du], théorème 3.1, des résultats de M. Kervaire et J. Levine entraînent que pour $n \geq 3$, la classe d'isomorphisme (sur \mathbb{Z}) de $A(f)$ détermine le type topologique de f . De plus, Kervaire [Ke], th. 2 et Levine [Le], « the main theorem » ont également montré que si $K(f)$ est sphérique (c'est-à-dire que $K(f)$ est homéomorphe à une sphère, ce qui a lieu si et seulement si $\Delta(f)(1) = \pm 1$), alors la classe de Witt-équivalence de $A(f)$ détermine le nœud $K(f)$ à cobordisme près.

0.2. — Dans [DM2] F. Michel et le premier auteur donnent une condition suffisante pour que les formes de Seifert rationnelles associées à deux germes de courbe plane f_1 et f_2 soient Witt-équivalentes, et dans [DM3] ils donnent une condition suffisante pour que les formes de

Seifert entières $A(f_1)$ et $A(f_2)$ soient isomorphes, sous certaines hypothèses relatives à la monodromie. Dans les deux cas, une liste de données calculées à partir de l'arbre de désingularisation du germe permet de déterminer la forme de Seifert à isomorphisme près [DM3], th. 4.6 ou prop. 4.8 ou à Witt-équivalence près [DM2], th. 5.1. On rappelle que le type topologique d'un germe de courbe plane est caractérisé par son arbre de désingularisation.

Nous complétons ici ces études en donnant une condition nécessaire et suffisante pour que les formes de Seifert rationnelles associées à des germes de courbe plane soient isomorphes (resp. Witt-équivalentes), en termes d'un ensemble complet d'invariants déterminés à partir du type topologique du germe. Le problème de la classification des formes de Seifert entières en termes d'un ensemble complet d'invariants semble pour l'instant hors d'atteinte, dans la mesure où l'on ne connaît pas d'ensemble complet d'invariants pour les formes bilinéaires entières.

La liste des invariants comporte d'une part les invariants que l'on peut calculer avec l'homologie réelle,

(i) le nombre de blocs de Jordan de taille 1 et 2 associés à chaque valeur propre;

(ii) les signatures équivariantes associées aux valeurs propres, déjà étudiées par W. Neumann [Ne], voir aussi Schrauwen-Steenbrink-Stevens [SSS]; et, d'autre part, de nouveaux invariants, que nous définirons en 2.12;

(iii) pour chaque polynôme cyclotomique $\phi_m(t)$ (avec $m > 2$) divisant le polynôme caractéristique $\Delta(f)$ et donnant lieu à un ou plusieurs blocs de Jordan de taille 1 (resp. 2), un invariant d_m^1 (resp. d_m^2) élément de $\mathbb{Q}[t]/\phi_m(t)$, bien défini à multiplication par $u(t)u(t^{-1})$ près, où $u(t) \in \mathbb{Q}[t]$;

(iv) la classe d'isomorphisme de la forme quadratique définie positive S_2^2 induite par la forme d'intersection S sur le quotient

$$\ker(\phi_2^2(t); H_1(F, \mathbb{Q})) / \ker(\phi_2(t); H_1(F, \mathbb{Q}))$$

et enfin,

(v) la classe d'isomorphisme de la forme quadratique définie négative associée à la restriction de la forme de Seifert au sous-espace $\ker(t - 1)$ de $H_1(F, \mathbb{Q})$ fixe par la monodromie.

En application, nous donnons de nouveaux exemples de nœuds algébriques (de dimensions supérieures) cobordants et non isotopes. Contrairement aux exemples donnés dans [DM2], la monodromie associée à ces nœuds algébriques est d'ordre fini.

Nous noterons dorénavant A ou $A(f)$ (resp. S ou $S(f)$) la forme de Seifert (resp. la forme d'intersection) rationnelle (sur $H_1(F, \mathbb{Q})$), et $A_Z(f)$ la forme de Seifert entière.

0.3. — Le plan de ce travail est le suivant.

Dans la section 1, nous utilisons la filtration monodromique (ou filtration par le poids) sur l'homologie de la fibre de Milnor pour réduire la question à un problème de classification sur chaque gradué de cette filtration et sur le sous-espace $\ker(t - 1)$ laissé fixe par la monodromie, voir les théorèmes 1.7 et 1.12.

Dans la section 2, nous traduisons le problème en problème de classification des formes hermitiennes sur les extensions cyclotomiques de \mathbb{Q} en utilisant le dictionnaire établi par Milnor dans [Mi2], voir les théorèmes 2.13 et 2.16.

La section 3 est consacrée au calcul effectif des invariants; on utilise l'interprétation géométrique de la filtration par le poids et la description de la fibre de Milnor qui sont à la base des articles [DM2] et [DM3].

La section 4 donne un exemple de nœuds algébriques distingués par leurs formes de Seifert entières mais pas par leurs formes de Seifert rationnelles. On en déduit au théorème 4.2 des exemples de nœuds algébriques cobordants et non isotopes dont la monodromie est d'ordre fini.

0.4. DÉFINITION. — *Dans ce travail, la signature d'une forme quadratique sur \mathbb{Q} ou \mathbb{R} , ou hermitienne sur \mathbb{C} , supposée non dégénérée, est la différence entre le nombre de termes positifs et le nombre de termes négatifs sur la diagonale, dans une base pour laquelle la matrice de cette forme est diagonale.*

1. Utilisation de la filtration monodromique.

1.1. — Soit : $f : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$ un germe de fonction holomorphe à singularité isolée; le théorème de la monodromie (Grothendieck-Brieskorn) assure que les valeurs propres de la monodromie sont des racines de l'unité. De plus, la taille maximale des blocs de Jordan est $n \times n$ pour la valeur propre 1 et $(n + 1) \times (n + 1)$ pour les autres valeurs propres, voir van Doorn-Steenbrink [DS] pour un résultat supplémentaire.

On appelle *exposant de la monodromie* un entier e tel que

$$(t^e - 1)^{n+1} H_n(F, \mathbb{Q}) = 0.$$

1.2. — Considérons le cas des germes de courbe plane ($n = 1$). On définit la filtration monodromique (ou filtration par le poids) sur l'homologie de la fibre de Milnor par les formules suivantes (ces formules ne dépendent pas de l'exposant e choisi) :

$$\begin{aligned} W_0 H_1(F, \mathbb{Q}) &= H_1(F, \mathbb{Q}), \\ W_{-1} H_1(F, \mathbb{Q}) &= \ker(t^e - 1), \\ W_{-2} H_1(F, \mathbb{Q}) &= \text{im}(t^e - 1) \oplus \ker(t - 1). \end{aligned}$$

Les gradués de la filtration W sont définis pour $p = 0$ ou -1 par la formule :

$$\text{gr}_p^W H_1(F, \mathbb{Q}) = W_p H_1(F, \mathbb{Q}) / W_{p-1} H_1(F, \mathbb{Q}).$$

L'égalité $h_* = A^{-1} A^T$ montre que la filtration W et les gradués associés sont définis en termes de la forme de Seifert.

1.3. — La forme de Seifert A n'est pas symétrique, mais l'orthogonal de $\ker(t - 1)$ pour A est bien défini car, pour tout x de $\ker(t - 1)$ et pour tout y de $H_1(F, \mathbb{Q})$, on a :

$$A(y, x) = A(y, tx) = A(x, y).$$

L'orthogonal à gauche de $\ker(t - 1)$ est donc égal à son orthogonal à droite.

PROPOSITION. — *Le $\mathbb{Q}[t, t^{-1}]$ -module $H_1(F, \mathbb{Q})$ se décompose en la somme directe orthogonale pour A :*

$$H_1(F, \mathbb{Q}) = \ker(t - 1) \oplus \text{im}(t - 1).$$

Démonstration. — Soit $\Lambda(t)$ le polynôme minimal de la monodromie. Si 1 n'est pas racine de $\Lambda(t)$, on a :

$$H_1(F, \mathbb{Q}) = (t - 1)H_1(F, \mathbb{Q}) \quad \text{et} \quad \ker(t - 1) = \{0\}.$$

Si 1 est racine de $\Lambda(t)$, c'est une racine simple, donc $(t - 1)$ et $\Lambda(t)/(t - 1)$ sont premiers entre eux. L'identité de Bezout entre ces polynômes donne alors la décomposition indiquée.

1.4. DÉFINITION. — *Soit K un corps, une structure isométrique symétrique (resp. antisymétrique) sur un K -espace vectoriel V est un triplet (V, S, t) , où t est un automorphisme de V et S une forme bilinéaire symétrique (resp. antisymétrique) t -équivariante sur V .*

1.5. — La multiplication par $(t - 1)$ est un isomorphisme sur $(t - 1)H_1(F, \mathbb{Q})$. Par suite, la restriction de la forme de Seifert A et la restriction de la structure isométrique (S, t) à ce \mathbb{Q} -espace vectoriel sont des données équivalentes.

La définition de la filtration W entraîne que la forme d'intersection S induit une forme bilinéaire antisymétrique t -équivariante S^1 sur $\text{gr}_{-1}^W H_1(F, \mathbb{Q})$.

Soit e un exposant de la monodromie. La formule

$$S^2(\bar{u}, \bar{v}) = S((t^e - 1)u, v),$$

où \bar{u} (resp. \bar{v}) est la classe dans $\text{gr}_0^W H_1(F, \mathbb{Q})$ d'un cycle u (resp. v) dans $H_1(F, \mathbb{Q})$, définit une forme bilinéaire symétrique t -équivariante S^2 sur $\text{gr}_0^W H_1(F, \mathbb{Q})$. On a en effet, pour tout v , l'égalité $t^e(t^e - 1)v = (t^e - 1)v$, et par suite

$$S((t^e - 1)u, v) = -S((t^{-e} - 1)v, u) = S((t^e - 1)v, u).$$

On a :

$$S((t^{ke} - 1)u, v) = kS((t^e - 1)u, v).$$

La forme bilinéaire S^2 dépend donc du choix de l'exposant e . Dans la définition de S^2 , on conviendra de choisir le plus petit exposant e .

1.6. — Nous noterons A^0 la restriction de A à $\ker(t - 1)$. D'après [DM3], §3.1 (voir aussi §3.2), A^0 est la forme bilinéaire associée à une forme quadratique définie négative.

1.7. THÉORÈME. — *Avec les notations ci-dessus, la forme de Seifert A sur $H_1(F, \mathbb{Q})$ est déterminée à isomorphisme près, par la forme bilinéaire symétrique A^0 et les structures isométriques $(\text{gr}_{-1}^W H_1(F, \mathbb{Q}), S^1, t)$ et $(\text{gr}_0^W H_1(F, \mathbb{Q}), S^2, t)$.*

Démonstration. — On notera :

- $\phi_m(t)$ le m -ième polynôme cyclotomique,
- $\varphi(m) = \deg \phi_m$ la fonction indicatrice d'Euler,
- V_m le noyau de l'action de $\phi_m^2(t)$ sur $(t - 1)H_1(F, \mathbb{Q})$ et
- S_m la forme bilinéaire induite par S sur V_m .

L'action de la monodromie sur V_m sera encore notée comme la multiplication par t .

Si $n \neq m$, alors V_m et V_n sont orthogonaux pour S . En effet, $\phi_n^2(t)$ est un isomorphisme sur V_m ; pour tout $x \in V_m$, il existe donc un $y \in V_m$ tel que $\phi_n^2(t)y = x$, et pour tout $z \in V_n$,

$$S(x, z) = S(\phi_n^2(t)y, z) = S(y, \phi_n^2(t^{-1})z) = S(y, t^{-2\varphi(n)}\phi_n^2(t)z) = 0.$$

La structure isométrique (S, t) sur $(t - 1)H_1(F, \mathbb{Q})$ admet la décomposition en somme directe orthogonale suivante :

$$(1.7.1) \quad ((t - 1)H_1(F, \mathbb{Q}), S, t) = \bigoplus_{m>1} (V_m, S_m, t).$$

Du fait que les valeurs propres de la monodromie sont ici d'ordre au plus 2, le théorème 3.2 de Milnor [Mi2] donne le résultat suivant : chaque V_m admet une décomposition en somme directe orthogonale $V_m = V_m^1 \oplus V_m^2$, où V_m^i est un module libre sur $\mathbb{Q}[t]/\phi_m^i(t)$ pour $i = 1, 2$, et cette décomposition est unique à isomorphisme près. Comme $(t^e - 1)/\phi_m(t)$ est un automorphisme de V_m , la filtration induite par la filtration W sur V_m , que nous noterons encore W , vérifie les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} W_{-1}(V_m) &= \ker(\phi_m(t); V_m) = V_m^1 \oplus \phi_m(t) \cdot V_m^2, \\ W_{-2}(V_m) &= \phi_m(t) \cdot V_m = \phi_m(t) \cdot V_m^2, \end{aligned}$$

et on a donc les isomorphismes :

$$\text{gr}_0^W(V_m) \cong V_m^2 / (\phi_m(t) \cdot V_m^2) \quad \text{et} \quad \text{gr}_{-1}^W(V_m) \cong V_m^1.$$

On notera S_m^1 la forme bilinéaire antisymétrique, restriction de S_m à V_m^1 et $S_m'^2$ la forme bilinéaire symétrique sur $V_m^2 / (\phi_m(t) \cdot V_m^2)$ définie par les égalités :

$$S_m'^2(\bar{u}, \bar{v}) = \begin{cases} S_m(\phi_m(t)t^{-d}u, v) & \text{si } m \neq 2, \\ S_2((t - t^{-1})u, v) & \text{si } m = 2, \end{cases}$$

où $d = \frac{1}{2}\varphi_m$ et \bar{u} (resp. \bar{v}) est la classe dans $V_m^2 / (\phi_m(t) \cdot V_m^2)$ d'un cycle u (resp. v) de V_m^2 .

D'après [Mi2], th. 3.3 et 3.4, la structure isométrique (V_m, S_m, t) est définie à isomorphisme près par la donnée des classes d'isomorphisme des structures isométriques (V_m^1, S_m^1, t) et $(V_m^2 / (\phi_m(t) \cdot V_m^2), S_m'^2, t)$.

La forme bilinéaire S^2 induit sur $V_m^2 / (\phi_m(t) \cdot V_m^2)$ la forme S_m^2 définie par :

$$S_m^2(\bar{u}, \bar{v}) = S_m((t^e - 1)u, v).$$

Le polynôme $Q_m(t)$, $m \neq 2$ (resp. $Q_2(t)$), défini par l'égalité

$$t^e - 1 = Q_m(t)\phi_m(t) \quad (\text{resp. } t^e - 1 = Q_2(t)(t - t^{-1})),$$

est premier avec $\phi_m(t)$ (resp. $(t - t^{-1})$); par suite, déterminer S_m^2 à isomorphisme près équivaut à déterminer $S_m'^2$ à isomorphisme près. Comptenu de 1.3 et 1.5, ceci donne le théorème.

Nous avons de plus les décompositions en somme directe orthogonale suivantes :

$$(1.7.2) \quad (\text{gr}_{-1}^W H_1(F, \mathbb{Q}), S^1, t) \\ = \bigoplus_{m>1} (\ker(\phi_m(t); \text{gr}_{-1}^W H_1(F, \mathbb{Q})), S_m^1, t),$$

$$(1.7.3) \quad (\text{gr}_0^W H_1(F, \mathbb{Q}), S^2, t) \\ = \bigoplus_{m>1} (\ker(\phi_m(t); \text{gr}_0^W H_1(F, \mathbb{Q})), S_m^2, t).$$

1.8. — Nous allons maintenant classifier les formes de Seifert des germes de courbe plane à Witt-équivalence près. Soient f_1 et f_2 deux germes de courbe plane, $A(f_1)$ et $A(f_2)$ les formes de Seifert associées; on notera :

$$M_i = H_1(F(f_i), \mathbb{Q}), \quad n_i = \dim_{\mathbb{Q}} H_1(F(f_i), \mathbb{Q}), \quad i = 1, 2;$$

$$A = A(f_1) \oplus (-A(f_2)), \quad t = t_1 \oplus t_2.$$

LEMME. — Si $A(f_1)$ et $A(f_2)$ sont Witt-équivalentes et si N est un métaboliseur pour $A(f_1) \oplus (-A(f_2))$, alors N est invariant par l'action de t .

Démonstration. — Soit x un élément fixé dans N ; on a donc pour tout y dans N , $A(x, y) = A(y, x) = 0$ et donc $A(y, tx) = 0$. Si tx n'est pas dans N , on peut compléter une base de N en une base de $M_1 \oplus M_2$ dont tx est élément; dans cette base, la matrice de A contient un bloc de zéros de taille $(1 + \frac{1}{2}(n_1 + n_2)) \times \frac{1}{2}(n_1 + n_2)$: on aurait alors $\det(A) = 0$, ce qui est absurde car $\det(A) = \pm 1$, d'où le résultat.

1.9. — Avec les mêmes hypothèses, supposons que le polynôme minimal $\Lambda(t)$ de la monodromie sur $M = M_1 \oplus M_2$ soit le produit de deux polynômes $\Lambda'(t)$ et $\Lambda''(t)$ premiers entre eux. Alors M est la somme directe de $M' = \ker(\Lambda'(t))$ et $M'' = \ker(\Lambda''(t))$; ces sous-modules sont invariants par la monodromie et orthogonaux pour A à gauche et à droite. De plus, la restriction A' (resp. A'') de A à M' (resp. M'') est Witt-équivalente à 0

et le métaboliseur N est la somme directe de $N' = N \cap M'$, qui est un métaboliseur pour A' et de $N'' = N \cap M''$.

En particulier, $A^0(f_1)$ et $A^0(f_2)$ d'une part et les restrictions de $A(f_1)$ à $(t - 1)M_1 = (t - 1)H_1(F(f_1), \mathbb{Q})$ et de $A(f_2)$ à $(t - 1)M_2$ d'autre part, sont Witt-équivalentes.

1.10. DÉFINITION. — Deux structures isométriques (S_1, t) et (S_2, t) définies sur des \mathbb{Q} -espaces vectoriels M_1 et M_2 et de rang respectif $n_1 = \dim_{\mathbb{Q}} M_1$ et $n_2 = \dim_{\mathbb{Q}} M_2$ sont Witt-équivalentes si $S_1 \oplus (-S_2)$ est identiquement nulle sur un sous-espace vectoriel N de $M_1 \oplus M_2$ stable par l'action de t et de dimension $\frac{1}{2}(n_1 + n_2)$.

1.11. PROPOSITION. — Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) La restriction de $A(f_1)$ à $(t - 1)H_1(F(f_1), \mathbb{Q})$ et la restriction de $A(f_2)$ à $(t - 1)H_1(F(f_2), \mathbb{Q})$ sont Witt-équivalentes.
- (ii) Les structures isométriques associées sont Witt-équivalentes.
- (iii) Les structures isométriques $(V_m(f_1), S_m, t)$ et $(V_m(f_2), S_m, t)$ sont Witt-équivalentes pour tout $m > 1$.

Démonstration.

(i) \Rightarrow (ii). Soit N un métaboliseur pour $A = A(f_1) \oplus (-A(f_2))$; posons $S = S(f_1) \oplus (-S(f_2))$. La relation $S(x, y) = A(x, y) - A(y, x)$ implique que S est identiquement nulle sur N . De plus, d'après le lemme 1.8, le sous-espace N est stable par l'action de t ; par suite, N est un métaboliseur pour (S, t) .

(i) \Leftarrow (ii) Soit N un métaboliseur de S sur $(t - 1)H_1(F(f_1), \mathbb{Q}) \oplus (t - 1)H_1(F(f_2), \mathbb{Q})$. Nous avons vu que $(t - 1)$ ne divise pas le polynôme minimal $\Lambda_i(t)$ de la monodromie sur $(t - 1)H_1(F(f_i), \mathbb{Q})$ pour $i = 1, 2$. Soit $\Lambda(t)$ le ppcm de $\Lambda_1(t)$ et $\Lambda_2(t)$. Il existe alors des polynômes $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ de $\mathbb{Q}[t]$ tels que $\alpha(t)(1 - t) + \beta(t)\Lambda(t) = 1$. Par suite, pour tout x et y de N , on a $A(x, y) = S(x, (1 - t)^{-1}y) = S(x, \alpha(t)y) = 0$, car N est stable par l'action de t , et N est un métaboliseur pour A .

(ii) \Leftrightarrow (iii) Ceci est un analogue de 1.9.

1.12. THÉORÈME. — La forme de Seifert d'un germe de courbe plane est déterminée à Witt-équivalence près par la donnée de la forme bilinéaire symétrique A^0 à isomorphisme près et de la structure isométrique (S^1, t) sur $\text{gr}_{-1}^W H_1(F, \mathbb{Q})$ à Witt-équivalence près.

Démonstration. — Nous avons vu en 1.9 que la forme de Seifert A est déterminée à Witt-équivalence près par les classes de Witt-équivalence de A^0 et de la restriction de A à $(t-1)H_1(F, \mathbb{Q})$. La forme quadratique associée à A^0 étant définie négative (cf. 1.6), donner A^0 à Witt-équivalence près équivaut à donner A^0 à isomorphisme près (cf. [MiH], th. 1.7, p. 58).

Par ailleurs, d'après 1.11, la classe de Witt-équivalence de la restriction de A à $(t-1)H_1(F, \mathbb{Q})$ est déterminée par les classes de Witt-équivalence des structures isométriques (V_m, S_m, t) pour $m > 1$. Pour chaque m , la restriction de S_m à $\phi_m(t) \cdot V_m = \phi_m(t) \cdot V_m^2$ est identiquement nulle; de plus $\dim_{\mathbb{Q}} V_m^2 = 2 \dim_{\mathbb{Q}} (\phi_m(t) \cdot V_m^2)$ et $\phi_m(t) \cdot V_m$ est stable par l'action de t . Il s'ensuit que $(V_m^2, S_m|_{V_m^2}, t)$ est Witt-équivalente à 0. Donc (V_m, S_m, t) est Witt-équivalente à (V_m^1, S_m^1, t) ; par suite, (1.7.2) et 1.11 permettent de conclure.

2. Passage des structures isométriques aux formes hermitiennes ou antihermitiennes.

2.1. — Nous devons maintenant classifier les structures isométriques sur \mathbb{Q} telles que le polynôme minimal de t est le produit de polynômes cyclotomiques tous distincts, afin de caractériser à isomorphisme près les structures isométriques rencontrées en 1.7. Cette classification se déduit de la classification des cas élémentaires (V, R, t) suivants :

$$(2.1.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} V \text{ est un } \mathbb{Q}\text{-espace vectoriel de dimension finie muni d'un auto-} \\ \text{morphisme } t \text{ de polynôme minimal } \phi_m, \text{ et d'une forme bilinéaire} \\ \text{symétrique ou antisymétrique } t\text{-équivariante non dégénérée } R. \end{array} \right.$$

On notera \mathbb{K}_m le corps $\mathbb{Q}[x]/\phi_m(x)$, \mathbb{L}_m le sous-corps de \mathbb{K}_m fixe par la conjugaison et λ_m la classe de x dans \mathbb{K}_m . L'automorphisme t munit V d'une structure de \mathbb{K}_m -espace vectoriel définie par $\lambda_m v = tv$.

On notera r la dimension de V vu comme \mathbb{K}_m -espace vectoriel.

Nous traiterons d'abord le cas des structures isométriques symétriques.

Pour $m \neq 2$, nous traduisons le problème de classification en un problème de classification de formes hermitiennes sur \mathbb{K}_m en utilisant la méthode indiquée par Milnor [Mi2]. La classification de ces formes, due à Landherr [La], permet alors d'obtenir une classification en termes d'un ensemble complet d'invariants. Les invariants de cette liste liés aux places à l'infini de \mathbb{L}_m ont été calculés par Neumann [Ne] en utilisant l'homologie

à coefficients réels $H_1(F, \mathbb{R})$. Nous adopterons une présentation qui permet de faire le lien entre les points de vue de Milnor et Neumann.

Si $m = 2$, l'automorphisme t est alors l'opposé de l'identité, le problème de classification est donc ramené à la classification des formes quadratiques sur le \mathbb{Q} -espace vectoriel V .

En conclusion de cette section, le théorème 2.13 (resp. 2.16) détermine à isomorphisme (resp. à Witt-équivalence) près la structure isométrique (S, t) sur $(t - 1)H_1(F, \mathbb{Q})$.

2.2. — Considérons le \mathbb{K}_m -espace vectoriel $V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{K}_m$. L'automorphisme t de V s'étend en un automorphisme \mathbb{K}_m -linéaire, qu'on notera encore t , de $V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{K}_m$ et la forme bilinéaire symétrique R s'étend en une forme \mathbb{K}_m -hermitienne t -équivariante $R^{\mathbb{K}}$.

Considérons

$$P_{m,k}(s) := \frac{\phi_m(s)}{\phi'_m(\lambda_m^k)(s - \lambda_m^k)} \in \mathbb{K}_m[s].$$

On a donc

$$\sum_{\substack{0 < k < m \\ \text{pgcd}(k,m)=1}} P_{m,k}(s) = 1.$$

Pour v dans $V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{K}_m$ et $\text{pgcd}(k, m) = 1$, on a $tP_{m,k}(t)v = \lambda_m^k P_{m,k}(t)v$ et l'égalité, où l'on somme sur k tel que $0 < k < m$ et $\text{pgcd}(k, m) = 1$,

$$v = \sum_k P_{m,k}(t)v,$$

nous donne la décomposition de v en somme de vecteurs propres pour t .

On notera W_k le sous-espace propre de $V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{K}_m$ associé à la valeur propre λ_m^k .

L'application $v \mapsto P_{m,k}(t)v$ est un isomorphisme de V sur W_k vu comme \mathbb{Q} -espace vectoriel. Cet isomorphisme est compatible à l'action de t ; par suite l'isomorphisme de V sur W_1 est aussi un isomorphisme de \mathbb{K}_m -espaces vectoriels si l'on munit V de la structure de \mathbb{K}_m -espace vectoriel définie en 2.1 par $\lambda_m v = tv$.

Le point clé de la construction est l'égalité suivante. Pour v et w dans V , on a

$$R(v, w) = \sum_{\substack{0 < k < m \\ \text{pgcd}(k,m)=1}} R^{\mathbb{K}}(P_{m,k}(t)v, P_{m,k}(t)w),$$

car $R^{\mathbb{K}}(P_{m,k}(t)v, P_{m,h}(t)w)$ est nul pour $k \neq h$. Si g_k est l'élément de $\text{Gal}(\mathbb{K}_m/\mathbb{Q})$ qui envoie λ_m sur λ_m^k , on a :

$$R^{\mathbb{K}}(P_{m,k}(t)v, P_{m,k}(t)w) = g_k(R^{\mathbb{K}}(P_{m,1}(t)v, P_{m,1}(t)w)).$$

Par suite, $R(v, w) = \text{Tr}_{\mathbb{K}_m/\mathbb{Q}}(R^{\mathbb{K}}(P_{m,1}(t)v, P_{m,1}(t)w))$. La formule

$$R^{\bullet}(v, w) = R^{\mathbb{K}}(P_{m,1}(t)v, P_{m,1}(t)w),$$

où v et w sont dans V , définit un produit hermitien R^{\bullet} sur V , vu comme \mathbb{K}_m -espace vectoriel, car $(t - \lambda_m)P_{m,1}(t)v = 0$. L'identité donnée plus haut donne le résultat suivant.

2.3. PROPOSITION. — *La forme bilinéaire R sur V vérifie l'identité :*

$$R(v, w) = \text{Tr}_{\mathbb{K}_m/\mathbb{Q}}(R^{\bullet}(v, w)).$$

2.4. — Dans [Mi2], Milnor démontre qu'il existe une unique forme hermitienne R^{\bullet} vérifiant cette identité. Notre démonstration permet de décrire explicitement R^{\bullet} . Par suite, déterminer à isomorphisme près une structure isométrique (V, R, t) vérifiant (2.1.1) équivaut à déterminer à isomorphisme près la forme hermitienne R^{\bullet} associée sur V , vu comme \mathbb{K}_m -espace vectoriel. Pour établir cette classification, nous avons besoin de définir quelques invariants.

2.5. Notation. — On notera $e(k/m)$ le nombre $\exp(2i\pi k/m)$. Dans cette expression k et m représenteront toujours des nombres entiers, premiers entre eux, tels que $0 < k < m$.

2.6. DÉFINITION. — *Considérons le plongement $\omega_k : \mathbb{K}_m \rightarrow \mathbb{C}$ défini par $\omega_k(\lambda_m) = e(k/m)$. Après extension des scalaires, la forme \mathbb{K}_m -hermitienne R^{\bullet} sur V donne une forme \mathbb{C} -hermitienne R_k^{\bullet} sur $V \otimes_{\mathbb{K}_m} \mathbb{C}$ où V est muni de la structure de \mathbb{K}_m -espace vectoriel, et l'automorphisme t s'étend en la multiplication par $\omega_k(\lambda_m)$. La signature $e(k/m)$ -équivariante, au sens de Milnor, de la structure isométrique (R, t) est la signature de la forme \mathbb{C} -hermitienne R_k^{\bullet} sur $V \otimes_{\mathbb{K}_m} \mathbb{C}$. On notera $\sigma_{e(k/m)}(R)$ cette signature.*

En notant $R^{\mathbb{C}}$ l'extension hermitienne de R à $V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$, pour v et w dans V , et $\omega_k(P_{m,1})(s)$ l'image de $P_{m,1}(s)$ dans $\mathbb{C}[s]$ par ω_k , on a donc :

$$R_k^{\bullet}(v, w) = R^{\mathbb{C}}(\omega_k(P_{m,1})(t)v, \omega_k(P_{m,1})(t)w).$$

Dans [Ne], Neumann considère la décomposition de $V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ en somme des sous-espaces $W_k \otimes_{\mathbb{K}_m} \mathbb{C}$ propres par l'action de t (on utilise ici $\omega_1 : \mathbb{K}_m \rightarrow \mathbb{C}$ et on remarque que l'action de t sur $W_k \otimes_{\mathbb{K}_m} \mathbb{C}$ est la multiplication par $\omega_1(\lambda_m^k) = \omega_k(\lambda_m) = e(k/m)$). La signature $\omega_k(\lambda_m)$ -équivariante, au sens de Neumann, de (R, t) est la signature de la restriction à $W_k \otimes_{\mathbb{K}_m} \mathbb{C}$ de la forme \mathbb{C} -hermitienne qui étend R à $V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$, puisque l'endomorphisme $\omega_k(P_{m,1})(t)$ est la projection de $V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ sur $W_k \otimes_{\mathbb{K}_m} \mathbb{C}$. On voit donc que les définitions de Milnor et Neumann coïncident.

2.7. PROPOSITION. — *Les signatures équivariantes*

$$\sigma_{e(k/m)}(R) \quad \text{et} \quad \sigma_{e((m-k)/m)}(R)$$

sont égales.

Démonstration. — Quand on diagonalise la forme hermitienne R_k^* , on trouve une matrice à coefficients dans $\omega_k(\mathbb{L}_m)$, d'où le résultat car ω_k et ω_{m-k} coïncident sur \mathbb{L}_m .

2.8. DÉFINITION. — *Soit R^* une forme \mathbb{K}_m -hermitienne sur V , on appelle déterminant de R^* et on note $\det(R^*)$ la classe dans $\mathbb{L}_m/N_{\mathbb{K}_m/\mathbb{L}_m}(\mathbb{K}_m^*)$ du déterminant de la matrice de R^* dans une base du \mathbb{K}_m -espace vectoriel V .*

2.9. Le cas des formes antisymétriques. — Les objets élémentaires sont ici les (V, S, t) suivants : V est un \mathbb{Q} -espace vectoriel de dimension finie muni d'un automorphisme t de polynôme minimal ϕ_m , et d'une forme bilinéaire antisymétrique t -équivariante non dégénérée S .

On notera r la dimension de V vu comme \mathbb{K}_m -espace vectoriel.

Pour $m = 2$, le problème de classification se ramène à la classification des formes antisymétriques non dégénérées sur V . On sait que le rang de V est un invariant complet.

Pour $m \neq 2$, on peut se ramener au cas symétrique de deux façons :

- (i) On définit une forme bilinéaire symétrique R en posant

$$R(v, w) = S((t - t^{-1})v, w).$$

En définissant S^* à partir de S comme on a défini R^* en 2.2 à partir de R , on a alors :

$$R^* = (\lambda_m - \lambda_m^{-1})S^*.$$

La signature $e(k/m)$ -équivariante, au sens de Milnor, de (S, t) est

$$\sigma_{e(k/m)}^{\text{Mil}}(S) = \sigma_{e(k/m)}(R)$$

et on a

$$\sigma_{e(k/m)}^{\text{Mil}}(S) = \sigma_{e((m-k)/m)}^{\text{Mil}}(S).$$

(ii) On définit une forme \mathbb{C} -hermitienne $R^{\mathbb{C}}$ à partir de la forme anti-hermitienne $S^{\mathbb{C}}$ qui étend S à $V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ en posant, pour v et w dans $V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$,

$$R^{\mathbb{C}}(v, w) = iS^{\mathbb{C}}(v, w).$$

La signature $e(k/m)$ -équivariante de (S, t) au sens de Neumann, qu'on notera $\sigma_{e(k/m)}^{\text{Neu}}(S)$, est la signature de la forme \mathbb{C} -hermitienne $R_k^{\mathbb{C}}$, restriction de $R^{\mathbb{C}}$ au sous-espace propre pour la valeur propre $e(k/m)$, et on a :

$$\sigma_{e(k/m)}^{\text{Neu}}(S) = -\sigma_{e((m-k)/m)}^{\text{Neu}}(S).$$

Pour $0 < k < \frac{1}{2}m$, $-i\omega_k(\lambda_m - \lambda_m^{-1})$ est un nombre réel positif, on a donc dans ce cas

$$\sigma_{e(k/m)}^{\text{Mil}}(S) = \sigma_{e(k/m)}^{\text{Neu}}(S).$$

Nous utiliserons les signatures au sens de Neumann, car elles simplifient le calcul effectif, cf. 3.7. Nous noterons $\sigma_{e(k/m)}(S)$ la signature $e(k/m)$ -équivariante $\sigma_{e(k/m)}^{\text{Neu}}(S)$.

Le déterminant de la matrice M_S qui représente S^{\bullet} dans une base de V est un élément de $(\lambda_m - \lambda_m^{-1})\mathbb{L}_m^*$ (resp. \mathbb{L}_m^*) si r est impair (resp. pair). Le déterminant de la forme antihermitienne S^{\bullet} est la classe de $\det(M_S)$ dans $\mathbb{K}_m/N_{\mathbb{K}_m/\mathbb{L}_m}(\mathbb{K}_m^*)$.

2.10. THÉORÈME (Landherr). — Soit $m > 2$ un nombre entier, soit V_m un \mathbb{Q} -espace vectoriel muni d'un automorphisme t de polynôme minimal ϕ_m et d'une forme bilinéaire t -équivariante symétrique (resp. antisymétrique) non dégénérée S . La structure isométrique (S, t) sur V_m est déterminée à isomorphisme près par les données suivantes :

- (i) la dimension r_m de V_m vu comme \mathbb{K}_m -espace vectoriel,
- (ii) le déterminant d_m de la forme \mathbb{K}_m -hermitienne (resp. \mathbb{K}_m -anti-hermitienne) S^{\bullet} construite à partir de S ,
- (iii) les signatures équivariantes $\sigma_{\alpha}(S)$ pour α racine de $\phi_m(t)$.

Démonstration. — Nous omettrons l'indice m dans $V_m, \mathbb{K}_m, \mathbb{L}_m, \lambda_m, \phi_m, r_m$ et d_m . D'après 2.4, il suffit de démontrer que la forme \mathbb{K} -hermitienne $H = S^\bullet$ sur V est déterminée à isomorphisme près par les invariants $r, d, \sigma_\alpha(S)$, où les α sont les racines de $\phi(t)$.

Ce résultat est une reformulation d'un résultat de Landherr [La]. Nous donnons ici une autre démonstration, qui s'appuie sur le théorème de Jacobson [J] : deux formes hermitiennes H_1 et H_2 sur un \mathbb{K} -espace vectoriel V sont isomorphes si et seulement si les formes quadratiques associées Q_1 et Q_2 sur V vu comme \mathbb{L} -espace vectoriel sont isomorphes. D'après Hasse, une forme quadratique non dégénérée Q sur un \mathbb{L} -espace vectoriel est définie à isomorphisme près par les invariants suivants :

- (i) la dimension $\dim_{\mathbb{L}} V$;
- (ii) le déterminant $\det(Q) \in \mathbb{L}^*/\mathbb{L}^{*2}$;
- (iii) les signatures $\sigma_{e(k/m)}(Q)$ de l'extension de Q à $V \otimes_{\mathbb{L}} \mathbb{R}$, associées aux plongements ω_k de \mathbb{L} dans \mathbb{R} , où $0 < k < \frac{1}{2}m$ et $\text{pgcd}(k, m) = 1$;
- (iv) les invariants de Hasse $\mathcal{H}_\wp(Q)$ associés aux places discrètes \wp de \mathbb{L} .

On rappelle que si la forme quadratique Q est représentée par une matrice diagonale $\text{Diag}(a_1, \dots, a_n)$, en notant $\left(\frac{a_i, a_j}{\wp}\right)$ le symbole de Hilbert en \wp , on a :

$$\mathcal{H}_\wp(Q) = \prod_{i < j} \left(\frac{a_i, a_j}{\wp}\right).$$

Soit θ un élément de \mathbb{L} tel que $\mathbb{K} = \mathbb{L}(\sqrt{\theta})$; par exemple, on peut prendre $\theta = \lambda^2 + \bar{\lambda}^2 - 2$, où λ est la classe de x dans $\mathbb{K} = \mathbb{Q}[x]/\phi(x)$. Si la forme hermitienne H admet la matrice diagonale $\text{Diag}(b_1, \dots, b_r)$ dans une \mathbb{K} -base $\{e_j\}_{1 \leq j \leq r}$ de V , la matrice de la forme quadratique Q associée est $\text{Diag}(b_1, -\theta b_1, \dots, b_r, -\theta b_r)$ dans la \mathbb{L} -base associée.

Pour démontrer le théorème, il suffit de voir que la liste des invariants de la forme hermitienne H détermine la liste des invariants de la forme quadratique Q . Il est clair que la dimension $\dim_{\mathbb{K}} V$ et les signatures $\sigma_{e(k/m)}(S)$ déterminent la dimension $\dim_{\mathbb{L}} V$ et les signatures $\sigma_{e(k/m)}(Q)$; en effet, $\dim_{\mathbb{L}} V = 2 \dim_{\mathbb{K}} V$ et $\sigma_{e(k/m)}(Q) = 2 \sigma_{e(k/m)}(S)$, car $\omega_k(\theta) = 2 \cos(4\pi k/m) - 2$ est négatif. Le déterminant de la forme quadratique ne dépend que de la dimension :

$$\det(Q) = (-\theta)^r \in \mathbb{L}^*/\mathbb{L}^{*2}.$$

D'autre part, la donnée du déterminant $d = b_1 \cdots b_r$ de la forme hermitienne H détermine les invariants de Hasse associés aux places discrètes \wp de \mathbb{L} . On a en effet :

$$\mathcal{H}_\wp(Q) = \left(\frac{-\theta, -\theta}{\wp} \right)^{\frac{r(r-1)}{2}} \prod_{1 \leq i \leq r} \left(\frac{b_i, \theta}{\wp} \right) = \left(\frac{-\theta, -1}{\wp} \right)^{\frac{r(r-1)}{2}} \left(\frac{d, \theta}{\wp} \right).$$

2.11. — Nous allons tirer du théorème 2.10 les corollaires relatifs à la classification des structures isométriques (S^1, t) et (S^2, t) rencontrées en 1.7. Le calcul effectif des invariants est donné dans le chapitre suivant.

2.12. PROPOSITION. — Avec les notations 1.7 et ci-dessus,

a) la structure isométrique $(\text{gr}_{-1}^W H_1(F, \mathbb{Q}), S^1, t)$ est caractérisée à isomorphisme près par les données suivantes :

- (i) le polynôme caractéristique Δ_{-1} de la monodromie sur $\text{gr}_{-1}^W H_1(F, \mathbb{Q})$,
- (ii) pour chaque $m > 2$ tel que ϕ_m divise Δ_{-1} , le déterminant d_m^1 de la forme \mathbb{K}_m -anti-hermitienne $S_m^{\bullet 1}$ construite à partir de la restriction S_m^1 de S^1 à $\ker(\phi_m(t); \text{gr}_{-1}^W H_1(F, \mathbb{Q}))$,
- (iii) pour chaque racine $\alpha = e(k/m)$ de Δ_{-1} telle que $\alpha \neq -1$, la signature α -équivariante $\sigma_\alpha(S^1) := \sigma_\alpha(S_m^1)$;

b) la structure isométrique $(\text{gr}_0^W H_1(F, \mathbb{Q}), S^2, t)$ est caractérisée à isomorphisme près par les données suivantes :

- (iv) le polynôme caractéristique Δ_0 de la monodromie sur $\text{gr}_0^W H_1(F, \mathbb{Q})$,
- (v) si ϕ_2 divise Δ_0 , la classe d'équivalence de la forme quadratique associée à la forme symétrique S_2^2 restriction de S^2 à

$$\ker(\phi_2(t); \text{gr}_0^W H_1(F, \mathbb{Q})) = \ker(\phi_2^2(t); H_1(F, \mathbb{Q})) / \ker(\phi_2(t); H_1(F, \mathbb{Q})),$$

(vi) pour chaque $m > 2$ tel que ϕ_m divise Δ_0 , le déterminant d_m^2 de la forme \mathbb{K}_m -hermitienne $S_m^{\bullet 2}$ construite à partir de la restriction S_m^2 de S^2 à $\ker(\phi_m(t); \text{gr}_0^W H_1(F, \mathbb{Q}))$,

(vii) pour chaque racine $\alpha = e(k/m)$ de Δ_0 telle que $\alpha \neq -1$, la signature α -équivariante $\sigma_\alpha(S^2) := \sigma_\alpha(S_m^2)$.

Remarque. — Nous verrons en 3.11 que S^2 est définie positive, le polynôme $\Delta_0(t)$ détermine donc les signatures équivariantes de S^2 .

Démonstration. — Nous avons vu en (1.7.2) que la structure isométrique (S^1, t) sur $\text{gr}_{-1}^W H_1(F, \mathbb{Q})$ est la somme directe orthogonale des structures isométriques antisymétriques (S_m^1, t) sur

$$\ker(\phi_m(t); \text{gr}_{-1}^W H_1(F, \mathbb{Q})) \quad \text{pour les } m \geq 2.$$

La classe d'isomorphisme de la structure isométrique (S_2^1, t) est déterminée par la classe d'isomorphisme de la forme antisymétrique S_2^1 sur le \mathbb{Q} -espace vectoriel $\ker(\phi_2(t); \text{gr}_{-1}^W H_1(F, \mathbb{Q}))$, c'est-à-dire par le rang de S_2^1 qui est égal à la multiplicité de -1 comme racine du polynôme $\Delta_{-1}(t)$. Pour les $m > 2$, on applique le théorème 2.10 en remarquant que le polynôme Δ_{-1} donne les dimensions r_m pour $m \geq 2$. Ceci donne le point a).

On procède de même pour le point b) en partant de (1.7.3). La structure isométrique (S_2^2, t) est déterminée par la forme bilinéaire symétrique S_2^2 ou par la forme quadratique associée, sur le \mathbb{Q} -espace vectoriel $\ker(\phi_2(t); \text{gr}_0^W H_1(F, \mathbb{Q}))$.

2.13. THÉORÈME. — *La classe d'isomorphisme de la forme bilinéaire symétrique A^0 et les données (i)–(vi) de la proposition 2.12 déterminent la forme de Seifert A sur $H_1(F, \mathbb{Q})$ à isomorphisme près.*

Démonstration. — Compte tenu de la remarque, ceci est un corollaire de la proposition 2.12 et du théorème 1.7.

En particulier, on retrouve ainsi le théorème suivant.

2.14. THÉORÈME (voir [SSS], §3). — *Le nombre b de branches irréductibles du germe f et les données (i), (iii) et (iv) de la proposition 2.12 déterminent la forme de Seifert réelle $A_{\mathbb{R}}$ sur $H_1(F, \mathbb{R})$ à isomorphisme près.*

2.15. PROPOSITION. — *Soit $m > 2$ un nombre entier, soit V_m un \mathbb{Q} -espace vectoriel muni d'un automorphisme t de polynôme minimal ϕ_m et d'une forme bilinéaire t -équivariante antisymétrique non dégénérée S . La structure isométrique (S, t) sur V_m est déterminée à Witt-équivalence près par les données suivantes :*

- (i) le déterminant d_m de la forme \mathbb{K}_m -antihermitienne S^{\bullet} construite à partir de S ,
- (ii) les signatures équivariantes $\sigma_{\alpha}(S)$ pour α racine de $\phi_m(t)$.

Démonstration. — Nous dirons que deux formes \mathbb{K}_m -antihermitiennes R_1^{\bullet} et R_2^{\bullet} définies sur des \mathbb{K}_m -espaces vectoriels V_1 et V_2 de dimensions

respectives r_1 et r_2 , sont *Witt-équivalentes* s'il existe un sous-espace vectoriel de $V_1 \oplus V_2$ de dimension $\frac{1}{2}(r_1 + r_2)$ sur lequel $R_1^* \oplus (-R_2^*)$ est identiquement nulle (on vérifie que cette relation est une relation d'équivalence en adaptant au cas antihermitien la démonstration relative au cas bilinéaire).

Un métaboliseur N pour une structure isométrique antisymétrique (V, R, t) est un \mathbb{Q} -espace vectoriel stable par l'action de t (cf. 1.10). On peut donc considérer N comme un \mathbb{K}_m -espace vectoriel. Par définition, la forme antihermitienne R^\bullet définie en fonction de R comme indiqué en 2.9 est identiquement nulle sur N , par suite N est également un métaboliseur pour R^\bullet . Réciproquement, soit N un métaboliseur pour une forme \mathbb{K}_m -antihermitienne R^\bullet , définie sur un \mathbb{K}_m -espace vectoriel V . On peut considérer N et V comme des \mathbb{Q} -espaces vectoriels. Soit R la forme antisymétrique définie sur V , par

$$R(u, v) = \text{Tr}_{\mathbb{K}_m/\mathbb{Q}}(R^\bullet(u, v))$$

pour u et v dans V . Alors pour x et y dans N , on a $R(x, y) = 0$. Par suite, N est un métaboliseur pour la structure isométrique (V, R, t) .

Il suffit donc de montrer que le déterminant et les signatures équivariantes forment un système complet d'invariants pour la classification à Witt-équivalence près d'une forme antihermitienne sur un \mathbb{K}_m -espace vectoriel.

Soit R une forme antihermitienne non dégénérée sur un \mathbb{K}_m -espace vectoriel V . Montrons que R se décompose en une somme directe orthogonale de deux formes antihermitiennes $R_X \oplus R_Y$, définies respectivement sur X et Y , telles que R_X soit anisotrope (i.e. si $x \in X$, $R(x, x)$ n'est nul que si $x = 0$) et R_Y soit Witt-équivalente à 0. Si R est anisotrope sur V , on prend $X = V$ et Y est réduit à $\{0\}$. Sinon, soit $x_1 \in V$, avec $x_1 \neq 0$, tel que $R(x_1, x_1) = 0$; R étant non dégénérée, il existe $y_1 \in V$ tel que $R(x_1, y_1) = 1$. Notons Y_1 le sous-espace de V engendré par x_1 et y_1 . La matrice de la restriction de R à Y_1 dans la base $\{x_1, y_1\}$ est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & c_1 \end{pmatrix}$ avec $c_1 = R(y_1, y_1)$. De plus, R étant non dégénérée sur Y_1 , l'orthogonal pour R de Y_1 est un supplémentaire de Y_1 :

$$V = Y_1 \oplus Y_1^\perp.$$

Une récurrence décroissante nous donne

$$Y = Y_1 \oplus^\perp Y_2 \oplus^\perp \dots \oplus^\perp Y_k$$

avec $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & c_1 \end{pmatrix}$ pour matrice de la restriction de R à Y_i dans la base $\{x_i, y_i\}$ pour $1 \leq i \leq k$ et $X = Y^\perp$ anisotrope ou réduit à $\{0\}$. De plus, le sous-espace engendré par $\{x_1, \dots, x_k\}$ est un métaboliseur pour la restriction de R à Y , cette restriction est donc Witt-équivalente à 0.

Soient R_1 et R_2 deux formes antihermitiennes non dégénérées sur les \mathbb{K}_m -espaces vectoriels V_1 et V_2 , et $X_1 \oplus^\perp Y_1$ et $X_2 \oplus^\perp Y_2$ des décompositions comme ci-dessus, *i.e.* la restriction de R_i à X_i est anisotrope et la restriction de R_i à Y_i est Witt-équivalente à 0. Les restrictions aux Y_i étant Witt-équivalentes à 0, les formes R_1 et R_2 sont Witt-équivalentes si et seulement si $R_{1|X_1} \oplus (-R_{2|X_2})$ est Witt-équivalente à 0, c'est-à-dire si et seulement si il existe un métaboliseur pour $R_{1|X_1} \oplus (-R_{2|X_2})$. Supposons qu'il existe un tel métaboliseur, et notons $\{x_k^1 \oplus x_k^2\}_{1 \leq k \leq n}$ une base de ce métaboliseur (ici $x_k^i \in X_i$ et $\dim_{\mathbb{K}_m}(X_1 \oplus X_2) = 2n$).

La forme bilinéaire $R_{1|X_1}$ (resp. $R_{2|X_2}$) étant anisotrope, la famille $\{x_k^2\}_{1 \leq k \leq n}$ (resp. $\{x_k^1\}_{1 \leq k \leq n}$) est libre. En effet, soient a_k pour $1 \leq k \leq n$ des éléments de \mathbb{K}_m tels que

$$\sum_{1 \leq k \leq n} a_k x_k^2 = 0.$$

Alors $\{x_k^1 \oplus x_k^2\}_{1 \leq k \leq n}$ étant une base d'un métaboliseur de $R_{1|X_1} \oplus (-R_{2|X_2})$, on a :

$$\begin{aligned} R_{1|X_1} \left(\sum_{1 \leq k \leq n} a_k x_k^1, \sum_{1 \leq k \leq n} a_k x_k^1 \right) &= R_{2|X_2} \left(\sum_{1 \leq k \leq n} a_k x_k^2, \sum_{1 \leq k \leq n} a_k x_k^2 \right) \\ &= R_{2|X_2}(0, 0) = 0. \end{aligned}$$

De plus, $R_{1|X_1}$ étant anisotrope on a

$$\sum_{1 \leq k \leq n} a_k x_k^1 = 0$$

et par suite,

$$\sum_{1 \leq k \leq n} a_k (x_k^1 \oplus x_k^2) = 0.$$

Il s'ensuit que $a_k = 0$ pour tout k entre 1 et n et la famille $\{x_k^2\}_{1 \leq k \leq n}$ est donc libre. Par suite, $\dim_{\mathbb{K}_m} X_1 = \dim_{\mathbb{K}_m} X_2 = n$ et $\{x_k^i\}_{1 \leq k \leq n}$ est une base pour X_i pour $i = 1, 2$. De plus,

$$R_1(x_k^1, x_\ell^1) = R_2(x_k^2, x_\ell^2) \quad \text{pour } 1 \leq k, \ell \leq n.$$

Nous avons donc montré que si $R_{1|X_1} \oplus (-R_{2|X_2})$ est Witt-équivalente à 0 alors $R_{1|X_1}$ est isomorphe à $R_{2|X_2}$.

Revenons maintenant à la première partie de cette démonstration, en notant $\lambda = \lambda_m$ L'égalité matricielle suivante, vérifiée pour tout $c \in \mathbb{K}_m$ tel que $\bar{c} = -c$,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \lambda - \bar{\lambda} + \frac{1}{2}c & -1 \\ \lambda - \bar{\lambda} - \frac{1}{2}c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda - \bar{\lambda} + \frac{1}{2}c & \lambda - \bar{\lambda} - \frac{1}{2}c \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} -2(\lambda - \bar{\lambda}) & 0 \\ 0 & 2(\lambda - \bar{\lambda}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

montre que les formes antihermitiennes R et R_X ont même déterminant dans $\mathbb{K}_m/\mathbb{N}_{\mathbb{K}_m/\mathbb{L}_m} \mathbb{K}_m^*$ et mêmes signatures équivariantes. Par suite, si R_1 et R_2 deux formes antihermitiennes non dégénérées sur les \mathbb{K}_m -espaces vectoriels V_1 et V_2 sont Witt-équivalentes, elles ont mêmes signatures équivariantes, même déterminant et même rang modulo 2.

On notera que le rang d'une forme antihermitienne est égal aux signatures équivariantes modulo 2.

Réciproquement, soient R_1 et R_2 deux formes antihermitiennes non dégénérées, sur des \mathbb{K}_m -espaces vectoriels V_1 et V_2 , ayant mêmes signatures équivariantes et même déterminant. Soient r_1 et r_2 les dimensions respectives de V_1 et V_2 ; les signatures étant égales, les dimensions r_1 et r_2 ont donc même parité; on peut supposer sans perte de généralité qu'il existe un entier positif r tel que $r_1 + 2r = r_2$. Soit M la forme \mathbb{K}_m -antihermitienne (métabolique) sur $(\mathbb{K}_m)^{2r}$ dont la matrice dans la base canonique est la matrice diagonale

$$\text{Diag}(\underbrace{\lambda - \bar{\lambda}, \dots, \lambda - \bar{\lambda}}_{r \text{ termes}}, \underbrace{\bar{\lambda} - \lambda, \dots, \bar{\lambda} - \lambda}_{r \text{ termes}}).$$

Les formes $R_1 \oplus M$ et R_2 ont même déterminant, mêmes signatures équivariantes et même rang; elles sont donc isomorphes d'après le théorème 2.10. Par suite, M étant Witt-équivalente à 0, les formes R_1 et R_2 sont Witt-équivalentes.

2.16. THÉORÈME. — *La classe d'isomorphisme de la bilinéaire symétrique A^0 et les données (ii) et (iii) de la proposition 2.12 déterminent la forme de Seifert A sur $H_1(F, \mathbb{Q})$ à Witt-équivalence près.*

Démonstration. — La classe de Witt-équivalence de (S, t) sur $(t - 1)H_1(F, \mathbb{Q})$ est déterminée par l'ensemble, pour $m \geq 2$, des classes de Witt-équivalence des structures isométriques (S_m^1, t) sur

$\ker(\phi_m(t); \text{gr}_{-1}^W H_1(F, \mathbb{Q}))$ (cf. 1.11). La classe de Witt-équivalence de la structure isométrique (S_2^1, t) sur $\ker(\phi_2(t); \text{gr}_{-1}^W H_1(F, \mathbb{Q}))$ est donnée par la classe de Witt-équivalence de la forme antisymétrique S_2^1 sur le \mathbb{Q} -espace vectoriel $\ker(\phi_2(t); \text{gr}_{-1}^W H_1(F, \mathbb{Q}))$, cette dernière étant Witt-équivalente à 0, il est suffisant de prendre $m > 2$.

La proposition 2.15 permet alors de conclure.

3. Calcul explicite des invariants.

3.1. — Soient f_1, \dots, f_b les composantes irréductibles de f . On note φ_j un développement de Puiseux de la j -ième branche $f_j^{-1}(0)$, c'est-à-dire une série formelle de $\mathbb{C}[[x^{1/n_j}]]$ telle que $f_j(t^{n_j}, \varphi_j(t)) = 0$. On pose :

$$\varphi_j(x^{1/n_j}) = \sum_{k \geq 1} a_{j,k} x^{k/n_j}.$$

On suppose que l'entier n_j est minimal, c'est-à-dire qu'il existe k premier avec n_j tel que $a_{j,k}$ soit non nul ; n_j est la multiplicité en l'origine de $f_j^{-1}(0)$. On suppose également que l'axe des y n'est pas tangent à la courbe $f_j^{-1}(0)$, autrement dit, $a_{j,k} = 0$ pour $k < n_j$, ce qui est toujours possible, quitte à faire un changement de variables.

En 1.7, nous avons montré que la forme de Seifert rationnelle associée à un germe de courbe plane f est déterminée, à isomorphisme près, par la donnée de la forme bilinéaire symétrique A^0 sur $\ker((t-1); H_1(F, \mathbb{Q}))$ et de la structure isométrique $((t-1)H_1(F, \mathbb{Q}), S, t)$; pour cette dernière, nous avons donné, en 2.12, un ensemble complet d'invariants.

Dans cette section, nous allons montrer comment déterminer explicitement ces différents invariants en fonction du type topologique du germe f . On rappelle que le type topologique d'un germe de courbe plane f est caractérisé par les données de Puiseux, c'est-à-dire :

(i) pour chaque composante irréductible f_j de f les exposants caractéristiques de Puiseux, *i.e.* les k/n_j tels que $a_{j,k}$ soit non nul et il n'existe pas d'entier ℓ vérifiant $\ell < k$, $a_{j,\ell} \neq 0$ et $\text{pgcd}(\ell, n_j) = \text{pgcd}(k, n_j)$;

(ii) pour tout couple (j, k) avec $1 \leq j < k \leq b$, l'exposant de coïncidence $c_{j,k}$ entre φ_j et φ_k , *i.e.* en notant σ_j (resp. σ_k) un générateur du groupe de Galois de φ_j (resp. φ_k), $c_{j,k}$ est le maximum de l'ensemble des valuations des séries $\sigma_j^r(\varphi_j) - \sigma_k^s(\varphi_k)$ pour $1 \leq r \leq n_j$ et $1 \leq s \leq n_k$.

À chaque composante irréductible f_j de f est associée une composante de l'entrelacs de f donné par

$$K(f) = \prod_{j=1}^b (S_\varepsilon^3 \cap f_j^{-1}(0))$$

avec ε assez petit. Il lui correspond donc une composante de bord de la fibre de Milnor F .

3.2. Détermination de A^0 à isomorphisme près.

3.2.1. Soient c_1, \dots, c_b les classes des composantes de bord de F dans $H_1(F, \mathbb{Z})$, munies de l'orientation induite par l'orientation de F . Ces b classes forment un système générateur pour $\ker((t-1), H_1(F, \mathbb{Z}))$, avec pour seule relation $c_1 + \dots + c_b = 0$. Si $j \neq k$, $A^0(c_j, c_k)$ est égal au nombre d'enlacement entre c_j et c_k , ou encore au nombre d'intersection entre les composantes $f_j^{-1}(0)$ et $f_k^{-1}(0)$ du germe $f^{-1}(0)$, qui est égal à la valuation de la série $f_k(t^{n_j}, \varphi_j(t))$ (voir par exemple [C], §9.3, p. 183). En tenant compte de la relation ci-dessus, ceci donne la restriction de A à $\ker((t-1); H_1(F, \mathbb{Q}))$ ou de $A_{\mathbb{Z}}$ à $\ker((t-1); H_1(F, \mathbb{Z}))$.

On peut facilement voir que la forme quadratique associée à A^0 est définie négative. En effet, la relation $c_1 + \dots + c_b = 0$ donne l'égalité suivante :

$$A^0\left(\sum_{k=0}^b x_k c_k, \sum_{k=0}^b x_k c_k\right) = - \sum_{0 \leq i < j \leq b} A^0(c_i, c_j)(x_i - x_j)^2.$$

3.2.2. La classification des formes quadratiques non dégénérées sur \mathbb{Q} , déjà utilisée en 2.10, donne ici le résultat suivant (voir par exemple J.-P. Serre [Se]) :

THÉORÈME. — *La forme quadratique définie négative associée à A^0 est déterminée à isomorphisme ou à Witt-équivalence près par :*

- (i) le nombre b de branches irréductibles du germe f ,
- (ii) le déterminant de A^0 dans $\mathbb{Q}^*/\mathbb{Q}^{*2}$, et
- (iii) les invariants de Hasse $\mathcal{H}_p(A^0)$ pour p premier, $p \neq 2$.

En pratique, il est plus commode de déterminer les invariants de Hasse de $(-A^0)$. Si $(-A^0)$ est représentée par une matrice diagonale

Diag(a_1, \dots, a_{b-1}), on calcule

$$\mathcal{H}_p(-A^0) = \prod_{1 \leq j < k \leq b-1} \binom{a_j, a_k}{p}$$

en utilisant la bimultiplicativité du symbole de Hilbert et les égalités suivantes, où ℓ, ℓ' et p sont des nombres premiers distincts, différents de 2 :

$$\begin{aligned} \binom{\ell, \ell}{\ell} &= \binom{-1}{\ell} = (-1)^{(\ell-1)/2}, & \binom{\ell, 2}{\ell} &= \binom{2}{\ell} = (-1)^{(\ell^2-1)/8}, \\ \binom{\ell, \ell'}{\ell} &= \binom{\ell'}{\ell}, & \binom{2, 2}{p} &= \binom{\ell, \ell}{p} = \binom{\ell, 2}{p} = \binom{\ell, \ell'}{p} = 1. \end{aligned}$$

3.2.3. Bien que la classification des formes quadratiques définies positives sur \mathbb{Z} soit impraticable, on peut déterminer la forme bilinéaire $A_{\mathbb{Z}}^0$, restriction de $A_{\mathbb{Z}}$ à $\ker((t-1); H_1(F, \mathbb{Z}))$, à isomorphisme près. On a en effet le résultat suivant dû à R. Kaenders.

THÉORÈME (voir [Ka], th. 1.3). — Soient $\{\alpha_1, \dots, \alpha_b\}$ et $\{\beta_1, \dots, \beta_b\}$ deux systèmes générateurs de $\ker((t-1); H_1(F, \mathbb{Z}))$ tels que :

(i) $A(\alpha_j, \alpha_k) > 0$ et $A(\beta_j, \beta_k) > 0$ pour $1 \leq j < k \leq b$,

(ii) $\alpha_1 + \dots + \alpha_b = 0$ et $\beta_1 + \dots + \beta_b = 0$,

(iii) les familles $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{j-1}, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_b\}, \{\beta_1, \dots, \beta_{j-1}, \beta_{j+1}, \dots, \beta_b\}$ sont des bases de $\ker((t-1); H_1(F, \mathbb{Z}))$ pour tout $j \in \{1, \dots, b\}$.

Il existe alors une permutation σ de $\{1, \dots, b\}$ et $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ tels que pour tout $j \in \{1, \dots, b\}$ on ait $\alpha_j = \varepsilon \beta_{\sigma(j)}$.

On voit donc que les $A(c_j, c_k)$, pour $1 \leq j < k \leq b$, sont déterminés par la donnée de $A_{\mathbb{Z}}^0$ à isomorphisme près. Ce résultat nous sera utile en 4.2.

3.3. Arbre de désingularisation.

3.3.1. Soit Π la résolution minimale de f obtenue par éclatements successifs de points. Soient :

- $E := \Pi^{-1}(0)$ son *diviseur exceptionnel*,
- $E_0 := \overline{\Pi^{-1}(f^{-1}(0) \setminus 0)}$ la *transformée stricte de $f^{-1}(0)$* , et
- E_i les composantes irréductibles du diviseur exceptionnel.

Le diviseur à croisements normaux $\Pi^{-1}(f^{-1}(0))$ est égal à

$$E_0 + \sum e_i E_i,$$

où e_i est la *multiplicité* de E_i .

3.3.2. L'arbre dual de désingularisation $T(f)$ d'un germe de courbe plane f est construit de la façon suivante.

Chaque composante E_i du diviseur exceptionnel est représentée par un sommet i pondéré de la multiplicité e_i . Deux sommets sont reliés par une arête si et seulement si les composantes du diviseur exceptionnel qu'ils représentent s'intersectent. On ajoute en chaque sommet i autant de flèches qu'il existe de points d'intersection entre E_0 et E_i . On considère l'extrémité de chaque flèche comme un sommet supplémentaire de l'arbre, pondéré de la multiplicité 1.

3.3.3. Le type topologique d'un germe de courbe plane f est caractérisé par l'arbre de désingularisation $T(f)$ pondéré par les multiplicités e_i .

3.3.4. On dit que deux sommets i et j de $T(f)$ sont *voisins* si ils sont reliés par une arête ou une flèche, et on note $V(i)$ l'ensemble des voisins de i . Le cardinal de $V(i)$ est appelé la *valence* de i et est noté v_i . Si i et j sont voisins, on note m_{ij} le pgcd de e_i et e_j , et r_i le pgcd des m_{ij} pour $j \in V(i)$. On dit que i est un *sommet de rupture* si $v_i \geq 3$, et on note \mathcal{R} l'ensemble des indices des sommets de rupture. Pour tout sommet i , et pour j dans $V(i)$, on note ε_j la classe de $(-e_j)$ modulo e_i ; on appelle *halo* de i , et on note Θ_i , l'élément $(e_i, (\varepsilon_j)_{j \in V(i)})$ de $\mathbb{N} \times (\mathbb{Z}/e_i\mathbb{Z})^{V(i)}$.

3.4. Décomposition de la fibre de Milnor.

3.4.1. On construit dans [DM1], en fonction de l'arbre $T(f)$, une décomposition $F = \bigcup_i F_i$ de la fibre de Milnor $F = F(f)$, i décrivant l'ensemble des sommets de $T(f)$, et une monodromie géométrique h qui laisse stables les F_i . D'après [DM3], §§1.4 à 1.6, les propriétés de cette décomposition sont les suivantes : F_i est une surface à bord dont le bord est la réunion des $F_i \cap F_j$ pour $j \in V(i)$; de plus, $F_i \cap F_j$ est la réunion de m_{ij} cercles disjoints. Notons \check{F}_i la surface obtenue en privant F_i d'un petit col pour chaque cercle de bord, la restriction h_i de la monodromie h à \check{F}_i est d'ordre fini et admet la description précise suivante.

Chaque composante E_i du diviseur exceptionnel est une droite projective. On pose

$$\check{E}_i = E_i \setminus \bigcup_{j \in V(i)} B_{ij},$$

où B_{ij} est un petit disque ouvert de centre $E_i \cap E_j$, on note δ_{ij} le bord de B_{ij} muni de l'orientation induite par celle de \check{E}_i et $[\delta_{ij}]$ la classe de δ_{ij} dans $H_1(\check{E}_i)$. On construit dans *loc. cit.* une application

$p_i : \check{F}_i \rightarrow \check{E}_i$ qui est un revêtement cyclique régulier d'ordre e_i associé à l'homomorphisme $\rho_i : H_1(\check{E}_i, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}/e_i\mathbb{Z}$ défini par $\rho_i([\delta_{ij}]) = \varepsilon_j$. De plus, h_i est un générateur du groupe de Galois de p_i . On voit que le halo Θ_i décrit complètement (\check{F}_i, h_i) . La description de h le long des cylindres qui joignent \check{F}_i à \check{F}_j sera donnée en 3.9.

3.4.2. Soit D_i la surface obtenue en recollant, pour tout $j \in V(i)$, m_{ij} disques sur les composantes de bord de F_i au-dessus de δ_{ij} . Le revêtement p_i s'étend en un revêtement cyclique ramifié $D_i \rightarrow E_i$ d'ordre e_i , ramifié au-dessus des points $E_i \cap E_j$ pour $j \in V(i)$. Cette description fait de D_i une courbe algébrique projective lisse. On peut donner une construction purement géométrique de D_i , voir Steenbrink [St], §2.1. Nous noterons encore h_i l'extension de h_i à D_i , t l'endomorphisme induit par h_i et S_i la forme d'intersection sur $H_1(D_i, \mathbb{Q})$.

3.4.3. D'après [DM2], §2.14, la structure isométrique

$$(\text{gr}_{-1}^W H_1(F, \mathbb{Q}), S^1, t)$$

est isomorphe à la somme directe orthogonale des structures isométriques $(H_1(D_i, \mathbb{Q}), S_i, t)$. De plus, si $v_i < 3$, on a $H_1(D_i, \mathbb{Q}) = 0$; on a donc l'isomorphisme suivant :

$$(3.4.3) \quad (\text{gr}_{-1}^W H_1(F, \mathbb{Q}), S^1, t) \cong \bigoplus_{i \in \mathcal{R}} (H_1(D_i, \mathbb{Q}), S_i, t).$$

3.5. Calcul de Δ_{-1} (cf. 2.12, (i)). — La description de D_i comme revêtement ramifié de $\mathbb{C}P^1$ donne tout de suite le polynôme caractéristique de la monodromie sur $H_1(D_i, \mathbb{Q})$ (voir aussi [DM3], §2.8) :

$$\Delta_i(t) = \frac{(t^{e_i} - 1)^{v_i - 2} (t^{r_i} - 1)^2}{\prod_{j \in V(i)} (t^{m_{ij}} - 1)}.$$

D'après (3.4.3), le polynôme caractéristique Δ_{-1} de la monodromie sur $\text{gr}_{-1}^W H_1(F, \mathbb{Q})$ est :

$$\Delta_{-1}(t) = \prod_{i \in \mathcal{R}} \Delta_i(t).$$

3.6. Calcul des d_m^1 pour $m > 2$ (cf. 2.12, (ii)). — La description des D_i comme revêtements ramifiés permet de calculer les structures isométriques $(H_1(D_i, \mathbb{Z}), S_i, t)$ et d'en déduire les invariants d_m^1 .

3.6.1. On trouve dans [DM3], §1.17 la description d'une famille de $(v_i - 2)$ générateurs g_i^k , où $1 \leq k \leq v_i - 2$, du $\mathbb{Q}[t, t^{-1}]$ -module $H_1(D_i, \mathbb{Q})$. Pour les $m > 2$ tels que $\phi_m(t)$ divise $\Lambda_i(t)$, on a donc une famille de générateurs du \mathbb{K}_m -espace vectoriel $\ker(\phi_m(t); H_1(D_i, \mathbb{Q}))$:

$$g_{m,i}^k = \frac{\Lambda_i(t)}{\phi_m(t)} g_i^k, \quad 1 \leq k \leq v_i - 2.$$

La description des g_i^k (voir 3.6.2) nous permettra en 3.6.3 de calculer les séries de Laurent :

$$\mathbb{S}(g_i^k, g_i^\ell) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{a \in \mathbb{Z}} u^a S_i(g_i^k, t^a g_i^\ell),$$

pour $1 \leq k, \ell \leq v_i - 2$. On vérifie immédiatement l'égalité suivante :

$$\mathbb{S}(g_{m,i}^k, g_{m,i}^\ell) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{a \in \mathbb{Z}} u^a S_i(g_{m,i}^k, t^a g_{m,i}^\ell) = \frac{\Lambda_i(u)\Lambda_i(u^{-1})}{\phi_m(u)\phi_m(u^{-1})} \mathbb{S}(g_i^k, g_i^\ell).$$

On a alors, d'après 2.2, et avec les mêmes notations,

$$\begin{aligned} \sum_{a \in \mathbb{Z}} u^a S_{m,i}^\bullet(g_{m,i}^k, t^a g_{m,i}^\ell) &= \sum_{a \in \mathbb{Z}} u^a S_{m,i}^{\mathbb{K}_m}(P_{m,1}(t)g_{m,i}^k, t^a P_{m,1}(t)g_{m,i}^\ell) \\ &= \frac{\Lambda_i(u)\Lambda_i(u^{-1})}{\phi'_m(\lambda_m)\phi'_m(\lambda_m^{-1})(u - \lambda_m)(u^{-1} - \lambda_m^{-1})} \mathbb{S}(g_i^k, g_i^\ell), \end{aligned}$$

et par suite $S_{m,i}^\bullet(g_{m,i}^k, g_{m,i}^\ell)$ est égal au terme constant de cette série de Laurent. On notera

$$\sigma_{m,i}^{k,\ell} = \phi'_m(\lambda_m)\phi'_m(\lambda_m^{-1})S_{m,i}^\bullet(g_{m,i}^k, g_{m,i}^\ell),$$

le terme constant de la série de Laurent

$$\frac{\Lambda_i(u)\Lambda_i(u^{-1})}{(u - \lambda_m)(u^{-1} - \lambda_m^{-1})} \mathbb{S}(g_i^k, g_i^\ell).$$

La forme bilinéaire S_i est non dégénérée, il en est de même de la forme $S_{m,i}$ et de la forme antihermitienne $S_{m,i}^\bullet$. Par suite, si I est un sous-ensemble de $\{1, \dots, v_i - 2\}$, le déterminant

$$d_{m,i}(I) = \det((\sigma_{m,i}^{k,\ell})_{(k,\ell) \in I^2})$$

est non nul si et seulement si la famille $\{g_{m,i}^k\}_{k \in I}$ est libre. On trouve donc que la famille $\{g_{m,i}^k\}_{k \in I_0}$ est une base de $\ker(\phi_m(t); H_1(D_i, \mathbb{Q}))$ si I_0 est de cardinal maximal parmi les I tels que $d_{m,i}(I)$ soit non nul, et le déterminant $d_{m,i}$ de $S_{m,i}^\bullet$ est égal (dans $\mathbb{K}_m^*/N_{\mathbb{K}_m/\mathbb{L}_m}(\mathbb{K}_m^*)$) à $d_{m,i}(I_0)$ pour un tel I_0 . On trouve donc en utilisant 3.4.3 la proposition suivante :

PROPOSITION. — *Le déterminant d_m^1 de $S_m^{\bullet 1}$ est donné par l'égalité :*

$$d_m^1 = \prod_{i \in \mathcal{R}} d_{m,i}.$$

Remarque. — Si i est un point de rupture de valence 3, le $\mathbb{Q}[t, t^{-1}]$ -module $H_1(D_i, \mathbb{Q})$ est cyclique engendré par g_i^1 , on a alors

$$d_{m,i} = \sigma_{m,i}^{1,1}$$

et l'expression de $\mathbb{S}(g_i^1, g_i^1)$ donnée ci-dessous en 3.6.3 se simplifie également. Cette situation simple est la plus fréquente, car les points de rupture sont en général de valence 3. De façon précise, soient f_1, \dots, f_b les composantes irréductibles du germe f , et p_j le nombre de paires de Puiseux de f_j , le nombre de points de rupture de $T(f)$ est majoré par $p_1 + \dots + p_b + b - 1$ et le nombre de points de rupture de valence supérieure ou égale à 4 est majoré par $(b - 1)$.

3.6.2. La description de la famille génératrice du $\mathbb{Q}[t, t^{-1}]$ -module $H_1(D_i, \mathbb{Q})$ est la suivante. Pour $j \in V(i)$, on choisit ε_j tel que $0 \leq \varepsilon_j < e_i$. Soit $*$ un point de base de E_i . Soit $\gamma_{i,j}$ un 1-cycle basé en $*$ homotope à $\delta_{i,j}$ et tel que pour tout j et k appartenant à $V(i)$ avec $j \neq k$, on ait $\gamma_{i,j} \cap \gamma_{i,k} = *$. On réindice ces différents cycles par i, k avec $1 \leq k \leq v_i$ en demandant par exemple que la suite des e_k soit décroissante. On choisit un point 0 parmi les antécédents de $*$ par p_i et on identifie $p_i^{-1}(*)$ avec $\mathbb{Z}/e_i\mathbb{Z}$, de façon à avoir $h_i^\ell(0) \equiv \ell \pmod{e_i}$. On note $\hat{\gamma}_{i,j}$ le relevé de $\gamma_{i,j}$ qui commence en 0 et finit donc en ε_j .

On définit successivement :

$$d_{i,1} = \text{pgcd}(e_i, \varepsilon_1),$$

$$d_{i,j} = \text{pgcd}(d_{i,j-1}, \varepsilon_j) \quad \text{pour } 2 \leq j \leq v_i - 1.$$

Il existe des polynômes $\alpha_j(t)$ et $\beta_j(t)$ de $\mathbb{Z}[t]$ vérifiant :

$$t^{d_{i,1}} - 1 = \alpha_1(t)(t^{\varepsilon_1} - 1) + \beta_1(t)(t^{e_i} - 1),$$

$$t^{d_{i,j}} - 1 = \alpha_j(t)(t^{\varepsilon_j} - 1) + \beta_j(t)(t^{d_{i,j-1}} - 1) \quad \text{pour } 2 \leq j \leq v_i - 1.$$

On définit les cycles $g_i^1, \dots, g_i^{v_i-2}$ par les égalités suivantes :

$$g_i^1 = \alpha_1(t) \frac{t^{\varepsilon_2} - 1}{t^{d_{i,2}} - 1} \hat{\gamma}_{i,1} - \frac{t^{d_{i,1}} - 1}{t^{d_{i,2}} - 1} \hat{\gamma}_{i,2}$$

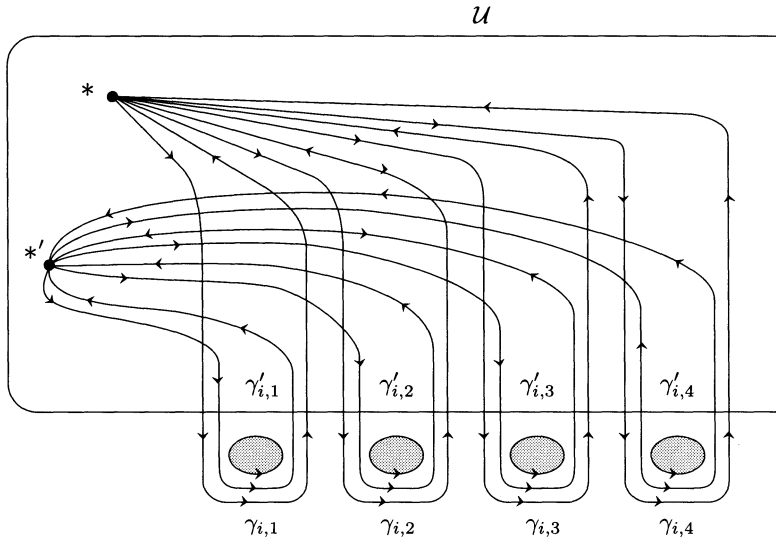
et pour $2 \leq j \leq v_i - 2$,

$$g_i^j = \frac{t^{\varepsilon_{j+1}} - 1}{t^{d_{i,j+1}} - 1} \left(\alpha_j(t) \hat{\gamma}_{i,j} + \sum_{k=1}^{j-1} \beta_j(t) \cdots \beta_{k+1}(t) \alpha_k(t) \hat{\gamma}_{i,k} \right) - \frac{t^{d_{i,j}} - 1}{t^{d_{i,j+1}} - 1} \hat{\gamma}_{i,j+1}.$$

D'après [DM3], §1.17, la famille $\{g_i^1, \dots, g_i^{v_i-2}\}$ engendre $H_1(D_i, \mathbb{Z})$. On notera $p_{i,j}^k(t)$ les polynômes de $\mathbb{Z}[t]$ tels que

$$g_i^j = \sum_{k=1}^{j+1} p_{i,j}^k(t) \hat{\gamma}_{i,k}.$$

3.6.3. Soit \mathcal{U} un voisinage de $*$ tel que la restriction de p_i au-dessus de \mathcal{U} soit triviale. Soit $*'$ un autre point de base dans \mathcal{U} , et O' le point de $p_i^{-1}(*')$ appartenant à la composante connexe de $p_i^{-1}(\mathcal{U})$ contenant 0 . Soient $\gamma'_{i,j}$ les 1-cycles construits de la même façon que les $\gamma_{i,j}$, avec $*'$ pour point de base, et tels que les intersections entre les $\gamma_{i,j}$ et les $\gamma'_{i,k}$ soient comme indiqué dans la figure ci-dessous. On demande aussi que les $\gamma_{i,j}$ et les $\gamma'_{i,k}$ ne s'intersectent pas en dehors de \mathcal{U} .



Nous allons maintenant calculer les séries de Laurent $\mathbb{S}(g_i^j, g_i^k)$ pour $1 \leq j, k \leq v_i - 2$. Les points $*$, $*'$ et les points d'intersection entre les $\gamma_{i,j}$ et $\gamma'_{i,k}$ devant rester dans \mathcal{U} , les conditions données ne définissent donc pas

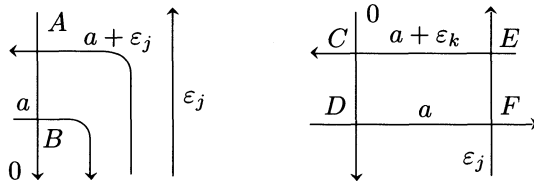
la figure de façon unique à homotopie près. Cependant les séries de Laurent ne dépendent pas du tracé choisi pour les $\gamma_{i,j}$ et $\gamma'_{i,k}$. D'autre part, dès que $v_i \geq 4$, la disposition des points $E_i \cap E_j$ pour $j \in V(i)$, dans E_i n'est pas nécessairement celle indiquée sur la figure qu'on utilise pour le calcul : les séries de Laurent dépendent effectivement de cette disposition, mais le type topologique du germe f , et donc l'invariant $d_{m,i}$, n'en dépendent pas.

Déterminons d'abord le nombre d'intersection entre les relevés $\hat{\gamma}_{i,j}$ et $t^a \hat{\gamma}'_{i,k}$:

(i) si $j > k$, les relevés $\hat{\gamma}_{i,j}$ et $t^a \hat{\gamma}'_{i,k}$ ne s'intersectent pas ;

(ii) si $j = k$, le relevé $\hat{\gamma}_{i,j}$ rencontre $t^a \hat{\gamma}'_{i,j}$ au-dessus de deux points A et B (voir figure). Comme $\hat{\gamma}_{i,j}$ (resp. $t^a \hat{\gamma}'_{i,j}$) est en 0 (resp. $a + \varepsilon_j$) au-dessus de A et en 0 (resp. a) au-dessus de B , la contribution au nombre d'intersection $S_i(g_i^j, t^a g_i^k)$ de $(\hat{\gamma}_{i,j}, t^a \hat{\gamma}'_{i,j})$ est donc -1 (resp. $+1$) au-dessus de A (resp. B) si $a \equiv -\varepsilon_j \pmod{e_i}$ (resp. $a \equiv 0 \pmod{e_i}$).

(iii) si $j < k$, le relevé $\hat{\gamma}_{i,j}$ rencontre $t^a \hat{\gamma}'_{i,k}$ au-dessus de quatre points C, D, E , et F (voir figure). La contribution de $(\hat{\gamma}_{i,j}, t^a \hat{\gamma}'_{i,k})$ au nombre d'intersection $S_i(g_i^j, t^a g_i^k)$ est -1 au-dessus de C (resp. F) si $a \equiv -\varepsilon_k \pmod{e_i}$ (resp. $a \equiv \varepsilon_j \pmod{e_i}$), et $+1$ au-dessus de D (resp. E) si $a \equiv 0 \pmod{e_i}$ (resp. $a \equiv \varepsilon_j - \varepsilon_k \pmod{e_i}$).



Un calcul simple donne le résultat suivant.

PROPOSITION. — La forme d'intersection S_i est déterminée par les séries de Laurent suivantes pour $1 \leq j, k \leq v_i - 2$:

$$\begin{aligned} \mathbb{S}(g_i^j, g_i^k) &= \sum_{a \in \mathbb{Z}} u^a S_i(g_i^j, t^a g_i^k) \\ &= \left[\sum_{\ell=1}^{j+1} p_{i,j}^\ell(u) \left[\sum_{m=\ell+1}^{k+1} p_{i,k}^m(u^{-1})(1 - u^{-\varepsilon_m} + u^{\varepsilon_\ell - \varepsilon_m} - u^{\varepsilon_\ell}) \right] \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\ell=1}^{\inf\{j+1, k+1\}} p_{i,j}^\ell(u) p_{i,k}^\ell(u^{-1})(1 - u^{-\varepsilon_\ell}) \right] \sum_{a \in \mathbb{Z}} u^{a e_i}. \end{aligned}$$

3.7. Calcul des signatures équivariantes $\sigma_\alpha(S^1)$ (cf. 2.12, (iii)). — Notons $\sigma_\alpha(S_i)$ la signature de la restriction de la forme \mathbb{C} -hermitienne $iS_i^{\mathbb{C}}$ au sous-espace propre pour la valeur propre α , où $S_i^{\mathbb{C}}$ est l'extension \mathbb{C} -antihermitienne de S_i à $H_1(D_i, \mathbb{C})$. D'après 3.4.3, la signature équivariante $\sigma_\alpha(S^1)$ est la somme des $\sigma_\alpha(S_i)$, $i \in \mathcal{R}$. L'application de la théorie de Hodge à $H^1(D_i, \mathbb{C})$ va nous permettre de calculer ces signatures de façon très simple (comparer avec le calcul de $d_{m,i}$).

On note :

- $\{x\}$ la partie fractionnaire de $x \in \mathbb{R}$, i.e. $\{x\} \in [0, 1[$ et $x - \{x\} \in \mathbb{Z}$,
- $\langle\langle x \rangle\rangle = \frac{1}{2} - \{x\}$ si $x \notin \mathbb{Z}$ et $\langle\langle x \rangle\rangle = 0$ si $x \in \mathbb{Z}$.

Si i est un sommet de l'arbre $T(f)$, on pose :

$$d_i(m) = \begin{cases} 1 & \text{si } m \text{ divise } e_i, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On rappelle que dans l'expression $e(k/m) = \exp(2\pi i k/m)$, nous supposons que k et m sont des entiers premiers entre eux tels que $0 < k < m$. Avec ces notations, on a :

PROPOSITION. — Pour $m > 2$, les signatures équivariantes de S^1 sont données par :

$$\sigma_{e(k/m)}(S^1) = 2 \sum_{i \in \mathcal{R}} d_i(m) \sum_{j \in V(i)} \left\langle\left\langle \frac{k}{m} e_j \right\rangle\right\rangle.$$

Démonstration. — Ce résultat est une reformulation du théorème [Ne], §1.9, démontré par Neumann à l'aide des signatures de Novikov. Posons :

$$M_{\ell i} = \sum_{i \in V(i)} \left\{ \frac{\ell e_j}{e_i} \right\}.$$

La description de la courbe algébrique D_i donnée en 3.4.2 conduit à l'isomorphisme suivant (voir Steenbrink [St], §3.14) :

$$p_{i*} \mathcal{O}_{D_i} \cong \bigoplus_{l=0}^{e_i-1} \mathcal{O}_{E_i}(-M_{\ell i}),$$

et l'action de la monodromie sur $\mathcal{O}_{E_i}(-M_{\ell i})$ est la multiplication par $\exp(2\pi i \ell / e_i)$. De plus, si ω (resp. $\bar{\omega}$) est une forme holomorphe (resp.

antiholomorphe) non nulle sur D_i , un calcul en coordonnées locales montre que $iS^C(\omega, \omega) > 0$ (resp. $iS^C(\bar{\omega}, \bar{\omega}) < 0$); par suite :

$$\sigma_\alpha(S_i) = -\dim(H^1(D_i, \mathcal{O}_{D_i}))_\alpha + \dim(H^0(D_i, \Omega_{D_i}^1))_\alpha,$$

où l'on note V_α le sous-espace propre de V pour la valeur propre α . On a donc aussi :

$$\sigma_\alpha(S_i) = \dim(H^1(D_i, \mathcal{O}_{D_i}))_{\bar{\alpha}} - \dim(H^1(D_i, \mathcal{O}_{D_i}))_\alpha,$$

et en utilisant [EGAI], §2.1 :

$$\begin{aligned} \sigma_{\exp(2\pi i l/e_i)}(S_i) &= \dim H^1(E_i, \mathcal{O}_{E_i}(-M_{e_i-l,i})) - \dim H^1(E_i, \mathcal{O}_{E_i}(-M_{l,i})), \\ \sigma_{\exp(2\pi i l/e_i)}(S_i) &= M_{e_i-l,i} - M_{l,i} = \sum_{j \in V(i)} \left(\left\{ \frac{-le_j}{e_i} \right\} - \left\{ \frac{le_j}{e_i} \right\} \right) = 2 \sum_{j \in V(i)} \left\langle \left\langle \frac{le_j}{e_i} \right\rangle \right\rangle. \end{aligned}$$

En sommant sur i , on trouve le résultat indiqué.

3.8. Calcul de Δ_0 (cf. 2.12, (iv)). — Soit G le graphe, construit en [DM1], §5.4, dont les sommets représentent les composantes connexes de chaque F_i et les arêtes représentent les composantes connexes de $F_i \cap F_j$. Pour chaque sommet i de l'arbre de la résolution, on a r_i sommets dans G et chaque composante de bord commune à une composante connexe de F_i et une composante connexe de F_j (pour $j \neq i$) est représentée par une arête reliant les deux sommets correspondants.

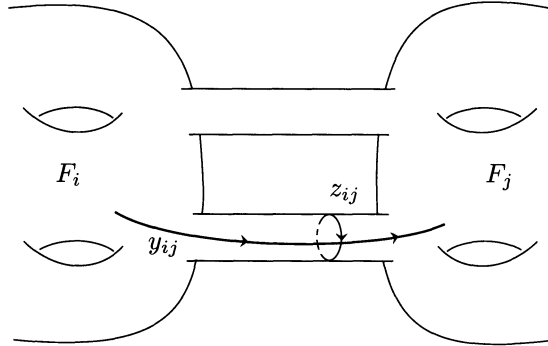
On note encore h l'action induite sur G par la monodromie sur F et t l'isomorphisme induit par h sur $H_1(G, \mathbb{Q})$. Par construction, $H_1(G, \mathbb{Q})$ est isomorphe à $\text{gr}_0^W H_1(F, \mathbb{Q})$. La suite exacte de Mayer-Vietoris correspondant à la décomposition de G en une union de voisinages des arêtes permet de calculer le polynôme caractéristique de la monodromie sur $H_1(G, \mathbb{Q})$, qui est égal au polynôme caractéristique $\Delta_0(t)$ de l'action de la monodromie sur $\text{gr}_0^W H_1(F, \mathbb{Q})$ (voir aussi [DM2], §2.14), on trouve :

$$\Delta_0(t) = (t - 1) \frac{\prod_{i < j; j \in V(i)} (t^{m_{ij}} - 1)}{\prod_i (t^{r_i} - 1)}.$$

3.9. Calcul des d_m^2 pour $m > 2$ (cf. 2.12, (vi)).

3.9.1. Nous allons maintenant décrire l'action de la monodromie h le long des cylindres qui joignent \tilde{F}_i à \tilde{F}_j .

Soient i et j deux sommets voisins de l'arbre de résolution $T(f)$, z_{ij} une composante connexe orientée de $F_i \cap F_j$ et y_{ij} une 1-chaîne orientée dont les extrémités appartiennent respectivement à F_i et F_j et intersectant $(F_i \cap F_j)$ en un point de z_{ij} . On a alors :



PROPOSITION (Neumann [Ne], §2). — On a l'égalité :

$$(h^e - \text{Id})y_{ij} = -S(y_{ij}, z_{ij}) \frac{em_{ij}}{e_i e_j} z_{ij}.$$

Bien que cette formule ne donne que l'action de h^e , elle permet de calculer les invariants qui restent à déterminer.

3.9.2. La formule de Neumann permet de calculer $(t^e - 1)y$ pour tout y dans $H_1(F, \mathbb{Q})$ en considérant l'intersection y_{ij} de y avec chacun des cylindres de recollement. On dispose aussi d'une formule close appelée *formule du twist* pour laquelle nous renvoyons le lecteur à [DM3], th. 2.21 et dont les termes se calculent à partir de l'arbre $T(f)$ et en fonction du tracé de y dans le graphe G . Vu la définition de la filtration W , $(t^e - 1)y$ ne dépend que de la classe de y dans $\text{gr}_0^W H_1(F, \mathbb{Q})$; de plus, $(t^e - 1)y$ est de la forme $(t - 1)x$ où x est un élément bien défini de $W_{-2}H_1(F, \mathbb{Q})/\ker(t - 1)$. Par dualité de Poincaré, ce module est isomorphe au dual $(\text{gr}_0^W H_1(F, \mathbb{Q}))^*$ de $\text{gr}_0^W H_1(F, \mathbb{Q})$. En procédant comme dans [DM1], §5.10 et en utilisant l'interprétation géométrique de la filtration W (voir [DM1], §2.1) :

$$W_{-2}H_1(F, \mathbb{Q}) = \text{im} \left\{ H_1 \left(\bigcup_{i < j} (F_i \cap F_j), \mathbb{Q} \right) \longrightarrow H_1(F, \mathbb{Q}) \right\},$$

on trouve une matrice de présentation $W_{-2}H_1(F, \mathbb{Q})/\ker(t - 1)$.

Les lignes de la matrice sont indexées par les arêtes de $T(f)$. Les colonnes de la matrice sont indexées par les arêtes et les sommets propres de $T(f)$ (on ne considère ici que les sommets propres de l'arbre, sans

tenir compte des extrémités des flèches). Dans la colonne correspondant à l'arête entre les sommets i et j le seul terme non nul est sur la ligne correspondant à l'arête entre i et j et a pour valeur $(t^{m_{ij}} - 1)$. Dans la colonne correspondant à un sommet i , les seuls termes non nuls sont les termes sur les lignes correspondants aux arêtes entre le sommet i et les sommets $j \in V(i)$, et ont pour valeur $(t^{m_{ij}} - 1)/(t^{r_i} - 1)$.

Après réduction de cette matrice, on trouve de nouveaux générateurs x_a et une décomposition en somme directe :

$$W_{-2}H_1(F, \mathbb{Q})/\ker(t - 1) \cong (\text{gr}_0^W H_1(F, \mathbb{Q}))^* = \bigoplus_a \mathbb{Q}[t]/\Lambda_a(t) \cdot x_a.$$

Soit A_m l'ensemble des a tels que $\phi_m(t)$ divise $\Lambda_a(t)$. Pour a dans A_m , on pose

$$x_a^m = (\Lambda_a(t)/\phi_m(t))x_a$$

et on a donc :

$$\ker(\phi_m(t); (\text{gr}_0^W H_1(F, \mathbb{Q}))^*) = \bigoplus_{a \in A_m} \mathbb{Q}[t]/\phi_m(t) \cdot x_a^m.$$

On prend donc $\{x_a^m, tx_a^m, \dots, t^{\varphi(m)-1}x_a^m\}_{a \in A_m}$ pour base de ce \mathbb{Q} -espace vectoriel et la base duale pour base de $\ker(\phi_m(t); \text{gr}_0^W H_1(F, \mathbb{Q}))$. On note y_a^m le cycle dual de x_a^m . Les cycles x_a^m et y_a^m sont connus explicitement en fonction du graphe G , on peut donc calculer les nombres d'intersection $S(t^c x_a^m, t^d y_b^m)$ pour a et b dans A_m et c et d dans \mathbb{Z} .

La formule du twist permet de calculer les polynômes $Tw_m^{a,b}(t)$ tels que :

$$(t^e - 1)y_a^m = \sum_{b \in A_m} Tw_m^{a,b}(t)x_b^m.$$

Ceci permet de calculer les séries de Laurent :

$$\begin{aligned} \mathbb{S}(y_a^m, y_b^m) &\stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{k \in \mathbb{Z}} u^k S_m((t^e - 1)y_a^m, t^k y_b^m) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} u^k \sum_{c \in A_m} S_m(Tw_m^{a,c}(t)x_c^m, t^k y_b^m), \end{aligned}$$

pour a et b dans A_m .

En reprenant les notations de 3.6, on en déduit la série de Laurent

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} u^k S_m^{2\bullet}(y_a^m, t^k y_b^m) = P_{m,1}(u)\overline{P_{m,1}}(u^{-1})\mathbb{S}(y_a^m, y_b^m) \quad (\in \mathbb{K}_m[u, u^{-1}]),$$

où $\overline{P_{m,1}}$ est le polynôme déduit de $P_{m,1}$ par l'involution de \mathbb{K}_m , et $S_m^{2\bullet}(y_a^m, y_b^m) (\in \mathbb{L}_m)$ est égal au terme constant de cette série.

PROPOSITION. — *Le déterminant d_m^2 de S_m^2 est l'élément suivant de $\mathbb{L}_m^*/N_{\mathbb{K}_m/\mathbb{L}_m}(\mathbb{K}_m^*)$:*

$$d_m^2 = \det(S_m^{2\bullet}(y_a^m, y_b^m))_{a,b \in A_m}.$$

3.10. *Calcul des signatures équivariantes $\sigma_\alpha(S^2)$ pour chaque valeur propre α , $\alpha \neq -1$, racine de Δ_0 (cf. 2.12, (vii)). — Avec les notations de 3.9.1, la formule de Neumann donne :*

$$S((h^e - \text{Id})y_{ij}, y_{ij}) = [S(y_{ij}, z_{ij})]^2(em_{ij}/e_i e_j) > 0.$$

Il s'ensuit que $S^2(y, y)$ est strictement positif pour tout y non nul dans $\text{gr}_0^W H_1(F, \mathbb{Q})$. La forme quadratique associée à S^2 est donc définie positive et pour tout α , la signature $\sigma_\alpha(S^2)$ est égale à l'ordre de multiplicité de α comme racine de Δ_0 .

3.11. *Détermination de S_2^2 à isomorphisme près (cf. 2.12, (v)). — En utilisant 3.9, on peut trouver une matrice de la forme quadratique définie positive associée à S_2^2 . On en déduit comme en 3.2.2 un ensemble complet d'invariants qui classe S_2^2 à isomorphisme près.*

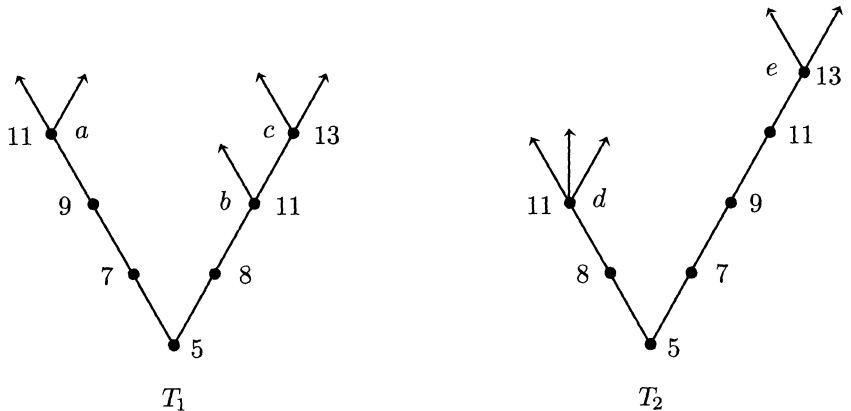
4. Exemples et applications.

4.1. Considérons les germes de courbe plane g_1 et g_2 suivants :

$$g_1(x, y) = (y + x)(y + x + x^4)(y + 2x)(y + 2x + x^3)(y + 2x + x^4),$$

$$g_2(x, y) = (y + x)(y + x + x^3)(y + x + 2x^3)(y + 2x)(y + 2x + x^5),$$

dont les arbres de désingularisation T_1 et T_2 sont :



PROPOSITION. — Les formes de Seifert rationnelles A_1 et A_2 associées aux germes de courbe plane g_1 et g_2 sont isomorphes, et donc aussi Witt-équivalentes. Les structures isométriques sur $H_1(F(g_1), \mathbb{Z})/\ker(t - 1)$ et $H_1(F(g_2), \mathbb{Z})/\ker(t - 1)$ sont isomorphes et la monodromie est d'ordre fini. Par contre, les formes de Seifert entières $A_{\mathbb{Z}}(g_1)$ et $A_{\mathbb{Z}}(g_2)$ ne sont pas isomorphes.

Démonstration. — Les arbres de désingularisation montrent que

$$\text{gr}_0^W H_1(F(g_i), \mathbb{Q}) = \{0\};$$

la monodromie est donc d'ordre fini. La démonstration comporte les deux points suivants.

(i) En prenant pour base quatre des cinq composantes de bord, on trouve pour matrices des restrictions A_i^0 de A_i ($i = 1$ ou 2) à $\text{Ker}(t - 1)$:

$$B_1 = \begin{pmatrix} -7 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & -7 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -9 & 4 \\ 1 & 1 & 4 & -9 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & -8 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -8 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & -8 \end{pmatrix}.$$

La forme quadratique entière $A_{\mathbb{Z}}^0(g_i)$ est impaire si $i = 1$, paire si $i = 2$; $A_{\mathbb{Z}}(g_1)$ et $A_{\mathbb{Z}}(g_2)$ ne sont donc pas isomorphes. On peut mettre $-A_1^0$ (resp. $-A_2^0$) sous forme diagonale, avec pour diagonale $(1, 3 \cdot 11, 3 \cdot 5 \cdot 11, 5 \cdot 13)$ (resp. $(2, 2 \cdot 5 \cdot 11, 2 \cdot 5 \cdot 19, 2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 19)$); on en déduit que les formes quadratiques rationnelles A_i^0 pour $i = 1, 2$ ont pour invariants :

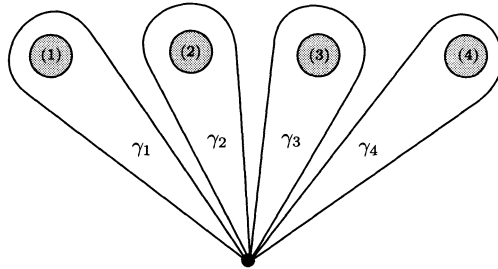
$$\det A_i^0 = 13, \quad \text{sign}(-A_i^0) = 4, \\ \mathcal{H}_{11}(-A_i^0) = \mathcal{H}_{13}(-A_i^0) = -1, \quad \mathcal{H}_p(-A_i^0) = +1,$$

si p est un nombre premier distinct de 2, 11 et 13; par suite, A_1^0 et A_2^0 sont isomorphes.

(ii) Étudions maintenant les points de rupture de T_1 et T_2 : les halos $\Theta(c)$ et $\Theta(e)$ sont identiques, donc les structures isométriques $(H_1(D_c, \mathbb{Z}), S_c, t)$ et $(H_1(D_e, \mathbb{Z}), S_e, t)$ sont isomorphes et les invariants (déterminant d_{13}^1 et signatures équivariantes) de A_1 et A_2 associés à ϕ_{13} sont égaux. Nous allons démontrer que la structure isométrique $(H_1(D_d, \mathbb{Z}), S_d, t)$ est isomorphe à la somme directe orthogonale des structures isométriques $(H_1(D_a, \mathbb{Z}), S_a, t)$ et $(H_1(D_b, \mathbb{Z}), S_b, t)$. Il s'ensuit que les invariants (déterminant d_{11}^1 et

signatures équivariantes) de A_1 et A_2 associés à ϕ_{11} sont égaux et que les formes de Seifert rationnelles A_1 et A_2 sont isomorphes.

La surface close D_d associée à l'arbre T_2 est un revêtement ramifié de \mathbb{CP}^1 de degré 11, ramifié au-dessus de quatre points. Avec les notations utilisées plus haut, on peut numéroter les points de ramification dans \mathbb{CP}^1 comme indiqué, de telle sorte que $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 10$ et $\varepsilon_4 = 3$.



Considérons les cycles :

$$g_1 = \hat{\gamma}_1 - \hat{\gamma}_2, \quad g_2 = (t + t^2 + t^3)\hat{\gamma}_3 + \hat{\gamma}_4, \quad g_3 = \hat{\gamma}_3 - \hat{\gamma}_1.$$

D'après [DM3], §1.19, les cycles g_1 et g_3 engendrent $H_1(D_d, \mathbb{Z})$. La relation

$$t^3 \hat{\gamma}_1 + t^2 \hat{\gamma}_2 + t \hat{\gamma}_3 + \hat{\gamma}_4 = 0$$

montre que $g_2 = t^2 g_1 + (t^2 + t^3) g_3$, donc g_1 et g_2 engendrent $H_1(D_d, \mathbb{Z})$ car $(t^2 + t^3)$ est inversible dans $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]/\phi_{11}$. On a donc :

$$H_1(D_d, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[t, t^{-1}]/\phi_{11} \cdot g_1 \oplus \mathbb{Z}[t, t^{-1}]/\phi_{11} \cdot g_2.$$

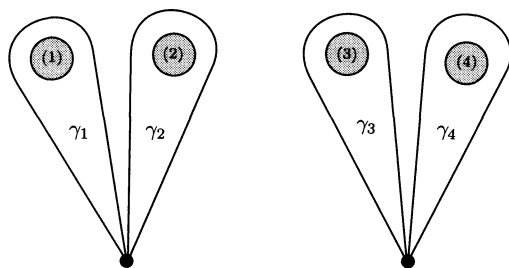
En effet, d'après la figure, pour tout $P_1(t)$ et $P_2(t)$ dans $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$, on a :

$$S_d(P_1(t)g_1, P_2(t)g_2) = 0.$$

Cette somme directe est donc orthogonale pour S_d .

Les surfaces closes D_a et D_b associées à l'arbre T_1 sont des revêtements ramifiés de \mathbb{CP}^1 de degré 11, ramifiés au-dessus de trois points (voir la figure page suivante où l'on représente les deux copies de \mathbb{CP}^1 .)

On a $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 10$ et $\varepsilon_4 = 3$. On peut prendre $g'_1 = \hat{\gamma}_1 - \hat{\gamma}_2$ (resp. $g'_2 = (t + t^2 + t^3)\hat{\gamma}_3 + \hat{\gamma}_4$) pour générateur de $H_1(D_a, \mathbb{Z})$ (resp. de $H_1(D_b, \mathbb{Z})$), on trouve donc que les structures isométriques $(H_1(D_a, \mathbb{Z}), S_d, t)$ et $(H_1(D_a, \mathbb{Z}), S_a, t) \oplus^\perp (H_1(D_b, \mathbb{Z}), S_b, t)$ sont isomorphes, d'où la proposition.



4.2. Nœuds algébriques cobordants. — Considérons les germes de fonction holomorphe à singularité isolée suivants, où g_1 et g_2 sont les germes considérés ci-dessus et n, p, q sont des entiers supérieurs ou égaux à 3 :

$$f_{p,q,i}(z_0, \dots, z_n) = g_i(z_0, z_1) + z_2^p + z_3^q + \sum_{j=4}^n z_j^2.$$

THÉORÈME. — Soit $K_{p,q,i}$ l'entrelacs algébrique du germe $f_{p,q,i}$; supposons que p et q sont des nombres premiers distincts supérieurs ou égaux à 17; alors les nœuds algébriques $K_{p,q,1}$ et $K_{p,q,2}$ sont cobordants et non isotopes. De plus, la monodromie associée est d'ordre fini.

Démonstration. — Notons $A_{p,q}$ la forme de Seifert du germe $z_2^p + z_3^q$, on a alors, d'après K. Sakamoto [Sa],

$$A(f_{p,q,i}) = (-1)^{n+1} A(g_i) \otimes A_{p,q}.$$

Utilisant [DM2], §§1.4 à 1.7 et l'hypothèse sur p et q , on trouve que les formes de Seifert $A(f_{p,q,1})$ et $A(f_{p,q,2})$ sont Witt-équivalentes et que les nœuds algébriques $K(f_{p,q,1})$ et $K(f_{p,q,2})$ sont des nœuds sphériques cobordants. La monodromie associée à g_i est d'ordre fini, il en est donc de même pour $f_{p,q,i}$.

Il reste à démontrer que ces nœuds ne sont pas isotopes, en démontrant que les formes de Seifert ne sont pas isomorphes. Le point de départ est le résultat obtenu en 4.1 : $A_{\mathbb{Z}}(g_1)$ et $A_{\mathbb{Z}}(g_2)$ ne sont pas isomorphes. La forme de Seifert du germe $z \mapsto z^p$ admet pour matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

dans la base $\{\varpi, t\varpi, \dots, t^{p-2}\varpi\}$ où l'on note ϖ un générateur de $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]/\phi_p(t)$. On note de même χ un générateur de $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]/\phi_q(t)$, δ_n un générateur de $(\mathbb{Z}[t, t^{-1}]/(t+1))^{\otimes(n-3)}$ et $M_{n,p,q}$ le module de monodromie entière associé au germe

$$z_2^p + z_3^q + \sum_{j=4}^n z_j^2.$$

En notant c_1 le premier élément dans la base de $\text{Ker}((t-1); H_1(F(g_1), \mathbb{Z}))$ utilisée en 4.1, on a :

$$A_{\mathbb{Z}}(f_{p,q,1})(c_1 \otimes \varpi \otimes \chi \otimes \delta_n, c_1 \otimes \varpi \otimes \chi \otimes \delta_n) = (-1)^{n-1}7.$$

On voit donc que la fonction

$$\begin{aligned} \text{Ker}((t-1); H_1(F(g_1), \mathbb{Z})) \otimes M_{n,p,q} &\longrightarrow \mathbb{Z}, \\ x &\longmapsto A_{\mathbb{Z}}(f_{p,q,1})(x, x), \end{aligned}$$

peut prendre des valeurs impaires. Au contraire, la fonction

$$\begin{aligned} \text{Ker}((t-1); H_1(F(g_2), \mathbb{Z})) \otimes M_{n,p,q} &\longrightarrow \mathbb{Z}, \\ x &\longmapsto A_{\mathbb{Z}}(f_{p,q,2})(x, x), \end{aligned}$$

ne prend que des valeurs paires puisque la forme quadratique $A_{\mathbb{Z}}^0(g_2)$ est paire. Il s'ensuit que $A_{\mathbb{Z}}(f_{p,q,1})$ et $A_{\mathbb{Z}}(f_{p,q,2})$ ne sont pas isomorphes et que les nœuds $K(f_{p,q,1})$ et $K(f_{p,q,2})$ ne sont pas isotopes.

4.3. — Nous dirons qu'un germe de courbe plane g a un *arbre de désingularisation symétrique* si g est le produit de deux germes g_1 et g_2 qui ont le même type topologique et dont les cônes tangents sont transverses et réduits à une seule droite.

PROPOSITION. — *Si le germe de courbe plane g a un arbre symétrique, la classe d'isomorphisme de $A^0(g)$ et les signatures équivariantes déterminent la forme de Seifert $A(g)$ à Witt-équivalence près. En particulier, les invariants d_m^1 de $A(g)$ sont donnés par la formule :*

$$d_m^1 = (-1)^{\sigma_{e(k/m)}(S^1)/2}.$$

Démonstration. — Notons $r = r(m)$ le plus grand entier tel que ϕ_m^{2r} divise Δ_{-1} (remarque : Δ_{-1} est un carré). D'après l'hypothèse de symétrie, la forme hermitienne $S_m^{\bullet 1}$ admet dans une base bien choisie une matrice diagonale de la forme (où $\ell_1, \dots, \ell_{r(m)} \in \mathbb{L}_m$) :

$$\begin{aligned} \text{Diag}((\lambda_m - \lambda_m^{-1})\ell_1, \dots, (\lambda_m - \lambda_m^{-1})\ell_{r(m)}, \\ (\lambda_m - \lambda_m^{-1})\ell_1, \dots, (\lambda_m - \lambda_m^{-1})\ell_{r(m)}). \end{aligned}$$

Mais $(\lambda_m - \lambda_m^{-1})^2 = -1$ dans $\mathbb{K}_m/N_{\mathbb{K}_m/L_m}\mathbb{K}_m^*$, donc $d_m^1 = (-1)^{r(m)}$. D'autre part, on voit facilement, en considérant l'arbre $T(g)$, que $\frac{1}{2}\sigma_{e(k/m)}(S^1)$ a la même parité que $r(m)$.

Remarque. — La forme de Seifert A est déterminée à Witt-équivalence près par une liste d'invariants beaucoup plus courte que la liste d'invariants qui détermine A à isomorphisme près, tout particulièrement si le germe a un arbre symétrique. On peut donc conjecturer qu'il existe des germes de courbe plane Φ_1 et Φ_2 dont les formes de Seifert sont Witt-équivalentes et tels que $\nu_0(\Phi_1) \neq \nu_0(\Phi_2)$, où ν_0 désigne la multiplicité du germe en 0. Considérons les germes

$$f_i(z_0, \dots, z_n) = \Phi_i(z_0, z_1) + z_2^{p_2} + \dots + z_n^{p_n},$$

où p_2, \dots, p_n sont des nombres premiers distincts assez grands, $i = 1$ ou 2 et $n \geq 3$. On a donc $\nu_0(f_i) = \nu_0(\Phi_i)$ et, en suivant 4.2, on est conduit à poser la question suivante, variante «à cobordisme près» de la conjecture de Zariski.

Question. — Existe-t-il des germes de fonction holomorphe à singularité isolée $f_1, f_2 : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ dont les multiplicités $\nu_0(f_1)$ et $\nu_0(f_2)$ sont distinctes et dont les entrelacs algébriques $K(f_1)$ et $K(f_2)$ sont des noeuds (sphériques) cobordants ?

Remerciements. — Le second auteur remercie le Professeur C.T.C. Wall des discussions utiles sur le sujet de ce travail, ainsi que le Département de Mathématiques de l'Université de Liverpool pour son accueil pendant l'année 1992–93. Le premier auteur remercie R. Kaenders pour ses remarques sur la première version de cet article.

BIBLIOGRAPHIE

- [C] A. CHENCINER, Courbes algébriques planes, Publications Mathématiques de l'Université Paris VII, 1978.
- [DM1] P. DU BOIS, F. MICHEL, Filtration par le poids et monodromie entière, Bull. Soc. Math. de France, 120 (1992), 129–167.
- [DM2] P. DU BOIS, F. MICHEL, Cobordism of algebraic knots via Seifert forms, Invent. Math., 111 (1993), 151–169.
- [DM3] P. DU BOIS, F. MICHEL, The integral Seifert form does not determine the topology of plane curves, J. Alg. Geometry, 3 (1994), 1–38.
- [DS] M. VAN DOORN, J. STEENBRINK, A supplement to monodromy theorem, Abh. Math. Sem. Hamburg Univ., 59 (1989), 225–233.

- [Du] A. DURFEE, Fibred knots and algebraic singularities, *Topology*, 13 (1974), 47–59.
- [EGAI] A. GROTHENDIECK, *Éléments de Géométrie Algébrique III*, Publ. Math. IHES, 11 (1961).
- [J] N. JACOBSON, A Note on Hermitian Forms, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 46 (1940), 264–268.
- [Ka] R. KAENDERS, The Seifert Form of a Plane Curve Singularity determines its Intersection Multiplicities, à paraître dans *Indag. Math.*.
- [Ke] M. KERVAIRE, Knot cobordism in codimension two Manifolds Amst. 1970, *Lecture Notes in Math.*, Springer-Verlag, t. 197 (1971), 83–105.
- [La] W. LANDHERR, Äquivalenz Hermitescher Formen über einem beliebigen algebraischen Zahlkörper, *Abh. Math. Sem. Hamburg Univ.*, 11 (1935), 245–248.
- [Le] J. LEVINE, Knot cobordism groups in codimension two, *Comment. Math. Helv.*, 44 (1969), 229–244.
- [Mil] J. MILNOR, Singular points of complex hypersurfaces, *Annals Math. Studies* 61, Princeton Univ. Press, 1968.
- [Mi2] J. MILNOR, On isometries of inner product spaces, *Invent. Math.*, 8 (1969), 83–97.
- [MiH] J. MILNOR, D. HUSEMOLLER, *Symmetric bilinear forms*, Springer-Verlag, 1973.
- [Ne] W.D. NEUMANN, Invariants of plane curves singularities, Nœuds, tresses et sing., *Monog. de l'Enseignement. Math.*, Univ. de Genève, 1983.
- [Sa] K. SAKAMOTO, The Seifert matrices of Milnor fiberings defined by holomorphic functions, *J. Math. Soc. Japan*, 26 (1974), 4.
- [SSS] R. SCHRAUWEN, J. STEENBRINK, J. STEVENS, Spectral pairs and the topology of curve singularities, *Proc. Sympos. Pure Math.*, 53 (1991), 305–328.
- [Se] J.-P. SERRE, *Cours d'Arithmétique*, Presses Universitaires de France, 1970.
- [St] J. STEENBRINK, Mixed Hodge structure on the vanishing cohomology, *Nordic Summer School NAVF, Symposium in Math.* Oslo, 1976.

Manuscrit reçu le 10 juillet 1995,
 accepté le 2 février 1996.

P. DU BOIS,
 Département de Mathématiques,
 Université d'Angers
 2, Boulevard Lavoisier
 49045 Angers (France).
 philippe.dubois@univ-angers.fr

O. HUNAUULT,
 Département de Mathématiques
 Université de Nantes
 2, rue de la Houssinière
 44072 Nantes (France).