ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JEAN-MARIE LION
JEAN-PHILIPPE ROLIN

Homologie des ensembles semi-pfaffiens

Annales de l'institut Fourier, tome 46, nº 3 (1996), p. 723-741
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1996__46_3_723_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
46, 3 (1996), 723-741

HOMOLOGIE DES ENSEMBLES SEMI-PFAFFIENS

par J.-M. LION et J.-P. ROLIN

Sommaire.

Introduction.

Khovanskii définit dans [Kh1] et [Kh2] (voir également [Ri]) la notion d'*hypersurface séparante :* ce sont certaines sous-variétés de codimension 1 d'une variété analytique réelle tangentes au noyau d'une 1-forme différentielle et séparant la variété en deux ouverts disjoints dont elles sont les bords. Il décrit à l'aide des hypersurfaces séparantes les *sous-variétés de*

Mots-clés : Feuilletage – Géométrie analytique réelle – Homologie.
Classification math. : 32C05 – 32C25 – 58A99 – 14G30 – 32B20 – 34C35.

Pfaff. Il leur associe une notion de *complexité* et il étudie leurs propriétés topologiques. Il montre en particulier que les nombres de Betti d'une variété de Pfaff sont finis et explicitement bornés en fonction de la complexité. Il démontre ce résultat en utilisant une fonction de Morse polynomiale définie sur la variété.

Les propriétés topologiques d'ensembles définis par des équations différentielles ont été étudiées par d'autres auteurs. Tougeron adopte dans [To1] et [To2] le point de vue suivant. Il considère une algèbre $\mathcal{A}(\Omega)$ de fonctions analytiques définies sur un ouvert Ω de $\mathbf{R}^n$ qui contient les fonctions polynomiales et qui est stable par dérivation. Il montre que si $\mathcal{A}(\Omega)$ possède des propriétés voisines de la noethérianité alors les nombres de Betti des ensembles semi-analytiques définis par des fonctions de $\mathcal{A}(\Omega)$ sont finis. De telles algèbres peuvent être construites en étendant l'algèbre des fonctions polynomiales sur Ω par des fonctions solutions d'équations aux dérivées partielles à coefficients analytiques sur Ω.

Les objets que nous étudions dans cet article ont été définis par Moussu et Roche ([MR1], [MR2]) lors de leur contribution au problème de Dulac. Soient M un ouvert semi-analytique relativement compact de $\mathbf{R}^n$, ω une 1-forme différentielle analytique définie au voisinage de $\overline{M}$ et V une hypersurface intégrale de l'équation de Pfaff $\omega = 0$. Le triplet (V, ω, M) est appelé *hypersurface de Rolle* si tout chemin analytique à extrémités dans V est tangent au noyau de ω en un point. Le résultat essentiel de [MR1] est la finitude du nombre de composantes connexes d'ensembles du type $X \cap V_1 \cap \ldots \cap V_q$, où X est un sous-ensemble semi-analytique de $\mathbf{R}^n$ et les (V_i, M, ω_i) sont des hypersurfaces de Rolle. De tels ensembles sont dits *pfaffiens.* Leurs propriétés topologiques ont été étudiées dans [Li], [LR], [Ro] et [CLM]. En particulier il est montré dans [Li] que les nombres de Betti de certains ensembles pfaffiens lisses sont finis. Cette preuve reprend des idées de Khovanskii ([Kh1] et [Kh2], [Ri]).

Thom [Th1] et Milnor [Mi] majorent les nombres de Betti des variétés algébriques réelles. En s'inspirant de leurs méthodes, nous montrons un résultat analogue pour les *ensembles semi-pfaffiens* (Théorème I). Il s'agit des ensembles obtenus par intersection et réunion finies d'ensembles pfaffiens et de leurs complémentaires dans M. Ce résultat prolonge l'analyse faite par Thom de la topologie des bouts de feuilles de feuilletages à singularités isolées [Th2]. Notre théorème diffère de celui de Tougeron : nous ne disposons pas pour définir les ensembles semi-pfaffiens de fonctions analytiques définies globalement sur M. L'idée majeure est ici d'utiliser les *fonctions distances aux hypersurfaces de Rolle.* Elles ne présentent pas de bonnes propriétés sur M. Néanmoins, le graphe de leur restriction sur des ouverts M_η strictement inclus dans M est, au voisinage des hypersurfaces de Rolle, la *projection d'un ensemble pfaffien.* Ces fonctions nous permettent de définir des algèbres sur les ouverts M_η. Nous montrons que les ensembles définis par des fonctions de ces algèbres ont un nombre fini de composantes connexes. De plus, des arguments de théorie de Morse appliqués aux mêmes fonctions montrent que les nombres de Betti d'ensembles lisses (que nous qualifions de *feuillets normaux pfaffiens*) définis par ces algèbres sont finis. Or l'intersection avec M_η d'un ensemble semi-pfaffien de M est une union disjointe finie de feuillets normaux pfaffiens. Nous en calculons l'homologie à l'aide de rétractions définies par le gradient des fonctions distances, suivant les méthodes développées par Thom [Th1]. Enfin nous concluons en remarquant que les bornes obtenues ne dépendent pas du paramètre η.

Notre second résultat porte sur la plus petite classe d'ensembles contenant les ensembles pfaffiens, stable par union finie, intersection finie, passage à l'adhérence et projection linéaire. Ne disposant que d'arguments topologiques, nous savons montrer la finitude du nombre de composantes connexes d'un élément de cette classe (Théorème II), mais pas celle des autres nombres de Betti. Ce résultat, qui généralise un théorème de [LR], permet de retrouver la finitude du nombre de composantes connexes des ensembles considérés par Charbonnel dans [Ch].

Nos résultats ne font qu'esquisser une description des ensembles pfaffiens et de leurs projections linéaires, pour lesquels il n'existe pas encore de "théorie générale". Nous ne savons pas stratifier les ensembles semi-pfaffiens. En particulier, nous ne savons pas si l'adhérence et les composantes connexes d'un semi-pfaffien sont des semi-pfaffiens. De plus, les méthodes présentées dans cet article ne permettent pas de contrôler l'homologie de l'adhérence d'un ensemble semi-pfaffien. Signalons toutefois deux résultats dans cette direction.

Dans [CLM] il est prouvé que le bord d'une hypersurface pfaffienne de Rolle est une réunion de projections propres de réunions d'ensembles pfaffiens. La preuve de ce résultat fait appel à un théorème de désingularisation des 1-formes intégrables.

Il résulte du théorème de Wilkie ([Wi], [Re], [DMM]) que le complémentaire de la projection d'un ensemble pfaffien défini seulement à l'aide des formes différentielles à coefficients linéaires est encore un ensemble du même type. Les diverses preuves de ce théorème utilisent des arguments de théorie des modèles. Il serait intéressant d'en fournir une preuve plus géométrique.

0. DÉFINITIONS ET RÉSULTATS

1. Ensembles semi-pfaffiens.

1.1. Hypersurfaces de Rolle.

Considérons une 1-forme différentielle à coefficients analytiques $\omega = a_1 dx_1 + \ldots + a_n dx_n$ définie au voisinage de l'adhérence d'un ouvert semi-analytique M de $\mathbf{R}^n$. On suppose que le lieu singulier $S(\omega) = \{a_1 = \ldots = a_n = 0\}$ de ω ne rencontre pas M et que ω est intégrable : $\omega \wedge d\omega \equiv 0$. Elle définit alors un feuilletage analytique sans singularité de codimension 1 sur M. Soit V une feuille de ce feuilletage. On dit que V (ou le triplet (V, ω, M)) est une *hypersurface de Rolle* si tout chemin analytique dans M et d'extrémités dans V est tangent en au moins un point au noyau de ω. Dans ce cas la feuille V est une sous-variété analytique fermée et connexe de l'ouvert M.

Remarque. — Cette propriété est liée à la topologie de M. Par exemple, il est montré dans [MR2] en utilisant un argument de Haefliger [Ha], que si M est simplement connexe, toute hypersurface pfaffienne (V, ω, M) est de Rolle.

1.2. Ensembles pfaffiens et semi-pfaffiens.

DÉFINITION. — *Un système pfaffien est un triplet $\mathcal{H} = (M, \Omega, \mathcal{X})$ où M est un ouvert semi-analytique de $\mathbf{R}^n$, $\Omega = (\omega_1, \ldots, \omega_q)$ est une famille finie (éventuellement avec répétitions) de 1-formes analytiques intégrables définies au voisinage de l'adhérence de M sans singularité dans M, et $\mathcal{X} = (X_1, \ldots, X_p)$ est une famille finie de sous-ensembles semi-analytiques de $\mathbf{R}^n$ inclus dans $\overline{M}$.*

Une famille $\mathcal{V} = (V_1, \ldots, V_q)$ d'hypersurfaces de M est associée à $\mathcal{H}$ si pour tout $i = 1, \ldots, q$, (V_i, ω_i, M) est une hypersurface de Rolle.

Un ensemble pfaffien défini à l'aide de $\mathcal{H}$ et $\mathcal{V}$ est l'intersection d'éléments de $\mathcal{V}$ et de $\mathcal{X}$.

Un ensemble semi-pfaffien défini à l'aide de $\mathcal{H}$ et $\mathcal{V}$ est un élément de la plus petite classe $\mathcal{H}(\mathcal{V})$ de sous-ensembles de $\mathbf{R}^n$ contenant les V_i, les X_j et M, stable par intersection, réunion et différence symétrique.

Les ensembles pfaffiens vérifient la propriété suivante :

THÉORÈME DE FINITUDE UNIFORME [MR2]. — *Si M est relativement compact, il existe un entier ne dépendant que de $\mathcal{H}$ qui majore le nombre de composantes connexes de tout ensemble pfaffien défini à l'aide de $\mathcal{H}$ et $\mathcal{V}$.*

Dans ce travail ce résultat remplace l'hypothèse de noethérianité de Tougeron [To1]. Il est essentiel que la borne obtenue soit indépendante de la famille $\mathcal{V}$ associée à $\mathcal{H}$.

Le théorème principal de cet article est le suivant.

THÉORÈME I. — *Si M est relativement compact, il existe un entier $B(\mathcal{H})$ qui majore la somme des nombres de Betti de tout élément de $\mathcal{H}(\mathcal{V})$ quelque soit la famille $\mathcal{V}$ associée à $\mathcal{H}$.*

Remarque. — Un ensemble semi-pfaffien de M est un semi-analytique de l'ouvert M. Son i-ème nombre de Betti est donc nul dès que i est supérieur à sa dimension.

La preuve du théorème I fait l'objet du chapitre I.

2. Ensembles T-pfaffiens.

Les espaces $\mathbf{R}^n, n \geqslant 0$, sont munis de la structure euclidienne associée à leur base canonique. Si m et n sont deux entiers tels que $m \geqslant n$, on identifie $\mathbf{R}^n$ et $\mathbf{R}^n \times \{0\}^{m-n}$. De plus on note π_n la projection linéaire canonique sur $\mathbf{R}^n$. Nous pouvons donc considérer l'intersection et la réunion de deux sous-ensembles $A \subset \mathbf{R}^m$ et $B \subset \mathbf{R}^n$ et de la projection linéaire $\pi_n(A)$ de A sur $\mathbf{R}^n$ quels que soient m et n.

DÉFINITION. — *Un sous-ensemble A de $\mathbf{R}^n$ est un ensemble T-pfaffien s'il vérifie l'une des propriétés suivantes :*

a) *A est un semi-analytique relativement compact de $\mathbf{R}^n$,*

b) *(A, ω, M) est une hypersurface de Rolle relativement compacte,*

c) *A est l'adhérence ou la projection linéaire d'un ensemble T-pfaffien,*

d) *A est l'union ou l'intersection de deux ensembles T-pfaffiens.*

THÉORÈME. II — *Un ensemble T-pfaffien a un nombre fini de composantes connexes.*

La preuve du théorème II fait l'objet du chapitre II.

I. FINITUDE HOMOLOGIQUE DES ENSEMBLES SEMI-PFAFFIENS

1. Plan de la preuve.

Soient $\mathcal{H} = (M, \Omega, \mathcal{X})$ un système pfaffien et $\mathcal{V}$ une famille d'hypersurfaces associée à $\mathcal{H}$. La structure des ensembles semi-pfaffiens n'est pas connue au voisinage du bord de M. Nous munissons M d'une fonction semi-analytique "tapissante" F_M nulle sur $\overline{M} \setminus M$ et nous travaillons sur les ensembles $M_\eta = \{F_M > \eta\}$ pour $\eta > 0$ voisin de 0. La trace sur M_η d'un ensemble semi-pfaffien est un ensemble semi-analytique relativement compact. Ses nombres de Betti sont donc finis. L'idée essentielle est de les borner de façon indépendante de η et du choix des hypersurfaces de Rolle.

Nous rappelons dans la section 2 l'existence d'une *stratification sur $\overline{M}$ adaptée à $\mathcal{X}$ et Ω,* au sens de [MR1]. Elle permet de décomposer la trace sur M_η d'un ensemble semi-pfaffien en une union disjointe finie d'ensembles lisses appelés *feuillets normaux pfaffiens.*

Pour contrôler l'homologie de tels ensembles, nous étudions dans la section 3 *les fonctions distances aux hypersurfaces de Rolle.* Leur propriété remarquable est d'être de graphe T-pfaffien au voisinage de la trace des V_i sur M_η.

Cela nous permet de montrer dans la section 4 que les sous-ensembles de M_η définis par des égalités et des inégalités à l'aide de fonctions polynomiales en ces fonctions distances et en les fonctions définissant les strates de la stratification adaptée, ont un nombre fini de composantes connexes.

Dans la section 5 nous montrons que l'homologie des feuillets normaux pfaffiens est contrôlée. Cela se fait en appliquant le résultat de la section 4 aux points singuliers d'une fonction de Morse du type précédent.

Nous consacrons la section 6 à prouver la finitude homologique d'une union finie de feuillets normaux pfaffiens. Nous utilisons pour cela une méthode de rétraction analogue à celle qu'emploie Thom [Th1] pour contrôler l'homologie d'une variété algébrique réelle stratifiée.

Puisque les bornes exhibées ne dépendent ni de η ni du choix des hypersurfaces, nous concluons en faisant tendre η vers 0.

2. Stratification adaptée à une famille de 1-formes.

Soient M un ouvert semi-analytique relativement compact de $\mathbf{R}^n$ et $\mathcal{H} = (M, \Omega, \mathcal{X})$ un système pfaffien.

2.1. Feuillets normaux [Lo].

DÉFINITION [Lo]. — *Un sous-ensemble* Γ *de* $\overline{M}$ *est un feuillet normal si :*

i) Γ *est un ensemble semi-analytique lisse relativement compact de* $\mathbf{R}^n$,

ii) *il existe un ouvert* $\mathcal{U}$ *relativement compact contenant* Γ *et des fonctions analytiques* $g, f_0, \ldots, f_s$ *définies au voisinage de* $\overline{\mathcal{U}}$, *telles que* $\mathcal{U}$ *soit une composante connexe de* $\{g > 0\}$ *et* Γ *une composante connexe de* $\{f_0 > 0, f_1 = \ldots f_s = 0\}$. *De plus,* $df_1(x) \wedge \ldots \wedge df_s(x)$ *est non nul si* $x \in \Gamma$.

La définition ci-dessus est plus faible que celle donnée dans [Lo], puisque nous n'exigeons pas que les feuillets normaux soient étales au-dessus de certains plans de coordonnées. Elle implique que $\overline{\mathcal{U}} \setminus \mathcal{U}$ est inclus dans $\{g = 0\}$ et $\overline{\Gamma} \setminus \Gamma$ est inclus dans $\{f_0 = 0\}$. Si on pose $F_i = f_i g^4 \mathbf{1}_{\mathcal{U}}$ pour $i = 0, \ldots, s$, alors Γ est une composante connexe de $\{F_0 > 0, F_1 = 0, \ldots, F_s = 0\}$, $\overline{\Gamma} \setminus \Gamma$ est inclus dans $\{F_0 = 0\}$, et $dF_1(x) \wedge \ldots \wedge dF_s(x)$ est non nul si $x \in \Gamma$. Les feuillets normaux sont donc définis par des fonctions semi-analytiques de classe $\mathcal{C}^3$ définies sur $\overline{M}$. L'exposant 4 dans la définition de F_i permet d'obtenir des fonctions suffisamment différentiables pour faire de la théorie de Morse.

2.2. Stratification adaptée.

DÉFINITION. — *Un feuillet normal* Γ *inclus dans* $\overline{M}$ *est adapté à* Ω *s'il existe* $I \subset \{1, \ldots, q\}$ *tel que, pour tout* $x \in \Gamma$:

i) $\bigcap_{i=1}^{q} \ker \omega_i(x) \cap T_x\Gamma = \left(\bigcap_{i \in I} \ker \omega_i(x)\right) \cap T_x\Gamma$,

ii) dim $((\bigcap_{i\in I} \ker \omega_i(x) \cap T_x\Gamma) = \dim\Gamma - \#I$,

iii) *Pour tout* $i = 1, \ldots, q$, $\Gamma \subset S(\omega_i)$ *ou* $\Gamma \cap S(\omega_i) = \varnothing$.

On dit alors que $(\omega_i)_{i\in I}$ *est une base de* Ω *le long de* Γ.

Une stratification en feuillets normaux de $\overline{M}$ *est adaptée à* Ω *si chaque strate l'est.*

PROPOSITION [MR1]. — *Il existe une stratification* $\mathcal{S}$ *de* $\overline{M}$ *en feuillets normaux, vérifiant les conditions (a) et (b) de Whitney, adaptée aux ensembles* $X_i \in \mathcal{X}$ *et à toute sous-famille de* Ω.

Remarques. — Si $(\omega_i)_{i\in I}$ est une base de Ω le long de Γ alors $(V_1 \cap \ldots \cap V_q) \cap \Gamma$ est une union de composantes connexes de $(\bigcap_{i\in I} V_i) \cap \Gamma$. Ces dernières sont des sous-variétés plongées fermées de Γ de dimension $\dim\Gamma - \#I$.

Nous supposons dorénavant que la famille $\mathcal{X}$ est une telle stratification $\mathcal{S}$ de l'ensemble $\overline{M}$. Nous notons $\mathcal{A}_{\mathcal{X}}$ la famille finie de fonctions semi-analytiques de classe $\mathcal{C}^3$ définies sur $\overline{M}$ et composée des fonctions F_i définissant les feuillets normaux de la stratification $\mathcal{X}$.

3. LES FONCTIONS DISTANCES AUX FEUILLES

Soient M un ouvert semi-analytique relativement compact de $\mathbf{R}^n$, $\mathcal{H} = (M, \Omega, \mathcal{X})$ un système pfaffien et $\mathcal{V} = (V_1, \ldots, V_q)$ une famille d'hypersurfaces associée à $\mathcal{H}$. D'après [Lo], p. 98, M est une union finie $M = U_1 \cup \ldots \cup U_r$ de feuillets normaux ouverts $U_i = \{F_i > 0\}$, les fonctions F_i étant des fonctions semi-analytiques de classe $\mathcal{C}^3$ à support compact inclus dans U_i (voir 2.1). La fonction $F_M = F_1 + \ldots + F_r$ est donc une fonction semi-analytique de classe $\mathcal{C}^3$ telle que $M = \{F_M > 0\}$ et $\overline{M} \setminus M \subset \{F_M = 0\}$. Si A est inclus dans M et $\eta > 0$ on pose $A_\eta = A \cap \{F_M > \eta\}$.

On prouve aisément le lemme suivant.

LEMME 1. — *Il existe une fonction semi-analytique* $\rho :]0, +\infty[\to]0, \infty[$ *indépendante du choix des* V_i *telle que, si* $x \in M_\eta$ *et* $d(x, V_i) < \rho(\eta)$ *il existe un unique* y *appartenant à* V_i *tel que* $d(x, y) = d(x, V_i)$. *Le point* y *est l'unique point de* V_i *vérifiant* $d(x, y) < \rho(\eta)$ *et* $\omega_i(y).xy = 0$.

Notations. — Pour $\eta > 0$ et $0 < \varepsilon_i < \rho(\eta)$, notons T_i l'intersection de M_η et du voisinage tubulaire ouvert de V_i de rayon ε_i. Nous déduisons du lemme 1 la propriété essentielle de la fonction $d(., V_i)^2$: elle est analytique et de graphe T-pfaffien dans un voisinage de $V_i \cap M_\eta$ dans M_η.

Fixons une fonction $t \mapsto \theta_\varepsilon(t)$ de classe $\mathcal{C}^3$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, semi-algébrique par rapport à la variable t et le paramètre ε, telle que $\theta_\varepsilon(0) = 0$ et $\theta_\varepsilon(t) = \varepsilon^2$ pour $t \geqslant \varepsilon^2$. Si $\eta > 0$ et $0 < \varepsilon_i < \rho(\eta)$, notons F_{V_i} la composée de la restriction de $d(., V_i)^2$ à M_η et de θ_{ε_i}. La fonction F_{V_i} est donc semi-analytique de classe $\mathcal{C}^3$ sur M_η. De même que la fonction $d(., V_i)^2$, elle est de graphe T-pfaffien au voisinage de $V_i \cap M_\eta$ et elle s'annule exactement sur $V_i \cap M_\eta$. De plus, puisque la différentielle de $d(., V_i)^2$ au point x appliquée à un vecteur u est égale à $2yx.u$, les dérivées partielles de F_{V_i} sont également de graphe T-pfaffien au voisinage de $V_i \cap M_\eta$.

Étant donnés $\eta > 0$ et des réels positifs $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_q$ inférieurs à $\rho(\eta)$, nous notons $\mathcal{A}_\mathcal{X}(\mathcal{V})$ l'ensemble des restrictions à M_η des fonctions définissant les strates de la stratification adaptée $\mathcal{X}$, de la fonction F_M, des fonctions $F_{V_1}, \dots, F_{V_q}$ et des coordonnées $x_1, \dots, x_n$.

Nous notons $\mathcal{B}_\mathcal{X}(\mathcal{V})$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{A}_\mathcal{X}(\mathcal{V})$ et de leurs premières dérivées partielles. Les cardinaux de ces ensembles ne dépendent que de $\mathcal{H}$.

Si $\mathcal{E}$ est un ensemble fini de fonctions, nous désignons par $\mathbf{R}_d[\mathcal{E}]$ l'espace des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à d en les éléments de $\mathcal{E}$, et $\mathbf{R}[\mathcal{E}]$ l'union des $\mathbf{R}_d[\mathcal{E}]$ pour $d \in \mathbf{N}$. La démonstration du théorème I consiste en l'analyse des propriétés topologiques des sous-ensembles de M_η définis par des fonctions des espaces $\mathbf{R}[\mathcal{A}_\mathcal{X}(\mathcal{V})]$ et de $\mathbf{R}[\mathcal{B}_\mathcal{X}(\mathcal{V})]$.

Remarquons que ces espaces dépendent non seulement de $\mathcal{V}$, mais des paramètres $\eta, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_q$.

4. PROPRIÉTÉS DE FINITUDE DES BRIQUES PFAFFIENNES

DÉFINITION. — *Soient $M \subset \mathbf{R}^n$ et $\mathcal{H} = (M, \Omega, \mathcal{X})$ un système pfaffien. Un sous-ensemble E de $\mathbf{R}^n$ est une brique pfaffienne de complexité d associée à $\mathcal{H}$ s'il existe une famille $\mathcal{V}$ associée à $\mathcal{H}$, $\eta > 0, \varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_q) \in]0, \rho(\eta)[^q$ et deux fonctions f_0 et f_1 de $\mathbf{R}_d[\mathcal{B}_\mathcal{X}(\mathcal{V})]$ tels que E soit le sous-ensemble $\{x \in M_\eta / f_0(x) > 0,\ f_1(x) = 0\}$.*

Remarque. — Une brique pfaffienne est un semi-analytique relativement compact de $\mathbf{R}^n$.

PROPOSITION 1. — *Soient $d \in \mathbf{N}$ et $\mathcal{H}$ un système pfaffien. Il existe un entier $B_0(\mathcal{H}, d)$ qui majore le nombre de composantes connexes de toute brique pfaffienne de complexité d associée à $\mathcal{H}$.*

Notations. — Soient $\mathcal{V} = (V_1, ..., V_q)$ une famille d'hypersurfaces associée à $\mathcal{H}$, $\eta > 0$ et $\varepsilon = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_q) \in]0, \rho(\eta)[^q$. Pour $I, J, K \subset \{1, ..., q\}$ disjoints, nous notons $T_{I,J,K}$ l'intersection des tubes ouverts T_i pour $i \in I$, des bords ∂T_j pour $j \in J$ et des complémentaires $M_\eta \setminus T_k$ pour $k \in K$. Remarquons que ces derniers ne sont pas, *a priori,* des ensembles T-pfaffiens.

Démonstration de la Proposition 1. — C'est un raisonnement par récurrence qui s'inspire de la preuve donnée par Cohen [Co] du théorème de Tarski-Seidenberg.

Il suffit de prouver par récurrence sur k l'affirmation suivante :

$\mathbf{A}(k)$. *Soit $\mathcal{H} = (M, \Omega, \mathcal{X})$ un système pfaffien avec $\Omega = (\omega_1, ..., \omega_q)$ et $q \geqslant k$. Il existe un entier $B_0(\mathcal{H}, d, k)$ qui majore le nombre de composantes connexes de $\{x \in M_\eta / f_0(x) > 0,\ f_1(x) = 0\} \cap T_{I,J,K}$ quelque soient les réels $\eta > 0, \varepsilon = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_q) \in]0, \rho(\eta)[^q$, la famille $\mathcal{V}$ associée à $\mathcal{H}$, les fonctions f_0 et f_1 de $\mathbf{R}_d[\mathcal{B}_{\mathcal{X}}(\mathcal{V})]$ et $\{I, J, K\}$ une partition de $\{1, ..., q\}$ avec $\#K = k$.*

Tout élément f de $\mathbf{R}[\mathcal{B}_{\mathcal{X}}(\mathcal{V})]$ s'écrit comme un polynôme en les éléments de $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}(\mathcal{V})$. Nous pouvons supposer les coefficients $f_{i,j}$ de f_0 et f_1 majorés par 1.

Soient I, J, K comme dans $\mathbf{A}(k)$. On pose $E = \{x \in M_\eta / f_0(x) > 0,\ f_1(x) = 0\}$.

Si $k = 0$ alors K est vide et l'ensemble $E \cap T_{I,J,\varnothing}$ est la projection $\pi(F)$ d'un ensemble pfaffien relativement compact F. Ce dernier est défini par les caractérisations des fonctions F_{V_i} au voisinage des feuilles de Rolle et par des feuilles de feuilletages triviaux fixant les valeurs des réels η, ε_j et $f_{i,j}$. D'après le théorème de finitude uniforme, le nombre de composantes connexes de F est majoré indépendamment de ces valeurs et de la famille $\mathcal{V}$. Il en est de même pour sa projection $\pi(F) = E \cap T_{I,J,\varnothing}$.

Soit $k > 0$. Supposons que $\mathbf{A}(k')$ soit prouvée pour tout $k' < k$ et que $\#K = k$. On peut supposer que q appartient à l'ensemble K. On pose $K' = K \setminus \{q\}$, $J' = J \cup \{q\}$, $\Omega' = (\omega_1, ..., \omega_{q-1})$ et $\mathcal{H}' = (M, \Omega', \mathcal{X})$. On note

f_0' et f_1' les fonctions obtenues en remplaçant dans les définitions de f_0 et f_1 la fonction F_{V_q} (resp. les dérivées partielles de F_{V_q}) par la constante ε_q^2 (resp. par la constante nulle). On désigne alors par E' la brique pfaffienne de complexité d associée à $\mathcal{H}'$ et définie par $E' = \{x \in M_\eta / f_0'(x) > 0, f_1'(x) = 0\}$.

L'ensemble $E \cap T_{I,J,K}$ est un ensemble semi-analytique relativement compact de $\mathbf{R}^n$. Il a donc un nombre fini de composantes connexes. Celles qui ne rencontrent pas $T_{I,J',K'}$ sont des composantes connexes de $E' \cap T_{I,J,K'}$. Ainsi le nombre de composantes connexes de $E \cap T_{I,J,K}$ est majoré par la somme des nombres de composantes connexes des ensembles $E' \cap T_{I,J,K'}$ et $E \cap T_{I,J',K'}$. Or, d'après l'hypothèse de récurrence, le nombre de composantes connexes de $E' \cap T_{I,J,K'}$ est majoré par $B_0(\mathcal{H}', d, k-1)$ et le nombre de composantes connexes de $E \cap T_{I,J',K'}$ est majoré par $B_0(\mathcal{H}, d, k-1)$.

Par conséquent la somme $B_0(\mathcal{H}, d, k) = B_0(\mathcal{H}', d, k-1) + B_0(\mathcal{H}, d, k-1)$ majore le nombre de composantes connexes de l'ensemble $E \cap T_{I,J,K}$. Ceci achève la preuve de la proposition.

5. Finitude homologique des feuillets normaux pfaffiens.

DÉFINITION. — *Soient $\mathcal{H}$ un système pfaffien, $\eta > 0$ et $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_q) \in]0, \rho(\eta)[^q$. Une sous-variété Γ de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbf{R}^n$ est un feuillet normal pfaffien de complexité d associé à $\mathcal{H}$ s'il existe une famille $\mathcal{V}$ associée à $\mathcal{H}$, f_0 et f_1 deux fonctions de $\mathbf{R}_d[\mathcal{A}_{\mathcal{X}}(\mathcal{V})]$ et des 1-formes différentielles intégrables $\theta_1, \ldots, \theta_k$ à coefficients dans $\mathbf{R}_d[\mathcal{B}_{\mathcal{X}}(\mathcal{V})]$ tels que :*

i) *Γ est une réunion de composantes connexes de*

$$\{x \in M_\eta / f_0(x) > 0, f_1(x) = 0\},$$

ii) *en tout point x de Γ le plan tangent à Γ est*

$$T_x\Gamma = \ker \theta_1(x) \cap \ldots \cap \ker \theta_k(x).$$

En particulier $\theta_1(x) \wedge \ldots \wedge \theta_k(x) \neq 0$ si $x \in \Gamma$ et le feuillet Γ est de codimension k dans $\mathbf{R}^n$.

Remarques. — Un élément E de $\mathcal{H}(\mathcal{V})$ est l'union disjointe d'ensembles du type $\Gamma \cap (\bigcap_{i \in I} V_i \setminus \bigcup_{j \notin I} V_j)$, où Γ est une strate de $\mathcal{S}$, et $I \subset \{1, \ldots, q\}$.

Puisque $\mathcal{S}$ est adaptée à toute sous-famille de Ω, un tel ensemble est lisse. La trace de E sur M_η est une union disjointe de feuillets normaux pfaffiens.

Soit Γ un feuillet normal pfaffien de complexité d et de codimension k. Si g_0, g_1 sont des fonctions de $\mathbf{R}_d[\mathcal{A}_{\mathcal{X}}(\mathcal{V})]$ alors pour presque tout réel t_1 l'ensemble $\Gamma \cap \{g_0 > 0, g_1 = t_1\}$ est un feuillet normal pfaffien (éventuellement vide) de complexité $2d$ et de codimension $k+1$.

PROPOSITION 2. — *Soient $\mathcal{H}$ un système pfaffien, $\eta > 0$, $\varepsilon = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_q) \in]0, \rho(\eta)[^q$ et $d \in \mathbf{N}$. Il existe un entier $B_1(\mathcal{H}, d)$ indépendant de η, ε et $\mathcal{V}$ majorant les nombres de Betti de tout feuillet normal pfaffien Γ de complexité d.*

Démonstration. — Pour tout vecteur a de la boule unité, on pose :

$$g_a(x) = f_0(x)(F_M(x) - \eta)^2 + a.x.$$

La restriction $g_{0|\Gamma}$ est une fonction propre à valeurs dans $]0, +\infty[$. De plus, g_0 est constante sur les composantes connexes de $S(g_{0|\Gamma})$, le lieu singulier de $g_{0|\Gamma}$. Ainsi les composantes connexes de $S(g_{0|\Gamma})$ n'adhèrent pas à $\overline{\Gamma} \setminus \Gamma$.

On note λ_1 la plus petite valeur critique de $g_{0|\Gamma}$. Soit ϕ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telle que

$$\phi(t) = 0 \text{ si } t \leqslant \alpha_1 \text{ et } \phi(t) = 1 \text{ si } t \geqslant \gamma_1$$

où α_1 et γ_1 vérifient $0 < \alpha_1 < \gamma_1 < \lambda_1$. On note $\tilde{g}_a$ la fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de M_η dans $\mathbf{R}$ définie par :

$$\forall x \in M_\eta \quad \tilde{g}_a(x) = g_0(x) + \phi(g_0(x))a.x.$$

Cette fonction coïncide avec g_0 sur $g_0^{-1}(]-\infty, \alpha_1])$ et avec g_a sur $g_0^{-1}([\gamma_1, +\infty[)$. Soit $\lambda = (\gamma_1 + \lambda_1)/2$. Posons $g_a^{-1}(]\lambda, +\infty[) \cap \Gamma = \Gamma_{a,\lambda}$, $g_a^{-1}(\lambda) \cap \Gamma = \Gamma_a^\lambda$. On choisit a de telle sorte que $\overline{\Gamma_{a,\lambda}} = \tilde{g}_a^{-1}([\lambda, +\infty[) \subset g_0^{-1}(]\gamma_1, +\infty[)$, que les singularités de $\tilde{g}_{a|\Gamma}$ soient de Morse et appartiennent à $\Gamma_{a,\lambda}$. Le gradient de la fonction $\tilde{g}_{a|\Gamma}$ réalise une rétraction par déformation de Γ sur $\overline{\Gamma_{a,\lambda}}$. On a de plus l'inégalité :

$$\sum_{i \in \mathbf{N}} b_i(\overline{\Gamma_{a,\lambda}}) \leqslant \sum_{i \in \mathbf{N}} b_i(\overline{\Gamma_{a,\lambda}}, \Gamma_a^\lambda) + \sum_{i \in \mathbf{N}} b_i(\Gamma_a^\lambda).$$

La restriction de la fonction g_a à la variété à bord $\overline{\Gamma_{a,\lambda}}$ est une fonction de Morse, constante sur le bord Γ_a^λ de cette variété. Le lieu singulier de $g_{a|\Gamma_{a,\lambda}}$ est un ensemble de points isolés. Or il s'agit de la trace sur $\Gamma_{a,\lambda}$

du lieu des zéros de la somme des carrés des coefficients de la forme $dg_a \wedge \theta_1 \wedge \ldots \wedge \theta_k$. D'après la proposition 1, le nombre de ces points est majoré par $B_0(\mathcal{H}, 2n(d+2))$. On a donc l'inégalité :

$$\sum b_i(\overline{\Gamma_{a,\lambda}}, \Gamma_a^\lambda) \leqslant B_0(\mathcal{H}, 2n(d+2)).$$

Les arguments précédents montrent que le nombre de valeurs singulières de toute fonction $h_b(x) = b.x$ restreinte à Γ_a^λ est majoré par $B_0(\mathcal{H}, 2n(d+2))$. En choisissant b de telle sorte que $h_{b|\Gamma_a^\lambda}$ soit de Morse, on majore $\sum b_i(\Gamma_a^\lambda)$.

6. Démonstration du théorème I.

6.1. Rétractions d'ensembles semi-analytiques.

Le lemme qui suit est l'outil principal nous permettant d'estimer l'homologie des réunions de feuillets normaux pfaffiens (ils sont semi-analytiques). Soient U un ouvert de $\mathbf{R}^n$, A un ensemble semi-analytique compact inclus dans U, et f une fonction semi-analytique de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur U et positive au voisinage de A. On pose $A^\lambda = A \cap \{f < \lambda\}$ et $A_0 = A \cap \{f = 0\}$. Soient $A_1, \ldots, A_r$ des sous-ensembles semi-analytiques de $\mathbf{R}^n$ inclus dans $A \cap \{f \neq 0\}$.

LEMME. 2 — *Pour λ positif petit, il existe une rétraction par déformation $r : A^\lambda \times [0,1] \to A^\lambda$ de A^λ dans A_0 avec $r(x,t) \in A_i \cup A_0$ si $x \in A_i$.*

La démonstration de ce lemme utilise une stratification vérifiant les conditions (a) et (b) de Whitney. À partir de la restriction du gradient de f sur les strates on construit un champ de vecteurs contrôlé qui vérifie une inégalité de Łojasiewicz [Lo], [CR].

6.2. Familles régulières.

Soient $\mathcal{H}$ un système pfaffien, $\eta > 0$ et $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_q) \in]0, \rho(\eta)[^q$. Soit E un élément de $\mathcal{H}(\mathcal{V})$. Nous avons remarqué dans la section 5 que la trace E_η de E sur M_η est une réunion disjointe de feuillets normaux pfaffiens $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$. Chaque Γ_k est inclus dans une strate de $\mathcal{S}$. On indexe les ensembles Γ_k de telle sorte que si l'on pose $E_i = \bigcup_{k=1}^{i} \Gamma_k$, alors E_i est ouvert dans E_{i+1} (et donc Γ_{i+1} est fermé dans E_{i+1}).

De façon générale, une famille $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_s$ de feuillets normaux pfaffiens deux à deux disjoints est dite *régulière* si tout Γ_i est fermé dans $\Gamma_1 \cup \ldots \cup \Gamma_i$.

On déduit le théorème I de la propriété suivante :

$\mathbf{A}(\mathcal{H}, d, s, l)$. *Soient* $d, s, l \in \mathbf{N}$. *Il existe un entier* $B(\mathcal{H}, d, s, l)$ *majorant la somme des nombres de Betti de la réunion* $E = \Gamma_1 \cup ... \cup \Gamma_s$, *quel que soit la famille régulière de feuillets normaux pfaffiens de complexité* d *et de dimension inférieure ou égale à* l.

6.3. Démonstration de $\mathbf{A}(\mathcal{H}, d, s, l)$.

On raisonne par récurrence sur la dimension l puis sur la longueur s de la famille. L'entier d joue un rôle secondaire.

Si $l = 0$, l'ensemble E est un ensemble fini de points. Son cardinal est majoré grâce à la proposition 1.

Supposons l'affirmation $\mathbf{A}(\mathcal{H}, d', s', l')$ prouvée si $l' < l$. Considérons une famille régulière $\Gamma_1, ..., \Gamma_s$ de feuillets normaux pfaffiens de complexité au plus d et de dimension inférieure ou égale à l. Nous raisonnons par récurrence sur s.

Si $s = 1$, $E = \Gamma_1$ est un feuillet normal pfaffien. La proposition 2 permet de conclure.

Supposons l'affirmation $\mathbf{A}(\mathcal{H}, d', s', l)$ prouvée pour $s' < s$. Soient $f_0, f_1 \in \mathbf{R}_d[\mathcal{A}(\mathcal{V})]$ les fonctions servant à définir le feuillet normal pfaffien Γ_s. On note $\Gamma_{s,t_0} = \Gamma_s \cap \{f_0 > t_0\}$, $E' = \Gamma_1 \cup ... \cup \Gamma_{s-1}$ et E_{t_0} leur réunion. Pour contrôler l'homologie de l'ensemble E nous montrons que la somme des nombres de Betti de presque tous les E_{t_0} est uniformément majorée.

L'ensemble E_{t_0} est la réunion des deux sous-ensembles ouverts E' et $E_{t_0,t_1} = E \cap \{f_0 > t_0, f_1 < t_1\}$ dont l'intersection est $E'_{t_0,t_1} = E' \cap \{f_0 > t_0, f_1 < t_1\}$. La somme des nombres de Betti de E_{t_0} est donc majorée par la somme des nombres de Betti des trois ensembles E', E'_{t_0,t_1}, et E_{t_0,t_1}. Nous allons les estimer.

Les ensembles E' et E'_{t_0,t_1} sont des réunions d'au plus $s - 1$ feuillets normaux pfaffiens de complexité $4d$. Les sommes de leurs nombres de Betti sont majorées par $B(\mathcal{H}, 4d, s-1, l)$.

Il reste à contrôler l'homologie de E_{t_0,t_1}. D'après le lemme de Sard, pour presque tout $(t_0, t'_0, t_1, t_2, t_3)$, les ensembles intervenant dans la suite de la preuve sont des réunions de feuillets normaux pfaffiens de complexité inférieure ou égale à $4d$. L'ensemble $\widetilde{E}_{t_0,t_1} = E'_{t_0,t_1} \cup \overline{\Gamma_{s,t_0}}$ est la réunion des ensembles E_{t_0,t_1} et $\widetilde{E}_{t_0,t_1,t_2} = \widetilde{E}_{t_0,t_1} \cap \{(f_0 - t_0)^2 + {f_1}^2 < {t_2}^2\}$. La triade $(\widetilde{E}_{t_0,t_1}, E_{t_0,t_1}, \widetilde{E}_{t_0,t_1,t_2})$ est exacte. La somme des nombres de Betti de E_{t_0,t_1} est donc majorée par la somme des nombres de Betti des ensembles $\widetilde{E}_{t_0,t_1}$, $\widetilde{E}_{t_0,t_1,t_2}$ et de l'intersection $E_{t_0,t_1} \cap \widetilde{E}_{t_0,t_1,t_2}$ notée E_{t_0,t_1,t_2}. Soit $t_0 > 0$ fixé.

D'après le lemme 2, si t_1 et t_2 sont petits, les ensembles $\widetilde{E}_{t_0,t_1}$ et $\widetilde{E}_{t_0,t_1,t_2}$ se rétractent par déformation sur $\overline{\Gamma_{s,t_0}}$ et $\partial\Gamma_{s,t_0}$. La somme des nombres de Betti de la variété à bord $\overline{\Gamma_{s,t_0}}$ est majorée par $B(\mathcal{H}, 4d, 1, l)$ car c'est une rétraction par déformation de $\Gamma_{s,t_0'}$ avec $0 < t_0' < t_0$ proche de t_0. La somme des nombres de Betti de $\partial\Gamma_{s,t_0}$ est majorée par $B(\mathcal{H}, 4d, 1, l-1)$. Si $0 < t_3 < t_2$ sont petits, l'ensemble E_{t_0,t_1,t_2} se rétracte trivialement sur $E_{t_0,t_1} \cap \{(f_0 - t_0)^2 + {f_1}^2 = {t_3}^2\}$ dont la somme des nombres de Betti est majorée par $B(\mathcal{H}, 4d, s, l-1)$. La somme des nombres de Betti de E_{t_0,t_1} est donc majorée par $B(\mathcal{H}, 4d, 1, l) + B(\mathcal{H}, 4d, 1, l-1) + B(\mathcal{H}, 4d, s, l-1)$.

Ceci achève la preuve de l'affirmation $\mathbf{A}(\mathcal{H}, d, s, l)$.

6.4. Fin de la démonstration du théorème I..

Il existe donc un entier $B(\mathcal{H})$, indépendant de $\mathcal{V}$ et η, qui majore les nombres de Betti de E_η. Il suffit de faire tendre η vers 0 pour remarquer que $B(\mathcal{H})$ majore également les nombres de Betti de E.

II. FINITUDE DU NOMBRE DE COMPOSANTES CONNEXES DES ENSEMBLES T-PFAFFIENS

1. Réduction du problème.

La classe $\mathcal{C}$. Notons $\mathcal{C}_0$ la classe des ensembles semi-analytiques relativement compacts et des hypersurfaces pfaffiennes de Rolle relativement compactes. Nous définissons les classes $\mathcal{C}_{k+1}$ par récurrence : un ensemble C appartient à $\mathcal{C}_{k+1}$ s'il existe des éléments $C_1, \ldots, C_p$ de $\mathcal{C}_k$ tels que $C = C_1 \cap \ldots \cap C_p$ ou $C = \overline{C_1 \cap \ldots \cap C_p}$. On pose $\mathcal{C} = \bigcup_{k \geqslant 0} \mathcal{C}_k$. Tout élément de $\mathcal{C}$ admet donc une (ou plusieurs) *écritures* à partir d'éléments de $\mathcal{C}_0$.

DÉFINITION. — *La complexité d'une écriture d'un élément de $\mathcal{C}$ est le nombre de symboles $\cap$ utilisés.*

LEMME 3. — *Un ensemble T-pfaffien est une réunion finie de projections linéaires d'éléments de $\mathcal{C}$.*

Démonstration. — La classe des ensembles T-pfaffiens est construite à partir de $\mathcal{C}_0$ par application des opérations d'union finie, intersection finie, passage à l'adhérence et projections linéaires. Il suffit donc de montrer que si A et B sont des réunions finies de projections linéaires d'éléments de $\mathcal{C}$, il en est de même de $\overline{A}$, $\pi(A)$ (ou π est une projection linéaire), $A \cup B$ et $A \cap B$. Écrivons pour cela $A = \pi_1(C_1) \cup \ldots \cup \pi_r(C_r)$ et $B = \pi_s(D_s) \cup \ldots \cup \pi_t(D_t)$, où les C_i et les D_j sont des éléments de $\mathcal{C}$.

a) L'adhérence $\overline{A}$ est la réunion des ensembles $\pi_1(\overline{C_1}), ..., \pi_r(\overline{C_s})$ car les ensembles C_i sont relativement compacts. Ainsi, $\overline{A}$ est une réunion finie de projections linéaires d'éléments de $\mathcal{C}$.

b) La projection $\pi(A)$ est la réunion $(\pi \circ \pi_1)(C_1) \cup ... \cup (\pi \circ \pi_r)(C_r)$.

c) $A \cup B$ est une réunion finie de projections linéaires d'éléments de $\mathcal{C}$.

d) Par distributivité, il suffit de montrer que $\pi_1(C_1) \cap \pi_s(D_s)$ est une réunion finie de projections linéaires d'éléments de $\mathcal{C}$. Supposons que C_1 appartienne à $\mathbf{R}^{m+p}$ avec $\pi_1 : \mathbf{R}^{m+p} \to \mathbf{R}^p$, $(x,y) \mapsto y$, et D_s appartienne à $\mathbf{R}^{p+l}$, avec $\pi_s : \mathbf{R}^{p+l} \to \mathbf{R}^p$, $(y,z) \mapsto y$. Alors on a $\pi_1(C_1) \cap \pi_s(D_s) = \pi(C_1 \times \mathbf{R}^l \cap \mathbf{R}^m \times D_s)$ (avec $\pi(x,y,z) = y$). L'ensemble $C_1 \times \mathbf{R}^l \cap \mathbf{R}^m \times D_s$ étant un élément de $\mathcal{C}$, ceci achève la démonstration du lemme 3.

Le théorème II découle ainsi de la proposition suivante.

PROPOSITION 3. — *Tout élément de $\mathcal{C}$ a un nombre fini de composantes connexes.*

2. Preuve de la proposition 3 et du théorème II.

2.1. Formulation de l'hypothèse de récurrence.

Puisque $\mathcal{C}$ est l'union des classes $\mathcal{C}_k$, pour $k \in \mathbf{N}$, nous raisonnons par récurrence sur k.

Soit $n \in \mathbf{N}$, et soit $\mathcal{G} = (X_1, ..., X_q, M_1, ..., M_q, \omega_1, ..., \omega_q)$, où les X_j sont des sous-ensembles semi-analytiques relativement compacts de $\mathbf{R}^n$, et chaque ω_j est une 1-forme analytique définie au voisinage de l'adhérence de l'ouvert semi-analytique relativement compact M_j de $\mathbf{R}^n$, sans singularité dans M_j.

Nous désignons par $\mathcal{G}_k^l$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{C}_k$ inclus dans $\mathbf{R}^n$ admettant une écriture de complexité inférieure ou égale à l à l'aide des X_i et d'hypersurfaces de Rolle (V_j, ω_j, M_j). Pour prouver la proposition 3 et donc le théorème II il suffit de prouver par récurrence sur k l'affirmation suivante :

$\mathbf{A_k}$. *Soient l et $\mathcal{G}$ comme ci-dessus. Il existe un entier majorant le nombre de composantes connexes de tous les éléments de $\mathcal{G}^l_k$.*

La borne de l'affirmation $\mathbf{A_k}$ est indépendante du choix des hypersurfaces V_j associées aux ω_j de $\mathcal{G}$.

2.2. Le cas $\mathbf{k} = \mathbf{1}$.

Un élément de $\mathcal{C}_1$ est un ensemble pfaffien, ou l'adhérence d'un ensemble pfaffien. L'affirmation $\mathbf{A_1}$ équivaut donc au théorème de finitude uniforme.

2.3. Démonstration de $\mathbf{A_{k+1}}$.

Supposons vraie l'affirmation $\mathbf{A_k}$. Considérons une stratification finie $\mathcal{S}$ de la réunion $\cup \overline{X_i} \cup \overline{M_j}$ en feuillets normaux, adaptée aux X_i et aux M_j. Si Γ est une strate de $\mathcal{S}$, il existe donc une fonction analytique f définie sur un voisinage de $\overline{\Gamma}$ telle que $\bar{\Gamma} \setminus \Gamma \subset \{f = 0\}$ et $\Gamma \subset \{f > 0\}$.

Soit C un élément de $\mathcal{G}^l_{k+1}$. Par définition, il existe $p \leqslant l$ et $C_1, \ldots, C_p \in \mathcal{G}^l_k$ tels que si $C' = C_1 \cap \ldots \cap C_p$, alors $C = C'$ ou $\overline{C'}$. Il suffit donc de majorer le nombre de composantes connexes de C'.

Il existe $A_{1,1}, \ldots, A_{1,p_1}, \ldots, A_{r,1}, \ldots, A_{r,p_r}, B_1, \ldots, B_q$, de $\mathcal{G}^l_{k-1}$ tels que :

$$C' = (\overline{A_{1,1} \cap \ldots \cap A_{1,p_1}}) \cap \ldots \cap (\overline{A_{r,1} \cap A_{r,p_r}}) \cap B_1 \cap \ldots \cap B_q.$$

On note π la projection qui à $(x_1, u_1, \ldots, x_r, u_r, v, y) \in \mathbf{R}^{r(n+1)+1+n}$ associe $y \in \mathbf{R}^n$. Soit Γ une strate de $\mathcal{S}$. On montre en raisonnant par récurrence sur k que l'ensemble $C' \cap \Gamma$ est fermé dans Γ. Cet ensemble est donc égal à la réunion des intersections $\bigcap_{\varepsilon>0} \pi(\overline{C_{\varepsilon,\eta}})$, où les $C_{\varepsilon,\eta}$ sont les ensembles :

$$\begin{aligned} C_{\varepsilon,\eta} = \{(x_1, u_1, \ldots, x_r, u_r, v, y) \ /\ & \\ & x_1 \in A_{1,1} \cap \ldots \cap A_{1,p_1} \ , \ ||x_1 - y|| + u_1^2 = \varepsilon, \\ & \qquad\qquad \vdots \\ & x_r \in A_{r,1} \cap \ldots \cap A_{r,p_r} \ , \ ||x_r - y|| + u_r^2 = \varepsilon, \\ & y \in B_1 \cap \ldots \cap B_q \cap \Gamma, \ f(y) - v^2 = \eta\}. \end{aligned}$$

Or il existe un entier h et une famille $\mathcal{G}'$ tels que pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $\eta > 0$, $C_{\varepsilon,\eta}$ appartienne à $\mathcal{G}'^{l}_{k}$. Comme, à $\eta > 0$ fixé, la famille $\pi(\overline{C_{\varepsilon,\eta}})$ est une famille décroissantes d'ensembles compacts, l'hypothèse $\mathbf{A_k}$ permet de conclure.

Les auteurs remercient R. Moussu et C.A. Roche de les avoir encouragés dans ce travail.

BIBLIOGRAPHIE

[CLM] F. CANO, J.-M. LION et R. MOUSSU, Frontière d'une hypersurface pfaffienne, accepté aux Ann. scient. de l'Éc. Norm. Sup. (octobre 1994).

[Ch] J.-Y. CHARBONNEL, Sur certains sous-ensembles de l'espace euclidien, Ann. Inst. Fourier, 41-3 (1991), 679-717.

[Co] P.J. COHEN, Decision procedures for real and p-adic fields, Comm. Pure Appl. Math., 22 (1969), 131-151.

[CR] D. CERVEAU et F. RONGA, Applications topologiquement stables, prépublication du Laboratoire de Topologie, Université de Dijon, (1975).

[DMM] L. VAN den DRIES, A. MACINTYRE et D. MARKER, The elementary theory of restricted analytic fields with exponentiation, Annals of Maths, 140 (1994), 183-205.

[Ha] A. HAEFLIGER, Variétés feuilletées, Ann. Ec. Norm. Sup. de Pise, Série 3, 6 (1962), 367-397.

[Kh1] A. G. KHOVANSKII, Real analytic varieties with the finitness property and complex abelian integrals, Funct. Anal. and Appl., 18 (1984), 119-127.

[Kh2] A. G. KHOVANSKII, Fewnomials, A.M.S. translations of mathematical monographs 88 (1991).

[Li] J.-M. LION, Étude des hypersurfaces pfaffiennes, Thèse, Université de Bourgogne (1991).

[LR] J.-M. LION et C.A. ROCHE, Topologie des hypersurfaces pfaffiennes, Bulletin de la S.M.F., 124 (1996), 35-59.

[Lo] S. ŁOJASIEWICZ, Ensembles semi-analytiques, preprint I.H.E.S. (1965).

[Mi] J. MILNOR, On the Betti numbers of real varieties, Proc. Amer. Math. Soc., 15 (1964), 275-280.

[MR1] R. MOUSSU et C.A. ROCHE, Théorie de Hovanskii et problème de Dulac, Invent. Math., 105 (1991), 431-441.

[MR2] R. MOUSSU et C.A. ROCHE, Théorèmes de finitude uniforme pour les variétés pfaffiennes de Rolle, Ann. Inst. Fourier 42,1-2 (1992), 393-420.

[Re] J.-P. RESSAYRE, Integer parts of real closed exponential fields, Arithmetic, Proof Theory and Computational Complexity, P. Clote and J. Krajicek, eds., Oxford University Press, 1993, 278-288.

[Ri] J.-J. RISLER, Complexité et géométrie réelle (d'après A. Khovanskii), Séminaire Bourbaki, 637 (1984).

[Ro] C. ROCHE, Densities for Certain Leaves of Real Analytic Foliations, Astérisque, 222 (1994), 373-387.

[Th1] R. THOM, Sur l'homologie des variétés algébriques réelles, Differential and Combinatorial Topology, Princeton University Press (1965), 255-265.

[Th2] R. THOM, Sur les bouts d'une feuille d'un feuilletage au voisinage d'un point singulier isolé, Proceedings Mexico 1986, L.N.M. 1345, 317-321.

[To1] J.-C. TOUGERON, Algèbres analytiques topologiquement nœthériennes. Théorie de Hovanskii, Ann. Inst. Fourier, 41-4 (1991), 823-840.

[To2] J.-C. TOUGERON, Sur certaines algèbres de fonctions analytiques, Séminaire de Géométrie Algébrique réelle de Paris VII (1986).

[Wi] A. J. WILKIE, Model completness results for expansions of real field II : The exponential function, preprint (1991).

Manuscrit recu le 2 janvier 1996,
accepté le 12 avril 1996.

J.-M. LION et J.-P. ROLIN,
Université de Bourgogne
Laboratoire de Topologie
B.P. 138
21004 Dijon cedex (France).
lion@satie.u-bourgogne.fr
rolin@satie.u-bourgogne.fr