

JEAN-PIERRE VIGUÉ

**Sur les domaines hyperboliques pour la distance
intégrée de Carathéodory**

Annales de l'institut Fourier, tome 46, n° 3 (1996), p. 743-753

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1996__46_3_743_0

© Annales de l'institut Fourier, 1996, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR LES DOMAINES HYPERBOLIQUES POUR LA DISTANCE INTÉGRÉE DE CARATHÉODORY

par Jean-Pierre VIGUÉ

1. Introduction.

Dans cet article, nous considérerons une variété analytique complexe X de dimension finie n , et nous étudierons la pseudodistance de Carathéodory c_X , la pseudodistance intégrée de Carathéodory c_X^i et la pseudométrie infinitésimale associée γ_X sur X .

Conformément aux définitions du livre de M. Jarnicki et P. Pflug [9], nous dirons que X est c_X -hyperbolique (resp. c_X^i -hyperbolique) lorsque c_X (resp. c_X^i) est une distance sur X . Rappelons que, lorsque X est c_X -hyperbolique, la topologie définie par c_X peut être strictement moins fine que la topologie de variété de X , comme le montrent un exemple de M. Hayashi [7] pour les variétés et un exemple de M. Jarnicki, P. Pflug et J.-P. Vigué [10] pour les domaines de \mathbb{C}^n ($n \geq 3$). En revanche, si X est c_X^i -hyperbolique, on déduit facilement du fait que X est localement compact et que c_X^i est une distance intégrée que c_X^i définit la topologie de X (voir M. Jarnicki et P. Pflug [9]).

D'autre part, on dit que X est γ_X -hyperbolique si, en chaque point x de X , $\gamma_X(x, \cdot)$ est une norme sur le fibré tangent $T_x(X)$ au point x . Nous montrerons (et c'est un résultat facile) que, si X est γ_X -hyperbolique, X est c_X -hyperbolique localement et c_X^i -hyperbolique. Cependant, nous construirons au paragraphe 5 un exemple de variété X c_X^i -hyperbolique et

Mots-clés : Pseudodistance de Carathéodory – Pseudodistance intégrée de Carathéodory – Domaine hyperbolique.

Classification math. : 32H15 – 32H20.

non γ_X -hyperbolique. Le même exemple nous montrera que X peut être c_X^i -hyperbolique, mais pas c_X -hyperbolique, même localement. L'exemple que nous construirons est une variété complexe de dimension 1, et sa construction s'inspire des idées de M. Hayashi [7] et M. Hayashi, M. Nakai et S. Segawa [8]. Une fois cette construction faite, nous montrerons au paragraphe 6 comment on peut, comme M. Jarnicki, P. Pflug et J.-P. Vigué [10], plonger la variété obtenue dans \mathbb{C}^3 , ce qui permet de construire un exemple ayant les mêmes propriétés et qui est un domaine de Stein (et même de Runge) dans \mathbb{C}^3 . Enfin, nous rappellerons rapidement ce qui se passe pour un domaine du plan complexe \mathbb{C} .

Dans la première partie de notre travail, nous montrerons la caractérisation suivante des variétés c_X^i -hyperboliques.

THÉORÈME 1.1. — *Soit X une variété complexe de dimension finie. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) X est c_X^i -hyperbolique;
- (ii) la distance de Carathéodory c_X sur X vérifie la propriété de séparation faible suivante : pour tout point a de X , il existe un voisinage U de a tel que, pour tout point $x \in U$ distinct de a , $c_X(a, x) \neq 0$.

Il est intéressant de remarquer, et ce sera le cas dans notre exemple, que le fait que c_X^i soit une distance n'entraîne pas que c_X sépare les points de X , même localement.

2. Rappels sur la distance de Carathéodory.

Soit X une variété analytique complexe de dimension finie. La pseudodistance de Carathéodory c_X sur X est définie (voir par exemple S. Dineen [3], T. Franzoni et E. Vesentini [4], L. Harris [6], M. Jarnicki et P. Pflug [9] ou S. Kobayashi [11]) par la formule

$$c_X(x, y) = \sup_{f \in H(X, \Delta)} \rho(f(x), f(y)),$$

où $H(X, \Delta)$ désigne l'ensemble des applications holomorphes de X dans le disque-unité Δ , et ρ est la distance de Poincaré sur Δ . De même, la pseudométrie infinitésimale de Carathéodory γ_X est définie sur le fibré tangent $T(X)$ à X (voir [3], [4], [6], [9] et [11]) par

$$\gamma_X(x, v) = \sup_{f \in H(X, \Delta)} |Df(x) \cdot v| \quad (x \in X, v \in T_x(X)).$$

On peut alors définir la longueur $L(\alpha)$ d'un chemin $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ de classe \mathcal{C}^1 par morceaux de la façon suivante :

$$L(\alpha) = \int_0^1 \gamma_X(\alpha(t), D\alpha(t)) dt.$$

On peut d'ailleurs montrer (voir [3] ou [9]) que $L(\alpha)$ est aussi la borne supérieure, pour toutes les subdivisions finies $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ de $[0,1]$, de la somme

$$\sum_{i=0}^{n-1} c_X(\alpha(t_i), \alpha(t_{i+1})).$$

On définit alors la pseudodistance intégrée de Carathéodory c_X^i de la façon suivante : si x et y sont deux points de X , $c_X^i(x, y)$ est la borne inférieure des longueurs $L(\alpha)$ des chemins α de classe \mathcal{C}^1 par morceaux d'origine x et d'extrémité y .

D'autre part, les distances invariantes et en particulier, la distance de Carathéodory ont été l'objet de recherches actives. Citons, à titre d'exemples, les résultats de T. Barth [1] sur la comparaison de la distance de Carathéodory et la distance intégrée de Carathéodory, un résultat de L. Belkhchicha et J.-P. Vigué [2] sur les espaces complets pour ces distances, des résultats de L. Lempert [12] et H. Royden et P. Wong [13] sur l'égalité des distances de Carathéodory et Kobayashi sur un domaine convexe borné. Signalons enfin que ces distances servent à des généralisations du lemme de Schwarz (voir par exemple [15] et [16]). Pour des références plus complètes, on peut consulter le livre de M. Jarnicki et P. Pflug [9].

3. Premières propriétés de c_X et c_X^i .

Soit X une variété complexe de dimension n . En ce qui concerne c_X , on démontre facilement le résultat suivant.

PROPOSITION 3.1. — *L'ensemble*

$$A = \{(x, y) \in X \times X | c_X(x, y) = 0\}$$

est un sous-ensemble analytique de $X \times X$.

Démonstration. — En effet, A est l'ensemble des zéros communs à toutes les fonctions holomorphes

$$g(x, y) = f(x) - f(y),$$

où $f : X \rightarrow \Delta$ est une application holomorphe de X dans Δ . C'est donc un sous-ensemble analytique de $X \times X$ contenant la diagonale de $X \times X$.

On en déduit en particulier la

PROPOSITION 3.2. — *Pour tout $a \in X$,*

$$A_a = \{x \in X \mid c_X(a, x) = 0\}$$

est un sous-ensemble analytique de X .

Pour la métrique infinitésimale de Carathéodory, on définit $V \subset T(X)$ par la formule

$$V = \{(x, v) \in T(X) \mid \gamma_X(x, v) = 0\}.$$

Il est clair que V est aussi défini comme

$$\{(x, v) \in T(X) \mid Df(x) \cdot v = 0, \quad \forall f \in H(X, \Delta)\}.$$

On en déduit la

PROPOSITION 3.3. — *V est un sous-ensemble analytique de $T(X)$ contenant la section nulle. De plus, pour tout $x \in X$, $V_x = V \cap T_x(X)$ est un sous-espace vectoriel complexe de $T_x(X)$.*

Bien sûr, dire que X est γ_X -hyperbolique signifie simplement que V est égal à la section nulle $\{0\}$ de $T(X)$. Les propriétés de V sont précisées dans le théorème suivant.

THÉORÈME 3.4. — *Pour tout $p \in \{0, \dots, n\}$,*

$$\{x \in X \mid \dim V_x \geq p\}$$

est un sous-ensemble analytique fermé de X . On en déduit en particulier que

$$\{x \in X \mid \dim V_x < p\}$$

est un ouvert de X .

Démonstration. — Considérons un ouvert U de X sur lequel il existe des coordonnées locales. Quitte à identifier U et son image, on peut considérer que U est un ouvert de \mathbb{C}^n , et on identifie alors $T(U)$ à $U \times \mathbb{C}^n$.

Soit $x \in U$. Dire que $\dim V_x \geq p$ est équivalent à dire que, pour toute famille (f_1, \dots, f_q) de fonctions holomorphes bornées sur X ,

$$\text{Ker}(f'_1, \dots, f'_q)$$

est de dimension supérieure ou égale à p . C'est équivalent au fait que le rang de l'application linéaire (f'_1, \dots, f'_q) est inférieur ou égal à $(n - p)$, est ceci est caractérisé par la nullité des mineurs de taille $(n - p + 1)$ de la matrice de l'application (f'_1, \dots, f'_q) . Ceci montre le résultat.

Comme l'on montré M. Hayashi, M. Nakai et S. Segawa [8], une variété X peut être γ_X -hyperbolique sans être c_X -hyperbolique. Cependant, on a le résultat de nature locale suivant.

PROPOSITION 3.5. — *Soit X une variété analytique complexe et soit $x \in X$. Supposons que X soit γ_X -hyperbolique au point $x \in X$ (i.e., $\gamma_X(x, \cdot)$ est une norme sur le fibré tangent $T_x(X)$). Alors X est localement c_X -hyperbolique au point x , ce qui signifie qu'il existe un voisinage U de x dans X tel que $c_X|_U$ soit une distance sur U .*

Démonstration. — En effet, l'hypothèse que X est γ_X -hyperbolique au point $x \in X$ entraîne que, pour tout $v \in T_x(X)$ ($v \neq 0$), il existe $f \in H(X, \Delta)$ telle que $Df(x) \cdot v \neq 0$. Un vecteur $v_1 \in T_x(X)$ ($v_1 \neq 0$) étant donné, on choisit $f_1 \in H(X, \Delta)$ telle que $Df_1(x) \cdot v_1 \neq 0$. On choisit alors $v_2 (\neq 0)$ dans le noyau de $Df_1(x)$ et ensuite une fonction f_2 telle que $Df_2(x) \cdot v_2 \neq 0$. On construit ainsi par récurrence une base (v_1, \dots, v_n) de \mathbb{C}^n et des fonctions holomorphes (f_1, \dots, f_n) à valeurs dans Δ telles que $(Df_1(x), \dots, Df_n(x))$ soit un isomorphisme linéaire. Le théorème d'inversion locale montre que $f = (f_1, \dots, f_n)$ est un isomorphe analytique d'un voisinage U de x dans X sur son image. Ceci entraîne que c_X sépare les points de U .

Bien sûr, si on suppose que X est γ_X -hyperbolique, alors X est c_X -hyperbolique localement (en ce sens que chaque point x de X possède un voisinage U tel que $c_X|_U$ soit une distance sur U). Comme nous le verrons, ceci entraîne que X est c_X^i -hyperbolique, mais la réciproque est fausse : la variété X peut être c_X^i -hyperbolique sans être γ_X -hyperbolique.

L'étude de la pseudodistance intégrée de Carathéodory présente sans doute plus de difficultés. On peut cependant montrer la proposition suivante.

PROPOSITION 3.6. — *Pour tout $a \in X$,*

$$A_a^i = \{x \in X | c_x^i(a, x) = 0\}$$

est un sous-ensemble analytique de X .

Démonstration. — Comme $c_X \leq c_X^i$, il est clair que $A_a^i \subset A_a$ qui, comme nous l'avons déjà vu, est un sous-ensemble analytique de X . L'inégalité triangulaire montre que, pour tout $x \in A_a$, pour tout $y \in A_a$, $c_X(x, y) = 0$.

Si Y est une composante irréductible de A_a , l'ensemble des points réguliers de Y est une sous-variété connexe de X ; on peut donc joindre deux points réguliers de Y par un chemin $\alpha : [0, 1] \rightarrow \text{Reg } Y$ de classe \mathcal{C}^1 , ce qui, en utilisant la seconde définition de $L(\alpha)$, montre que $c_X^i(x, y) = 0$. Par passage à la limite, on en déduit, pour tout $x \in Y$, pour tout $y \in Y$, $c_X^i(x, y) = 0$.

Ainsi donc, A_a^i est la réunion de certaines composantes irréductibles de A_a , et est donc un sous-ensemble analytique de X . Il est clair que A_a^i est en fait une réunion de composantes connexes de A_a et il est peut-être possible que A_a^i ne soit pas réduit à la composante connexe de A_a contenant a .

Pour l'instant, je n'ai pas de résultat concernant

$$A^i = \{(x, y) \in X \times X | c_X^i(x, y) = 0\}.$$

4. Sur les espaces hyperboliques pour la pseudodistance intégrée de Carathéodory.

Jusqu'à présent, les rapports entre les variétés c_X -hyperbolique et les variétés c_X^i -hyperboliques n'étaient pas clairs. Le théorème suivant donne une caractérisation des variétés c_X^i -hyperboliques et montre bien la différence entre les deux.

THÉORÈME 4.1. — *Soit X une variété analytique complexe de dimension n . Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) X est c_X^i -hyperbolique ;

(ii) il n'existe pas de chemin $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ de classe \mathcal{C}^1 tel que, pour tout t , $D\alpha(t) \in V_{\alpha(t)}$ et tel que, pour au moins un t , $D\alpha(t)$ soit différent de 0 ;

(iii) pour tout $a \in X$, il existe un voisinage U de a tel que, pour tout point $x \in U$ distinct de a , $c_X(a, x) \neq 0$.

Démonstration. — Montrons que (i) entraîne (ii). En effet, s'il existait un chemin $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ de classe \mathcal{C}^1 tel que, pour tout t , $D\alpha(t) \in V_{\alpha(t)}$ et tel que, pour au moins un t , $D\alpha(t)$ soit différent de 0, la longueur $L(\alpha)$ de α serait nulle, et, pour tout $t, t' \in [0, 1]$, $c_X^i(\alpha(t), \alpha(t')) = 0$. Comme l'image d'un tel chemin α n'est pas réduit à un point, X ne serait pas c_X^i -hyperbolique. Le résultat est démontré.

Montrons que (ii) entraîne (iii). Pour cela, nous allons montrer que, s'il existe $a \in X$ tel que, pour tout voisinage U de a , il existe $x \in U$, $c_X(a, x) = 0$, alors on peut trouver un chemin $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ de classe \mathcal{C}^1 tel que, pour tout t , $D\alpha(t)$ soit différent de 0 et appartienne à $V_{\alpha(t)}$. En effet, soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une base de voisinages de a . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $x_n \in U_n$ tel que $c_X(a, x_n) = 0$. La suite x_n converge vers a . Comme $A_a = \{x \in X \mid c_X(a, x) = 0\}$ est un sous-ensemble analytique de X et qu'il contient une suite convergeant vers a , A_a est, au voisinage de a , de dimension au moins égale à 1. Il suffit de considérer l'ensemble $\text{Reg } A_a$ des points réguliers de A_a pour construire un chemin $\alpha : [0, 1] \rightarrow \text{Reg } A_a$ de classe \mathcal{C}^1 , tel que $D\alpha(t) \neq 0$, pour tout t . Il est clair que la longueur de ce chemin est nulle. Comme l'ensemble des points où $D\alpha(t)$ n'appartient pas à $V_{\alpha(t)}$ est ouvert et que l'intégrale

$$\int_0^1 \gamma_X(\alpha(t), D\alpha(t)) dt$$

est nulle, on en déduit que $\gamma_X(\alpha(t), D\alpha(t)) = 0$, pour tout t , ce qui démontre le résultat.

Montrons enfin que (iii) entraîne (i). Comme $c_X \leq c_X^i$, il est clair que, pour tout $x \in U$,

$$c_X^i(a, x) > 0.$$

Si maintenant $x \notin U$, choisissons un voisinage compact V de a contenu dans U .

Comme c_X^i est une distance intégrée et que tout chemin α joignant a à x coupe la frontière ∂V de V , on a :

$$c_X^i(a, x) \geq c_X^i(a, \partial V) + c_X^i(\partial V, x).$$

Mais $c_X^i(a, \partial V) \geq c_X(a, \partial V)$, et d'après les propriétés des fonctions continues sur les compacts, $c_X(a, \partial V)$ est strictement positif. Le résultat est démontré.

5. Un exemple.

L'exemple que nous allons maintenant construire est une variété analytique complexe de dimension 1. Commençons par définir

$$X = \{(z, w) \in \Delta \times \mathbb{C} \mid w^2 = h(z)\},$$

où h est une fonction holomorphe sur le disque-unité Δ ayant tous ses zéros simples $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans un intervalle réel $[a_0, 1[$, avec $a_0 > 0$ et tels que la condition de Blaschke ne soit pas satisfaite, i.e., tels que $\sum(1 - |a_n|) = +\infty$. Alors X est une variété analytique complexe de dimension 1, et la projection $(z, w) \rightarrow z$ fait de X un revêtement ramifié à deux feuillets du disque-unité Δ . Soit $\sigma : X \rightarrow X$ l'involution du revêtement défini par $\sigma(z, w) = (z, -w)$. On considère les deux feuilles (disjointes) U' et U'' du revêtement au-dessus de l'ouvert simplement connexe $U = \Delta \setminus [a, 1[$ (avec $0 < a < a_0$). À partir de là, on construit une nouvelle surface de Riemann \widehat{X} de la façon suivante : la feuille U' est laissée inchangée alors que, sur la feuille U'' , on coupe la partie $\operatorname{Re} z < 0$, et on recolle les segments $[0, i[$ et $[0, -i[$ par l'identification $z \sim -z$. [Ceci revient à prendre le quotient de U'' par $z \sim -z$, c'est-à-dire, à remplacer U'' par $\Delta \setminus [a^2, 1[$, avec l'application de passage au quotient $z \rightarrow z^2$]. Soit \widehat{X} la surface de Riemann (ou variété analytique complexe de dimension 1) ainsi obtenue et soit $s : X \rightarrow \widehat{X}$ l'application holomorphe naturelle de X dans \widehat{X} . Remarquons enfin que l'application $z \rightarrow z^2$ qui est définie et holomorphe sur X , passe au quotient et définit une application holomorphe $p : \widehat{X} \rightarrow \Delta$.⁽¹⁾

(1) Je remercie vivement le rapporteur qui m'a indiqué la construction élégante de cet exemple. La construction donnée dans la première version de ce travail était inspirée des méthodes de [7] et [8] et utilisait des techniques de découpages et collages sur deux copies du disque-unité Δ .

Soit

$$X_+ = \{x = (z, w) \in X \mid \operatorname{Re} z > 0\}.$$

L'ensemble X_+ est un ouvert de X , stable par l'involution σ . La projection

$$X_+ \rightarrow \Delta_+ = \Delta \cap \{\operatorname{Re} z > 0\}$$

est un revêtement à deux feuillet ramifié aux points (a_n) . Soit f une fonction holomorphe bornée sur \widehat{X} . Alors $g = f \circ s$ est une fonction holomorphe bornée sur X . La fonction

$$H(x) = (g(x) - g(\sigma(x)))^2$$

est définie sur X_+ et est stable par σ ; elle provient donc d'une application holomorphe bornée sur Δ_+ s'annulant aux points (a_n) ; comme cette suite ne satisfait pas à la condition de Blaschke, sur le disque $\Delta(1/2, 1/2)$, la condition $(g - g \circ \sigma)$ est identiquement nulle. Ainsi, $g = g \circ \sigma$. D'autre part, sur la feuille \widehat{U}'' obtenue par modification de U'' , il est clair que f s'écrit comme une fonction holomorphe $\varphi(z^2)$. On en déduit qu'il existe une fonction holomorphe bornée k sur Δ telle que $f = k \circ p$. Nous avons donc montré le résultat suivant.

PROPOSITION 5.1. — *Sur \widehat{X} , toutes les fonctions holomorphes bornées sont de la forme $g \circ p$, où g est une fonction holomorphe sur le disque-unité Δ .*

Si on regarde maintenant U' (la feuille de X qui a été laissée inchangée dans la construction de \widehat{X}), et en identifiant U' à $\Delta \setminus [a, 1[$, on vérifie que, pour toute fonction holomorphe bornée sur \widehat{X} , pour tout $z \in U'$ tel que $-z \in U'$,

$$f(-z) = f(z)$$

et par suite, $Df(0) = 0$.

On en déduit que $c_{\widehat{X}}(z, -z) = 0$ et que $\gamma_{\widehat{X}}(0, v) = 0$, pour tout $v \in T_0(\widehat{X})$. Cependant, on vérifie facilement que \widehat{X} satisfait à la propriété de séparation faible du théorème 4.1, et \widehat{X} est $c_{\widehat{X}}^i$ -hyperbolique.

6. Le cas des domaines.

Remarquons pour conclure, que l'on peut aussi construire des exemples qui soient des domaines de \mathbb{C}^n . En effet, X qui est une variété analytique complexe non compacte de dimension 1, est un espace de Stein. On peut donc comme dans M. Jarnicki, P. Pflug et J.-P. Vigné [10] la plonger comme une sous-variété fermée Y de \mathbb{C}^3 . D'après R. Gunning and H. Rossi [5], chapitre 8, théorème C8 et Y.-T. Siu [14], il existe un voisinage U de Y que l'on peut choisir de Stein et même de Runge dans \mathbb{C}^3 et une rétraction holomorphe $\rho : U \rightarrow Y$.

Soit alors

$$V = \{z \in U \mid z - \rho(z) \in \Delta^3\},$$

et soit W la composante connexe de V contenant Y . On vérifie facilement que W est un domaine de Stein et de Runge dans \mathbb{C}^3 , c_W^i -hyperbolique, mais ni c_W -hyperbolique, ni γ_W -hyperbolique.

En ce qui concerne les domaines de \mathbb{C} , on a le résultat suivant (comparer avec [9]).

THÉORÈME 6.1. — *Soit D un domaine de \mathbb{C} . Alors les propositions suivantes sont équivalentes :*

- (i) D est c_D -hyperbolique;
- (ii) D est γ_D -hyperbolique;
- (iii) il existe des fonctions holomorphes bornées non constantes sur D ;
- (iv) D est c_D -hyperbolique localement;
- (v) D est c_D^i -hyperbolique.

Démonstration. — L'équivalence de (i), (ii) et (iii) est démontrée dans [9], p. 28. Il est clair d'autre part que (i) entraîne (iv), (iv) entraîne (v) et que (v) entraîne (iii). Le résultat est démontré.

Remarquons enfin que le cas des domaines de \mathbb{C}^2 n'est pas réglé pour l'instant. D'autre part, il serait agréable d'avoir des exemples plus explicites dans \mathbb{C}^3 .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] T. BARTH, Some counterexamples concerning intrinsic distances, Proc. Amer. Math. Soc., 66 (1977), 49-59.
- [2] L. BELKHCHICHA et J.-P. VIGUÉ, Sur les espaces complets pour la distance de Carathéodory, Atti Accad. Naz. Lincei (9), 5 (1994), 189-192.
- [3] S. DINEEN, The Schwarz Lemma, Oxford Math. Monographs, Clarendon Press, Oxford, 1989.
- [4] T. FRANZONI and E. VESENTINI, Holomorphic maps and invariant distances, Math. Studies 40, North-Holland, Amsterdam, 1980.
- [5] R. GUNNING and H. ROSSI, Analytic functions of several complex variables, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1965.
- [6] L. HARRIS, Schwarz-Pick systems of pseudo metrics for domains in normed linear spaces, In advances in Holomorphy, Mathematical Studies 34, North-Holland, Amsterdam, 1979, p. 345-406.
- [7] M. HAYASHI, The maximal ideal space of the bounded analytic function on the Riemann surface, J. Math. Soc. Japan, 39 (1987), 337-344.
- [8] M. HAYASHI, M. NAKAI and S. SEGAWA, Bounded analytic functions on two sheeted discs, Trans. Amer. Math. Soc., 333 (1992), 799-819.
- [9] M. JARNICKI and P. PFLUG, Invariant distances and metrics in complex analysis, De Gruyter Exposition in Mathematics 9, De Gruyter, Berlin, 1993.
- [10] M. JARNICKI, P. PFLUG and J.-P. VIGUÉ, The Carathéodory distance does not define the topology - the case of domains, C R. Acad. Sci. Paris, série I, 312 (1991), 77-79.
- [11] S. KOBAYASHI, Intrinsic distances, measures and geometric function theory. Bull. Amer. Math. Soc., 82 (1976), 357-416.
- [12] L. LEMPERS, Holomorphic retracts and intrinsic metrics in convex domains, Anal. Math., 8 (1982), 257-261.
- [13] H. ROYDEN and P. WONG, Carathéodory and Kobayashi metrics on convex domains, preprint (1983).
- [14] Y.-T. SIU, Every stein subvariety admits a Stein neighborhood, Inventiones Math., 38 (1976) 89-100.
- [15] E. VESENTINI, Complex geodesics, Compositio Math., 44 (1981), 375-394.
- [16] J.-P. VIGUÉ, Un lemme de Schwarz pour les domaines bornés symétriques irréductibles et certains domaines bornés strictement convexes, Indiana Univ. J., 40 (1991), 293-304.

Manuscrit reçu le 20 décembre 1995,
accepté le 15 février 1996.

Jean-Pierre VIGUÉ,
URA CNRS D132 «Groupes de Lie et Géométrie»
Mathématiques
Université de Poitiers
40, avenue du Recteur Pineau
86022 Poitiers Cedex (France).
vigie@mathrs.univ-poitiers.fr