FAYÇAL MAAREF

Les connexions hypergéométriques et le théorème de linéarité de T. Terasoma

Annales de l'institut Fourier, tome 47, nº 1 (1997), p. 49-67

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1997__47_1_49_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
47, 1 (1997), 49–67

LES CONNEXIONS HYPERGÉOMÉTRIQUES ET LE THÉORÈME DE LINÉARITÉ DE T. TERASOMA

par Fayçal MAAREF

SOMMAIRE

Mots-clés : Connexions - $\mathcal{D}$-modules - Équations aux différences finies - Caractéristiques évanescentes - Discriminants.
Classification math. : 14D99 - 14F05 - 14F40.

1. INTRODUCTION

Dans un article paru en Décembre 1992 ([19]), T. Terasoma a étudié le déterminant d'une matrice de périodes associée à une famille d'hypersurfaces en fonction de leurs paramètres donnés. Cette matrice exprime une dualité entre la cohomologie du complexe de De Rham d'un ouvert U d'une variété algébrique sur $\mathbf{C}$ tordu par un produit de puissances complexes $s_i, i = 1, \cdots, p$ de fonctions $f_i, i = 1, \ldots, p$ régulières non nulles sur U et l'homologie de U à coefficients dans le système local ayant pour monodromie l'inverse de celle de la fonction multiforme $f_1^{s_1} \ldots f_p^{s_p}$.

Pour ce faire, T. Terasoma utilise le fait que ce déterminant est solution d'une connexion de rang 1 (appelée ici hypergéométrique et obtenue comme déterminant d'une connexion de Gauss-Manin à résidus variables). Il considère alors l'invariant rattaché à cette connexion, appelé le caractère. Un de ses principaux résultats est un théorème – le théorème de linéarité – qui précise la forme de cet invariant; il montre que c'est une forme affine des résidus s_i, les coefficients dominants étant des différentielles logarithmiques de fonctions des paramètres et indépendantes des résidus s_i. Une formule récurrente est ensuite donnée pour ces coefficients, qui permet de les expliciter lorsque les f_i définissent un arrangement d'hyperplans. Le procédé reste néanmoins compliqué dans le cas général.

On se propose de mener à bien ces calculs dans le cas de p morphismes $f_i : \bar{T} \times \mathbf{A}^n_{\mathbf{C}} \longrightarrow \mathbf{A}^1_{\mathbf{C}}$, $i = 1, \ldots, p$, $\bar{T}$ jouant le rôle de l'espace des paramètres.

Pour étudier le caractère de la connexion hypergéométrique nous énonçons un théorème de linéarité analogue à celui de Terasoma; il donne les mêmes coefficients dominants et correspond à l'étude en des résidus s_i génériques. La preuve que nous en donnons est très simple et reste valable dans la situation de Terasoma. En fait ce théorème est non seulement vérifié pour les connexions hypergéométriques, qui sont par ailleurs à singularités régulières, mais plus généralement pour toute connexion mixte c'est-à-dire celles munies d'opérateurs de translations compatibles aux dérivations. Il s'appliquerait donc aussi à la connexion irrégulière obtenue en tordant le complexe de De Rham usuel sur U par $f_1^{s_1} \ldots f_p^{s_p} \exp f_0$.

La preuve de ce théorème montre aussi que pour les connexions mixtes, les coefficients dominants s'obtiennent en fonction des opérateurs de translation. Ce point est fondamental pour notre calcul dans le cas des connexions hypergéométriques. En effet, en spécialisant les paramètres des

f_i à une valeur générique, la restriction de la connexion hypergéométrique s'identifie, grâce à un théorème de changement de base, au déterminant du complexe d'Aomoto des f_i dont les matrices des opérateurs de translation ont été étudiées par F. Loeser et C. Sabbah dans [14]. Le calcul fait alors intervenir les caractéristiques évanescentes de certains complexes de faisceaux à cohomologie constructible le long des discriminants des f_i.

Remerciements. — Ce travail a été fait sous la direction de Claude Sabbah. Je tiens à le remercier vivement pour tout son apport. Je n'oublierai pas aussi Antoine Douai, François Loeser et les membres du laboratoire de géométrie de l'Université de Rennes 1 pour les discussions très fructueuses que nous avons pu avoir sur le sujet.

2. LE THÉORÈME DE LINÉARITÉ

2.1. Le déterminant d'une connexion et son caractère.

2.1.1. *Le déterminant d'une connexion.*

Soit T un schéma lisse de type fini sur un corps k de caractéristique nulle, $\mathcal{O} := \mathcal{O}_T$ étant le faisceau structural de T. Une connexion $(\mathcal{L}, \nabla)$ de rang r est la donnée d'un faisceau cohérent $\mathcal{L}$ localement libre de rang r muni d'un morphisme

$$\nabla : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L} \underset{\mathcal{O}}{\otimes} \Omega^1 \quad \text{où} \quad \Omega^1 := \Omega^1_T$$

vérifiant l'identité de Leibniz i.e. : pour tout ouvert U de T on a

$$\forall f \in \mathcal{O}(U),\ \forall \nu \in \mathcal{L}(U), \quad \nabla(f\nu) = df \cdot \nu + f \cdot \nabla \nu,$$

df étant la différentielle usuelle de f. Si A est un anneau et M est un A-module de rang r fini, on a de la même façon que pour les espaces vectoriels de dimension finie, la notion de "déterminant de M". C'est la puissance extérieure maximale de M : $M \wedge \cdots \wedge M$, r fois et noté $\det_A M$, ou par abus $\det M$.

Soit $(\mathcal{L}, \nabla)$ une connexion de rang r sur T et soit U un ouvert de T trivialisant $\mathcal{L}$. On peut alors former $\det \mathcal{L}(U)$. Comme l'opération $\det(-)$ commute aux morphismes de restriction, la famille $(\det \mathcal{L}(U))_U$ définit un faisceau localement libre de rang 1 sur T, noté $\det_{\mathcal{O}} \mathcal{L}$. On le munit d'un morphisme, noté aussi ∇,

$$\nabla : \det_{\mathcal{O}} \mathcal{L} \longrightarrow \det_{\mathcal{O}} \mathcal{L} \underset{\mathcal{O}}{\otimes} \Omega^1$$

$$\nabla(m_1 \wedge \cdots \wedge m_r) := \sum_{i=1}^{r} m_1 \wedge \cdots \wedge \nabla m_i \wedge \cdots \wedge m_r.$$

∇ vérifie alors l'identité de Leibniz et $(\det_{\mathcal{O}} \mathcal{L}, \nabla)$ est ainsi une connexion de rang 1, appelée déterminant de $(\mathcal{L}, \nabla)$.

2.1.2. *Caractère d'une connexion de rang 1.*

Donnons brièvement sa définition : on se donne une connexion $(\mathcal{L}, \nabla)$ de rang 1 sur T. Soit $(U_i)_i$ un recouvrement ouvert de T trivialisant $\mathcal{L}$ et e_i une base de $\mathcal{L}(U_i)$. Sur U_i on a :

$$\nabla e_i = e_i \otimes \omega_i, \ \ \omega_i \in \Omega^1(U_i).$$

Si e_i' est une autre base de $\mathcal{L}(U_i)$, il existe $\Phi_i \in \mathcal{O}(U_i)^*$ tel que $e_i' = \Phi_i e_i$. En écrivant aussi $\nabla e_i' = e_i' \otimes \omega_i'$, l'identité de Leibniz donne

$$\omega_i' - \omega_i = \frac{d\Phi_i}{\Phi_i}.$$

Ainsi $\overline{\omega_i'} = \overline{\omega_i}$ dans $\Omega^1(U_i)/d\log \mathcal{O}(U_i)^*$. En procédant de manière analogue sur les intersections $(U_{ij} := U_i \cap U_j)_{i,j}$, la famille $(\overline{\omega_i})_i$ se recolle et définit un élément de $H^0(T, \Omega_T^1/d\log \mathcal{O}_T^*)$ appelé le *caractère* de $(\mathcal{L}, \nabla)$ et noté $\mathrm{Ch}(\mathcal{L}, \nabla)$.

2.2. Les connexions mixtes et le théorème de linéarité.

Dans ce paragraphe, on posera $K := k(s) = k(s_1, \dots, s_p)$ où $s_1, \dots, s_p$ sont des indéterminées. Soit T un schéma lisse de type fini sur k de dimension q et posons

$$T_K := \operatorname{Spec} K \times_{\operatorname{Spec} k} T.$$

2.2.1. *Définition d'une connexion mixte.*

Une connexion mixte $(\mathcal{L}_{T_K}, \nabla, (\tau_i)_i)$ est une connexion $(\mathcal{L}_{T_K}, \nabla)$ de rang 1 munie d'une famille d'opérateurs de translation $\tau_i, i = 1, \dots, p$: pour tout $i = 1, \dots, p$ et pour tout ouvert U_K de T_K de la forme $\operatorname{Spec} K \times_{\operatorname{Spec} k} U$ avec U ouvert de T on a les axiomes :

- τ_i est un automorphisme k-linéaire de $\mathcal{L}(U_K)$.
- $\forall f \in \mathcal{O}(U_K)$, $\forall \nu \in \mathcal{L}(U_K)$ on a : $\tau_i(f\nu) = \tau_i f \cdot \tau_i \nu$ où $\tau_i f(s_1, \dots, s_p, \underline{t}) = f(s_1, \dots, s_{i+1}, \dots, s_p, \underline{t}) \in \mathcal{O}(U_K)$.
- Compatibilité avec ∇: $\forall i = 1, \dots, p$, $\nabla \tau_i = \tau_i \nabla$.

2.2.2. *Le théorème de linéarité.*

PROPOSITION 1. — *Soit U un ouvert de T. On a :*

i) $H^0(U_K, \Omega^1_{T_K}) = K \underset{k}{\otimes} H^0(U, \Omega^1_T)$

ii) $d\log[\mathcal{O}(U_K)^*] = d\log[\mathcal{O}(U)^*]$.

Preuve.

i) Évident par platitude de K sur k.

ii) Il s'agit de montrer que tout élément $A \in \mathcal{O}(U_K)^*$ s'écrit $d(s) \otimes c$ où $d(s) \in K$ et $c \in \mathcal{O}(U)^*$; on aura ainsi $d\log A = d\log c$ et le résultat de la proposition en découlera.

Soit $B \in \mathcal{O}(T_K) = K \otimes_k \mathcal{O}(U)$ l'inverse de A. On a $AB = 1$. Il existe $h(s) \in k[s]$ et $g(s) \in k[s]$ tels que $h(s)A$ et $g(s)B$ appartiennent à $k[s] \underset{k}{\otimes} \mathcal{O}(U)$ et l'égalité $h(s)Ag(s)B = h(s)g(s)$ peut être vue maintenant comme identité dans $k[s] \underset{k}{\otimes} \mathrm{Frac}\, \mathcal{O}(U) = (\mathrm{Frac}\, \mathcal{O}(U))[s]$ où $\mathrm{Frac}\, \mathcal{O}(U)$ désigne le corps des fractions de $\mathcal{O}(U)$ qui existe car U est connexe. D'après le théorème d'existence et d'unicité de la décomposition des polynômes à coefficients dans un corps algébriquement clos et de caractéristique nulle, $h(s)A$ s'écrit $a(s) \otimes c$ où $a(s)$ est un facteur de $h(s)g(s)$ et $c \in \mathrm{Frac}\, \mathcal{O}(U)$. On a donc $A = d(s) \otimes \dfrac{a(s)}{h(s)} \in K$.

Montrons pour finir que $c \in \mathcal{O}(U)^*$. Grâce à la platitude de K sur k on a un monomorphisme de groupes abéliens

$$\mathrm{Frac}\mathcal{O}(U)/\mathcal{O}(U) \xrightarrow{\delta} K \underset{k}{\otimes} \mathrm{Frac}\, \mathcal{O}(U)/\mathcal{O}(U) = K \otimes \mathrm{Frac}\, \mathcal{O}(U)/K \underset{k}{\otimes} \mathcal{O}(U).$$

Comme $A, B \in \mathcal{O}(U)^*$, on a aussi $1 \otimes c, 1 \otimes c^{-1} \in \mathcal{O}(U)^*$. On en déduit que $\delta(\overline{c}) = \delta(\overline{c^{-1}}) = 0$. Donc $c, c^{-1} \in \mathcal{O}(U)$ et par suite $c \in \mathcal{O}(U)^*$. □

On se donne à présent un élément $\omega \in H^0(T, \Omega^1_T / d\log \mathcal{O}^*_T)$ obtenu à l'aide d'un recouvrement $(U_i)_i$ de T et de formes $\omega_i \in H^0(U_i, \Omega^1_T)$ vérifiant les relations de cocycles

$$\omega_{i|U_{ij}} - \omega_{j|U_{ij}} \in d\log[\mathcal{O}(U_{ij})^*].$$

Grâce à la proposition 1 ces relations de cocycles s'écrivent aussi

$$(1\otimes\omega_i)_{|U_{ij}^K} - (1\otimes\omega_j)_{|U_{ij}^K} \in d\log[\mathcal{O}(U_{ij}^K)^*]$$

où $1\otimes\omega_i \in H^0(U_i^K)$ et $U_i^K := \operatorname{Spec} K \times_{\operatorname{Spec} k} U_i$. On associe alors à ω l'élément de $H^0(T_K, \Omega^1_{T_K}/d\log\mathcal{O}^*_{T_K})$, et noté $\Lambda(\omega)$, obtenu à l'aide du recouvrement $(U_i^K)_i$ de T_K et des formes $(1\otimes\omega_i)_i$. Si $\alpha \in H^0(T, d\log\mathcal{O}^*_T)$, on définit $s_i\alpha \in H^0(T_K, \Omega^1_{T_K}/d\log\mathcal{O}^*_{T_K})$. C'est l'image de α par la composée des morphismes suivants :

$$H^0(T, d\log\mathcal{O}^*_T) \xrightarrow{s_i\times} H^0(U_K, \Omega^1_{T_K}) \xrightarrow{pr.can} H^0(T_K, \Omega^1_{T_K}/d\log\mathcal{O}^*_{T_K}).$$

On peut à présent énoncer le théorème de linéarité :

THÉORÈME 1. — *Soient T un schéma lisse de dimension q sur k et $(\mathcal{L}, \nabla, (\tau_i)_i)$ une connexion mixte sur T_K. Il existe alors $\alpha_0 = \Lambda(\alpha'_0)$ où $\alpha'_0 \in H^0(T, \Omega^1_T/d\log\mathcal{O}^*_T)$ et des uniques α_i, $i = 1, \dots, p$, $\alpha_i \in H^0(T, d\log\mathcal{O}^*_T)$ tels que*

$$\operatorname{Ch}(\mathcal{L}, \nabla, (\tau_i)_i) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i s_i + \alpha_0.$$

Cette dernière expression signifie que si $(U_l)_l$ est un recouvrement de T par des ouverts affines trivialisants $\mathcal{L}$ et si Θ_l est la matrice 1-formes de $\mathcal{L}_{K\times_k U_l}$ alors la famille $\left(\Theta_l - \sum_{i=1}^{p} \alpha_i s_i\right)_l$ définit un élément de $H^0(T, d\log\mathcal{O}^*_T)$.

Preuve. — Nous allons d'abord montrer que $\mathcal{L}$ se trivialise sur un recouvrement défini sur k.

LEMME 1. — *Il existe un recouvrement ouvert $(T_i)_i$ de T tel que le recouvrement ouvert $(K \times_k T_i)_i$ de T_K trivialise $\mathcal{L}$.*

Preuve. — Ce résultat est de nature locale. On peut donc supposer que T est un schéma affine. Comme $\mathcal{L}$ est cohérent et localement libre (de rang 1), le module des sections globales $M := \mathcal{L}(T_K)$ est un $\mathcal{O}(T_K)$-module projectif de type fini (de rang 1). Le lemme consiste alors à montrer qu'il existe un $\mathcal{O}(T)$-module projectif de type fini (de rang 1), noté N, tel que $M \simeq K \otimes_k N$. Pour cela, soient $m_1, \dots, m_r$ des générateurs de M sur $\mathcal{O}(T_K) = K \otimes_k \mathcal{O}(T)$ et soit N' le $\mathcal{O}(T)$-module de type fini engendré par ces éléments. On a de façon évidente $M \simeq K \underset{k}{\otimes} N'$. Par hypothèse sur M, on a $M \simeq \det M \simeq K \otimes_k \det N'$ où $\det N'$ est défini à l'aide d'une résolution projective finie de N' : $0 \to P' \to N' \to 0$ et $\det N' := \bigotimes_i (\det P^i)^{\otimes(-1)^i}$ (pour l'indépendance vis-à-vis de la résolution choisie nous renvoyons à [19] et à ses références). Alors $N := \det N'$ répond au problème. $\square$

Remarque. — Ce lemme remplace l'argument de suites spectrales utilisé par Terasoma dans sa preuve du théorème de linéarité.

Grâce au lemme précédent et à une vérification facile au niveau des recollements on peut supposer que L est triviale sur T_K. Ainsi $\mathcal{L}(T_K)$ est un $\mathcal{O}(T_K)$-module libre muni d'une famille d'opérateurs de translation $(\tau_i)_i$ et d'une connexion ∇. Soit e une base de $\mathcal{L}(T_K)$. Dans cette base, on a

$$\begin{cases} \tau_i(e) = A_i e & A_i \in K \underset{k}{\otimes} \mathcal{O}(T), \quad i = 1, \dots, p \\ \nabla(e) = e \otimes \omega & \omega \in \Omega^1(T_K) = K \underset{k}{\otimes} \Omega^1(T). \end{cases}$$

Comme les τ_i sont inversibles de matrices $\tau_i A_i^{-1}$, les A_i le sont aussi dans $K \underset{k}{\otimes} \mathcal{O}(T)$. D'après la proposition 1, les A_i s'écrivent donc $d_i(s) \otimes c_i$, où $d_i \in K$ et $c_i \in \mathcal{O}(T)^*$. Comme pour tout i on a $\tau_i \nabla(e) = \nabla \tau_i(e)$ on en déduit les identités

$$\tau_i \omega - \omega = d \log c_i \ \forall i = 1, \dots, p$$

où les $(\tau_i)_i$ sont ici les translations naturelles sur $\Omega^1(T_K) = K \otimes \Omega^1(T)$ agissant sur les coefficients dans $K := k(s)$. Un calcul facile donne alors :

$$\omega = \sum_{i=1}^{p} s_i d \log c_i + \omega_0$$

$$\omega_0 \in \Omega^1(T) \ \text{ identifié à } \ 1 \otimes \omega_0 \in \Omega^1(T_K)$$

et le théorème est démontré. $\square$

Remarque. — Soit T un ouvert affine de $\mathbf{A}_k^q$. Comme corollaire du théorème de linéarité et la proposition donnant la structure du groupe hypergéométrique (voir [14], prop. 1.4.1), nous obtenons la classification complète des connexions mixtes sur T_K : le groupe des classes d'isomorphismes, muni du produit tensoriel, est isomorphe à

$$\mathcal{HG}(p)' \times (H^0(T, d \log \mathcal{O}_T^*))^p \times H^0(T, \Omega_T^1 / d \log \mathcal{O}_T^*)$$

où $\mathcal{HG}(p)'$ est le sous-groupe des éléments de $\mathcal{HG}(p)$ ayant pour coefficients c_i les réels 1 ou -1. En effet, un faisceau cohérent et localement libre de rang 1 sur T_K est nécessairement libre. La structure de fibré vectoriel de $\mathcal{L}$ est alors triviale et les actions de la connexion et des opérateurs de translation déterminent complètement la connexion mixte.

3. CONNEXION MIXTE ASSOCIÉE À UNE FAMILLE DE POLYNÔMES

Soit k un corps algébriquement clos et de caractéristique nulle. On se donne p polynômes paramétrés par un schéma $\bar{T}$ lisse de type fini sur k et de dimension q :

$$f_i : \bar{T} \times \mathbf{A}_k^n \longrightarrow \mathbf{A}_k^1 \quad i = 1, \ldots, p.$$

On se propose de leur associer une connexion mixte appelée connexion hypergéométrique dont on calculera les coefficients dominants du caractère lorsque k est égal au corps des nombres complexes.

Pour le formalisme et les principaux résultats concernant les $\mathcal{D}$-modules nous renvoyons aux références de base [4], [5], [16], [17] et [18].

3.1. Construction de la connexion hypergéométrique.

3.1.1. *Holonomie de $p_+\mathcal{N}_V f^s$.*

On pose $U := (\bar{T} \times \mathbf{A}_k^n) \setminus \bigcup_{i=0}^{p} f_i^{-1}(0)$; $s := (s_1, \ldots, s_p)$; $K := k(s)$; $\mathcal{D}_U(s) := K \underset{k}{\otimes} \mathcal{D}_U$, où $\mathcal{D}_U$ est le faisceau des opérateurs différentiels algébriques sur U. Il sera pratique d'assimiler $\mathcal{D}_U(s)$ au faisceau des opérateurs sur le schéma $V := K \times_k U$ et un $\mathcal{D}_U(s)$-module à un $\mathcal{D}_V$-module. On désignera par la même lettre les morphismes sur k et leurs analogues sur K.

Soit $p : V \longrightarrow \bar{T}_K$ la projection sur le premier facteur et soit $\mathcal{O}_V f_1^{s_1} \ldots f_p^{s_p}$ (noté aussi $\mathcal{O}_V f^s$) la connexion sur V engendrée par $f_1^{s_1} \ldots f_p^{s_p}$. Si $\mathcal{N}$ est un $\mathcal{D}_U$-module, $\mathcal{N}_V f^s$ désigne le $\mathcal{D}_V$-module $\mathcal{N}_V \underset{\mathcal{O}_V}{\otimes} \mathcal{O}_V f^s$ où $\mathcal{N}_V$ est le $\mathcal{D}_V$-module associé à $\mathcal{N}$, c'est-à-dire $K \underset{k}{\otimes} \mathcal{N}$ vu comme $\mathcal{D}_V$-module.

Remarque. — Le module $\mathcal{N}_V f^s$ peut être vu comme $\mathcal{N}_V$ muni de la connexion tordue

$$\nabla + \sum_{i=1}^{p} s_i \frac{df_i}{f_i} \wedge .$$

Comme $\mathcal{N}_V f^s$ est le produit tensoriel d'un module holonome par une connexion, on a :

PROPOSITION 2. — *Le $\mathcal{D}_V$-module $\mathcal{N}_V f^s$ est holonome.*

Grâce à la conservation de l'holonomie par image directe on a :

COROLLAIRE 1. — *Le complexe image directe $p_+\mathcal{N}_V f^s$ est à cohomologie holonome.*

3.1.2. *L'ouvert de lissité de $p_+\mathcal{N}_V f^s$.*

Remarque. — Dans une situation affine, on ne fera pas de distinction entre les faisceaux quasi-cohérents et les modules de leurs sections globales.

Comme p est un morphisme affine lisse, $p_+\mathcal{N}_V f^s$ est représenté par le complexe de De Rham relatif $DR_{\mathrm{rel}}(\mathcal{N}_V f^s)$:

Si $\Lambda^{\cdot} k^n$ est le complexe des puissances extérieures de k^n, $DR_{\mathrm{rel}}(\mathcal{N}_V f^s)$ est le complexe de faisceaux $p_*\left(\Lambda^{\cdot} k^n \otimes_k \mathcal{N}_V f^s\right)[n]$ où p_* désigne l'image directe topologique et la différentielle d_R est définie comme suit :

Soit T un ouvert affine de $\bar{T}$. Si

$$\omega = \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_p\leq n} a_{i_1,\ldots,i_p} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p} \in \Lambda^p k^n$$

et

$$m \in \Gamma(p^{-1}(\bar{T}_K), \mathcal{N}_V f^s)$$

on a

$$d_R(\omega \otimes m) := \sum_{i=1}^{p} dx_i \wedge \omega \otimes \frac{\partial}{\partial x_i} m.$$

Soit $\mathrm{Sing}(p_+\mathcal{N}_V f^s)$ le lieu singulier de $p_+\mathcal{N}_V f^s$. C'est un sous-schéma fermé de $\bar{T}$.

PROPOSITION 3. — *Il existe un sous-schéma fermé F de $\bar{T}$ tel que*

$$\mathrm{Sing}(p_+\mathcal{N}_V f^s) = K \times_k F.$$

Preuve. — Les p automorphismes de translation $\tau_i : K \to K$ définis par $h(s) \mapsto h(s + \mathbf{1}_i)$ induisent des automorphismes τ_i du schéma $\bar{T}_K$ et ont la propriété élémentaire donnée par le lemme qui suit :

LEMME 2. — *Un sous-schéma fermé de $\bar{T}_K$ qui est fixé par tous les τ_i et leurs inverses est nécessairement de la forme $K \times_k F$, où F est un fermé de $\bar{T}$.*

Preuve. — Pour la clarté de la preuve on traitera seulement le cas $p = 1$. On se ramène à montrer le résultat pour un fermé de $\operatorname{Spec} k[s]_{\mathrm{loc}} \times_k \bar{T}$ où $k[s]_{\mathrm{loc}}$ est un localisé convenable de $k[s]$, stable par les translations entières. On le construit de la façon suivante : le sous-schéma fermé du lemme, que l'on notera par F_s, est donné par un idéal de $K \underset{k}{\otimes} \mathcal{O}(\bar{T})$, engendré donc par un nombre fini d'éléments que l'on peut choisir dans $k[s] \underset{k}{\otimes} \mathcal{O}(\bar{T})$. En exprimant la matrice de translation dans ce système de générateurs, le localisé que l'on cherche consiste à inverser dans $k[s]$ tous les polynômes qui apparaissent dans les dénominateurs des coefficients de la matrice de translation. En spécialisant en un point fermé général de $\bar{T}$ on obtient un fermé de $\operatorname{Spec} k[s]_{\mathrm{loc}}$ stable par toutes les translations entières. Comme un polynôme non nul à une seule variable a un nombre fini de racines et qu'un fermé de $\operatorname{Spec} k[s]_{\mathrm{loc}}$ est défini par un polynôme, on voit que notre fermé est soit vide, soit égal à $\operatorname{Spec} k[s]_{\mathrm{loc}}$. Le fermé de $\operatorname{Spec} k[s]_{\mathrm{loc}} \times_k \bar{T}$ s'écrit donc $\operatorname{Spec} k[s]_{\mathrm{loc}} \times_k F$. Par construction même, on a $F_s = K \times_{k[s]_{\mathrm{loc}}} F_s = K \times_k F$. □

Le module $\mathcal{N}_V f^s$ est lui-même naturellement muni de p automorphismes de translation, notés aussi τ_i, définis par $h(s) \otimes n f^s \mapsto h(s + \mathbf{1}_i) \otimes f_i n f^s$ où n est une section de $\mathcal{N}$ et s'étendent aux termes du complexe $p_+\mathcal{N}_V f^s$. Comme ils commutent à sa différentielle, ils induisent une action de p automorphismes, notés aussi τ_i, sur ses faisceaux de cohomologie. L'ouvert maximal sur lequel tous ces faisceaux sont lisses est alors invariant par les τ_i et leurs inverses. Il en est de même pour le fermé complémentaire qui n'est autre que $\operatorname{Sing}(p_+\mathcal{N}_V f^s)$. On conclut grâce au lemme 2. □

3.1.3. *La connexion hypergéométrique.*

Soit $T_K := K \times_k T$ l'ouvert de lissité de $p_+\mathcal{N}_V f^s$. Sur T_K les restrictions des $h^j p_+\mathcal{N}_V f^s$ sont ainsi des connexions de rang r_j. Comme T_K est un ouvert de $\bar{T}_K$ défini sur k, les translations τ_i sur $h^j p_+\mathcal{N}_V f^s$ définies plus haut agissent sur les restrictions de ces faisceaux à cet ouvert.

En fait, on va s'intéresser dans toute la suite au produit alterné des déterminants de ces connexions, c'est-à-dire à

$$\det p_+\mathcal{N}_V f^s := \underset{j}{\otimes} (\det h^j p_+\mathcal{N}_V f^s)^{\otimes(-1)^j}$$

où le produit tensoriel est pris sur $\mathcal{O}_{T_K}$ avec la convention suivante : si $\mathcal{L}$ est une connexion sur T_K et j un entier, on pose $\mathcal{L}^{\otimes(-1)^j} := \mathcal{L}$ si j est pair et $\hom(\mathcal{L}, \mathcal{O}_{T_K})$ sinon.

Grâce aux opérations sur les connexions ([7], ch. 1), $\det p_+\mathcal{N}_V f^s$ en est alors une (de rang 1). En procédant comme dans [14], on peut la munir d'une structure de translation et il est immédiat qu'elle est compatible à celle de la connexion. Ainsi, $\det p_+\mathcal{N}_V f^s$ est une connexion mixte. Comme corollaire du théorème 1 on obtient :

PROPOSITION 4 ([19]). — *On a*

$$\mathrm{Ch}(\det p_+\mathcal{N}_V f^s, \nabla, (\tau_i)_i) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i s_i + \alpha_0$$

où $\alpha_i \in H^0(T, d\log \mathcal{O}_T^*)$, $i = 1, \dots, p$.

3.2. Calcul des coefficients dominants.

On se propose de calculer les α_i pour $\mathcal{N} = \mathcal{O}_U$ et $k = \mathbf{C}$. La méthode consiste à restreindre les paramètres aux points fermés et à utiliser un théorème de changement de base du déterminant pour se ramener à une situation étudiée par F. Loeser et C. Sabbah.

3.2.1. *La restriction du déterminant.*

Le calcul des α_i étant local, on peut supposer que T est un schéma affine tel que T_K trivialise $\mathcal{L}$ (lemme 1).

On sait (voir preuve du théorème de linéarité) que dans une base arbitraire e de $\det p_+\mathcal{N}_V f^s := \Gamma(T_K, \det p_+\mathcal{N}_V f^s)$ on a pour tout $i = 1, \dots, p$

$$\tau_i(e) = d_i(s) c_i e, \ d_i(s) \in K \ \text{ et } \ \alpha_i = d\log c_i.$$

Si on fait un changement de base $e_1 = h(s)e$ où $h(s) \in K$, on obtient

$$\tau_i(e_1) = \frac{h(s + \mathbf{1}_i)}{h(s)} d_i(s) c_i e_1 \quad \forall i = 1, \dots, p.$$

Rappelons la définition de l'ensemble L défini dans [14]. C'est un ensemble de formes affines $l(s) = \sum_{i=1}^{p} n_i s_i$ à coefficients dans $\mathbf{Z}$ premiers entre eux tel que pour toute forme $l(s)$ de ce type on ait $l(s) \in L$ ou $-l(s) \in L$.

Grâce à la proposition 1.4.1 de [14], on a alors

PROPOSITION 5. — *Il existe une base e de* $\det p_+\mathcal{N}_V f^s$ *telle que pour tout i on ait*

$$\tau_i(e_1) = d_i(s) c_i e_1 \ \text{ où } \ d_i(s) \ \text{ a tous ses facteurs premiers dans } \ L.$$

Nous nous placerons dorénavant dans une telle base (nous verrons plus loin l'utilité de cette hypothèse).

Soit t un point fermé général de T. Il lui correspond un idéal maximal I_t de $\mathcal{O}(T)$. Comme $\mathbf{C}$ est algébriquement clos, on a $\mathcal{O}(T)/I_t = \mathbf{C}$ ([12], prop. 6.4.2, p. 147). Soit i l'inclusion $K \times_{\mathbf{C}} \{t\} \hookrightarrow T_K$. On définit le foncteur de restriction i^* : si N est un $\mathcal{O}(T_K)$-module, on pose

$$i^*N := N/I_tN,$$

i^*N a une structure évidente de K-espace vectoriel. Si N est muni d'opérateurs de translation, leurs actions commutent à celle de I_t et s'induisent donc sur i^*N.

Si $N = \Gamma(T_K, \det p_+\mathcal{O}_V f^s)$, N est un $\mathcal{O}(T_K)$-module libre de rang 1. Par suite i^*N est un K-espace vectoriel de dimension 1 muni d'opérateurs de translation. Dans la base $e_t := i^*e$ de i^*N on a $\tau_i(e_t) = c_i(t)d_i(s)e_t$, $\forall i = 1, \ldots, p$ où $c_i(t)$ est l'image de c_i par la projection canonique $\mathcal{O}(T) \to \mathcal{O}(T)/I_t = \mathbf{C}$.

3.2.2. *Théorème de changement de base du déterminant.*

Considérons le diagramme cartésien :

$$\begin{array}{ccc} U_t & \overset{\sigma}{\hookrightarrow} & U \\ \pi \downarrow & & \uparrow p \\ \{t\} & \overset{\eta}{\hookrightarrow} & T \end{array}$$

$$U_t := \{x \in A \mid f_i(t,x) \neq 0 \ \forall i = 1, \ldots, p\}$$

où σ est l'inclusion et η est le morphisme constant. On se propose de démontrer un théorème de changement de base du déterminant. Comme le caractère de la connexion hypergéométrique ne dépend pas du représentant du foncteur image directe p_+ nous utiliserons celui donné par le De Rham relatif.

THÉORÈME 2. — *On a un isomorphisme de K-espaces vectoriels de rang* 1 *munis d'opérateurs de translation*

$$i^* \det p_+\mathcal{O}_V f^s \simeq \det \eta_+\mathcal{O}_{V_t} f_t^s$$

et l'isomorphisme est compatible aux translations.

Preuve. — Le théorème découle des trois lemmes qui suivent. Il est immédiat que tous les isomorphismes donnés seront compatibles à l'action des translations.

Définissons d'abord le foncteur i^+ :

Si N est un $\mathcal{O}(T_K)$-module, i^+N est le complexe $\left(\Lambda^{\cdot} \underset{\mathbf{C}}{\otimes} N, \delta\right)$ défini de la manière suivante :

$$\Lambda^m = 0 \text{ si } m > 0 \text{ et } \Lambda^m = \Lambda^{-m}\mathbf{C}^q \text{ si } m \leq 0.$$

Si $e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_m} \in \Lambda^m$ et $n \in N$ on pose

$$\delta(e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_m} \otimes n) := \sum_{i=1}^{q} (-1)^{i-1} e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_i} \wedge \ldots \wedge e_{j_m} \otimes t_{j_i} n$$

où $t_1, \ldots, t_q$ sont des coordonnées sur T (qui existent quitte à choisir T plus petit).

L'action de i^+ s'étend naturellement aux complexes de $\mathcal{O}(T_K)$-modules.

LEMME 3. — *Les groupes de cohomologie du complexe $i^+p_+\mathcal{O}_V f^s$ sont des K-espaces vectoriels de dimensions finies et munis naturellement d'opérateurs de translation. On a de plus un isomorphisme :*

$$i^* \det p_+\mathcal{O}_V f^s \simeq \det_K i^+[p_+\mathcal{O}_V f^s]$$

où $\det_K i^+p_+\mathcal{O}_V f^s := \underset{j}{\otimes} (\det_K h^j i^+p_+\mathcal{O}_V f^s)^{\otimes(-1)^j}$.

Preuve. — $i^+p_+\mathcal{O}_V f^s := \Lambda^{\cdot} \underset{\mathbf{C}}{\otimes} \left(\Lambda^{\cdot}\mathbf{C}^n \underset{\mathbf{C}}{\otimes} Af^s\right)[n]$ où $A := \Gamma(V, \mathcal{O}_V)$. Pour calculer la cohomologie de ce complexe (bigradué) on va utiliser la suite spectrale associée à la première filtration (voir [10], Chap. 4]).

Avec les notations de loc. cit. on a $E_1^{\cdot,j} = \Lambda^{\cdot} \underset{\mathbf{C}}{\otimes} h^j p_+\mathcal{O}_V f^s$. Comme $h^j p_+\mathcal{O}_V f^s$ est libre sur $\mathcal{O}(T_K)$ on a $E_2^{p,j} := h^p(E_1^{\cdot,j}) = 0$ si $p \neq 0$.

Puisque $i^+p_+\mathcal{O}_V f^s$ est un complexe fini la première filtration est régulière. On applique alors le théorème 4.4.1 de [10] et on obtient les isomorphismes

$$h^j(i^+p_+\mathcal{O}_V f^s) \simeq h^j(E_2^{\cdot}) = i^*p_+(\mathcal{O}_V f^s).$$

On a ainsi

$$(\det_K h^j(i^+p_+\mathcal{O}_V f^s)^{\otimes(-1)^j} \simeq i^* \underset{j}{\otimes} (h^j p_+\mathcal{O}_V f^s)^{\otimes(-1)^j}.$$

□

LEMME 4. — *En définissant η_+ et σ^+ comme p_+ et i^+ on a un isomorphisme de complexes de K-espaces vectoriels*

$$i^+p_+\mathcal{O}_V f^s \simeq \eta_+\sigma^+\mathcal{O}_V f^s.$$

Preuve. — Grâce à la commutation de δ et d_R on a un isomorphisme

$$i^+p_+\mathcal{O}_V f^s \simeq \Lambda^{\cdot}\mathbf{C}^n \underset{\mathbf{C}}{\otimes}(\Lambda^{\cdot} \underset{\mathbf{C}}{\otimes} Af^s)[n].$$

Or $\Lambda^{\cdot} \underset{\mathbf{C}}{\otimes} \big(\Lambda^{\cdot}\mathbf{C}^n \underset{\mathbf{C}}{\otimes} Af^s\big)[n]$ n'est autre que $\eta_+\sigma^+\mathcal{O}_V f^s$. □

LEMME 5. — *On a un isomorphisme de K-espaces vectoriels*

$$\det_K \eta_+\sigma^+\mathcal{O}_V f^s \simeq \det_K \eta_+\mathcal{O}_{V_t} f_t^s.$$

Preuve. — Il suffit de remarquer que $\sigma^+\mathcal{O}_V f^s$ est quasi-isomorphe au complexe $(\sigma^+\mathcal{O}_V)f_t^s$ dont la cohomologie est concentrée en degré 0 avec $h^0((\sigma^+\mathcal{O}_V)f_t^s) = \mathcal{O}_{V_t} f_t^s$. □

3.3. Le théorème.

Le complexe $\eta_+\mathcal{O}_{V_t} f_t^s$ n'est autre que le complexe d'Aomoto dont le déterminant a été étudié par F. Loeser et C. Sabbah ([14]). Nous allons rappeler brièvement un de leurs résultats et l'appliquer au calcul des coefficients dominants.

Soit X un schéma lisse de type fini sur $\mathbf{C}$ et $\mathcal{F}^{\cdot}$ un complexe borné de faisceaux sur X à cohomologie $\mathbf{C}$-constructible. On pose

$$\chi(\mathcal{F}^{\cdot}, x) := \sum_{i\in\mathbf{Z}} (-1)^i \dim_{\mathbf{C}} h^i(\mathcal{F}^{\cdot})_x.$$

Le *lieu singulier* de $\mathcal{F}^{\cdot}$, noté $\operatorname{Sing}\mathcal{F}^{\cdot}$, est l'adhérence de l'ensemble des $x \in X$ tels que $\chi(\mathcal{F}^{\cdot}, x) - \chi(\mathcal{F}^{\cdot}, x') \neq 0$ pour $x' \neq x$ et x' générique.

Ce nombre est appelé *caractéristique évanescente* de $\mathcal{F}^{\cdot}$ en x.

Remarque. — Si $X = \mathbf{A}^{1*}_{\mathbf{C}}$ et $\mathcal{F}^{\cdot}$ constructible, $\operatorname{Sing}\mathcal{F}^{\cdot}$ est un ensemble fini.

Revenons au complexe $\eta_+\mathcal{O}_{V_t} f_t^s$. On rappelle que dans la base e_t de $\det_K \eta_+\mathcal{O}_{V_t} f_t^s$ construite plus haut on a : $\tau_i(e_t) = c_i(t)d_i(s)e_t$, $\forall i = 1, \ldots, p$ où $d_i(s)$ a tous ses facteurs premiers dans L.

Le théorème de changement de base du déterminant montre que $c_i(t)d_i(s)$ est exactement la matrice de l'opérateur τ_i agissant sur $\det_K \eta_+\mathcal{O}_{V_t} f_t^s$. L'hypothèse sur $d_i(s)$ et le théorème 2.3.1 de [14] donnent alors

$$\forall i = 1, \ldots, p \quad c_i(t) = \prod_{b\in\mathbf{C}^*} b^{n_i(t,b)}$$

où $n_i(t,b)$ est la caractéristique évanescente de $Rf_{i,t*}\mathbf{C}_{U_t}$ en b.

Définitions

• *On dira qu'un fermé de $T \times \mathbf{A}^1_{\mathbf{C}}$ est vertical si l'adhérence de son image par la projection sur T est un fermé strict de T.*

• *Soit F un fermé irréductible non vertical de $T \times \mathbf{A}^1_{\mathbf{C}}$ et de codimension 1. Le morphisme injectif d'anneaux intègres $0 \to \mathcal{O}(T) \overset{pr_1^*}{\to} \mathcal{O}(F)$ provenant de la projection $pr_1 : F \to T$ se prolonge en une inclusion des corps de fractions $K(T) \hookrightarrow K(T)$ et si T' est un ouvert de T on a $K(T) = K(T')$ et $K(F) = K(pr_1^{-1}(T'))$. Par hypothèse sur F, pr_1 est génériquement finie. Il existe donc un ouvert T' de T tel que l'extension $K(T') \hookrightarrow K(pr_1^{-1}(T'))$ soit définie par un polynôme unitaire P à coefficients dans $K(T')$. On peut alors parler de la norme de cette extension c'est-à-dire le produit des racines de ce polynôme et qui est égal à son terme constant multiplié par $(-1)^{\deg P}$. On la notera par $N(K(F') : K(T')) = N(K(F) : K(T))$.*

Soit, à présent, le complexe de faisceaux à cohomologie constructible $Rg_{i*}\underline{\mathbf{C}}_{p^{-1}(T)}$ où g_i est le morphisme $p^{-1}(T) \longrightarrow T \times \mathbf{A}^{1*}_{\mathbf{C}}$; $(t,x) \mapsto (t, f(t,x))$ (pour la constructibilité on renvoie à [21]).

THÉORÈME 3. — *Soit i un entier entre 1 et p et soient $\Delta^i_1, \dots, \Delta^i_{r_i}$ les composantes irréductibles non verticales et de codimension 1 de* $\operatorname{Sing} Rg_{i*}\underline{\mathbf{C}}_{p^{-1}(T)}$. *Il esiste alors des entiers $n_{ij} \in \mathbf{Z}$ tels que :*

$$\forall i = 1, \dots, p \quad \alpha_i = \sum_{j=1}^{r_i} n_{ij} d\log[N(K(\Delta^i_j) : K(T))]$$

n_{ij} étant la valeur générique de $\chi(R\phi_{\Delta^i_j} Rg_{i*}\underline{\mathbf{C}}_{p^{-1}(T)})$, fonction caractéristique des cycles évanescents de $Rg_{i*}\underline{\mathbf{C}}_{p^{-1}(T)}$ le long de Δ^i_j.

Remarque. — Les $d\log[N(K(\Delta^i_j) : K(T))]$ peuvent a priori avoir des pôles sur T mais la somme $\sum_{j=1}^{r_i} n_{ij} d\log[N(K(\Delta^i_j) : K(T))]$ n'en a pas sur cet ouvert (puisqu'elle est égale à α_i).

Preuve. — Pour alléger les notations, on posera $f = f_1$, $g = g_1$ et $c(t) = c_1(t)$. Le calcul des c_i étant le même pour tout $i = 1, \dots, p$, on le fera uniquement pour $i = 1$.

La preuve de la proposition qui suit est standard ([15]).

PROPOSITION 6. — *Il existe un ouvert T' de T tel que pour tout*

$(t,b) \in T' \times \mathbf{A}^{1*}_{\mathbf{C}}$ on ait, en posant $U' = p^{-1}(T')$,

$$n(t,b) = \chi(Rg_*\underline{\mathbf{C}}_{U'},(t,b)) - \chi(Rg_*\underline{\mathbf{C}}_{U'},(t,b')), \quad b' \textit{ générique.}$$

Si toutes les composantes de $\operatorname{Sing} Rg_*\underline{\mathbf{C}}_{U'}$ sont verticales le résultat est évident. Supposons à présent que $\operatorname{Sing} Rg_*\underline{\mathbf{C}}_{U'}$ contient des composantes Δ^i_j de codimension 1 non verticales. On écrit alors $\Delta = \Delta^1 \cup \Delta^2$ où $\Delta^1 = \Delta^i_1 \cup \cdots \cup \Delta^i_{r_i}$ et Δ^2 est la réunion du reste des composantes; en particulier $\overline{pr_1(\Delta^2)}$ est un fermé strict de T.

Soit $\delta^1 \in \Delta^1$ l'ouvert de Δ^1 fini sur T et sur lequel la restriction de tous les groupes de cohomologie de $Rg_*\underline{\mathbf{C}}_{U'}$ sont des systèmes locaux. $F := \overline{pr_1((\Delta^1 - \delta^1) \cup \Delta^2)}$ est alors un fermé strict de T'. En particulier, pour tout $t \in T' \setminus F$ on aura $c(t) = \prod_{b \in E_t} b^{n(t,b)}$, E_t étant l'ensemble des $b \in \mathbf{A}^{1*}_{\mathbf{C}}$ tels que $(t,b) \in \operatorname{Sing} Rg_*\underline{\mathbf{C}}_{U'}$. On peut aussi écrire $c(t) = \prod_j \prod_{b \in E^j_t} b$ où E^j_t est l'ensemble des $b \in \mathbf{A}^{1*}_{\mathbf{C}}$ tels que $(t,b) \in \Delta'_j := \Delta^1_j \cap \delta^1$. Comme Δ'_j est connexe et grâce à l'hypothèse sur δ^1, la fonction $n(t,\cdot)$ est constante sur Δ'_j de valeur $n_{1,j}$. Ceci donne $c(t) = \prod_j \Big(\prod_{b \in E^j_t} b\Big)^{n_{1,j}}$. Mais $\prod_{b \in E^j_t} b$ est égal à $N(K(\Delta^1_j : K(T')) = N(K(\Delta^1_j : K(T))$. Finalement $c(t) = \prod_j [N(K(\Delta^1_j : K(T))]^{n_{1j}}$ et par suite $d \log c(t) = \sum_j n_{1j} d \log[N(K(\Delta^1_j) : K(T))]$. $\square$

3.3.1. *Exemple.*

On pose $\bar{T}_{\mathbf{C}} = \mathbf{A}^q$ et $f(t,x) = t_0 + \ldots + t_{q-1}x^{q-1} + x^q$. $p_+\mathcal{O}_V f^s$ est le complexe de faisceaux dont les sections globales sont données par

$$0 \to \mathbf{C}(s)[t,x,f^{-1}]f^s \overset{d_R}{\to} \mathbf{C}(s)[t,x,f^{-1}]f^s dx \longrightarrow 0$$

où $\mathbf{C}(s)[t,x,f^{-1}]f^s$ est placé en degré -1. Il est clair que $h^{-1}p_+\mathcal{O}_V f^s := \ker d_R = 0$.

Soit $\Delta := \Delta(t)$ le discriminant de $f(t,x)$ vu comme polynôme en x, $\mathbf{C}(s)[t,\Delta^{-1}]$ l'anneau des fractions de $\mathbf{C}(s)[t]$ à dénominateurs puissances de Δ et T l'ouvert $\operatorname{Spec} \mathbf{C}[t,\Delta^{-1}]$ de $\bar{T}$. Dans toute la suite on se placera sur T.

PROPOSITION 7. — *Le faisceau $h^0p_+\mathcal{O}_V f^s$ est un faisceau de $\mathcal{O}_{T_K}$-modules localement libre (et même libre) de rang $q-1$ et on a*

$$\alpha_1 = -d \log \Delta(t).$$

Preuve. — Le premier point résulte de la proposition qui suit et du fait qu'un $\mathcal{D}$-module $\mathcal{O}$-cohérent est $\mathcal{O}$-localement libre.

Proposition 8. — *Le $\mathbf{C}(s)[t, \Delta^{-1}]$-module $h^0 p_+ \mathcal{O}_V f^s := \operatorname{coker} d_R$ est de type fini, engendré par les classes des formes $f^s dx, x f^s dx, \ldots, x^{q-2} f^s dx$.*

Preuve. — C'est simplement la généralisation de la proposition 1.2.4 de [17] où $s = -1/2$. Sa preuve reste valable dans notre situation. □

Le faisceau $\det p_+ \mathcal{O}_V f^s$ est en particulier égal à $\det h^0 p_+ \mathcal{O}_V f^s$ et $\operatorname{Ch}(\det p_+ \mathcal{O}_V f^s) = \alpha_1 s + \alpha_0$.

Lemme 6. — *Le nombre $-n(t,b)$ est égal à la somme des ordres des racines de l'équation $f_t(x) - b = 0$.*

Preuve. — Comme g est propre on peut écrire

$$n(t,b) = \sum_i (-1)^i \dim_{\mathbf{C}} H^i(g^{-1}(t,b), \mathbf{C}) - \sum_i (-1)^i \dim_{\mathbf{C}} H^i(g^{-1}(t,b'), \mathbf{C}).$$

Pour tout $(t,b) \in T \times \mathbf{A}^*_{\mathbf{C}}$ on a $g^{-1}(t,b) = t \times f_t^{-1}(b)$ qui est un ensemble fini et non vide puisque $\Delta(t) \neq 0$. On en déduit

$$\begin{cases} H^i(g^{-1}(t,b), \mathbf{C}) & = 0 \text{ si } i \neq 0 \\ \dim_{\mathbf{C}} H^i(g^{-1}(t,b), \mathbf{C}) & = \operatorname{card} f_t^{-1}(b). \end{cases}$$

Par suite $n(t,b) = \operatorname{card} f_t^{-1}(b) - \operatorname{card} f_t^{-1}(b')$ et puisque b' est générique on a $n(t,b) = \operatorname{card} f_t^{-1}(b) - q$. □

Lemme 7. — *Pour tout t dans T on a*

$$c(t) = -q^q (\Delta(t))^{-1}.$$

Preuve. — On a $c(t) \in \Gamma(T, \mathcal{O}_T)^*$. Comme $\Delta(t)$ est irréductible, on a $c(t) = c\Delta^m$ où $c \in \mathbf{C}^*$ et $m \in \mathbf{Z}$. Pour calculer c et m, on spécialise t en $(t_0, 0)$ tel que $\Delta(t_0, 0) \neq 0$. La formule du résultant ([22]) donne dans ce cas $\Delta(t_0, 0) = -q^q t_0^{q-1}$. D'autre part, le lemme précédent donne $\prod_{b \in \mathbf{C}^*} b^{n(t,b)} = t_0^{q-1}$. Par identification on obtient $c = -q^q$ et $m = -1$. □

En prenant les dérivées logarithmiques des deux membres de l'égalité du lemme 7 on obtient le résultat voulu. □ □

BIBLIOGRAPHIE

[1] G.W. ANDERSON, Local factorization of determinants of twisted DR cohomology groups, Compositio Mathematica, 83 (1992).

[2] J. BERNSTEIN, The analytic continuation of generalized functions with respect to a parameter, Funct. An. and Appl., 6 (1972), 273-285.

[3] J.-E. BJÖRK, Rings of Differential Operators, North Holland, Amsterdam, 1979.

[4] J.-E. BJÖRK, Analytic $\mathcal{D}$-modules and applications, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, 1993.

[5] A. BOREL ET AL., Algebraic $\mathcal{D}$-modules, Perspectives in Math. vol. 2 Academic Press, Boston, 1987.

[6] N. BOURBAKI, Algèbre, tome 1, Hermann, Paris.

[7] P. DELIGNE, Équations différentielles à points singuliers réguliers, Lect. Notes in Math. vol. 163, Springer Verlag, 1970.

[8] P. DELIGNE, Le formalisme des cycles évanescents (exposés 13 et 14), SGA 7 II Springer Lect. Notes in Math., 340 (1973), 82-115 et 116-173.

[9] A. DOUAI, Déterminants d'intégrales de fonctions multiformes et polygones de Newton, Compositio Mathematica, 87 (1993).

[10] R. GODEMENT, Topologie algébrique et théorie des faisceaux, Hermann, Paris, 1964.

[11] M. GRANGER, Ph. MAISONOBE, A basic course on differential modules Travaux en cours, les cours du CIMPA, Éléments de la théorie des systèmes différentiels, vol. 1 Hermann, Paris, 1993.

[12] A. GROTHENDIECK, Le langage des schémas, Publications de l'IHES, 4.

[13] B. IVERSEN, Cohomology of sheaves, Universitext, Springer Verlag, Heidelberg, 1986.

[14] F. LOESER, C. SABBAH, Équations aux différences finies et déterminants d'intégrales de fonctions multiformes, Comment. Math. Helv., 66 (1991), 458-503.

[15] F. MAAREF, Thèse, Université de Paris 7, 1995.

[16] Z. MEBKHOUT, Le formalisme des six opérations de Grothendieck pour les $\mathcal{D}$-modules cohérents, Hermann, Paris, 1989.

[17] F. PHAM, Singularités des systèmes de Gauss-Manin, Progress in Math. vol. 2, Birkhaüser, Boston, 1980.

[18] C. SABBAH, Introduction to algebraic theory of linear systems of differential equations , Travaux en cours, les cours du CIMPA, Eléments de la théorie des systèmes différentiels vol. 1 Hermann, Paris, 1993, 1-80.

[19] T. TERASOMA, On the determinant of Gauss-Manin connections and Hypergeometric functions on hypersurfaces, Invent. Math., 110 (1992), 441-473.

[20] J.-L. VERDIER, Stratifications de Whitney et le théorème de Bertini-Sard, Inv. Math., 36 (1976).

[21] J.-L. VERDIER, Exposé sur les faisceaux constructibles, Séminaire de géométrie analytique Douady-Verdier, École Normale Supérieure de Paris, 1974.

[22] VAN DER WAERDEN, Modern algebra, Frederick Ungar Publishing co., New York, 1966.

Manuscrit reçu le 22 février 1996,
accepté le 12 avril 1996.

Fayçal MAAREF,
Université Rennes I
IRMAR
Campus de Beaulieu
35042 Rennes Cedex (France).
maaref@univ-rennes1.fr