ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

DRISS ESSOUABRI

Singularité de séries de Dirichlet associées à des polynômes de plusieurs variables et applications en théorie analytique des nombres

Annales de l'institut Fourier, tome 47, nº 2 (1997), p. 429-483

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1997__47_2_429_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
47, 2 (1997), 429–483

SINGULARITÉ DES SÉRIES DE DIRICHLET ASSOCIÉES À DES POLYNÔMES DE PLUSIEURS VARIABLES ET APPLICATIONS EN THÉORIE ANALYTIQUE DES NOMBRES

par Driss ESSOUABRI (1)

1. INTRODUCTION

Soit $P \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ un polynôme. On appelle *série de Dirichlet associée à P* la fonction

$$s \longmapsto Z(P; s) = \sum_{m \in \mathbb{N}^{*n}} \frac{1}{P(m)^s} \qquad (s \in \mathbb{C})$$

quand elle existe.

L'étude des séries de Dirichlet est d'une importance capitale en théorie analytique des nombres. En effet, plusieurs problèmes arithmétiques peuvent se formuler en termes de problèmes concernant les singularités de ces séries ; plus précisément, on a essentiellement besoin de trois renseignements concernant la série de Dirichlet $s \mapsto Z(P; s)$, à savoir :

(1) Trouver un domaine D de $\mathbb{C}$ où $s \mapsto Z(P; s)$ existe et est holomorphe.

(2) Montrer l'existence du prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$, déterminer un ensemble de candidats-pôles et obtenir des majorations des ordres des pôles.

(3) Obtenir des majorations du prolongement méromorphe sur les bandes verticales $\{s \in \mathbb{C} \mid a < \operatorname{Re} s < b\}$ où $a, b \in \mathbb{R}$ vérifient $a < b$.

---

(1) Cet article présente les principaux résultats de la thèse de l'Université Henri Poincaré-Nancy 1, soutenue le 19 décembre 1995. Cette thèse a été dirigée par D. Barlet que je tiens à remercier pour ses nombreux conseils.

Mots-clés : Série de Dirichlet – Prolongement méromorphe – Représentation intégrale – Résolution des singularités – Ensemble semi-algébrique.
Classification math. : 11M41 – 11P21 – 14B05 – 14P10 – 32A20 – 32A25.

À titre d'exemple, prenons un exemple classique en théorie des nombres : le problème de la représentation des entiers (appelé aussi problème des diviseurs généralisés).

Soit $P \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ positif sur $[1, +\infty[^n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$\begin{aligned} V_n &= \sharp\left\{(m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{N}^{*n} \mid P(m_1, \ldots, m_n) = n\right\} \\ &= \text{le nombre de façons d'écrire } n \text{ sous la forme} \\ &\qquad n = P(m_1, \ldots, m_n) \ \text{ où } \ (m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{N}^{*n}. \end{aligned}$$

Alors il est facile de voir que l'*ordre moyen* de V_n, défini par

$$\psi(t) = \frac{1}{t} \sum_{n \leq t} V_n,$$

vérifie :

$$t\psi(t) = \sum_{n \leq t} V_n = \sharp\left\{(m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{N}^{*n} \mid P(m_1, \ldots, m_n) \leq t\right\} =: N_P(t).$$

La fonction $N_P(t)$ représente donc le nombre de points de $\mathbb{R}^n$ à coordonnées entières strictement positives contenus dans l'ensemble semi-algébrique :

$$S_P(t) = \left\{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq 1, \ldots, x_n \geq 1 \ \text{ et } \ P(x) \leq t\right\}.$$

La connexion entre $t \mapsto N_P(t)$ et $s \mapsto Z(P; s)$ se fait par l'intermédiaire de la transformée de Mellin ; en effet, sous certaines hypothèses sur P, que nous préciserons dans la suite, $s \mapsto s^{-1} Z(P; s)$ est la transformée de Mellin de $t \mapsto N_P(t)$, c'est-à-dire :

$$Z(P; s) = s \int_0^{+\infty} N_P(t) t^{-s} \frac{\mathrm{d}t}{t},$$

d'où, par inversion de Mellin, si $s \mapsto Z(P; s)$ est holomorphe pour $\operatorname{Re} s > \sigma_0$, on obtient pour $c \gg \sigma_0$:

$$\frac{1}{2}\left(N_P(t+0) + N_P(t-0)\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} Z(P; s) t^s \frac{\mathrm{d}s}{s}$$

et le développement asymptotique de $N_P(t)$, quand t tend vers l'infini, s'obtient en déplaçant la droite d'intégration vers la gauche par le théorème des résidus. Nous avons besoin pour ceci de réponses aux trois questions citées ci-dessus.

Ceci est un exemple important qui illustre notre propos concernant l'intérêt de l'étude des singularités des séries de Dirichlet en théorie des nombres et il y en a bien d'autres. Il suffit pour ceci de consulter des ouvrages spécialisés dans la matière. On pourra aussi consulter les deux articles de P. Cassou-Noguès [2] et [3], ainsi que celui de Ben Lichtin [9] où des exposés assez complets des motivations et des développements de ces problèmes sont donnés.

Le but de notre travail est de répondre aux trois questions citées plus haut avec des hypothèses sur le polynôme P qui sont dans un sens optimales, mais qui en tout cas contiennent strictement toutes les classes de polynômes étudiés ultérieurement.

L'étude de la série de Dirichlet $Z(P;s)$ a été introduite par R.H. Mellin ([12], 1900) qui a traité le cas des polynômes P appartenant à $\mathbb{C}[X_1,\ldots,X_n]$ et à coefficients de partie réelle strictement positive. Les articles qui ont suivi celui de Mellin ont été consacrés au cas plus restrictif où le polynôme P vérifie en plus la condition d'ellipticité $P_N(x) \neq 0$ pour tout $x \in [0,+\infty[^n \setminus \{0\}$, où P_N est la partie homogène de plus haut degré de P, voir par exemple Mahler ([11], 1927).

Quatre-vingt deux ans après l'article de Mellin, P. Cassou-Noguès [4] a précisé ce résultat dans le cas d'un polynôme à deux variables ($n = 2$) et à coefficients de parties réelles strictement positives.

Quelques années plus tard, P. Sargos [16], [14], [15] a généralisé ce travail au cas des polynômes P de plusieurs variables ($n \geq 2$) non dégénérés par rapport à leur polyèdre de Newton à l'infini $\mathcal{E}^\infty(P)$. P. Sargos a démontré que pour de tels polynômes, la série $s \mapsto Z(P;s)$ existe et est holomorphe dans un demi-plan $\{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} s > \sigma_0\}$, qu'elle possède un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$ avec des pôles d'ordres au plus n et contenus dans une progression arithmétique de la forme $(\sigma_0 - k/N)_{k\in\mathbb{N}}$ où $\sigma_0 \in \mathbb{Q}_+^*$ et $N \in \mathbb{N}^*$ ne dépendent que du polynôme P et il a donné dans [15] une description de l'ensemble des candidats-pôles et de leurs ordres, ainsi que de σ_0 et N, en fonction de la géométrie du polyèdre de Newton $\mathcal{E}^\infty(P)$.

Peu après, Ben Lichtin [8] obtient le même résultat (à l'exception de la description en termes de polyèdre de Newton à l'infini) dans le cadre des polynômes de plusieurs variables dits *hypoelliptiques*, c'est-à-dire pour lesquels il existe une constante $B \in]0,1[$ telle que :

(i) $\operatorname{Re} P(x)$ tend vers l'infini quand $\|x\|$ tend vers l'infini, $x \in [B,+\infty[^n$;

(ii) pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^*$, $\operatorname{Re} \partial^\alpha P(x)/P(x)$ tend vers zéro quand $\|x\|$ tend vers l'infini, $x \in [B,+\infty[^n$.

Ils ont tous les deux obtenu l'application arithmétique concernant $N_P(t)$, chacun dans le cadre de son hypothèse. Aucune de ces deux hypothèses n'implique l'autre et le lien entre les deux est un peu obscur.

Le but de notre travail est d'obtenir les mêmes résultats pour une classe de polynômes plus générale et qui contient comme cas particuliers toutes les classes précédentes.

Pour des raisons de simplicité, nous nous placerons dans le cadre des polynômes $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$. Tous les résultats énoncés se généralisent sans difficulté au cas des polynômes $P \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$.

Donc, si P appartient à $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$, notre hypothèse, que nous appellerons $\mathrm{H_0S}$, est la suivante :

$$\mathrm{H_0S} \qquad \begin{cases} \text{il existe } B \in \,]0,1[\, \text{ tel que :} \\ \text{(i) } P(x) \to +\infty \quad \text{quand} \quad \|x\| \to +\infty,\ x \in [B, +\infty[^n \text{ et} \\ \text{(ii) } d\big(Z(P), [B, +\infty[^n\big) > 0 \end{cases}$$

où $Z(P) = \{z \in \mathbb{C}^n \mid P(z) = 0\}$ = l'hypersurface des zéros complexes de P.

D'après le lemme que nous établirons dans le paragraphe 3, on peut remplacer (ii) par :

$$\text{(ii}'\text{)} \qquad \text{pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^n,\ x \mapsto \frac{\partial^\alpha P(x)}{P(x)} \text{ est borné sur } [B, +\infty[^n,$$

laquelle permet de voir que cette classe contient celle des polynômes hypoelliptiques traitée par Ben Lichtin.

En outre, si $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ est non dégénéré par rapport à son polyèdre de Newton à l'infini (classe traitée par P. Sargos et contenant celle des polynômes à coefficients strictement positifs), une récurrence facile montre qu'il existe $B \in \,]0,1[$ tel que :

$$\text{pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^n,\ x \mapsto x^\alpha \frac{\partial^\alpha P(x)}{P(x)} \ \text{ est borné sur } \ [B, +\infty[^n.$$

Il en résulte que P vérifie $\mathrm{H_0S}$.

En conclusion, la classe des polynômes vérifiant $\mathrm{H_0S}$ contient celle des polynômes hypoelliptiques et celle des polynômes non dégénérés par rapport à leur polyèdre de Newton à l'infini. Mais elle en contient aussi d'autres.

Pour s'en convaincre, il suffit de se placer dans le cas $n = 2$ et de considérer

$$P(X_1, X_2) = (X_1 - X_2)^2 X_1 + X_1 \in \mathbb{R}[X_1, X_2].$$

Un calcul facile montre que P vérifie $\mathrm{H_0S}$ avec $B = \frac{1}{2} \in \,]0,1[$.

En revanche :

• $\left|\dfrac{\partial P/\partial x_2(x_1,x_1+1)}{P(x_1,x_1+1)}\right| = 1$ ne tend pas vers 0 quand x_1 tend vers l'infini et, par suite, P n'est pas hypoelliptique.

• Avec les notations de P. Sargos, on a $P^*(X_1,X_2) = X_1^3 + X_2^2X_1$, donc $P(X_1,X_1) = X_1$ et $P^*(X_1,X_1) = 2X_1^3$ et par suite

$$P(X_1,X_1) \not\asymp P^*(X_1,X_2),$$

donc P est dégénéré par rapport à son polyèdre de Newton à l'infini.

L'hypothèse optimale sous laquelle on pourrait souhaiter traiter le problème est celle qui consiste à ne retenir que la condition (i), c'est-à-dire :

$$\mathrm{H}_0 \quad \begin{cases} \text{il existe } B \in]0,1[\text{ tel que } P(x) \to +\infty \text{ quand } \|x\| \to +\infty, \\ x \in [B,+\infty[^n, \text{ et } P(m) \neq 0 \text{ pour tout } m \in \mathbb{N}^{*n}. \end{cases}$$

Dans notre travail, nous avons franchi un pas dans cette direction. En effet, nous démontrons (théorème 1) que, sous l'hypothèse H_0, la série de Dirichlet $Z(P;s)$ possède un demi-plan de convergence et d'holomorphie. Cependant, si P vérifie H_0 mais pas $\mathrm{H}_0\mathrm{S}$, des branches de l'hypersurface $Z(P)$ s'approchent de façon asymptotique de $[B,+\infty[^n$ au voisinage de l'infini. De ce fait, les propriétés analytiques de la série de Dirichlet $Z(P;s)$, contrairement à celles des intégrales, ne dépendent pas que de la nature de la singularité de P à l'infini, et, par suite, la méthode représentation intégrale — et — désingularisation ne suffit plus pour expliquer les propriétés analytiques de $Z(P;s)$. C'est dans ce sens que notre hypothèse $\mathrm{H}_0\mathrm{S}$ est optimale.

Pour illustrer notre propos, voici un exemple. On considère, quels que soient $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $k \in \mathbb{N}$ vérifiant $k \geq 4$,

$$P_\alpha(x,y) = (x-\alpha y)^2 x^k y^k + x \in \mathbb{R}[x,y].$$

Il est facile de voir que P_α vérifie H_0 mais non $\mathrm{H}_0\mathrm{S}$.

On note $\sigma_0(\alpha,k)$ l'abscisse de convergence de la série de Dirichlet $Z(P_\alpha;s)$ (c'est aussi le premier pôle du prolongement méromorphe s'il existe) ; on a alors :

• si $\alpha \in \mathbb{Q}_+^*$, on a $\sigma_0(\alpha,k) = 1$ (facile à vérifier) ;

• si $\alpha > 0$ irrationnel algébrique, on a $\sigma_0(\alpha,k) \leq \dfrac{1}{k-2} \leq \dfrac{1}{2}$.

Ce dernier point découle du célèbre théorème de Roth [13] qui implique dans ce cas que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $c = c(\varepsilon, \alpha) > 0$ tel que

$$\forall (m_1, m_2) \in \mathbb{N}^{*2}, \quad |m_1 - \alpha m_2| \geq \frac{c}{m_2^{1+\varepsilon}}$$

et par suite :

$$\forall (m_1, m_2) \in \mathbb{N}^{*2}, \quad P_\alpha(m_1, m_2) \geq c^2 m_1^k m_2^{k-2-\varepsilon}.$$

Donc $\sigma_0(\alpha, k)$ dépend des propriétés arithmétiques des coefficients du polynôme.

Ce phénomène n'apparaît pas pour les intégrales. En effet, si l'on pose, par exemple,

$$Y(P_\alpha; s) = \int_{[1,+\infty[^2} P_\alpha^{-s}(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

et si $\sigma'(\alpha, k)$ désigne l'abscisse de convergence de l'intégrale, ce qui est aussi le plus grand pôle du prolongement méromorphe de $Y(P_\alpha; s)$, on a, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\sigma'(\alpha, k) = \frac{1}{k+1},$$

ce qui est indépendant de la nature arithmétique de α et ne dépend que de la nature de la singularité de P_α à l'infini.

Notations.

- Quels que soient $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ et $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, on note

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n, \quad |z| = |z_1| + \cdots + |z_n|,$$
$$\alpha! = \alpha_1! \ldots \alpha_n!, \qquad z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n}.$$

- On note aussi $x = (x_1, \ldots, x_n)$ le point courant de $\mathbb{R}^n$ et $z = x + iy = (x_1 + iy_1, \ldots, x_n + iy_n)$ le point courant de $\mathbb{C}^n$.
- Nous noterons aussi, pour $\omega, s \in \mathbb{C}$, $\omega^s = \mathrm{e}^{s \log \omega}$ où log désigne la détermination principale du logarithme défini sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$.
- Nous utiliserons aussi la notation $\operatorname{Arg} \omega := \operatorname{Im} \log \omega \in]-\pi, \pi[$.
- Pour tout $x \in X$ et tout $\lambda \in \Lambda$, les symboles

$$f(\lambda, y, x) \ll_y g(x), \quad f(\lambda, y, x) = O_y\big(g(x)\big)$$

ont le même sens et signifient qu'il existe $A = A(y) > 0$, ne dépendant ni de x ni de λ, mais pouvant *a priori* dépendre de tous les autres paramètres du problème considéré en particulier de y, tel que l'on ait :

$$\forall x \in X,\ \forall \lambda \in \Lambda, \quad \left|f(\lambda, y, x)\right| \leq Ag(x).$$

- Le symbole $f \asymp g$ signifie qu'on a à la fois $f \ll g$ et $g \ll f$.
- On note aussi

$$Z(P) = \left\{z \in \mathbb{C}^n \mid P(z) = 0\right\}$$

l'hypersurface des zéros complexes de P dans $\mathbb{C}^n$.

- On note enfin, pour $s \in \mathbb{C}$, $s = \sigma + i\tau$, où $\sigma = \operatorname{Re} s$ et $\tau = \operatorname{Im} s$.

2. ÉNONCÉS DES PRINCIPAUX RÉSULTATS

Notons :

- $x = (x_1, \dots, x_n)$ le point courant de $\mathbb{R}^n$ et
- $x + iy = (x_1 + iy_1, \dots, x_n + iy_n)$ le point courant de $\mathbb{C}^n$.

Dans toute la suite, $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ sera un polynôme qui vérifie l'hypothèse suivante :

$$\mathrm{H}_0 : \quad \begin{cases} \text{Il existe une constante } B \in \,]0,1[\, \text{ telle que } P(x) \to +\infty \\ \text{quand } \|x\| \to +\infty \text{ et } x \in [B, +\infty[^n. \end{cases}$$

Nous noterons $\mathrm{H}_0\mathrm{S}$ l'hypothèse suivante :

$$\mathrm{H}_0\mathrm{S} \quad \begin{cases} P(x) \to +\infty \text{ quand } \|x\| \to +\infty,\ x \in [B, +\infty[^n \text{ et} \\ P(x + iy) \neq 0 \text{ pour tout } x \in [B, +\infty[^n \text{ et tout} \\ y \in B(0, \varepsilon_0), \text{ où } B \in \,]0,1[\, \text{ et } \varepsilon_0 \in \left]0, \frac{1}{2}\right[\text{ sont fixés.} \end{cases}$$

Le but de ce travail est de démontrer les résultats suivants :

THÉORÈME 1. — *Soit $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ un polynôme vérifiant* H_0. *Alors, il existe $\alpha > 0$ tel que la fonction*

$$s \longmapsto Z(P; s) := \sum_{m \in \mathbb{N}^{*n}} \big(P(m)\big)^{-s}$$

existe et est holomorphe dans le demi-plan $\{s \mid \operatorname{Re} s > \alpha\}$.

DÉFINITION. — *Le meilleur α possible dans le théorème 1 sera appelé l'abscisse de convergence de la série de Dirichlet $Z(P;s)$. On le notera*

$$\sigma_0 = \sigma_0(P).$$

Remarque. — Comme il est évident que la série de Dirichlet $Z(P;s)$ ne converge pas pour $s=0$, alors $\sigma_0(P) \geq 0$.

THÉORÈME 2. — *Soit $P \in \mathbb{R}[X_1,\dots,X_n]$ un polynôme vérifiant* $\mathrm{H_0S}$. *Notons $\sigma_0(P)$ l'abscisse de convergence donnée par le théorème 1. Alors la fonction $s \mapsto Z(P;s)$, qui est holomorphe dans le demi-plan $\{s \mid \operatorname{Re} s > \sigma_0(P)\}$, possède un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$ avec des pôles d'ordres au plus n et contenus dans une suite de la forme $\sigma_0 - k/M$ $(k \in \mathbb{N})$ où $M = M(P) \in \mathbb{N}^*$ ne dépend que de P. En outre l'abscisse de convergence $\sigma_0 = \sigma_0(P)$ est effectivement un pôle de cette fonction méromorphe.*

THÉORÈME 3. — *Soit $P \in \mathbb{R}[X_1,\dots,X_n]$ vérifiant* $\mathrm{H_0S}$. *On note $\widetilde{Z}(P;s)$ le prolongement méromorphe de $Z(P;s)$ qui existe d'après le théorème 2. Alors, il existe $A = A(P) > 0$ tel que, pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $N > 0$ et tout $\delta > 0$, on a :*

$$\widetilde{Z}(P;s) \ll_{N,\varepsilon,\delta} 1 + |\tau|^{A(\sigma_0-\sigma)+\varepsilon}$$

pour $\operatorname{Re} s \geq \sigma_0 - N$ *et* $\tau = \operatorname{Im} s$ *vérifiant* $|\tau| \geq \delta$.

Le dernier résultat, qui est une application arithmétique, nécessite quelques préliminaires.

Soit $P \in \mathbb{R}[X_1,\dots,X_n]$ vérifiant $\mathrm{H_0S}$. D'après le théorème 2, la fonction $s \mapsto s^{-1}Z(P;s)$ possède un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$ et ses pôles peuvent être rangés par ordre décroissant en une suite $(\sigma_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, on définit le polynôme $Q_k \in \mathbb{R}[X]$ de degré $\leq n$ par la relation :

$$Q_k(x) = \mathrm{e}^{-\sigma_k x} \operatorname{Re} s_{s=\sigma_k}\bigl(s^{-1}Z(P;s)\,\mathrm{e}^{sx}\bigr).$$

Soit $A = A(P)$ le nombre donné par le théorème 3. Notons $m = m(P)$ le plus grand entier k tel que

$$\sigma_k > \sigma_0 - \frac{1}{A}\cdot$$

Alors on a :

THÉORÈME 4. — *Soit* $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ *vérifiant* $\mathrm{H_0S}$. *Alors, avec les notations ci-dessus, pour tout* $\varepsilon > 0$ *assez petit,*

$$N_P(t) := \sharp\{m \in \mathbb{N}^{*n} \mid P(m) \leq t\} = \sum_{k=0}^{m} t^{\sigma_k} Q_k(\ln t) + O_\varepsilon(t^{\sigma_0 - 1/A + \varepsilon}).$$

Remarque. — Les énoncés des théorèmes sont les mêmes que ceux de Ben Lichtin [8] sous l'hypothèse plus restrictive que P est hypoelliptique. Dans le cas où P est en plus non dégénéré par rapport à son polynôme de Newton à l'infini, Patrick Sargos [15], [14] donne les mêmes énoncés avec les précisions suivantes :

(1) Si $P(x) = \sum_\alpha a_\alpha x^\alpha$ et $S = \{\alpha \in \mathbb{N}^n \mid a_\alpha \neq 0\}$ est son support, on note

$$\mathcal{E}^\infty(P) = \mathrm{conv}(S - \mathbb{R}_+^n)$$

son polyèdre de Newton à l'infini et Λ^+ la demi-droite $\mathbb{R}_+(1, \dots, 1)$. Soit $(t_0, \dots, t_0)$ le point d'intersection de Λ^+ avec le bord de $\mathcal{E}_\infty(P)$. Alors l'abscisse de convergence $\sigma_0(P)$ est égale à $1/t_0$, c'est-à-dire à l'inverse de l'éloignement à l'infini du polyèdre de Newton.

(2) Dans le théorème 4, on peut prendre A égal au degré total de P.

Dans le paragraphe 5, nous énoncerons et établirons un résultat intermédiaire (théorème 5) qui présente un intérêt propre. Ce résultat concerne le prolongement méromorphe et les majorations dans les bandes verticales d'intégrales oscillantes dépendant de paramètres.

Il va découler de ce théorème 5 comme cas particulier que, si P dans $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ est un polynôme qui vérifie l'hypothèse $\mathrm{H_0S}$, et si l'on pose :

$$Y(P; s) := \int_{[1, +\infty[^n} P^{-s}(x)\,\mathrm{d}x,$$

alors on a des énoncés analogues aux théorèmes 1, 2 et 3, à savoir que :

(1) Il existe un demi-plan de convergence et d'holomorphie de

$$s \longmapsto Y(P; s).$$

(2) La fonction $s \mapsto Y(P; s)$ possède un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$ avec des pôles d'ordres au plus n et contenus dans une suite de la forme $\sigma_0' - k/m$ (avec $k \in \mathbb{N}$) où $\sigma_0' = \sigma_0'(P)$ est l'abscisse de convergence $s \mapsto Y(P; s)$ et où $m = m(P) \in \mathbb{N}^*$ ne dépend que de P.

(3) Il existe une constante $B = B(P) > 0$ telle que le prolongement méromorphe $\widetilde{Y}(P;s)$ de $Y(P;s)$ vérifie : pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $\delta > 0$, $\widetilde{Y}(P;s) \ll_{N,\delta,\varepsilon} 1 + |\tau|^{B(\sigma'_0-\sigma)+\varepsilon}$ uniformément pour $\sigma = \operatorname{Re} s \geq \sigma'_0 - N$ et $\tau = \operatorname{Im} s$ vérifiant $|\tau| > \delta$.

Ceci étant, si l'on classe les pôles de $s^{-1}Y(P;s)$ en une suite décroissante $(\sigma'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et si, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit le polynôme $Q'_k(X) \in \mathbb{R}[X]$ de degré $\leq n$ par la relation

$$Q'_k(x) = \mathrm{e}^{-\sigma'_k x} \operatorname{Re} s_{s=\sigma'_k}\left(s^{-1}Y(P;s)\,\mathrm{e}^{sx}\right)$$

et, si l'on pose

$$m' = m'(P) = \text{le plus grand entier tel que } \sigma'_k > \sigma'_0 - \frac{1}{B},$$

alors on a l'analogue suivant du théorème 4 : pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\begin{aligned} V_P(t) &= \int_{\{P(x)\leq t\}\cap[1,+\infty[^n} \mathrm{d}x \\ &= \text{Volume}\{x \in]1,+\infty[^n \mid P(x) \leq t\} \\ &= \sum_{k=0}^{m'} t^{\sigma'_k} Q'_k(\operatorname{In} t) + O_\varepsilon(t^{\sigma'_0-\frac{1}{B}+\varepsilon}). \end{aligned}$$

Nous obtenons donc :

Corollaire 1. — *Soit $P \in \mathbb{R}[X_1,\ldots,X_n]$ qui vérifie* $\mathrm{H_0S}$. *Alors, il existe $\rho_1, \lambda_1, \theta > 0$ et $A_1(X), B_1(X) \in \mathbb{R}[X]$ non identiquement nuls tels que :*

$$N_P(t) = t^{\rho_1} A_1(\ln t)\big(1 + O(t^{-\theta})\big) \quad et$$

$$V_P(t) = t^{\lambda_1} B_1(\ln t)\big(1 + O(t^{-\theta})\big).$$

Ceci étant, il est naturel de vouloir comparer $N_P(t)$ et $V_P(t)$, car $V_P(t)$ n'est que la forme continue de $N_P(t)$. Ceci a conduit L. Ehrenpreis à conjecturer le résultat suivant :

Théorème (conjecture de L. Ehrenpreis démontrée par B. Lichtin). *Si $P \in \mathbb{R}[X_1,\ldots,X_n]$ est un polynôme hypoelliptique sur $]1,+\infty[^n$, alors $\rho_1 = \lambda_1$ et $A_1(u) = B_1(u)$.*

En fait, la conjecture de Ehrenpreis est un peu plus générale que la version que nous avons donnée. Pour plus de renseignements, voir « Volumes and lattice points proof of a conjecture of L. Ehrenpreis » de Ben Lichtin, [9], p. 215. Dans le cadre de notre hypothèse H_0S, nous montrerons par des exemples que la conclusion de ce résultat, tel qu'il est formulé, est fausse. Cependant, on peut l'étendre sous la forme suivante :

COROLLAIRE 2. — *Soit $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ un polynôme qui vérifie* H_0S. *Alors $\rho_1 = \lambda_1 = \lambda$, c'est-à-dire il existe $\lambda > 0, \theta > 0$ et $A_1(X), B_1(X) \in \mathbb{R}[X]$ non identiquement nuls tels que :*

$$N_P(t) = t^\lambda A_1(\mathrm{In} t)\big(1 + O(t^{-\theta})\big) \text{ et}$$

$$V_P(t) = t^\lambda B_1(\mathrm{In} t)\big(1 + O(t^{-\theta})\big).$$

Ce corollaire montre qu'une partie de la conjecture d'Ehrenpreis peut se généraliser à la classe des polynômes vérifiant H_0S. Par contre, nous montrerons par un exemple que la condition $A_1(u) = B_1(u)$ n'est plus valable en général pour cette classe de polynômes.

3. QUELQUES LEMMES ET DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1

3.1. Énoncés des lemmes.

LEMME 1. — *Soit $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ vérifiant : il existe $B \in]0,1[$ tel que $P(x)$ tend vers l'infini quand $\|x\|$ tend vers l'infini et $x \in [B, +\infty[^n$.*

Alors, il existe $c > 0$, $\alpha > 0$ et $r_0 > 0$ tels que pour tout $x \in [B, +\infty[^n$ vérifiant $\|x\| \geq r_0$, on a $P(x) \geq c(x_1 \dots x_n)^\alpha$.

LEMME 2. — *Soit $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ vérifiant : il existe $B \in]0,1[$ et il existe $\varepsilon_0 > 0$ tels que :*

(i) *$P(x) \to +\infty$ quand $\|x\| \to +\infty$ et $x \in [B, +\infty[^n$ et*

(ii) *$\forall x \in [B, +\infty[^n$ et $\forall y \in B(0, \varepsilon_0) \subset \mathbb{R}^n$, $P(x + iy) \neq 0$.*

Alors il existe $B' \in]0,1[$, $\varepsilon_1 \in]0, \varepsilon_0]$, α, c et $K > 0$ tels que

$$\frac{P(x+iy)}{P(x)} = 1 + O(\|y\|)$$

uniformément en $x \in [B', +\infty[^n$ et $y \in B(0, \varepsilon_1)$.

En particulier, pour tout $x \in [B', +\infty[^n$ *et tout* $y \in B(0, \varepsilon_1)$, *on a :*

(a) $\operatorname{Re} P(x+iy) \geq c(x_1 \cdots x_n)^{\alpha}$ et

(b) $|\operatorname{Arg} P(x+iy)| \leq K\|y\|$, *où* Arg *désigne la détermination de l'argument comprise entre* $-\pi$ *et* π. *Les constantes* $B', \varepsilon_1, \alpha, c$ *et* K *ne dépendent que de* P, B, ε_0 *et* n.

LEMME 3. — *Soit* $P \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$; *on suppose qu'il existe* $B_0 \in]0,1[$ *tel que* $P(x)$ *tend vers l'infini quand* $\|x\|$ *tend vers l'infini,* $x \in [B_0, +\infty[^n$ *et, pour tout* $x \in [B_0, +\infty[^n$, $P(x) \neq 0$. *Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) *il existe* $B \in]0,1[$ *tel que* $d\big(Z(P), [B, +\infty[^n\big) > 0$,

(2) *il existe* $B \in]0,1[$ *tel que pour tout* $\alpha \in \mathbb{N}^n$, *la fonction* $x \mapsto \partial^{\alpha} P(x)/P(x)$ *est bornée sur* $[B, +\infty[^n$ *(en fait, il n'y a qu'un nombre fini de conditions, car* $\partial^{\alpha} P \equiv 0$ *si* $|\alpha| >$ degré total de P).

3.2. Démonstrations des lemmes.

3.2.1. Démonstration du lemme 1.

Dans la démonstration de ce lemme, nous suivrons de près les idées de Hörmander dans [7], appendice.

Pour tout $r > 0$, on pose :

$$\mu_p(r) = \min\big\{P(x) \mid x \in [B, +\infty[^n \text{ et } r = x_1 \cdots x_n\big\}.$$

Alors, la condition imposée à P implique de façon évidente que $\mu_p(r)$ tend vers l'infini quand r tend vers l'infini . On pose aussi :

$$\begin{aligned} A = \big\{(x, r, \mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+2} \mid P(x) - \mu = 0, \\ r = x_1 \ldots x_n,\ r > 0 \text{ et } x_j \geq B \text{ pour } j = 1, \ldots, n\big\}. \end{aligned}$$

Alors, A est un semi-algébrique de $\mathbb{R}^{n+2}$.

Soit $(x, r, \mu) \mapsto (r, \mu)$ la projection canonique $\pi : \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}^2$. Alors, d'après le principe de Tarski-Seidenberg [5], $L = \pi(A)$ est un sous-ensemble semi-algébrique de $\mathbb{R}^2$. Donc L s'écrit

$$L = \bigcup_{i=1}^{k} L_i$$

où, pour $i = 1, \ldots, k$, il existe des polynômes $(f_{ij})_{1 \leq j \leq p_i}$ et $(g_{ij})_{1 \leq j \leq q_i}$ de $\mathbb{R}[X_1, X_2]$ tels que :

$$L_i = \big\{(r,\mu) \in \mathbb{R}^2 \mid f_{ij}(r,\mu) > 0 \text{ pour } j = 1,\dots,p_i \\ \text{et } g_{ij}(r,\mu) = 0 \text{ pour } j = 1,\dots,q_i\big\}.$$

On pose :

$$I = \big\{i \in \{1,\dots,k\} \mid \exists\, r > 0 \text{ avec } (r,\mu_p(r)) \in L_i\big\}.$$

Alors pour tout $i \in I$, il existe $j_i \in \{1,\dots,q_i\}$ tel que g_{ij} est non identiquement nulle. En effet, dans le cas contraire, il existerait $i_0 \in I$ tel que L_{i_0} est ouvert; mais comme i_0 appartient à I, il existe $r_0 > 0$ tel que $(r_0, \mu_p(r_0))$ soit dans L_{i_0}. Et, comme L_{i_0} est ouvert, il existe $\mu_1 < \mu_p(r_0)$ tel que $(r_0,\mu_1) \in L_{i_0} \subset \pi(A)$; donc il existe $x^0 \in [B,+\infty[^n$ tel que $r_0 = x_1^0 \dots x_n^0$ et $\mu_1 = P(x^0)$, donc

$$\mu_1 \geq \min\{P(x) \mid x \in [B,+\infty[^n \text{ et } r_0 = x_1 \cdots x_n\} = \mu_p(r_0).$$

Absurde. Donc, pour tout $i \in I$, il existe $j_i \in \{1,\dots,q_i\}$ tel que $g_{ij_i} \not\equiv 0$.

Soit $F \in \mathbb{R}[X_1, X_2]$ le polynôme qui a les mêmes facteurs irréductibles que $\big(\prod_{i\in I} g_{ij_i}\big)$, mais sans répétition. On a $F \not\equiv 0$ et, pour tout $r > 0$,

$$F\big(r, \mu_p(r)\big) = 0$$

et ceci implique en particulier que $m = \deg_{X_2} F \geq 1$. Mais d'après le théorème de Luröth, voir par exemple B.L. Van der Wærden [19] ou Walker [20], il existe $r_1 > 0$ tel que

$$\forall r > r_1, \quad F(r,\mu) = C_m(r) \prod_{j=1}^{m} \big(\mu - T_j(r)\big)$$

où pour $j = 1,\dots,m$, la fonction $r \mapsto T_j(r)$ est continue, semi-algébrique et possède un développement en série de Puiseux à l'infini et où $C_m(r) \neq 0$ pour tout $r > r_1$. Et comme F est sans facteurs carrés, les T_j sont deux à deux distinctes.

Ceci étant, pour tout $r > 1$, il existe $j = j(r) \in \{1,\dots,m\}$ tel que $\mu_p(r) = T_j(r)$; mais $r \mapsto \mu_p(r)$ est continue. Il existe alors $j_0 \in \{1,\dots,m\}$ tel que, pour tout $r > r_1$, $\mu_p(r) = T_{j_0}(r)$; en particulier $\mu_p(r)$ possède un développement en série de Puiseux en $+\infty$. Alors, il existe $A \neq 0$ et $\alpha \in \mathbb{Q}$ tel que

$$\mu_p(r) = Ar^\alpha\big(1 + o(1)\big)$$

quand r tend vers l'infini. Mais, comme $\mu_p(r)$ tend vers l'infini quand r tend vers l'infini, on a $A > 0$ et $\alpha > 0$, d'où l'existence de $r_0 > r_1$ tel que $\mu_p(r) \geq \frac{1}{2} Ar^\alpha$ pour tout $r \geq r_0$, et par suite, pour tout $x \in [B,+\infty[^n$ vérifiant $x_1 \dots x_n \geq r_0$, on a $P(x) \geq \frac{1}{2} A(x_1 \cdots x_n)^\alpha$ et ceci termine la démonstration du lemme 1. $\square$

3.2.2. Démonstration du lemme 2.

Soient B' et ε_1 tels que $B < B' < 1$ et $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_0$. On pose

$$\mu = \min(B' - B, \varepsilon_0 - \varepsilon_1) > 0.$$

Alors il est facile de voir que :

$$(*) \qquad \begin{cases} \forall \xi = x + iy \in [B', +\infty[^n + iB(0, \varepsilon_1) \subset \mathbb{C}^n \\ \text{et } \forall z \in Z(P), \text{ on a } \|z - \xi\| \geq \mu. \end{cases}$$

Maintenant, soit $\xi = x + iy \in [B', +\infty[^n + iB(0, \varepsilon_1)$. On pose :

$$\tilde{x} := (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1},$$
$$\tilde{y} := (y_1, \ldots, y_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

On considère le polynôme

$$G(z_n) := P(x_1 + iy_1, \ldots, x_{n-1} + iy_{n-1}, z_n) = P(\tilde{x} + i\tilde{y}, z_n),$$

$\tilde{x}$ et $\tilde{y}$ étant fixés. Le polynôme G se factorise de la façon suivante :

$$G(z_n) = H(\tilde{x}, \tilde{y}) \prod_{j=1}^{m} \big(z_n - t_j(\tilde{x}, \tilde{y})\big).$$

On a alors :

$$\frac{P(\tilde{x} + i\tilde{y}, x_n + iy_n)}{P(\tilde{x} + i\tilde{y}, x_n)} = \prod_{j=1}^{m} \frac{x_n + iy_n - t_j(\tilde{x}, \tilde{y})}{x_n - t_j(\tilde{x}, \tilde{y})} = \prod_{j=1}^{m} \Big(1 + \frac{iy_n}{x_n - t_j(\tilde{x}, \tilde{y})}\Big).$$

Mais, $\big(\tilde{x} + i\tilde{y}, t_j(\tilde{x}, \tilde{y})\big)$ est dans $Z(P)$ pour $j = 1, \ldots, m$ et $(\tilde{x} + iy_n, x_n)$ appartient à $[B', +\infty[^n + iB(0, \varepsilon_1)$. Donc, d'après (*), pour $j = 1, \ldots, m$, on a :

$$\big|x_n - t_j(\tilde{x}, \tilde{y})\big| = \big\|(\tilde{x} + i\tilde{y}, t_j(\tilde{x}, \tilde{y})) - (\tilde{x} + i\tilde{y}, x_n)\big\| \geq \mu.$$

De plus on sait que $|iy_n| = |y_n| \leq \|y\|$, d'où

$$\frac{P(\tilde{x} + i\tilde{y}, x_n + iy_n)}{P(\tilde{x} + i\tilde{y}, x_n)} = 1 + O_{\mu,n}\big(\|y\|\big)$$

et une récurrence descendante permet de voir facilement que :

$$\frac{P(x + iy)}{P(x)} = 1 + O_{\mu,n}\big(\|y\|\big).$$

Ceci démontre la première partie de notre lemme. Le reste en découle de façon évidente. □

3.2.3. Démonstration du lemme 3.

Partie (2) $\Rightarrow$ (1). — D'après le développement de Taylor de P, on a

$$\frac{P(x+iy)}{P(x)} - 1 = \sum_{\substack{|\alpha|\leq\mu \\ \alpha\neq 0}} \frac{\partial^\alpha P(x)}{P(x)} \frac{(iy)^\alpha}{\alpha\,!}, \quad \mu = \deg P,$$

ce qui permet de conclure de façon évidente.

Partie (1) $\Rightarrow$ (2). — Si P vérifie (1), d'après le lemme 2, il existe $B \in \,]0,1[$ et $\varepsilon_1 \in \,]0,1[$ tels que $P(x+iy)/P(x) = 1 + O(\|y\|)$ uniformément en $x \in [B,+\infty[^n$ et $y \in B(0,\varepsilon_1)$. En particulier, il est facile de voir que :

$$(**) \qquad \begin{cases} \text{pour tout } y \in B(0,\varepsilon_1), \text{ la fonction } x \mapsto P(x+iy)/P(x) \\ \text{est bornée sur } [B,+\infty[^n. \end{cases}$$

Maintenant, si nous utilisons la formule de Taylor, nous obtenons

$$P(x+iy) = \sum_{|\alpha|\leq\mu} \partial^\alpha P(x) \frac{i^{|\alpha|}}{\alpha\,!} y^\alpha$$

où μ est le degré total de P.

Si l'on ordonne l'ensemble $\{\alpha \in \mathbb{N}^n \mid |\alpha| \leq \mu\}$ par ordre lexicographique en une suite croissante $(\alpha_j)_{j=1,\dots,N}$, on a alors

$$P(x+iy) = \sum_{j=1}^{N} \partial^{\alpha_j} P(x) \frac{i^{|\alpha_j|}}{\alpha_j\,!} y^{\alpha_j},$$

et donc

$$\frac{P(x+iy)}{P(x)} = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^{\alpha_j} P(x)}{P(x)} \frac{i^{|\alpha_j|}}{\alpha_j\,!} y^{\alpha_j}.$$

En choisissant $y_1, \dots, y_N \in B(0,\varepsilon_1)$ sans condition pour le moment, on a le système suivant :

$$\frac{P(x+iy_\ell)}{P(x)} = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^{\alpha_j} P(x)}{P(x)} \frac{i^{|\alpha_j|}}{\alpha_j\,!} y_\ell^{\alpha_j}, \quad \ell \in \{1,\dots,N\}.$$

Maintenant, si, pour $x \in [B, +\infty[^n$, nous considérons les vecteurs colonnes suivants de $\mathbb{C}^N$:

$$X(x) := \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^{\alpha_1} P(x)}{P(x)} \dfrac{i^{|\alpha_1|}}{\alpha_1!} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial^{\alpha_N} P(x)}{P(x)} \dfrac{i^{|\alpha_N|}}{\alpha_N!} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y(x) := \begin{pmatrix} \dfrac{P(x+iy_1)}{P(x)} \\ \vdots \\ \dfrac{P(x+iy_N)}{P(x)} \end{pmatrix}$$

et si l'on considère la matrice

$$M := (y_\ell^{\alpha_j})_{1 \le j, \ell \le N} \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R}),$$

le système précédent s'écrit :

$$\text{pour tout } \; x \in [B, +\infty[^n, \;\; Y(x) = MX(x).$$

Mais il est facile de voir que l'on peut choisir $y_1, \ldots, y_N \in B(0, \varepsilon_1)$ de façon à ce que M soit inversible. On peut donc supposer les y_ℓ fixés avec M inversible. On a alors, pour tout $x \in [B, +\infty[^n$,

$$X(x) = M^{-1} Y(x),$$

et donc

$$\|X(x)\| \le \|M^{-1}\| \times \|Y(x)\|.$$

Mais (**) implique que $x \mapsto Y(x)$ est bornée sur $[B, +\infty[^n$ et donc la fonction $x \mapsto X(x)$ est bornée sur $[B, +\infty[^n$. Par conséquent, en vertu de la définition de $X(x)$, on obtient :

pour $j = 1, \ldots, N$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\partial^{\alpha_j} P(x)}{P(x)}$ est bornée sur $[B, +\infty[^n$.

Et comme on a

$$\{\alpha_j \,;\, 1 \le j \le N\} = \{\alpha \in \mathbb{N}^n \,;\, |\alpha| \le \mu\},$$

où $\mu =$ est le degré total de P, on obtient que (2) est vraie. □

3.3. Démonstration du théorème 1.

Elle découle de façon triviale du lemme 1. □

4. FORMULE SOMMATOIRE

D'après le théorème 1, la fonction $s \mapsto Z(P;s)$ existe et est holomorphe dans le demi-plan $\sigma = \operatorname{Re} s > \sigma_0$. Le but de cette partie est d'établir une formule sommatoire qui permet de représenter $Z(P;s)$ par des intégrales, ce qui nous permettra dans la suite d'établir l'existence du prolongement méromorphe de $Z(P;s)$ *via* l'étude des prolongements méromorphes de ces intégrales.

Dans toute la suite, nous désignerons par $\log z$ (où $z \in \mathbb{C}$) la détermination principale du logarithme définie sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. Si H est un élément de $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ et $\tau \in \mathcal{G}_n$ est une permutation de $\{1, \dots, n\}$, on définit le polynôme

$$H_\tau(z_1, \dots, z_n) = H(z_{\tau(1)}, \dots, z_{\tau(n)}).$$

On utilisera la même notation même si H n'est pas un polynôme, mais n'importe quelle fonction de n variables réelles ou complexes.

Dans toute la suite, on suppose que $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ est un polynôme pour lequel il existe $B \in \,]0,1[$ et $\varepsilon_0 > 0$ tels que :

(i) $P(x) \to +\infty$ quand $\|x\| \to +\infty$, $x \in [B, +\infty[^n$;

(ii) $P(x+iy) \neq 0$ pour $x \in [B, +\infty[^n$ et $\|y\| < \varepsilon_0$.

Nous avons vu alors, d'après le lemme 2.2, que ceci implique qu'il existe des constantes $B' \in \,]0,1[$, $\varepsilon_1 \in [0, \varepsilon_0]$, $\alpha > 0$, $c > 0$ et $K > 0$ telles que :

(a) pour tout $x \in [B', +\infty[^n$ et tout $y \in B(0, \varepsilon_1)$,
$$\operatorname{Re} P(x+iy) \geq c(x_1, \dots, x_n)^\alpha,$$

(b) pour tout $x \in [B', +\infty[^n$ et tout $y \in B(0, \varepsilon_1)$,
$$\left|\operatorname{Arg} P(x+iy)\right| \leq K\|y\|,$$

où $B', \varepsilon_1, \alpha, c$ et K ne dépendent que de P, B, ε_1 et n.

La condition (a) implique en particulier que pour tout $x \in [B', +\infty[^n$ et pour tout $y \in B(0, \varepsilon_1)$, on a $\operatorname{Re} P(x+iy) > 0$, et donc

$$s \longmapsto \big(P(x+iy)\big)^{-s} := \exp\big(-s \log P(x+iy)\big)$$

est une fonction entière.

On pose $\varepsilon_2 := \varepsilon_1/\sqrt{n}$. Soit aussi $B'' \in \,]B', 1[$. Pour chaque $\varepsilon \in \,]0, \varepsilon_2[$, on pose :

$$L_\varepsilon := \big\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \geq B'' \text{ et } |\operatorname{Im} z| < \varepsilon\big\} = [B'', +\infty[+ i]-\varepsilon, \varepsilon[.$$

Alors il est facile de voir que, pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_2[$, on a :

$$(L_\varepsilon)^n \subset [B'', +\infty[^n + iB(0, \sqrt{n}\varepsilon) \subset [B', +\infty[^n + iB(0, \varepsilon_1).$$

Soit $\varepsilon \in]0, \varepsilon_1[$. D'après ce qui précède, pour tout $z = x + iy \in (L_\varepsilon)^n$, la fonction $s \mapsto P(z)^{-s}$ est entière. Posons

$$f_s(z) := \frac{P(z)^{-s}}{\prod_{k=1}^{n} (e(z_k) - 1)}$$

où $z = (z_1, \ldots, z_n)$ et $e(z) = \mathrm{e}^{2i\pi z}$ pour $z \in \mathbb{C}$. Alors, pour $z_2, \ldots, z_n$ fixés dans $L_\varepsilon \setminus \mathbb{N}^*$,

$$f_s^1 : z_1 \longmapsto f_s(z_1, \ldots, z_n)$$

est une fonction méromorphe au voisinage de L_ε avec comme pôles les entiers strictement positifs et ces pôles sont tous simples. En plus, pour tout $m_1 \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathrm{Re}\, s_{z_1 = m_1} f_s^1 = \frac{(P(m_1, z_2, \ldots, z_n))^{-s}}{2i\pi \prod_{k=2}^{n} (e(z_k) - 1)}.$$

De plus, on sait que, pour tout $z \in [B', +\infty[^n + iB(0, \varepsilon_1)$ (qui est un voisinage de $(L_\varepsilon)^n$) on a, d'après (a) et (b) et si $\sigma = \mathrm{Re}\, s > 0$:

$$\begin{aligned} \left|P(z)^{-s}\right| &= \left|\,\mathrm{e}^{-s \log P(z)}\right| = \left|\,\mathrm{e}^{-(\sigma + i\tau)(\log|P(z)| + i \operatorname{Arg} P(z))}\right| \\ &\leq \left|P(z)\right|^{-\sigma} \mathrm{e}^{|\tau| \operatorname{Arg} P(z)|} \leq c^{-\sigma} (x_1 \cdots x_n)^{-\sigma\alpha}\, \mathrm{e}^{|\tau| K \varepsilon \sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Et ceci permet de voir, *via* le théorème des résidus que, si $\sigma > \alpha^{-1} > 0$, on a, pour $z_2, \ldots, z_n$ fixés dans $L_\varepsilon \setminus \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{m_1 = 1}^{\infty} P^{-s}(m_1, z_2, \ldots, z_n) = \int_{\partial L_\varepsilon} \frac{P^{-s}(z_1, \ldots, z_n)}{\prod_{k=1}^{n} (e(z_k) - 1)}\, \mathrm{d}z_1\, .$$

En répétant ce procédé n fois, on obtient, pour tout $s \in \mathbb{C}$ avec $\mathrm{Re}\, s > 1\alpha^{-1} > 0$ et tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_2[$,

$$Z(P; s) = \sum_{m \in \mathbb{N}^{*n}} P^{-s}(m) = \int_{(\partial L_\varepsilon)^n} \frac{P^{-s}(z_1, \ldots, z_n)}{\prod_{k=1}^{n} (\,\mathrm{e}(z_k) - 1)}\, \mathrm{d}z_1 \cdots \mathrm{d}z_n$$

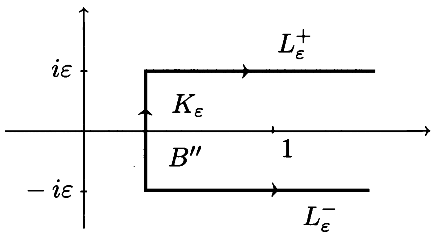
où ∂L_ε est la frontière de L_ε orientée dans le sens direct. On peut écrire :

$$\partial L_\varepsilon = -L_\varepsilon^+ - K_\varepsilon + L_\varepsilon^-$$

où

$$\begin{aligned} L_\varepsilon^+ &= \{x + i\varepsilon \mid x \in [B'', +\infty[\}, \\ L_\varepsilon^- &= \{x - i\varepsilon \mid x \in [B'', +\infty[\}, \\ K_\varepsilon &= \{B'' + iy\varepsilon \mid y \in [-1, 1]\}, \end{aligned}$$

ces trois chemins étant orientés comme dans la figure ci-contre.



Soit $\mathcal{G}_n$ le groupe des permutations de $\{1, \ldots, n\}$. Si $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $\sigma \in \mathcal{G}_n$, on pose :

$$^\sigma x := (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}).$$

Un domaine D de $\mathbb{R}^n$ ou de $\mathbb{C}^n$ sera dit *symétrique* si, pour tout $x \in D$ et toute permutation $\sigma \in \mathcal{G}_n$, on a $^\sigma x \in D$. Si f est une fonction de n variables définie sur un domaine symétrique, notons, pour $x \in D$ et $\sigma \in \mathcal{G}_n$:

$$f_\sigma(x) := f(^\sigma x).$$

Maintenant, soit $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}$ tels que $n_1 + n_2 + n_3 = n$. On pose :

$$\begin{aligned} Q^{n_1,n_2,n_3,\varepsilon,B''}(x_1, \ldots, x_n) := P(&B'' + i\varepsilon x_1, \ldots, B'' + i\varepsilon x_{n_1}, \\ &x_{n_1+1} + i\varepsilon, \ldots, x_{n_1+n_2} + i\varepsilon, \\ &x_{n_1+n_2+1} - i\varepsilon, \ldots, x_n - i\varepsilon) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi^{n_1,n_2,n_3,\varepsilon,B''}(x_1, \ldots, x_n) := &(-i\varepsilon)^{n_1}(-1)^{n_2} \\ &\times \prod_{j=1}^{n_1} \frac{1}{e(B'' + i\varepsilon x_j) - 1} \\ &\times \prod_{j=1}^{n_2} \frac{1}{e(x_{n_1+j} + i\varepsilon) - 1} \\ &\times \prod_{j=1}^{n_3} \frac{1}{e(x_{n_1+n_2+j} - i\varepsilon) - 1}. \end{aligned}$$

Avec ces notations, pour $\sigma = \operatorname{Re} s > \alpha^{-1}$ et $\varepsilon \in]0, \varepsilon_2[$, on a alors, avec $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $\mathrm{d}x = \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n$,

$$Z(P; s) = \sum \int_{[-1,1]^{n_1} \times [B'', +\infty[^{\,n-n_1}} \left[Q_\tau^{n_1,n_2,n_3,\varepsilon,B''}(x)\right]^{-s} \Phi_\tau^{n_1,n_2,n_3,\varepsilon,B''}(x)\, \mathrm{d}x,$$

la sommation se faisant sur $n_1 + n_2 + n_3 = n$ et $\tau \in \mathcal{G}_n$.

Il est évident qu'il suffit d'expliciter le terme correspondant à $\tau = \mathrm{Id}$. Ce terme est

$$\begin{aligned}
\Phi_{\mathrm{Id}}^{n_1,n_2,n_3,\varepsilon,B''}&(x_1, \dots, x_n) = \Phi^{n_1,n_2,n_3,\varepsilon,B''}(x_1, \dots, x_n) \\
&= \frac{(-i\varepsilon)^{n_1}(-1)^{n_2}}{\prod_{j=1}^{n_1} (\mathrm{e}^{2i\pi B''}\, \mathrm{e}^{-2\pi\varepsilon x_j} - 1)} \\
&\qquad \times \frac{1}{\prod_{j=1}^{n_2} (\mathrm{e}^{-2\pi\varepsilon}\, \mathrm{e}^{2i\pi i x_{n_1+j}} - 1)} \\
&\qquad\qquad \times \frac{1}{\prod_{j=1}^{n_3} (\mathrm{e}^{2\pi\varepsilon}\, \mathrm{e}^{2\pi i x_{n_1+n_2+j}} - 1)} \\
&= \frac{(-i\varepsilon)^{n_1}}{\prod_{j=1}^{n_1} (\mathrm{e}^{2i\pi B''}\, \mathrm{e}^{-2\pi\varepsilon x_j} - 1)} \\
&\qquad \times \Big(\sum_{m \in \mathbb{N}^{n_2}} \mathrm{e}^{-2\pi|m|\varepsilon} \exp\Big(2i\pi \sum_{j=1}^{n_2} m_j x_{n_1+j}\Big)\Big) \\
&\qquad\qquad \times \Big(\sum_{h \in \mathbb{N}^{*n_3}} \mathrm{e}^{-2\pi\varepsilon|h|} \exp\Big(- 2i\pi \sum_{j=1}^{n_3} h_j x_{n_1+n_2+j}\Big)\Big) \\
&= \frac{(-i\varepsilon)^{n_1}}{\prod_{j=1}^{n_1} (\mathrm{e}^{2i\pi B''}\, \mathrm{e}^{-2\pi\varepsilon x_j} - 1)} \\
&\qquad \times \sum_{\substack{m \in \mathbb{N}^{*n_2} \\ h \in \mathbb{N}^{*n_3}}} \mathrm{e}^{-2\pi\varepsilon(|h|+|m|)} \\
&\qquad\qquad \times \exp\Big(2i\pi \Big\{ \sum_{j=1}^{n_2} m_j x_{n_1+j} - \sum_{j=1}^{n_3} h_j x_{n_1+n_2+j} \Big\}\Big).
\end{aligned}$$

En conclusion, on obtient la proposition suivante :

PROPOSITION 1 (formule sommatoire). — *Soit $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ un polynôme pour lequel il existe $B_0 \in]0,1[$ et $\varepsilon_0 > 0$ tels que :*

(i) $P(x) \to +\infty$ *quand* $\|x\| \to +\infty$, $x \in [B_0, +\infty[^n$,

(ii) $P(x+iy) \neq 0$ *pour tout* $x \in [B, +\infty[^n$ *et tout* y *tel que* $\|y\| < \varepsilon_0$.

Alors il existe $\sigma_0 > 0$ tel que la fonction

$$s \longmapsto Z(P;s) := \sum_{m \in \mathbb{N}^{*n}} P^{-s}(m)$$

existe et est holomorphe dans le demi-plan $E_0 = \{s \mid \operatorname{Re} s > \sigma_0\}$. En outre, il existe des constantes $B_1 \in]B_0, 1[$ et $\varepsilon_1 \in]0, \varepsilon_0]$ telles que, pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$, pour tout $B \in]B_0, 1[$ et tout $s \in \mathbb{C}$ avec $\operatorname{Re} s > \sigma_0$, on a :

$$Z(P;s) = \sum_{m \in \mathbb{N}^{*n}} P^{-s}(m) = \sum_{\substack{\tau \in \mathcal{G}_n \\ n_1+n_2=n \\ h \in \mathbb{Z}^{n_2}}} \mathrm{e}^{-2\pi\varepsilon|h|} \int_{[-1,1]^{n_1} \times [B, +\infty[^{n_2}} \Upsilon_1 \times \Upsilon_2 \, \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n$$

avec

$$\Upsilon_1 = P^{-s}\big(B + i\varepsilon x_{\tau(1)}, \dots, B + i\varepsilon x_{\tau(n_1)}, \\ x_{\tau(n_1+1)} - i\varepsilon_1(h_1), \dots, x_{\tau(n)} - i\varepsilon_{n_2}(h_{n_2})\big)$$

$$\Upsilon_2 = (i\varepsilon)^{n_1} \exp\Big(2\pi i \Big\{\sum_{j=1}^{n_2} h_j x_{\tau(n+j)}\Big\}\Big) \Big/ \prod_{j=1}^{n_1} (1 - \mathrm{e}^{2\pi i B}\, \mathrm{e}^{-2\pi\varepsilon x_j})$$

et où, pour $j \in \{1, \dots, n_2\}$ et $h \in \mathbb{Z}^{n_2}$,

$$|h| = \sum_{j=1}^{n_2} |h_j| \quad \text{et} \quad \varepsilon_j(h_j) = \begin{cases} \varepsilon & \text{si } h_j \geq 0, \\ -\varepsilon & \text{si } h_j < 0. \end{cases}$$

5. PROLONGEMENTS MÉROMORPHES DES INTÉGRALES : THÉORÈME 5

5.1. Introduction, notations et énoncé du théorème 5.

Dans toute la suite, n_1 et n_2 seront deux entiers naturels avec $n_1+n_2 = n$ et ε_0 sera un réel strictement compris entre 0 et $\frac{1}{2}$. On note (y, x) le point courant de $\mathbb{R}^n \approx \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$.

On se donne une famille de polynômes $(Q_\varepsilon)_{\varepsilon \in [0,\varepsilon_0]}$ avec, pour tout $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, $Q_\varepsilon(y,x) \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ et tels que les coefficients de Q_ε sont $\mathcal{C}^\infty$ en ε.

On se donne une fonction

$$\phi : (y, \varepsilon) \longmapsto \phi_\varepsilon(y) := \phi(y, \varepsilon)$$

de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-2, 2[^{n_1} \times]-2\varepsilon_0, 2\varepsilon_0[$.

On suppose que :

(i) $Q_0(y, x) = R(x)$ ne dépend pas de $y \in \mathbb{R}^{n_1}$ (*i.e.* $R \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_{n_2}]$) et qu'il existe $\alpha > 0$ et $c > 0$ tels que, pour tout $x = (x_1, \ldots, x_{n_2})$ appartenant à $[1, +\infty[^{n_2}$,

$$R(x) \geq c(x_1 \cdots x_{n_2})^\alpha ;$$

(ii) $\dfrac{Q_\varepsilon(y, x)}{Q_0(y, x)} = \dfrac{Q_\varepsilon(y, x)}{R(x)} = 1 + O(\varepsilon)$

uniformément en $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ et $(y, x) \in [-1, 1]^{n_1} \times [1, +\infty[^{n_2}$.

On posera alors, sous ces conditions, pour tout $m \in \mathbb{Z}^{n_2}$ et $s \in \mathbb{C}$:

$$Y_m^{n_1, n_2}(Q_\varepsilon, \phi_\varepsilon, s) = \int_{[-1,1]^{n_1} \times [1, +\infty[^{n_2}} Q_\varepsilon^{-s}(y, x) \phi_\varepsilon(y) e\big(\langle m, x \rangle\big) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x.$$

Le but de ce paragraphe est d'étudier le prolongement méromorphe de $s \mapsto Y_m^{n_1, n_2}(Q_\varepsilon, \phi_\varepsilon, s)$, ce qui nous permettra *via* la formule sommatoire démontrée dans le chapitre 2 d'étudier le prolongement méromorphe de la série de Dirichlet $s \mapsto Z(P; s)$.

Plus précisément, on établira le résultat suivant :

THÉORÈME 5. — *Sous les hypothèses ci-dessus et pour tout $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, la fonction $s \mapsto Y_m^{n_1, n_2}(Q_\varepsilon, \phi_\varepsilon, s)$ existe et est holomorphe dans le demi-plan $\{s \mid \operatorname{Re} s > \alpha^{-1}\}$.*

De plus, cette fonction possède un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$ avec des pôles d'ordres au plus n et contenus dans un ensemble de la forme $\mathcal{S} = \{\sigma_0 - k/M \mid k \in \mathbb{N}\}$ où $\sigma_0 = \sigma_0(R) \in \mathbb{Q}_+^*$ et $M = M(R) \in \mathbb{N}^*$ ne dépendent que du polynôme R.

En outre, il existe $A = A(R) > 0$ tel que le prolongement mérmorphe de $Y_m^{n_1, n_2}(Q_\varepsilon, \phi_\varepsilon, s)$ vérifie : pour tout $\varepsilon' > 0$, pour tout $\delta > 0$ et tout entier $N > 0$, il existe une constante $D(N, \varepsilon', \delta, \varepsilon_0, R) > 0$, ne dépendant que de $N, \varepsilon', \varepsilon_0, \delta$ et R (donc indépendante de $m \in \mathbb{Z}^{n_2}$ et $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$), telle que, pour tout $s = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}$ tel que $\sigma \geq \sigma_0 - N$ et $d(s, \mathcal{S}) \geq \delta$, on ait :

$$\begin{aligned} Y_m^{n_1, n_2}(Q_\varepsilon, \phi_\varepsilon, s) &\leq D(N, \varepsilon', \delta, \varepsilon_0, R) \\ &\quad \times \big(1 + |\tau|^{A(\sigma_0 - \sigma)/\varepsilon'}\big) \, \mathrm{e}^{|\tau| \varepsilon} \big(1 + |m|^{A(\sigma_0 - \sigma) + \varepsilon'}\big). \end{aligned}$$

5.2. Le cas où le diviseur est à croisements normaux.

Dans la démonstration du théorème 5, nous allons réduire le cas général à un cadre plus simple *via* le théorème de désingularisation de Hironaka, qui nous permettra de nous ramener au cas d'un diviseur à croisements normaux, lequel est traité dans la proposition suivante :

PROPOSITION 2. — *Soient :*

- $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^{*n}$, $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{Z}^n$;
- $(\beta_1, \dots, \beta_p) \in \mathbb{N}^{*p} \cup (-\mathbb{N}^*)^p$ *avec* $p \leq n$;
- $B \in \{0\} \cup [1, +\infty[$ *et* $\varepsilon > 0$.

Soit $\psi : (y, u) \mapsto \psi(y, u)$ *une fonction* $\mathcal{C}^\infty$ *à support compact sur* $]-1, 1[^n \times S^{n-1}$, *où* S^{n-1} *est la sphère unité de* $\mathbb{R}^n$. *Soit* $g : y \mapsto g(y)$ *une fonction analytique inversible dans* $]-1, 1[^n$ *avec* $|\mathrm{Arg}(g(y))| \leq \varepsilon$ *pour tout* $y \in]0, 1[^n$. *On pose, pour* $s \in \mathbb{C}$ *et* $u \in S^{n-1}$:

$$F(s; u) = \int_{]1,+\infty[^n} x_1^{-a_1 s + b_1} \cdots x_n^{-a_n s + b_n} \, e\big(B(x_1^{\beta_1} \cdots x_p^{\beta_p})\big) \Big(g\Big(\frac{1}{x_1}, \dots, \frac{1}{x_n}\Big)\Big)^s \psi\Big(\frac{1}{x_1}, \dots, \frac{1}{x_n}, u\Big) \, \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n$$

avec $e(t) = \mathrm{e}^{2i\pi t}$. *Alors,* $s \mapsto F(s; u)$ *existe et est holomorphe dans le demi-plan* $\{s \mid \mathrm{Re}\, s > \sigma_0\}$, *où*

$$\sigma_0 := \max_{1 \leq j \leq n} \frac{b_j + 1}{a_j}.$$

Elle possède un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$ *avec des pôles d'ordres au plus* n, *contenus dans une suite de la forme* $\mathcal{S} = \{\sigma_0 - k/M \mid k \in \mathbb{N}\}$, *où* $M = M(a) := \prod_{j=1}^n a_j \in \mathbb{N}^*$. *En outre, ce prolongement méromorphe vérifie que, pour tout* $\varepsilon' > 0$, *pour tout* $\delta > 0$ *et tout* $N > 0$, *il existe* $C = C(N, \varepsilon', \delta, a, b) > 0$ *telle que, pour tout* $s = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}$ *avec* $\sigma \geq \sigma_0 - N$ *et* $d(s, \mathcal{S}) \geq \delta$, *on a :*

$$F(s; u) \leq C(1 + B^{|a|(\sigma_0 - \sigma) + \varepsilon'})(1 + |\tau|^{|a|(\sigma_0 - \sigma) + \varepsilon'}) \, \mathrm{e}^{\varepsilon |\tau|}.$$

Démonstration de la proposition 2. — Le cas où $B = 0$ est facile. En effet, c'est le cas d'un diviseur à croisements normaux du théorème d'Atiyah [1] concernant le prolongement méromorphe de $s \mapsto F^s$. On suppose donc désormais $B \geq 1$.

Pour simplifier les notations, nous adoptons les notations suivantes :

- $x^{-as+b} := \prod_{j=1}^{n} x_j^{-a_j s+b_j}$;
- e_j sera le j-ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{Z}^n$, de sorte que

$$(\ell_1,\ldots,\ell_n)=\sum_{j=1}^{n}\ell_j e_j\,;$$

- pour $x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^{*n}$, on pose $x^{-1}:=(x_1^{-1},\ldots,x_n^{-1})$;
- $\beta=(\beta_1,\ldots,\beta_p,0,\ldots,0)\in\mathbb{Z}^n$ et $\mathrm{d}x=\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_n$.

Avec ces notations, on aura :

$$F(s;u)=\int_{]1,+\infty[^n} x^{-as+b}e(Bx^{\beta})\big(g(x^{-1})\big)^s\psi(x^{-1};u)\,\mathrm{d}x.$$

On a alors deux cas à distinguer.

Premier cas : $(\beta_1,\ldots,\beta_p)$ appartient à $(-\mathbb{N}^*)^p$, c'est-à-dire $\beta_j<0$ pour tout $j\in\{1,\ldots,p\}$.

On pose $\gamma=-\beta$, de sorte que

$$F(s;u)=\int_{]1,+\infty[^n} x^{-as+b}e(Bx^{-\gamma})\big(g(x^{-1})\big)^s\psi(x^{-1};u)\,\mathrm{d}x.$$

Comme pour tout $x\in]1,+\infty[^n$

$$\Big|x^{-as+b}e(Bx^{-\gamma})\big(g(x^{-1})\big)^s\psi(x^{-1};u)\Big|\ll_{s,u} x^{-a\sigma+b}\quad(\sigma=\operatorname{Re}s),$$

on a que $s\mapsto F(s;u)$ existe et est holomorphe dans le demi-plan

$$\big\{s\mid \operatorname{Re}s>\sigma_0\big\},\quad \sigma_0=\max_{1\le j\le n}(b_j+1)/a_j.$$

Soit maintenant $s=\sigma+i\tau\in\mathbb{C}$ avec $\sigma>\sigma_0$. Adoptons la notation

$$\partial_j=\frac{\partial}{\partial x_j}\cdot$$

On a alors, par intégration par parties :

$$\begin{aligned}F(s;u)&=\int_{]1,+\infty[^n} x^{-as+b}e(Bx^{-\gamma})\big(g(x^{-1})\big)^s\psi(x^{-1};u)\,\mathrm{d}x\\&=\int_{]1,+\infty[^n}\partial_1\Big(\frac{x^{-as+b+e_1}}{-a_1s+b_1+1}\Big)e(Bx^{-\gamma})\big(g(x^{-1})\big)^s\psi(x^{-1};u)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$= \frac{2i\pi\gamma_1 B}{a_1 s - b_1 - 1} \int_{]1,+\infty[^n} x^{-as+b-\gamma} e(Bx^{-\gamma}) \big(g(x^{-1})\big)^s \psi(x^{-1};u\Big)\, \mathrm{d}x$$

$$+ \frac{s}{a_1 s - b_1 - 1} \int_{]1,+\infty[^n} x^{-as+b-e_1} e(Bx^{-\gamma}) \big(g(x^{-1})\big)^{s-1} \partial_1 g(x^{-1}) \psi(x^{-1};u)\, \mathrm{d}x$$

$$+ \frac{1}{a_1 s - b_1 - 1} \int_{]1,+\infty[^n} x^{-as+b-e_1} e(Bx^{-\gamma}) \big(g(x^{-1})\big)^s \partial_1 \psi(x^{-1};u)\, \mathrm{d}x.$$

Si l'on répète cette opération $a_1 N$ fois pour la variable x_1, puis $a_j N$ fois pour chaque variable x_j $(1 \leq j \leq n)$, on obtient, pour $\sigma = \operatorname{Re} s > \sigma_0$, que $F(s;u)$ est une somme finie de termes du type

$$\frac{B^\ell H(s)}{\prod_{j=1}^{n} \prod_{h=0}^{a_j N} (a_j s - b_j - 1 + h)} \int_{]1,+\infty[^n} x^{-as+b-Na-\alpha} e(Bx^{-\gamma}) \big(g(x^{-1})\big)^{s-r} \big(\tilde{g}(x^{-1})\big) \partial^u \psi(x^{-1};u)\, \mathrm{d}x$$

où $\tilde{g}\Big(x^{-1}\Big)$ est de la forme

$$\prod_j \big(\partial^{\mu_j} g(x^{-1})\big)^{\ell_j}$$

avec $r, \ell \in \mathbb{N} \cap [0, |a|N]$, $H \in \mathbb{R}[s]$ est de degré $\leq |a|N$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $\mu \in \mathbb{N}^n$ vérifie $|\mu| \leq |a|N$, et, pour tout j, $\mu_j \in \mathbb{N}^n$ et $\ell_j \in \mathbb{N}$ vérifient $|\mu_j|$ et $|\ell_j| \leq |a|N$.

Maintenant, il suffit de remarquer que, pour tout $x \in]1, +\infty[^n$,

$$\begin{aligned} &\big|x^{-as+b-Na-\alpha} e(Bx^{-\gamma}) \big(g(x^{-1})\big)^{s-r} \big(\tilde{g}(x^{-1})\big) \partial^\mu \psi(x^{-1};u)\big| \\ &\quad \ll_{N,g,\psi} x^{-a\sigma+b-Na} \big|\big(g(x^{-1})\big)^s\big| \\ &\quad \ll_{N,g,\psi} x^{-a\sigma+b-Na} e^{|\tau|\varepsilon} \end{aligned}$$

car, par hypothèse, $|\operatorname{Arg} g(y)| \leq \varepsilon$ pour tout $y \in]0,1[^n$. D'où la fonction

$$s \mapsto \int_{]1,+\infty[^n} x^{-a+b-Na-\alpha} e(Bx^{-\gamma}) \big(g(x^{-1})\big)^{s-r} \big(\tilde{g}(x^{-1})\big) \partial^\mu \psi(x^{-1};u)\, \mathrm{d}x$$

existe et est holomorphe sur $\{s \mid \operatorname{Re} s > \sigma_0 - N\}$ et vérifie dans ce demi-plan la majoration $\ll_{N,a} \mathrm{e}^{|\tau|\varepsilon}$.

On rappelle que $\sigma_0 = \max_{1 \leq j \leq n} (b_j + 1)/a_j$,

$$M = M(a) = \prod_{j=1}^{n} a_j \in \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad \mathcal{S} = \Big\{\sigma_0 - \frac{k}{M} \mid k \in \mathbb{N}\Big\}.$$

Soit $s=\sigma+i\tau\in\mathbb{C}$ avec $\sigma>\sigma_0-N$ et $d(s,\mathcal{S})\geq\delta$. On a alors, pour tout $j\in\{1,\ldots,B\}$ et tout $h\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\left|a_js-b_j-1+h\right| &= |a_j|\times\left|s-\frac{b_j+1}{a_j}+\frac{h}{a_j}\right|\\ &= |a_j|\times\left|s-\sigma_0+\left(\sigma_0-\frac{b_j+1}{a_j}+\frac{h}{a_j}\right)\right|.\end{aligned}$$

Or on a $\sigma_0-(b_j+1)/a_j+h/a_j=\ell/M$ pour un entier $\ell\in\mathbb{N}$; donc

$$\begin{aligned}|a_js-b_j-1+h| &= |a_j|\times\left|s-\left(\sigma_0-\frac{\ell}{M}\right)\right|\\ &\geq |a_j|\,d(s,\mathcal{S})\geq|a_j|\,\delta\geq\delta,\end{aligned}$$

d'où , pour $s=\sigma+i\tau\in\mathbb{C}$ avec $\sigma>\sigma_0-N$ et $d(s,\mathcal{S})\geq\delta$, on a

$$\begin{aligned}\frac{B^pH(s)}{\prod_{j=1}^{n}\prod_{h=0}^{a_jN}(a_js-b_j-1+h)} &\ll_{N,a,\gamma,\delta} B^{|a|N}\left(1+|\tau|^{\deg H}\right)\\ &\ll_{N,a,\gamma,\delta}\left(1+B^{|a|N}\right)\left(1+|\tau|^{|a|N}\right).\end{aligned}$$

Donc, en conclusion, pour tout $N>0$, la fonction $s\mapsto F(s;u)$ possède un prolongement méromorphe au demi-plan $\{s\mid\operatorname{Re}s>\sigma_0-N\}$ avec des pôles contenus dans $\mathcal{S}=\{\sigma_0-k/M\mid k\in\mathbb{N}\}$ où $M=a_1\cdots a_n$ et d'ordres au plus n. En outre, si s appartient à ce demi-plan et $d(s,\mathcal{S})\geq\delta$, on a :

$$(*)\qquad F(s;u)\ll_{N,a,\gamma,\delta}\left(1+B^{|a|N}\right)\left(1+|\tau|^{|a|N}\right).$$

Par conséquent, $s\mapsto F(s;u)$ possède un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$ avec des pôles d'ordres au plus n contenus dans $\mathcal{S}$. Ceci démontre la première partie du lemme.

La deuxième partie découle de (*) en prenant $N=\sigma_0-\sigma+\varepsilon'$. Ceci termine la démonstration du lemme dans le cas où $\beta_j<0$ pour tout j.

Deuxième cas : $\beta_1,\ldots,\beta_p$ sont >0.

On conserve la notation $\beta=(\beta_1,\ldots,\beta_p,0,\ldots,0)$. On a alors

$$F(s;u)=\int_{]1,+\infty[^n}x^{-as+b}\,e(Bx^\beta)\left(g(x^{-1})\right)^s\psi(x^{-1};u)\,\mathrm{d}x.$$

Comme dans le premier cas, il est facile de voir que, si l'on pose $\sigma_0 = \max_{1\le j\le n}(b_j+1)/a_j$, alors $s \mapsto F(s;u)$ existe et est holomorphe sur le demi-plan $\{s \mid \operatorname{Re} s > \sigma_0\}$.

Soit maintenant $s = \sigma + i\tau$ avec $\sigma > \sigma_0$. En intégrant par parties par rapport à x_1, on obtient

$$\begin{aligned}
F(s;u) &= \int_{]1,+\infty[^n} x^{-as+b}\, e(Bx^\beta)\big(g(x^{-1})\big)^s \psi(x^{-1};u)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{]1,+\infty[^n} x^{-as+b-\beta+e_1}\big(g(x^{-1})\big)^s \psi(x^{-1};u)\,\partial_1 \frac{e(Bx^\beta)}{2i\pi\beta_1 B}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{a_1 s - b_1 + \beta_1 - 1}{2i\pi B\beta_1}\int_{]1,+\infty[^n} x^{-as+b-\beta}\big(g(x^{-1})\big)^s \\
&\qquad\qquad \psi(x^{-1};u)\, e(Bx^\beta)\,\mathrm{d}x \\
&\quad + \frac{s}{2i\pi B\beta_1}\int_{]1,+\infty[^n} x^{-as+b-\beta-e_1}\big(g(x^{-1})\big)^{s-1} \\
&\qquad\qquad \partial_1 g(x^{-1})\,\psi(x^{-1};u)\, e(Bx^\beta)\,\mathrm{d}x \\
&\quad + \frac{s}{2i\pi B\beta_1}\int_{]1,+\infty[^n} x^{-as+b-\beta-e_1}\big(g(x^{-1})\big)^{s} \\
&\qquad\qquad \partial_1 \psi(x^{-1};u)\, e(Bx^\beta)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

En répétant cette opération $N(a_1+\cdots+a_p)$ fois, on obtient que, pour $\sigma = \operatorname{Re} s > \sigma_0$, $F(s;u)$ est une somme finie de terme du type

$$\begin{aligned}
\frac{Q(s)}{(2i\pi B\beta_1)^\ell}\int_{]1,+\infty[^n} & x^{-as+b-N(a_1+\cdots+a_p)\beta-\alpha}\big(g(x^{-1})\big)^{s-r}\big(\tilde g(x^{-1})\big) \\
&\qquad \partial^\mu \psi(x^{-1};u)\, e(Bx^\beta)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

où r et ℓ sont des entiers compris entre 0 et $N(a_1+\cdots+a_p)$, $\mu \in \mathbb{N}^n$ avec $|\mu| \le N(a_1+\cdots+a_p)$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et $\tilde g(x^{-1})$ est de la forme $\prod_i \big(\partial^{\mu_j} g(x^{-1})\big)^{\ell_j}$ où, pour tout $j \in \{1,\dots,n\}$, $\mu_j \in \mathbb{N}^n$ et $\ell_j \in \mathbb{N}$ avec $|\mu_j|, |\ell_j| \le (a_1+\cdots+a_p)N$, $Q \in \mathbb{R}[s]$ étant un polynôme de degré au plus $N(a_1+\cdots+a_p)$ dont les coefficients ne dépendent que de a et b.

Maintenant, si l'on pose

$$\tilde b := b - N(a_1+\cdots+a_p)\beta - \alpha,$$

pour chaque intégrale, on a, par intégration par parties par rapport à x_{p+j} :

$$\begin{aligned}
&\int_{]1,+\infty[^n} x^{-as+b-N(a_1+\cdots+a_p)\beta-\alpha}\big(g(x^{-1})\big)^{s-r}\big(\tilde g(x^{-1})\big)\\
&\qquad\qquad \partial^{\mu}\psi(x^{-1};u)\,e(Bx^{\beta})\,\mathrm{d}x\\
&=\int_{]1,+\infty[^n} x^{-as+\tilde b}\big(g(x^{-1})\big)^{s-r}\big(\tilde g(x^{-1})\big)\,\partial^{\mu}\psi(x^{-1};u)\,e(Bx^{\beta})\,dx\\
&=\int_{]1,+\infty[^n} \partial_{p+j}\Big(\frac{x^{-as+\tilde b+e_{p+j}}}{-a_{p+j}s+\tilde b_{p+j}+1}\Big)\big(\tilde g(x^{-1})\big)\big(g(x^{-1})\big)^{s-r}\\
&\qquad\qquad \partial^{\mu}\psi(x^{-1};u)\,e(Bx^{\beta})\,\mathrm{d}x\\
&=\frac{r-s}{a_{p+j}s-\tilde b_{p+j}-1}\int_{]1,+\infty[^n} x^{-as+\tilde b-e_{p+j}}\big(g(x^{-1})\big)^{s-r-1}\\
&\qquad\qquad \partial_{p+j}g(x^{-1})\,\tilde g(x^{-1})\,\partial^{\mu}\psi(x^{-1};u)\,e(Bx^{\beta})\,\mathrm{d}x\\
&\quad-\frac{1}{a_{p+j}s-\tilde b_{p+j}-1}\int_{]1,+\infty[^n} x^{-as+\tilde b-e_{p+j}}\big(g(x^{-1})\big)^{s-r}\\
&\qquad\qquad \partial_{p+j}\tilde g(x^{-1})\,\partial^{\mu}\psi(x^{-1};u)\,e(Bx^{\beta})\,\mathrm{d}x\\
&\quad-\frac{1}{a_{p+j}s-\tilde b_{p+j}-1}\int_{]1,+\infty[^n} x^{-as+\tilde b-e_{p+j}}\big(g(x^{-1})\big)^{s-r}\tilde g(x^{-1})\\
&\qquad\qquad \partial^{\mu+e_{p+j}}\psi(x^{-1};u)\,e(Bx^{\beta})\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Et si l'on répète cette opération Na_{p+j} fois pour chaque variable x_{p+j}, on obtient alors que, pour $s\in\mathbb{C}$ tel que $\sigma=\operatorname{Re}s>\sigma_0$, $F(s;u)$ est somme finie de termes de la forme

$$\begin{aligned}
&\frac{H(s)}{(2i\pi B)^{\ell}\prod_{j=1}^{n-p}\prod_{h=0}^{a_{p+j}N}(a_{p+j}s-b_{p+j}-1+h)}\\
&\quad\times\int_{]1,+\infty[^n} x^{-as+b-Na-\alpha}\big(g(x^{-1})\big)^{s-r}\\
&\qquad\qquad \tilde g(x^{-1})\,\partial^{\mu}\psi(x^{-1};u)\,e(Bx^{\mu})\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

où

- ℓ, r sont des entiers compris entre 0 et $|a|N$;
- $\alpha\in\mathbb{N}^n$, $\mu\in\mathbb{N}^n$ avec $|\mu|\le|a|N$;
- $\tilde g(x^{-1})$ est de la forme $\prod_j\big(\partial^{\mu_j}g(x^{-1})\big)^{\ell_j}$ avec $\mu_j\in\mathbb{N}^n$, $|\mu_j|\le|a|N$

et $\ell_j\in\mathbb{N}$ avec $|\ell_j|\le|a|N$;

- $H(s)\in\mathbb{R}[s]$ un polynôme de degré $\le|a|N$.

On a les mêmes expressions que celles obtenues dans le premier cas, avec $(2i\pi B)^{-\ell}$ à la place de B^{ℓ}. Il est clair que, si l'on majore le facteur $|2i\pi B|^{-\ell}$ par 1 (on rappelle que dans le premier cas on a majoré B^ℓ par $B^{|a|N}$), la conclusion est la même et ceci termine ce cas ; par conséquent, la proposition 2 est démontrée. □

5.3. Démonstration du théorème 5.

La démonstration du théorème 5 se fait en deux étapes. La première est l'utilisation du théorème de désingularisation de Hironaka, ce qui permet de supposer l'hypersurface $\{Q(y,x)=0\}$ à croisements normaux dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$, donc essentiellement de se ramener au cas où Q est un monôme. C'est la deuxième étape dont le paragraphe 5.2 fait l'objet. Mais auparavant, nous allons énoncer la version du théorème de désingularisation que nous utiliserons, ainsi que le lemme dans lequel nous préciserons cette version.

THÉORÈME de désingularisation de Hironaka (*cf.* [18], [6]). — *Soient $f_1,\dots,f_p$ des fonctions analytiques dans un voisinage V de l'origine dans $\mathbb{R}^n$. Alors, il existe un ouvert X de $\mathbb{R}^n$ contenant l'origine, une variété analytique réelle $\widetilde{X}$ de dimension n et une application analytique propre $\pi : \widetilde{X} \to X$ telles que :*

(i) *π induit un isomorphisme entre*

$$\widetilde{X} \setminus \pi^{-1}\Big(\bigcup_{1\le j\le p} f_p^{-1}(0)\Big) \quad et \quad \widetilde{X} \setminus \Big(\bigcup_{1\le j\le p} f_p^{-1}(0)\Big),$$

(ii) *pour tout $\tilde{x} \in \widetilde{X}$, il existe un voisinage $B(\tilde{x})$ de $\tilde{x}$, cartographié par un système de coordonnées locales $w=(w_1,\dots,w_n)$ centré en $\tilde{x}$ et tel que, pour tout $j \in \{1,\dots,b\}$ et tout $w \in B(\tilde{x})$,*

$$f_j \circ \pi(w) = u_j(w) w^{\alpha_j}$$

où $\alpha_j \in \mathbb{N}^n$ et u_j est analytique inversible (à valeurs non nulles) dans $B(\tilde{x})$.

Ceci étant, on va énoncer un résultat qui nous permettra de préciser ce théorème en vue de notre application.

PROPOSITION 3 (lemme de classification des monômes). — *Soient $h_1,\dots,h_p$ des fonctions analytiques inversibles dans $]-1,1[^n$ à valeurs complexes et soient $\mu_1,\dots,\mu_p$ des constantes >0 vérifiant $|\operatorname{Arg} h_i(x)| \le \mu_i$ pour $i=1,\dots,p$ et tout $x \in]-1,1[^n$. Soient $\alpha^1,\dots,\alpha^p \in \mathbb{Z}^n$. Pour tout $i \in \{1,\dots,p\}$ et tout $x \in]1,+\infty[^n$, on pose :*

$$g_i(x) := h_i(x_1^{-1},\dots,x_n^{-1}) x^{\alpha_i}.$$

Alors, il existe des ouverts $V_1, \ldots, V_q$ de $]1,+\infty[^n$ deux à deux disjoints et un sous-ensemble analytique fermé N inclus strictement dans $]1,+\infty[^n$ (en particulier de mesure de Lebesgue nulle) tels que :

(i) $]1,+\infty[^n = N \cup \bigcup_{1\le i\le q} V_i$;

(ii) *pour tout $j \in \{1,\ldots,q\}$, il existe un isomorphisme analytique $\pi_j :]1,+\infty[^n \xrightarrow{\sim} V_j$ dont le jacobien est un monôme (i.e. est de la forme $\mathcal{J}_y(\pi_j) = c_j y_1^{\gamma_1}\cdots y_n^{\gamma_n}$ pour une constante $c_j \neq 0$),*

(iii) *pour tout $i \in \{1,\ldots,p\}$ et tout $j \in \{1,\ldots,q\}$, il existe une fonction analytique inversible ℓ_{ij} sur $]-1,1[^n$, un multi-indice $\beta^{ij} \in \mathbb{N}^n$ et un signe $\varepsilon_{ij} \in \{-1,1\}$ tels que :*

- *pour tout $y \in]1,+\infty[^n$, on a $g_i\big(\pi_j(y)\big) = \ell_{ij}(y_1^{-1},\ldots,y_n^{-1})y^{\varepsilon_{ij}\beta^{ij}}$;*
- *pour tout $u \in]-1,1[^n$, on a $|\operatorname{Arg}\ell_{ij}(u)| \le \mu_i$.*

Démonstration de la proposition 3.

Dans un premier temps, on suppose $p = 1$. Notons

$$h = h_1, \quad g = g_1, \quad \alpha = \alpha^1, \quad \mu = \mu_1$$

pour simplifier. Alors, h est une fonction analytique sur $]-1,1[^n$ à valeurs dans $\{z \in \mathbb{C}^* \mid |\operatorname{Arg} z| \le \mu\}$ et, pour tout $x \in]1,+\infty[^n$, $g(x) = h(x_1^{-1},\ldots,x_n^{-1})x^\alpha$ où $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \mathbb{Z}^n$. Quitte à permuter les coordonées, on peut supposer que :

$$\alpha_1 > 0,\ldots,\alpha_r > 0,\ \alpha_{r+1} < 0,\ldots,\alpha_{r+s} < 0,\ \alpha_{r+s+1} = \cdots = \alpha_n = 0.$$

On pose $t = r + s$ le nombre de α_j non nuls et on procède par récurrence sur t. Pour $t = 0$ ou 1, le résultat est évident. Supposons le résultat vrai pour $t = n-k \ge 1$ et démontrons-le pour $t = n-k+1$.

Si $r = 0$ ou $s = 0$, le résultat est vrai. Supposons donc $r, s \ge 1$. On pose :

$$V_1 = \big\{x \in]1,+\infty[^n ;\ x_r^{\alpha_r} < x_{r+1}^{|\alpha_{r+1}|}\big\},$$

$$V_2 = \big\{x \in]1,+\infty[^n ;\ x_r^{\alpha_r} > x_{r+1}^{|\alpha_{r+1}|}\big\},$$

$$N = \big\{x \in]1,+\infty[^n ;\ x_r^{\alpha_r} = x_{r+1}^{|\alpha_{r+1}|}\big\}.$$

On a $V_1 \cap V_2 = V_1 \cap N = V_2 \cap N = \emptyset$ et $V_1 \cup V_2 \cup N =]1,+\infty[^n$. En outre, N est un ensemble analytique fermé strictement inclus dans $]1,+\infty[^n$, donc de mesure de Lebesgue nulle.

On définit $\pi_1 :]1,+\infty[^n \to V_1$ par $\pi_1(y_1,\ldots,y_n) = (x_1,\ldots,x_n)$, où

$$x_j = y_j \quad \text{si} \quad j \neq r, r+1, \quad x_r = y_r^{|\alpha_{r+1}|}, \quad x_{r+1} = y_y^{\alpha_r} y_{r+1}.$$

Il est évident que π_1 est un isomorphisme analytique de $]1,+\infty[^n$ sur V_1 et que, pour tout $y \in]1,+\infty[^n$, on a

$$\mathcal{J}_y(\pi_1) = |\alpha_{r+1}|\, y^{\alpha_r + |\alpha_{r+1}| - 1}$$

avec $\alpha_r + |\alpha_{r+1}| - 1 \in \mathbb{N}$, évidemment.

De même, si l'on définit $\pi_2 :]1,+\infty[^n \to V_2$ par $(y_1,\ldots,y_n) \mapsto (x_1,\ldots,x_n)$, où

$$x_j = y_j \quad \text{si} \ j \neq r, r+1, \quad x_{r+1} = y_{r+1}^{\alpha_r}, \quad x_r = y_{r+1}^{|\alpha_{r+1}|} y_r,$$

alors π_2 est un isomorphisme analytique de $]1,+\infty[^n$ sur V_2 et, pour $y \in]1,+\infty[^n$, on a

$$\mathcal{J}_y(\pi_2) = |\alpha_r|\, y_{r+1}^{\alpha_r + |\alpha_{r+1}| - 1}.$$

En outre, pour tout $y \in]1,+\infty[^n$, on a :

$$g(\pi_1(y)) = h\Big(\frac{1}{y_1},\ldots,\frac{1}{y_r^{|\alpha_{r+1}|}},\frac{1}{y_r^{\alpha_r} y_{r+1}},\ldots,\frac{1}{y_n}\Big) \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq r}}^{n} y_j^{\alpha_j}$$

$$g(\pi_2(y)) = h\Big(\frac{1}{y_1},\ldots,\frac{1}{y_{r+1}^{|\alpha_{r+1}|} y_r},\frac{1}{y_{r+1}^{\alpha_r}},\ldots,\frac{1}{y_n}\Big) \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq r+1}}^{n} y_j^{\alpha_j}$$

donc, pour $j = 1,2$, $g(\pi_j(y)) = h_{1j}(y_1^{-1},\ldots,y_n^{-1})\, y^{\beta^j}$ avec h_{1j} analytique sur $]-1,1[^n$ à valeurs dans $\{z \in \mathbb{C}^* \ ; \ |\operatorname{Arg} z| \leq \mu_1\}$ et le nombre d'indices i pour lesquels $\beta_i^j = 0$ est k. L'hypothèse de récurrence permet alors de conclure.

Ceci démontre le lemme pour $p = 1$.

Pour $p > 1$, il suffit de remarquer que les π_j que l'on introduit pour réduire un des g_i ne changent pas la nature des autres g_i déjà réduits et, par conséquent, il suffit de refaire la même chose pour g_2 et ainsi de suite jusqu'à g_p.

Ceci termine la démonstration de la proposition 3. $\square$

Remarques concernant la proposition 3.

1) Dans la démonstration du lemme de classification des monômes (proposition 3), nous nous sommes limités au strict minimum nécessaire à notre démonstration. Mais il est évident que ce résultat permet de supposer dans l'énoncé du théorème de Hironaka que l'ensemble $\{\alpha_j \mid 1 \le j \le p\}$ est totalement ordonné par l'ordre lexicographique sur $\mathbb{N}^n$, à condition de changer le point (i) en

(i′) il existe un sous-ensemble analytique fermé $N \subset X$ de mesure de Lebesgue nulle tel que π induit un isomorphisme analytique de $\widetilde{X} \setminus \pi^{-1}(N)$ sur $X \setminus N$.

2) La proposition 3 est d'une importance capitale dans la compréhension de la singularité d'une fonction méromorphe $h = f/g$ au voisinage de l'origine dans $\mathbb{R}^n$; en effet, par l'intermédiaire du théorème de désingularisation de Hironaka, on se ramène localement et en dehors de $f^{-1}(0) \cup g^{-1}(0)$ à

$$f \circ \pi(w) = a(w) w^{\alpha}, \quad g \circ \pi(w) = b(w) w^{\beta}$$

où π est la composée d'un nombre fini d'éclatements locaux par rapport à des sous-ensembles analytiques lisses, a et b sont deux fonctions analytiques inversibles et $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{N}^n$, d'où localement on a :

$$h \circ \pi(w) = c(w) w^{\gamma}$$

où π est une modification propre et $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) = \alpha - \beta \in \mathbb{Z}^n$.

Les γ_i ne sont pas forcément de même signe et c'est là qu'intervient la proposition 3 qui nous dit qu'on peut les supposer tous de même signe au sens large, c'est-à-dire $\gamma \in \mathbb{N}^n$ ou $\gamma \in (-\mathbb{N})^n$, ce qui ramène localement l'étude d'une fonction méromorphe $h = f/g$ à deux situations : $h = f$ ou $h = 1/f$, où f est analytique.

Fin de la démonstration du théorème 5.

On se donne :

- n_1 et $n_2 \in \mathbb{N}$ tels que $n_1 + n_2 = n$, $\varepsilon_0 \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$;
- une famille $\left(Q_\varepsilon(y, x)\right)_{\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]}$ de polynômes de $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$;
- $R \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_{n_2}]$;
- $c > 0$, $\alpha > 0$ et
- $\phi : (y, \varepsilon) \mapsto \phi(y, \varepsilon)$ qui vérifie les hypothèses du théorème 5.

Soit $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$. Le but de ce qui va suivre est d'étudier le prolongement méromorphe de

$$s \mapsto Y_m^{n_1,n_2}(Q_\varepsilon, \phi_\varepsilon, s) = \int_{]-1,1[^{n_1} \times]1,+\infty[^{n_2}} Q_\varepsilon^{-s}(y,x)\phi_\varepsilon(y)e(\langle m, x\rangle)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

D'après le point (ii) des hypothèses, il existe $K > 0$ tel que, pour tout $(y,x) \in]-1,1[^{n_1} \times]1,+\infty[^{n_2}$,

$$\Big|\frac{Q_\varepsilon(y,x)}{R(x)} - 1\Big| \leq K\varepsilon$$

et ceci implique que, si l'on pose

$$H_\varepsilon(y,x) = Q_\varepsilon(y,x) - R(x),$$

on a $H_\varepsilon \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ et

$$\Big|\frac{H_\varepsilon(y,x)}{R(x)}\Big| \leq K\varepsilon,$$

ce qui permet de voir que

$$\operatorname{Re} Q_\varepsilon(y,x) \geq (1-K\varepsilon)R(x) \quad \text{et} \quad |\operatorname{Im} Q_\varepsilon(y,x)| \leq K\varepsilon R(x),$$

d'où :

$$|\operatorname{Arg} Q_\varepsilon(y,x)| \leq \operatorname{Arctg}\Big(\frac{K\varepsilon}{1-K\varepsilon}\Big) \ll \varepsilon.$$

Quitte à diminuer ε_0, on peut supposer que, pour tout $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ et tout $(y,x) \in]-1,1[^{n_1} \times]1,+\infty[^{n_2}$, on a

$$\big|Q_\varepsilon(y,x)\big| \geq \operatorname{Re} Q_\varepsilon(y,x) \geq (1-\varepsilon)R(x) \quad \text{et} \quad \big|\operatorname{Arg} Q_\varepsilon(y,x)\big| \leq 2\varepsilon,$$

d'où, pour tout $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, pour tout $(y,x) \in]-1,1[^{n_1} \times]1,+\infty[^{n_2}$ et tout $s = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}$ avec $\sigma > 0$,

$$\begin{aligned}\big|Q_\varepsilon(y,x)^{-s}\phi_\varepsilon(y)\, e(\langle m, x\rangle)\big| &\ll_\varepsilon (1-\varepsilon)^{-\sigma}\, \mathrm{e}^{2\varepsilon|\tau|} \\ &\ll (1-\varepsilon)^{-\sigma} c^{-\sigma} (x_1 \cdots x_{n_2})^{-\sigma\alpha}\, \mathrm{e}^{2\varepsilon|\tau|}\end{aligned}$$

(d'après le point (i) des hypothèses) et ceci permet de voir que, pour tout $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, la fonction $s \mapsto Y_m^{n_1,n_2}(Q_\varepsilon, \phi_\varepsilon, s)$ existe et est holomorphe dans le demi-plan

$$\big\{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} s > \alpha^{-1}\big\}.$$

On fixe maintenant $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$.

Si on écrit (à permutation des coordonnées près) :

$$]-1,1[^{n_1} = \bigcup_{k,\ell}]-1,0[^k \times [0,1[^\ell$$

et si on procède aux changements de variable suivants :

$$\begin{gathered}]-1,0[^k \times [0,1[^\ell \longrightarrow]0,1[^{n_1}, \\ (x_1,\dots,x_{n_1}) \mapsto (-x_1,\dots,-x_k,x_{k+1},\dots,x_{n_1}), \end{gathered}$$

on voit qu'il suffit d'étudier

$$s \mapsto \widetilde{Y}_m^{n_1,n_2}(Q_\varepsilon,\varphi_\varepsilon,s) = \int_{]0,1[^{n_1}\times]1,+\infty[^{n_2}} Q_\varepsilon^{-s}(y,x)\,\phi_\varepsilon(y)\,e\big(\langle m,x\rangle\big)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

qui est définie et holomorphe dans le demi-plan $\Pi = \{s \mid \operatorname{Re} s > \alpha^{-1}\}$.

On fixe $s = \sigma + i\tau \in \Pi$. Par un changement de variable évident, on a

$$\begin{aligned} \widetilde{Y}_m^{n_1,n_2}(Q_\varepsilon,\varphi_\varepsilon,s) = \int_{]0,1[^n} & Q_\varepsilon^{-s}(y,x^{-1})\,\phi_\varepsilon(y)\,e\big(\langle m,x^{-1}\rangle\big) \\ & \times (-1)^{n_2}(x_1,\dots,x_{n_2})^{-2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

avec la notation $x^{-1} = (x_1^{-1},\dots,x_{n_2}^{-1})$ si $x = (x_1,\dots,x_{n_2}) \in \mathbb{R}^{n_2}$.

On pose $B = \|m\|$ et

$$u = \begin{cases} \dfrac{m}{\|m\|} \in S^{n_2-1} & \text{si } m \neq 0, \\ e_{n_2} = (0,\dots,0,1) & \text{si } m = 0. \end{cases}$$

Pour chaque $\nu \in S^{n_2-1}$, on note L_ν le polynôme

$$L_\nu(X_1,\dots,X_{n_2}) = \sum_{j=1}^{n_2} \nu_j X_j.$$

Il existe un entier $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$R(x^{-1}) = \frac{\widehat{R}(x)}{(x_1\cdots x_{n_2})^{N_0}} \tag{1}$$

pour un $\widehat{R} \in \mathbb{R}[X_1,\dots,X_{n_2}]$;

$$L_\nu(x^{-1}) = \frac{\widehat{L}_\nu(x)}{(x_1\cdots x_{n_2})^{N_0}} \tag{2}$$

où en plus, $\widehat{L}_\nu(x)$ est analytique en ν (en fait, il est à coefficients polynomiaux) et

$$H_\varepsilon(y, x^{-1}) = \frac{\widehat{H}_\varepsilon(y,x)}{(x_1 \cdots x_{n_2})^{N_0}} \tag{3}$$

où les coefficients de $\widehat{H}_\varepsilon$ sont $\mathcal{C}^\infty$ en ε (ceci vient du fait que le degré en x de H_ε est majoré par une constante indépendante de ε, ce qui permet de choisir N_0 indépendant de ε), d'où, si l'on utilise la version déjà citée du théorème de désingularisation avec $n+3$ fonctions :

$$\begin{aligned}
f_j(y,x) &= x_j && \text{pour } 1 \le j \le n_2,\\
f_{n_2+j}(y,x) &= y_j && \text{pour } 1 \le j \le n_1,\\
f_{n+1}(y,x) &= \widehat{R}(x),\\
f_{n+2}(y,x) &= \widehat{H}_\varepsilon(y,x),\\
f_{n+3}(y,x) &= \widehat{L}_u(y,x)
\end{aligned}$$

et à l'aide d'une partition de l'unité, on obtient que, pour $\sigma = \operatorname{Re} s > \alpha^{-1}$, $\widetilde{Y}_m^{n_1,n_2}(Q_\varepsilon, \phi_\varepsilon, s)$ est une somme finie d'intégrales du type

$$\int_{E_{n_1 n_2}} g_\varepsilon^{-s}(w)\, w^{as+b} e\big(\|m\| h(w;u) w^{-\beta}\big)\, \psi_\varepsilon(w;u)\, \mathrm{d}w$$

où :

- $E_{n_1 n_2} = \{w \in\,]-1,1[^{\,n} \mid x_1(w), \dots, x_{n_2}(w),$
$\qquad\qquad y_1(w), \dots, y_{n_1}(w) > 0\}$;

- $a, b, \beta \in \mathbb{Z}^n$;

- $w \mapsto g_\varepsilon(w)$ et $w \mapsto h(w;u)$ sont des fonctions analytiques inversibles sur $]-1,1[^{\,n}$ et dépendent analytiquement de u ;

- $w \mapsto \psi_\varepsilon(w;u)$ est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans $]-1,1[^{\,n}$, dépendant analytiquement de u et de façon $\mathcal{C}^\infty$ de ε ;

- $Q_\varepsilon\big(y(w), x(w)^{-1}\big) = [g_\varepsilon(w)]^{-1} w^{-a}$;

- $L_u\big(x(w)^{-1}\big) = \widehat{L}_u\big(x(w)\big) / \big(x_1(w) \cdots x_{n_2}(w)\big)^{N_0} = h(w,u) w^{-\beta}$;

- pour $j = 1, \dots, n_2$, on a $x_j(w) = \ell_j(w)\, w^{\alpha^j}$ où ℓ_j est analytique inversible dans $]-1,1[^{\,n}$ et $\alpha^j \in \mathbb{N}^n$;

- pour $j = 1, \dots, n_1$, on a $y_j(w) = k_j(w)\, w^{\beta^j}$ où k_j est analytique inversible dans $]-1,1[^{\,n}$ et $\beta^j \in \mathbb{N}^n$.

En outre, d'après le point (ii) des hypothèses, nous savons que :

$$Q_\varepsilon\big(y(w), x(w)^{-1}\big) = R\big(x(w)^{-1}\big)\big(1 + O(\varepsilon)\big) = [g_\varepsilon(w)]^{-1} w^{-a},$$
$$R\big(x(w)^{-1}\big) \to +\infty \quad \text{quand} \quad \|w\| \to 0,$$

d'où $a = a(R)$ ne dépend que de R et vérifie $a \in \mathbb{N}^{*n}$.

De plus :

$$|\operatorname{Arg} g_\varepsilon(w)| = \big|\operatorname{Arg} Q_\varepsilon\big(y(w), x(w)^{-1}\big)\big| \leq 2\varepsilon.$$

Comme pour tout j, $x_j(w)$ et $y_j(w)$ sont des monômes à des facteurs inversibles près, alors l'ensemble $E_{n_1 n_2}$ est réunion finie d'ensembles de la forme (à des permutations des coordonnées près)

$$]-1, 0[^k \times [0, 1[^\ell \quad (k + \ell = n),$$

d'où, en utilisant les changement de variables :

$$]-1, 0[^k \times]0, 1[^\ell \longrightarrow]0, 1[^n,$$
$$(w_1, \ldots, w_n) \mapsto (-w_1, \ldots, -w_k, w_{k+1}, \ldots, w_n),$$

on se ramène au cas où, pour $\operatorname{Re} s > \alpha^{-1}$, $Y_m^{n_1,n_2}(Q_\varepsilon, \phi_\varepsilon, s)$ est une somme finie d'intégrales du type

$$I(s) = \int_{]0,1[^n} g_\varepsilon^{-s}(w)\, w^{as+b} e\big(\|m\| h(w;u) w^{-\beta}\big)\, \psi_\varepsilon(w;u)\, \mathrm{d}w.$$

Pour terminer la démonstration du théorème 5 on va montrer par récurrence sur $|\beta| = |\beta_1| + \cdots + |\beta_n|$ que $I(s)$ vérifie les conclusions de la proposition 2.

- Si $|\beta| = 0$, alors $\beta = 0$. On effectue le changement de variables

$$w = (w_1, \ldots, w_n) \mapsto x = (x_1, \ldots, x_n) = w^{-1} = ({w_1}^{-1}, \ldots, {w_n}^{-1})$$

suivie d'intégrations par parties analogues à ceux de la première partie de la démonstration de la proposition 2 (le cas $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_p, 0, \ldots, 0)$ appartenant à $(-\mathbb{N}^*)^p \times \{0\}^{n-p}$) en faisant jouer a $h({x_1}^{-1}, \ldots, {x_n}^{-1})$ le rôle de $({x_1}^{|\beta_1|} \cdots {x_n}^{|\beta_n|})^{-1}$

On voit alors facilement que $I(s)$ vérifie les conclusions de cette proposition.

• Si $|\beta| \geq 1$, alors $\beta \neq 0$ et quitte à permuter les coordonnées, on peut supposer que $\beta_n \neq 0$. De plus, il est clair (quitte à diminuer l'ouvert sur lequel on prend les coordonnées locales) qu'on peut supposer $w \mapsto h(w;u)$ analytique au voisinage de $[-1,+1]^n$ et ne s'annulant pas sur $[-1,+1]^n$ et en particulier elle garde un signe constant qu'on peut supposer positif (quitte à prendre le conjugué de l'intégrale). Donc par compacité de $[-1,+1]^n \times S^{n_2-1}$:

$$A = \inf_{\substack{w\in[-1,+1]^n \\ u\in S^{n_2-1}}} h(w;u) > 0.$$

On note aussi

$$K = A + \sup_{\substack{w\in[-1,+1]^n \\ u\in S^{n_2-1}}} \left|\frac{\partial h/\partial w_n(w;u)}{h(w;u)}\right| \in [A,+\infty[$$

et on pose finalement

$$\eta = \frac{A}{2K} \in]0,1[.$$

Ceci étant, on écrit alors $I(s) = I_1(s) + I_2(s)$ où :

$$I_1(s) = \int_{]0,1[^{n-1}\times]0,\eta[} g_\varepsilon^{-s}(w)\, w^{as+b} e\big(\|m\| h(w;u) w^{-\beta}\big)\, \psi_\varepsilon(w;u)\, \mathrm{d}w,$$

$$I_2(s) = \int_{]0,1[^{n-1}\times]\eta,1[} g_\varepsilon^{-s}(w)\, w^{as+b} e\big(\|m\| h(w;u) w^{-\beta}\big)\, \psi_\varepsilon(w;u)\, \mathrm{d}w.$$

Étude de $I_2(s)$.

On effectue le changement de variable $w_n \mapsto (w_n - \eta)/(1-\eta)$. Alors, avec les notations $w = (w', w_n)$ où $w' = (w_1, \ldots, w_{n-1})$, on obtient :

$$I_2(s) = \int_{]0,1[^n} g_{\varepsilon,2}^{-s}(w)\, w^{a''s+b''} e\big(\|m\| h_2(w;u)\, w^{-\beta''}\big)\, \psi_{\varepsilon,2}(w;u)\, \mathrm{d}w$$

où $a'' = (a_1, \ldots, a_{n-1}, 0)$, $b'' = (b_1, \ldots, b_{n-1}, 0)$, $\beta'' = (\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}, 0)$ et

$$g_{\varepsilon,2}(w) = g_\varepsilon(w', (1-\eta)w_n + \eta)\big((1-\eta)w_n + \eta\big)^{-a_n},$$

$$h_2(w;u) = h\big((w', (1-\eta)w_n + \eta); u\big)\big((1-\eta)w_n + \eta\big)^{\beta_n},$$

$$\psi_{\varepsilon,2}(w;u) = (1-\eta)\psi_\varepsilon\big((w', (1-\eta)w_n + \eta); u\big)\big((1-\eta)w_n + \eta\big)^{b_n}.$$

Comme $g_{\varepsilon,2}, h_2$ et $\psi_{\varepsilon,2}$ vérifient respectivement les mêmes propriétés que g_ε, h et ψ_ε et puisque $|\beta''| = |\beta| - |\beta_n| < |\beta|$, alors l'hypothèse de récurrence permet de conclure.

Étude de $I_1(s)$.

On fixe $w' = (w_1, \ldots, w_{n-1}) \in]0,1[^{n-1}$ et on considère l'application :

$$g_{w',u} : w_n \longmapsto \left[h((w', w_n); u)\right]^{-1/\beta_n} w_n\,.$$

Comme pour tout $w_n \in]0, \eta[$, on a

$$\begin{aligned} g'_{w',u}(w_n) &= \left[h((w', w_n); u)\right]^{-1/\beta_n} \Big[1 - \frac{\partial h/\partial w_n((w', w_n); u)}{\beta_n h((w', w_n); u)} w_n\Big] \\ &\geq \left[h((w', w_n); u)\right]^{-1/\beta_n} \Big[1 - K\eta/A\Big] \\ &\geq \tfrac{1}{2}\left[h((w', w_n); u)\right]^{-1/\beta_n} > 0\,; \end{aligned}$$

alors, $w_n \mapsto g_{w',u}(w_n)$ est $\mathcal{C}^\infty$ et strictement croissante sur $]0, \eta[$ qu'elle transforme en $]0, g_{w',u}(\eta)[$. On obtient ainsi un changement de variable admissible qui transforme $I_1(s)$ en :

$$I_1(s) = \int_{]0,1[^{n-1}} \Big(\int_0^{g_{w',u}(\eta)} g_{\varepsilon,1}^{-s}(w)\, w^{as+b} e\big(\|m\| w^{-\beta}\big)\, \psi_{\varepsilon,1}(w; u)\, \mathrm{d}w_n \Big)\, \mathrm{d}w'$$

où $g_{\varepsilon,1}$(resp. $\psi_{\varepsilon,1}$) vérifie les mêmes propriétés que g_ε(resp. ψ_ε). De plus il est clair, vu nos conventions sur h, que pour tout $w' \in]0,1[^{n-1}$, on a :

$$\begin{aligned} g_{w',u}(\eta) &= \left[h((w', \eta); u)\right]^{-1/\beta_n} \eta \\ &\geq \eta \inf_{\substack{w \in [-1,+1]^n \\ u \in S^{n_2 - 1}}} h(w; u)^{-1/\beta_n} = 2\eta_0 > 0. \end{aligned}$$

Avec ces notations, on peut alors écrire $I_1(s) = I_1^1(s) + I_1^2(s)$ où

$$I_1^1(s) = \int_{]0,1[^{n-1} \times]0, \eta_0[} g_{\varepsilon,1}^{-s}(w)\, w^{as+b} e\big(\|m\| w^{-\beta}\big)\, \psi_{\varepsilon,1}(w; u)\, \mathrm{d}w,$$

$$I_1^2(s) = \int_{]0,1[^{n-1}} \Big(\int_{\eta_0}^{g_{w',u}(\eta)} g_{\varepsilon,1}^{-s}(w)\, w^{as+b} e\big(\|m\| w^{-\beta}\big)\, \psi_{\varepsilon,1}(w; u)\, \mathrm{d}w_n \Big)\, \mathrm{d}w'.$$

Si dans $I_1^2(s)$ on effectue le changement de variable

$$w_n \mapsto \frac{w_n - \eta_0}{g_{w',u}(\eta) - \eta_0},$$

on se ramène comme dans le cas de $I_2(s)$ à une intégrale de la forme :

$$I_1^2(s) = \int_{]0,1[^n} g_{\varepsilon,1,2}^{-s}(w)\, w^{a''s+b''} e\big(\|m\| h_2(w;u) w^{-\beta''}\big)\, \psi_{\varepsilon,1,2}(w;u)\, \mathrm{d}w$$

où

- $g_{\varepsilon,1,2}$, h_2 et $\psi_{\varepsilon,1,2}$ vérifient les mêmes propriétés que g_ε, h et ψ_ε ;
- $a''=(a_1,\ldots,a_{n-1},0)$, $b''=(b_1,\ldots,b_{n-1},0)$, $\beta''=(\beta_1,\ldots,\beta_{n-1},0)$.

En particulier, on a $|\beta''| = |\beta| - |\beta_n| < |\beta|$ et l'hypothèse de récurrence permet de conclure.

Il ne reste donc à étudier que le terme $I_1^1(s)$. Mais vu son expression, et si on effectue le changement de variable $w_n \mapsto w_n/\eta_0$ qui transforme $]0,\eta_0[$ on $]0,1[$, on obtient :

$$I_1^1(s) = \int_{]0,1[^n} g_{\varepsilon,1,1}^{-s}(w)\, w^{as+b} e\big(k\|m\| w^{-\beta}\big)\, \psi_{\varepsilon,1,1}(w;u)\, \mathrm{d}w$$

où $g_{\varepsilon,1,1}$ (resp. $\psi_{\varepsilon,1,1}$) vérifie les mêmes propriétés que g_ε (resp. ψ_ε) et où $k = {\eta_0}^{-\beta_n}$ est une constante strictement positive. Si on effectue ensuite le changement de variables

$$w = (w_1,\ldots,w_n) \mapsto x = (x_1,\ldots,x_n) = w^{-1} = (w_1^{-1},\ldots,w_n^{-1}),$$

on obtient :

$$I_1^1(s) = \int_{]0,1[^n} \tilde{g}_\varepsilon^{-s}(x^{-1})\, x^{-as-b} e\big(k\|m\| x^{\beta}\big)\, \widetilde{\psi}_\varepsilon(x^{-1};u)\, \mathrm{d}x$$

où $\tilde{g}_\varepsilon$, $\widetilde{\psi}_\varepsilon$, a et b vérifient les hypothèses de la proposition 2 et $\beta \in \mathbb{Z}^n$.

Donc, pour être dans la situation étudiée dans la proposition 2, il ne manque plus que l'hypothèse $\beta \in \mathbb{N}^n \cup (-\mathbb{N})^n$. Mais la proposition 3 nous permet de supposer que c'est effectivement le cas. On se ramène donc exactement à la situation étudiée dans la proposition 2, ce qui permet de conclure.

En conclusion, la fonction $s \mapsto Y_m^{n_1,n_2}(Q_\varepsilon,\phi_\varepsilon,s)$ possède un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$ avec des pôles d'ordres au plus n, contenu dans une suite de la forme $\mathcal{S} = \Big\{\sigma_0 - k/M \mid k \in \mathbb{N}\Big\}$ où $\sigma_0 = \sigma_0(R) \in \mathbb{Q}_+^*$ et $M = M(R) \in \mathbb{N}^*$ et il existe $A = A(R) > 0$ tel que, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, pour tout $\varepsilon' > 0$, pour $\delta > 0$ et tout $s = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}$ vérifiant $\sigma > \sigma_0 - N$ et $d(s, \mathcal{S}) \geq \delta$:

$$|Y_m^{n_1,n_2}(Q_\varepsilon, \phi_\varepsilon, s)| \leq D'(N, \varepsilon', \delta, u, \varepsilon) \\ \left(1 + |\tau|^{A(\sigma_0-\sigma)+\varepsilon'}\right)\left(1 + |m|^{A(\sigma_0-\sigma)+\varepsilon'}\right) \mathrm{e}^{\varepsilon|\tau|}.$$

En effet, on a vu que $a \in \mathbb{N}^{*n}$ ne dépend que de R et que les différents paramètres σ_0, M et A dans la proposition 2 ne dépendent que de a.

De plus, comme $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ et $u \in S^{n_2-1}$, alors un argument de continuité et de compacité permet de supposer que

$$D'(N, \varepsilon', \delta, u, \varepsilon) = D(N, \varepsilon', \delta)$$

est indépendante de u et ε.

Ceci termine la démonstration du théorème 5. □

6. DÉMONSTRATIONS DES THÉORÈMES 2 ET 3

6.1. Introduction.

Au chapitre 5, nous avons établi un théorème (théorème 5) dont l'objet était précisément l'étude du prolongement méromorphe d'un certain type d'intégrales oscillantes. L'objet de ce paragraphe est donc de justifier que les intégrales données par la formule sommatoire (proposition 1) rentrent dans le cadre du théorème 5. Ensuite, on montrera que la somme (infinie) des prolongements de ces intégrales existe et vérifie les propriétés requises pour être un prolongement méromorphe de $Z(P; s)$.

6.2. Démonstrations des théorèmes 2 et 3.

On suppose que $P \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ vérifie H_0S, avec $B_0 \in \,]0, 1[$ et $\varepsilon_0 \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$. On sait (théorème 1 et proposition 1) que :

(i) il existe $\sigma_0 > 0$ tel que $s \mapsto Z(P; s)$ existe et est holomorphe dans le demi-plan $\{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} s > \sigma_0\}$ et

(ii) il existe $B_1 \in \,]B_0, 1[$ et $\varepsilon_1 \in \,]0, \varepsilon_0[$ tels que, pour tout $\varepsilon \in \,]0, \varepsilon_1[$, pour tout $B \in \,]B_1, 1[$ et tout $s \in \mathbb{C}$ avec $\sigma = \operatorname{Re} s > \sigma_0$, on a :

$$Z(P; s) = \sum_{m \in \mathbb{N}^{*n}} P^{-s}(m)$$
$$= \sum_{\tau \in \mathcal{G}_n} \sum_{n_1+n_2=n} \sum_{h \in \mathbb{Z}^{n_2}} \mathrm{e}^{-2\pi\varepsilon|h|} \int_{[-1,1]^{n_1} \times [B, +\infty[^{n_2}}$$

$$P^{-s}\big(B+i\varepsilon x_{\tau(1)},\dots,B+i\varepsilon x_{\tau(n_1)},\\ x_{\tau(n_1+1)}-i\varepsilon_1(h_1),\dots,x_{\tau(n)}-i\varepsilon_{n_2}(h_{n_2})\big)\\ \times\frac{(i\varepsilon)^{n_1}\exp\big(2\pi i\{\sum_{j=1}^{n_2}h_jx_{\tau(n+j)}\}\big)}{\prod_{j=1}^{n_1}(1-\mathrm{e}^{2\pi iB}\,\mathrm{e}^{-2\pi\varepsilon x_j})}\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n$$

où, pour tout $j\in\{1,\dots,n_2\}$ et tout $h\in\mathbb{Z}^{n_2}$,

$$|h|=\sum_{j=1}^{n_2}|h_j|\quad\text{et}\quad\varepsilon_j(h_j)=\begin{cases}\varepsilon & \text{si } h_j\geq 0,\\ -\varepsilon & \text{si } h_j<0.\end{cases}$$

Maintenant, pour $\varepsilon\in\,]0,\varepsilon_1[$, $B\in\,]B,1[$, $\operatorname{Re}s>\sigma_0$ et $n_1,n_2\in\mathbb{N}$ avec $n_1+n_2=n$ et $\tau\in\mathcal{G}_n$, on pose :

$$Z_\tau(P,\varepsilon,B,n_1,n_2;s):=\sum_{h\in\mathbb{Z}^{n_2}}\mathrm{e}^{-2\pi\varepsilon|h|}\int_{[-1,1]^{n_1}\times[B,+\infty[^{n_2}}\\ P^{-s}\big(B+i\varepsilon x_{\tau(1)},\dots,B+i\varepsilon x_{\tau(n_1)},\\ x_{\tau(n_1+1)}-i\varepsilon_1(h_1),\dots,x_{\tau(n)}-i\varepsilon_{n_2}(h_{n_2})\big)\\ \times\frac{(i\varepsilon)^{n_1}\exp\big(2\pi i\{\sum_{j=1}^{n_2}h_jx_{\tau(n+j)}\}\big)}{\prod_{j=1}^{n_1}(1-\mathrm{e}^{2\pi iB}\,\mathrm{e}^{-2\pi\varepsilon x_j})}\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n.$$

On a alors, sous ces conditions :

$$Z(P;s)=\sum_{\tau\in\mathcal{G}_n}\sum_{n_1+n_2=n}Z_\tau(P,\varepsilon,B,n_1,n_2;s)$$

et, comme l'action de $\tau\in\mathcal{G}_N$ induit juste une permutation des coordonnées dans les intégrales, il suffit de vérifier les théorèmes 2 et 3 pour $\tau=\mathrm{Id}$.

On fixe dans toute la suite n_1 et $n_2\in\mathbb{N}$ avec $n_1+n_2=n$ et $B\in\,]B_1,1[$ et on pose, pour tout $\varepsilon\in\,]0,\varepsilon_1[$ et tout $s\in\mathbb{C}$ avec $\sigma=\operatorname{Re}s>\sigma_0$:

$$Z(P,\varepsilon;s):=Z_{\mathrm{Id}}(P,\varepsilon,n_1,n_2,s)=\sum_{h\in\mathbb{Z}^{n_2}}e^{-2\pi\varepsilon|h|}\int_{[-1,1]^{n_1}\times[B,+\infty[^{n_2}}\\ P^{-s}\big(B+i\varepsilon x_1,\dots,B+i\varepsilon x_{n_1},\\ x_{n_1+1}-i\varepsilon_1(h_1),\dots,x_n-i\varepsilon_{n_2}(h_{n_2})\big)\\ \times\frac{(i\varepsilon)^{n_1}\exp\big(2\pi i\{\sum_{j=1}^{n_2}h_jx_{n+j}\}\big)}{\prod_{j=1}^{n_1}(1-e^{2\pi iB}\,\mathrm{e}^{-2\pi\varepsilon x_j})}\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n.$$

Maintenant, pour tout $I \subset \{1,\dots,n_2\}$ et tout $j \in \{1,\dots,n_2\}$, on pose :

$$\varepsilon_j^I = \begin{cases} \varepsilon & \text{si } j \in I, \\ -\varepsilon & \text{si } j \notin I, \end{cases}$$

$$M(I) = \big\{h \in \mathbb{Z}^{n_2} \mid h_j \geq 0 \ \text{ si } \ j \in I \ \text{ et } \ h_j < 0 \ \text{ si } \ j \notin I\big\}.$$

On pose enfin :

$$Z_I(P,\varepsilon;s) := (i\varepsilon)^{n_1} \sum_{h \in M(I)} \mathrm{e}^{-2\pi\varepsilon|h|} Y_I(P,\varepsilon,h;s)$$

où, pour tout $h \in \mathbb{Z}^{n_2}$,

$$\begin{aligned} Y_I(P,\varepsilon,h;s) := \int_{[-1,1]^{n_1}\times[B,+\infty[^{n_2}} & P^{-s}(B+i\varepsilon x_1,\dots,B+i\varepsilon x_{n_1}, \\ & \qquad x_{n_1+1}-i\varepsilon_1^I,\dots,x_n-i\varepsilon_{n_2}^I) \\ & \times \frac{\exp\big(2\pi i\{\sum_{j=1}^{n_2} h_j x_{n+j}\}\big)}{\prod_{j=1}^{n_1}(1-\mathrm{e}^{2\pi i B}\,\mathrm{e}^{-2\pi\varepsilon x_j})}\,\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n \end{aligned}$$

et on voit bien que, pour démontrer les théorèmes 2 et 3, il suffit de les vérifier pour les fonctions

$$s \mapsto Z_I(P,\varepsilon;s) = (i\varepsilon)^{n_1} \sum_{h \in M(I)} \mathrm{e}^{-2\pi\varepsilon|h|} Y_I(P,\varepsilon,h;s).$$

Pour étudier les $Y_I(P,\varepsilon,h;s)$, on va utiliser le théorème 5. Vérifions que nous sommes dans les conditions d'application de ce théorème. On fixe $I \subset \{1,\dots,n_2\}$ et on pose :

$$R(X_1,\dots,X_{n_2}) := P(B,\dots,B,BX_1,\dots,BX_{n_2})$$

où la variable B est répétée n_1 fois. On a $R \in \mathbb{R}[X_1,\dots,X_{n_2}]$.

Soit $\varepsilon_0' \in \big]0,\tfrac{1}{2}\varepsilon_1\big[$. On définit la fonction

$$\varphi :]-2,2[^{n_1} \times]-2\varepsilon_0', 2\varepsilon_0'[\longrightarrow \mathbb{C}$$

par

$$\varphi(y,\varepsilon) := \frac{1}{\prod_{j=1}^{n_1}(1-\mathrm{e}^{2i\pi B}\,\mathrm{e}^{-2\pi\varepsilon y_j})}.$$

Il est clair que, pour $B \in]B_1, 1[$ et quitte à prendre $\varepsilon \in \left]0, \frac{1}{2}\varepsilon_1\right[$ assez petit, on peut supposer que φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-2,2[^{n_1} \times]-2\varepsilon'_0, 2\varepsilon'_0[$.

Enfin, on définit, pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon'_0]$, le polynôme $Q_\varepsilon(X_1, \ldots, X_n)$ appartenant à $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ par

$$\begin{aligned} Q_\varepsilon(X_1, \ldots, X_n) = P(B + i\varepsilon X_1, \ldots, B + i\varepsilon X_{n_1}, \\ BX_{n_1+1} - i\varepsilon_1^I, \ldots, BX_n - i\varepsilon_{n_2}^I). \end{aligned}$$

On obtient ainsi une famille de polynômes $(Q_\varepsilon)_{\varepsilon \in]0, \varepsilon'_0]}$.

Comme $B \in]B_1, 1[\subset]B_0, 1[$, alors $P(x)$ tend vers l'infini quand $\|x\|$ tend vers l'infini, $x \in [B, +\infty[^n$, $P(x) \geq c(x_1 \cdots x_n)^\alpha$, d'où, quel que soit $x \in [1, +\infty[^{n_2}$:

$$R(x_1, \ldots, x_{n_2}) = P(B, \ldots, B, Bx_1, \ldots, Bx_{n_2}) \geq cB^{n\alpha}(x_1 \cdots x_{n_2})^\alpha.$$

On pose alors

$$Q_0(y, x) = R(x).$$

On obtient ainsi une famille de polynômes $(Q_\varepsilon)_{\varepsilon \in [0, \varepsilon'_0]}$ à coefficients $\mathcal{C}^\infty$ en ε et ce qui précède montre que le point (i) des hypothèses du théorème 5 est vérifié. Quant au point (ii), il découle immédiatement du lemme 2.2.

Maintenant, nous sommes en mesure de conclure. Nous remarquerons d'abord que, pour tout $\varepsilon \in [0, \varepsilon'_0]$, pour tout $h \in \mathbb{Z}^{n_2}$ et tout $s \in \mathbb{C}$ avec $\sigma = \operatorname{Re} s > \sigma_0$,

$$\begin{aligned} Y_I(P, \varepsilon, h; s) &= \int_{[-1,1]^{n_1} \times [B, +\infty[^{n_2}} P^{-s}(B + i\varepsilon x_1, \ldots, B + i\varepsilon x_{n_1}, \\ &\qquad\qquad x_{n_1+1} - i\varepsilon_1^I, \ldots, x_n - i\varepsilon_{n_2}^I) \\ &\qquad \times \frac{\exp\left(2\pi i\left\{\sum_{j=1}^{n_2} h_j x_{n+j}\right\}\right)}{\prod_{j=1}^{n_1} (1 - \mathrm{e}^{2\pi i B}\, \mathrm{e}^{-2\pi\varepsilon x_j})} \,\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n \\ &= B^{n_2} \int_{[-1,1]^{n_1} \times [B, +\infty[^{n_2}} P^{-s}(B + i\varepsilon y_1, \ldots, B + i\varepsilon y_{n_1}, \\ &\qquad\qquad Bx_1 - i\varepsilon_1^I, \ldots, Bx_{n_2} - i\varepsilon_{n_2}^I) \\ &\qquad \times \varphi(y; \varepsilon) \exp\left(2\pi i\left\{\sum_{j=1}^{n_2} h_j x_j\right\}\right) \mathrm{d}y \,\mathrm{d}x \\ &= B^{n_2} \int_{[-1,1]^{n_1} \times [B, +\infty[^{n_2}} Q_\varepsilon^{-s}(y, x) \varphi(y; \varepsilon)\, \mathrm{e}^{2\pi i \langle h, x\rangle} \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x \\ &= B^{n_2} Y_h^{n_1, n_2}(Q_\varepsilon, \varphi_\varepsilon, s) \end{aligned}$$

avec les notations du chapitre 5. D'après le théorème 5, il existe donc $\sigma_0^I = \sigma_0(R) > 0$ tel que la fonction $s \mapsto Y_I(P, \varepsilon, h; s)$ existe et est holomorphe sur le demi-plan $\{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} s > \sigma_0^I\}$. En outre, il existe $M^I = M(R) \in \mathbb{N}^*$ tel que, si l'on pose $\mathcal{S}^I := \{\sigma_0^I - k/M^I \mid k \in \mathbb{N}\}$, alors $s \mapsto Y_I(P, \varepsilon, h; s)$ possède un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$ avec des pôles d'ordres au plus n et contenus dans $\mathcal{S}^I$.

En outre, il existe $A^I = A^I(R) > 0$ tel que le prolongement méromorphe $\widetilde{Y}_I$ de Y_I vérifie, pour tout $\varepsilon' > 0$, pour tout $\delta > 0$ et tout réel $N > 0$:

$$\widetilde{Y}_I(P, \varepsilon, h; s) \ll_{N,\varepsilon',\delta,\varepsilon_0',R} \left(1 + |\tau|^{A^I(\sigma_0-\sigma)+\varepsilon'}\right)\left(1 + |h|^{A^I(\sigma_0-\sigma)+\varepsilon'}\right) \mathrm{e}^{\varepsilon|\tau|}$$

uniformément en $s \in \mathbb{C}$ tel que $\sigma = \operatorname{Re} s > \sigma_0^I - N$ et $d(s, \mathcal{S}^I) \geq \delta$ et où $\tau = \operatorname{Im} s$.

Maintenant, comme les parties $I \subset \{1, \dots, n_2\}$ sont en nombre fini et R ne dépend que du polynôme P, de I et de n_1 et n_2, si l'on pose :

$$A := \sup\left\{A^I(R) > 0 \mid I \subset \{1, \dots, n_2\},\ n_1 + n_2 = n\right\};$$

$$\sigma_0 := \sup\left\{\sigma_0^I \in \mathbb{Q}_+^* \mid I \subset \{1, \dots, n_2\},\ n_1 + n_2 = n\right\};$$

$M :=$ le plus petit multiple commun des M^I et des dénominateurs des σ_0^I quand $(n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2$ avec $n_1 + n_2 = n$ et I décrit l'ensemble des parties de $\{1, \dots, n_2\}$;

$$\mathcal{S} := \left\{\sigma_0 - k/M \mid k \in \mathbb{N}\right\};$$

alors A, σ_0, M et $\mathcal{S}$ ne dépendent plus que du polynôme P.

On a alors, pour tout $I \subset \{1, \dots, n_2\}$ pour tout couple $(n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2$ avec $n_1 + n_2 = n$, pour tout $\varepsilon \in \left]0, \varepsilon_0'\right[$ et tout $h \in \mathbb{Z}^{n_2}$:

(1) $s \mapsto Y_I(P, \varepsilon, h; s)$ existe et est holomorphe sur le demi-plan $\{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} s > \sigma_0\}$;

(2) $s \mapsto Y_I(P, \varepsilon, h; s)$ possède un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$ avec des pôles d'ordres au plus n et contenus dans $\mathcal{S}$;

(3) le prolongement méromorphe $\widetilde{Y}_I$ vérifie que, pour tout $\varepsilon' > 0$, pour tout $\delta > 0$ et tout $N > 0$

$$\widetilde{Y}_I(P, \varepsilon, h; s) \ll_{N,\varepsilon',\delta,\varepsilon_0',P} \left(1 + |\tau|^{A(\sigma_0-\sigma)+\varepsilon'}\right)\left(1 + |h|^{A(\sigma_0-\sigma)+\varepsilon'}\right) \mathrm{e}^{\varepsilon|\tau|}$$

uniformément en $s \in \mathbb{C}$ tel que $\sigma = \operatorname{Re} s > \sigma_0 - N$ et $d(s, \mathcal{S}) \geq \delta$ et où $\tau = \operatorname{Im} s$.

Maintenant pour $I \subset \{1, \dots, n_2\}$ et $\varepsilon \in]0, \varepsilon'_0[$, nous définissons la série

$$\widetilde{Z}_I(P, \varepsilon; s) := (i\varepsilon)^{n_1} \sum_{h \in M(I)} \mathrm{e}^{-2\pi\varepsilon|h|} \widetilde{Y}_I(P, \varepsilon, h; s).$$

Alors il est clair, d'après les conditions (1), (2) et (3) que $s \mapsto \widetilde{Z}_I(P, \varepsilon; s)$ est une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec des pôles d'ordres au plus n et contenus dans $\mathcal{S}$ et qu'elle vérifie, pour tout $\varepsilon' > 0$, pour tout $\delta > 0$ et tout $N > 0$,

$$\widetilde{Z}_I(P, \varepsilon; s) \ll_{P, \varepsilon', \delta, \varepsilon'_0} \left(1 + |\tau|^{A(\sigma_0 - \sigma) + \varepsilon'}\right) \mathrm{e}^{\varepsilon|\tau|} \times \sum_{h \in \mathbb{Z}^{n_2}} \left(1 + |h|^{A(\sigma_0 - \sigma) + \varepsilon'}\right) \mathrm{e}^{-2\pi\varepsilon|h|}$$

et ceci uniformément en $s \in \mathbb{C}$ tel que $\sigma = \operatorname{Re} s > \sigma_0 - N$ et $d(s, \mathcal{S}) \geq \delta$ et où $\tau = \operatorname{Im} s$.

Mais comme nous savons que, pour $\operatorname{Re} s > \sigma_0$ et $0 < \varepsilon < \varepsilon'_0$:

$$\begin{aligned} Z_I(P, \varepsilon; s) &= (i\varepsilon)^{n_1} \sum_{h \in M(I)} \mathrm{e}^{-2\pi\varepsilon|h|} Y_I(P, \varepsilon, h; s) \\ &= (i\varepsilon)^{n_1} \sum_{h \in M(I)} \mathrm{e}^{-2\pi\varepsilon|h|} \widetilde{Y}_I(P, \varepsilon, h; s) \\ &= \widetilde{Z}_I(P, \varepsilon; s), \end{aligned}$$

on voit que $s \mapsto \widetilde{Z}_I(P, \varepsilon; s)$ constitue le prolongement méromorphe cherché.

On conclut donc que :

(i) $s \mapsto Z(P; s)$ existe et est holomorphe sur $\{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} s > \sigma_0\}$;

(ii) $s \mapsto Z(P; s)$ possède un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$ avec des pôles contenus dans $\mathcal{S}$ et dont les ordres sont au plus n ;

(iii) le prolongement méromorphe $\widetilde{Z}(P; s)$ de $Z(P; s)$ vérifie pour tout $\varepsilon' > 0$, pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon'_0[$, pour tout $\delta > 0$ et tout $N > 0$:

$$(*) \qquad \widetilde{Z}(P; s) \ll_{P, \varepsilon', \delta, \varepsilon'_0, N} \left(1 + |\tau|^{A(\sigma_0 - \sigma) + \varepsilon'}\right) \mathrm{e}^{\varepsilon|\tau|} \times \sum_{h \in \mathbb{Z}^{n_2}} \left(1 + |h|^{A(\sigma_0 - \sigma) + \varepsilon'}\right) \mathrm{e}^{-2\pi\varepsilon|h|}$$

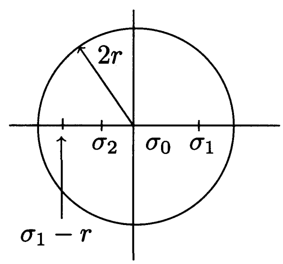
uniformément en $s \in \mathbb{C}$ tel que $\sigma = \operatorname{Re} s > \sigma_0 - N$ et $d(s, \mathcal{S}) \geq \delta$ et où $\tau = \operatorname{Im} s$.

Ici $\sigma_0 = \sigma_0(P)$ est l'abscisse de convergence de la série de Dirichlet $Z(P;s)$, $\sigma_0 > 0$, $M = M(P) \in \mathbb{N}^*$, $A = A(P) \in \mathbb{Q}_+^*$ et $\mathcal{S} = \{\sigma_0 - k/M \mid k \in \mathbb{N}\}$ ne dépendent que du polynôme P.

Pour terminer la démonstration du théorème 2, il suffit de démontrer que l'abscisse de convergence de $Z(P;s)$ est effectivement un pôle.

Démonstration du fait que $\sigma_0(P)$ est un pôle de $Z(P;s)$.

Nous notons $\widetilde{Z}(P;s)$ le prolongement méromorphe de $Z(P;s)$ à $\mathbb{C}$. Nous allons procéder par l'absurde.



Supposons que l'abscisse de convergence σ_0 n'est pas un point singulier de $\widetilde{Z}(P;s)$. Alors il existe $r > 0$ tel que $s \mapsto \widetilde{Z}(P;s)$ est holomorphe dans le disque ouvert $D(\sigma_0, 2r)$. Soit $\sigma_1 \in]\sigma_0, \sigma_0 + r[$. On a alors

$$D(\sigma_1, r) \subset D(\sigma_0, 2r),$$

d'où $s \mapsto \widetilde{Z}(P;s)$ est analytique dans le disque ouvert $D(\sigma_1, r)$ et par suite développable en série entière autour de σ_1 dans ce disque, c'est-à-dire pour tout $s \in D(\sigma_1, r)$, on a

$$\widetilde{Z}(P;s) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \widetilde{Z}(P;s)_{|s=\sigma_1} (s - \sigma_1)^k.$$

Or, dans le demi-plan $\{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} s > \sigma_0\}$, on a

$$\widetilde{Z}(P;s) = Z(P;s) = \sum_{m \in \mathbb{N}^{*n}} \frac{1}{P(m)^s}$$

avec convergence uniforme sur tout compact de ce demi-plan, d'où, quel que soit $k \in \mathbb{N}$, on a, pour $\sigma = \operatorname{Re} s > \sigma_0$:

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}s^k} \widetilde{Z}(P;s) = \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}s^k} Z(P;s) = \sum_{m \in \mathbb{N}^{*n}} \frac{(-\log P(m))^k}{(P(m))^s}$$

avec convergence uniforme sur tout compact. En particulier on a, quel que soit $k \in \mathbb{N}$:

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}s^k}\widetilde{Z}(P;s)_{|s=\sigma_1} = \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}s^k}Z(P;s)_{|s=\sigma_1} = \sum_{m\in\mathbb{N}^{*n}} \frac{(-\log P(m))^k}{(P(m))^{\sigma_1}}.$$

On en déduit donc, pour $|s-\sigma_1| < r$, la convergence de la série

$$\begin{aligned}\widetilde{Z}(P;s) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(s-\sigma_1)^k \sum_{m\in\mathbb{N}^{*n}} \frac{(-\log P(m))^k}{(P(m))^{\sigma_1}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m\in\mathbb{N}^{*n}} \frac{1}{k!}(\sigma_1-s)^k \frac{(+\log P(m))^k}{(P(m))^{\sigma_1}}.\end{aligned}$$

Mais on a $\sigma_0 < \sigma_1 < \sigma_0 + r$, ce qui implique $\sigma_1 - r < \sigma_0$, et, par suite, il existe $\sigma_2 \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\sigma_1 - r < \sigma_2 < \sigma_0 < \sigma_1.$$

En particulier, σ_2 appartient à $D(\sigma_1, r)$, d'où, d'après ce qui précède, la série suivante converge :

$$\widetilde{Z}(P;\sigma_2) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m\in\mathbb{N}^{*n}} \frac{1}{k!}(\sigma_1-\sigma_2)^k \frac{(+\log P(m))^k}{(P(m))^{\sigma_1}}$$

Mais, quels que soient $k \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}^{*n}$,

$$\frac{1}{k!}(\sigma_1-\sigma_2)^k \frac{(+\log P(m))^k}{(P(m))^{\sigma_1}} \geq 0,$$

montre que cette série multiple est à termes positifs et, par conséquent, l'interversion des sommations ne change en rien la convergence. Donc la série

$$\begin{aligned}&\sum_{m\in\mathbb{N}^{*n}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(\sigma_1-\sigma_2)^k \frac{(+\log P(m))^k}{(P(m))^{\sigma_1}} \\ &\quad = \sum_{m\in\mathbb{N}^{*n}} \frac{1}{(P(m))^{\sigma_1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\big((\sigma_1-\sigma_2)\log P(m)\big)^k \\ &\quad = \sum_{m\in\mathbb{N}^{*n}} \frac{1}{(P(m))^{\sigma_1}}\, \mathrm{e}^{(\sigma_1-\sigma_2)\log P(m)} \\ &\quad = \sum_{m\in\mathbb{N}^{*n}} \frac{1}{\big(P(m)\big)^{\sigma_2}} \\ &\quad = Z(P;\sigma_2)\end{aligned}$$

converge, d'où $\sigma_2 \geq \sigma_0$ qui est l'abscisse de convergence de $Z(P;s)$, ce qui est absurde. Ceci termine la démonstration du théorème 2. □

Fin de la démonstration du théorème 3.

Pour terminer la démonstration du théorème 3, nous aurons besoin du lemme technique suivant :

LEMME 4. — *On définit, pour $\varepsilon > 0$ assez petit, $x > 0$ et $\ell \in \mathbb{N}$:*

$$g_\ell(\varepsilon, x) := \sum_{h \in \mathbb{Z}^\ell} \left(1 + |h|^x\right) \mathrm{e}^{-2\pi\varepsilon|h|}.$$

Alors la somme précédente existe et on a la majoration

$$g_\ell(\varepsilon, x) \ll_{x,\ell} \varepsilon^{-(x+1)\ell}.$$

La démonstration du lemme 4 est facile; nous la laisserons au lecteur.

Revenant à la démonstration du théorème 3 :

On a établi dans ce qui précède que, pour tout $\varepsilon' > 0$, pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0'[$, pour tout $\delta > 0$ et tout $N > 0$:

$$\begin{aligned}\widetilde{Z}(P; s) \ll_{P,\varepsilon',\delta,\varepsilon_0',N} &\left(1 + |\tau|^{A(\sigma_0 - \sigma)+\varepsilon'}\right) \mathrm{e}^{\varepsilon|\tau|} \\ &\times \sum_{h \in \mathbb{Z}^{n_2}} \left(1 + |h|^{A(\sigma_0-\sigma)+\varepsilon'}\right) \mathrm{e}^{-2\pi\varepsilon|h|}\end{aligned}$$

uniformément en $s \in \mathbb{C}$ tel que $\sigma = \operatorname{Re} s > \sigma_0 - N$ et $d(s, \mathcal{C}) \geq \delta$, d'où, sous ces conditions-là, on a :

$$\widetilde{Z}(P; s) \ll_{P,\delta,\varepsilon',\varepsilon_0',N} g_{n_2}\big(\varepsilon, A(\sigma_0 - \sigma) + \varepsilon'\big)\left(1 + |\tau|^{A(\sigma_0-\sigma)+\varepsilon'}\right) \mathrm{e}^{\varepsilon|\tau|}.$$

Maintenant, pour $\sigma \in [\sigma_0 - N, \sigma_0 + \varepsilon'/2A]$, on a

$$x = A(\sigma_0 - \sigma) + \varepsilon' \geq \tfrac{1}{2}\varepsilon' > 0.$$

Donc on est dans les conditions d'application du lemme 4 et par conséquent on a, pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0'[$ et uniformément en $\sigma \in [\sigma_0 - N, \sigma_0 + \varepsilon'/2A]$:

$$\widetilde{Z}(P; s) \ll_{P,\delta,\varepsilon',\varepsilon_0',N} \varepsilon^{-\{A(\sigma_0-\sigma)+\varepsilon'+1\}n_2}\left(1 + |\tau|^{A(\sigma_0-\sigma)+\varepsilon'}\right) \mathrm{e}^{\varepsilon|\tau|}.$$

Maintenant, comme l'inégalité précédente est valable quel que soit $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0'[$, nous allons l'optimiser en prenant $\varepsilon = (2/\varepsilon_0' + |\tau|)^{-1} \in]0, \varepsilon_0'[$.

On obtient alors, quels que soient $\varepsilon' > 0$, $\delta > 0$ et $N > 0$ et uniformément pour $\sigma \in [\sigma_0 - N, \sigma_0 + \varepsilon'/2A]$ et $d(s, \mathcal{S}) \geq \delta$:

$$\widetilde{Z}(P;s) \ll_{P,\delta,\varepsilon',\varepsilon'_0,N} 1 + |\tau|^{A(\sigma_0-\sigma)+\varepsilon'+n}.$$

Maintenant, si $\sigma \geq \sigma_0 + \varepsilon'/2A$, alors

$$\widetilde{Z}(P;s) = Z(P;s) = \sum_{m\in\mathbb{N}^{*n}} \frac{1}{P(m)^s}$$

et par conséquent :

$$\widetilde{Z}(P;s) \ll \sum_{m\in\mathbb{N}^{*n}} \frac{1}{P(m)^\sigma} \ll \sum_{m\in\mathbb{N}^{*n}} \frac{1}{P(m)^{\sigma_0+\varepsilon'/2A}}$$
$$\ll_{P,\delta,\varepsilon',\varepsilon'_0,N} 1 \ll_{P,\delta,\varepsilon',\varepsilon'_0,N} 1 + |\tau|^{A(\sigma_0-\sigma)+\varepsilon'+n}.$$

En conclusion, pour $\varepsilon' > 0$ et $N > 0$, et uniformément en $\sigma \geq \sigma_0 - N$, et $d(s, \mathcal{S}) \geq \delta$, on a :

$$(*) \qquad \widetilde{Z}(P;s) \ll_{P,\delta,\varepsilon',N} 1 + |\tau|^{A(\sigma_0-\sigma)+\varepsilon'+n}.$$

On pose $B = A\sigma_0 + 1 + n$. On a alors $B > 0$ et ne dépend que du polynôme P. Le résultat précédent peut se reformuler comme suit : quels que soient $\delta > 0$, $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}$ avec $\sigma_1 < \sigma_2$ et uniformément en $s = \sigma + i\tau$ tel que $\sigma \in [\sigma_1, \sigma_2]$, et $d(s, \mathcal{S}) \geq \delta$, on a :

$$\widetilde{Z}(P;s) \ll_{P,\delta,\sigma_1,\sigma_2} 1 + |\tau|^{-A\sigma+B}.$$

Maintenant, pour conclure, on va utiliser une conséquence immédiate du théorème classique de Phragmén-Lindelöf (voir E.C. Titchmarsh [17]) qui est le lemme suivant :

LEMME (P. Sargos [14]). — *Soit F une fonction holomorphe au voisinage de $H = \{s = \sigma + i\tau \in \mathbb{C} \mid \sigma \in \mathbb{R}$ et $\tau \geq 1\}$. Soit $\sigma_a \in \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe deux constantes A et $B > 0$ telles que :*

(i) *pour chaque σ_1 et $\sigma_2 \in \mathbb{R}$ vérifiant $\sigma_1 < \sigma_2$, on a :*

$$F(s) \ll 1 + \tau^{-A\sigma+B}$$

uniformément en $s = \sigma + i\tau \in [\sigma_1, \sigma_2] + i[1, +\infty[$;

(ii) *pour chaque $\varepsilon > 0$, on a $F(s) \ll 1$ uniformément en $\sigma > \sigma_a + \varepsilon$ et $\tau \geq 1$.*

Alors, quels que soient $\varepsilon > 0$, σ_1 et $\sigma_2 \in \mathbb{R}$ vérifiant $\sigma_1 < \sigma_2$, on a :

$$F(s) \ll 1 + \tau^{A(\sigma_a-\sigma)+\varepsilon}$$

uniformément en $s = \sigma + i\tau \in [\sigma_1, \sigma_2] + i[1, +\infty[$.

Ce qui termine la démonstration du théorème 3. □

7. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 4 ET DES COROLLAIRES 1 ET 2

Avant de se lancer dans la démonstration du théorème 4 et des corollaires 1 et 2, on va rappeler quelques propriétés de la transformée de Mellin et son inverse. Les propriétés que nous allons utiliser sont contenues dans le résultat standard suivant et de son complément qu'on pourra trouver, par exemple, dans P. Sargos [15].

THÉORÈME (théorème taubérien). — *Soit ϕ une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$, localement à variation bornée, croissante et nulle au voisinage de* 0. *On suppose qu'il existe $a > 0$ tel que :*

(1) *pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\phi(t) = O_\varepsilon(t^{a+\varepsilon})$ quand t tend vers l'infini.*

Pour $s = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}$, on pose :

$$F(s) := s \int_0^{+\infty} \phi(t)\, t^{-s-1}\, \mathrm{d}t. \tag{2}$$

Alors la fonction F est définie et holomorphe sur le demi-plan $\{s \in \mathbb{C} \mid \sigma = \operatorname{Re} s > a\}$. De plus, quel que soit $c > a$, on a la formule d'inversion

$$\frac{1}{2}\left[\phi(t+0) + \phi(t-0)\right] = \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)\, t^s \frac{\mathrm{d}s}{s} \qquad (t > 0) \tag{3}$$

l'intégrale ci-dessus étant convergente en valeur principale.

On suppose que F possède un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$, que ses pôles sont d'ordres $\leq n$ et contenus dans un ensemble de la forme $\{\sigma_0 - k/M \mid k \in \mathbb{N}\}$, où $\sigma_0 > 0$ et $M \in \mathbb{N}^*$.

On désigne par $(\sigma_k)_{k\geq 0}$ la suite des pôles de $s \to s^{-1}F(s)$ rangés par ordre décroissant.

Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, on définit le polynôme $Q_k \in \mathbb{R}[X]$ par la relation

$$Q_k(x) = \mathrm{e}^{-\sigma_k x} \operatorname{Re} s_{s=\sigma_k}\big(s^{-1}F(s)\, \mathrm{e}^{sx}\big). \tag{4}$$

On a alors :

$$\deg Q_k = \big(\text{ordre de } \sigma_k \text{ en tant que pôle de } s^{-1}F(s)\big) - 1.$$

On suppose en outre qu'il existe $A > 0$ tel que, pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $\varepsilon > 0$:

$$F(s) \ll 1 + |\tau|^{A(\sigma_0 - \sigma)+\varepsilon} \tag{5}$$

uniformément en $s = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}$ vérifiant $a \leq \sigma \leq \sigma_0 + 1$ et $|\tau| \geq 1$.

On a alors, sous ces conditions, le résultat standard suivant :

LEMME (complément du théorème taubérien). — *Quel que soit $\varepsilon > 0$, on a :*

$$\phi(t) = \sum_{k=0}^{m} t^{\sigma_k} Q_k(\ln t) + O_\varepsilon(t^{\sigma_0 - A^{-1} + \varepsilon}) \tag{6}$$

où m est le plus grand entier tel que $\sigma_k > \sigma_0 - A^{-1}$.

Avec les notations du théorème 4 et de son corollaire 1, on vérifie facilement que :

(1) si $\phi(t) = N_P(t)$, alors $F(s) = s \int_0^{+\infty} \phi(t)\, t^{-s-1}\, \mathrm{d}t = Z(P; s)$,

(2) si $\phi(t) = V_P(t)$, alors $F(s) = Y(P; s)$.

De plus, les théorèmes 1, 2, 3 et 5 montrent que dans les deux cas, nous sommes dans les conditions d'application du théorème taubérien et de son complément. Ce qui entraîne, de façon évidente, le théorème 4 et le corollaire 1. □

Démonstration du corollaire 2. — D'après le corollaire 1, il existe $\rho_1, \lambda_1, \theta > 0$ et $A_1(X), B_1(X) \in \mathbb{R}[X]$ non identiquement nuls tels que, quand t tend vers l'infini, on a :

$$N_P(t) = t^{\rho_1} A_1(\ln t)\big(1 + O(t^{-\theta})\big), \qquad V_P(t) = t^{\lambda_1} B_1(\ln t)\big(1 + O(t^{-\theta})\big).$$

Mais nous savons en plus que :

- $\rho_1 =$ le plus grand pôle de $s^{-1} Z(P; s)$, donc de $Z(P; s)$;
- $\lambda_1 =$ le plus grand pôle de $s^{-1} Y(P; s)$, donc de $Y(P; s)$.

Nous savons aussi que :

- $\rho_1 = \sigma_0(P) =$ l'abscisse de convergence de $Z(P; s)$ (théorème 2).

De façon identique on démontre aussi sans difficulté que

- $\lambda_1 = \sigma_0'(P) =$ l'abscisse de convergence de $Y(P; s)$.

Donc pour terminer la démonstration du corollaire 2, il suffit de démontrer que $s \mapsto Z(P; s)$ et $s \mapsto Y(P; s)$ ont la même abscisse de convergence, c'est-à-dire que $\sigma_0(P) = \sigma_0'(P)$, ce qui est vrai. En effet, comme P vérifie $\mathrm{H_0S}$ avec un $B \in]0,1[$, alors d'après le lemme 3, il existe $c > 1$ tel que pour tout $x \in [B, +\infty[^n$, on a :

$$\sum_{|\alpha| \leq \mu} \left| \frac{\partial^\alpha P(x)}{P(x)} \right| \leq c$$

où μ est le degré total de P, d'où par Taylor, pour tout $m \in \mathbb{N}^{*n}$ et pour tout $\theta \in [0,1[^n$

$$0 < \frac{P(m+\theta)}{P(m)} = \sum_{|\alpha| \leq \mu} \frac{\partial^\alpha P(m)}{P(m)} \frac{\theta^\alpha}{\alpha!} \leq c \quad \left(\text{car } \frac{|\theta^\alpha|}{\alpha!} \leq 1\right)$$

et

$$\begin{aligned} 0 < \frac{P(m)}{P(m+\theta)} &= \frac{P(m+\theta-\theta)}{P(m+\theta)} = \sum_{|\alpha| \leq \mu} \frac{\partial^\alpha P(m+\theta)}{P(m+\theta)} \frac{(-\theta)^\alpha}{\alpha!} \\ &\leq \sum_{|\alpha| \leq \mu} \left| \frac{\partial^\alpha P(m+\theta)}{P(m+\theta)} \right| \theta^\alpha \leq c. \end{aligned}$$

On en déduit que pour tout $m \in \mathbb{N}^{*n}$ et tout $\theta \in [0,1[^n$, on a :

$$c^{-1} P(m) \leq P(m+\theta) \leq c P(m).$$

Donc, pour tout $\sigma > 0$, pour tout $m \in \mathbb{N}^{*n}$ et tout $\theta \in [0,1[^n$, on a :

$$c^{-\sigma} P^{-\sigma}(m) \leq P^{-\sigma}(m+\theta) \leq c^\sigma P^{-\sigma}(m)\,;$$

par intégration, nous en déduisons que dans $[0, +\infty] = \overline{\mathbb{R}}_+$, $\forall \sigma > 0$, on a :

$$c^{-\sigma} Z(P;\sigma) \leq Y(P;\sigma) \leq c^\sigma Z(P;\sigma).$$

Donc $s \mapsto Z(P;s)$ et $s \mapsto Y(P;s)$ ont même abscisse de convergence, c'est-à-dire on a $\sigma_0(P) = \sigma_0'(P)$.

Et ceci termine la démonstration du corollaire 2. □

Un contre-exemple.

Comme nous l'avons déjà signalé, la conjecture de L. Ehrenpreis ne s'étend que partiellement au cas des polynômes qui vérifient $\mathrm{H_0S}$. Pour s'en convaincre, il suffit de se placer en dimension deux ($n = 2$) et de prendre

$$P(X_1, X_2) = X_1^a X_2^b \in \mathbb{R}[X_1, X_2],$$

où $a, b \in \mathbb{N}^*$ vérifient $a < b$. Le polynôme P vérifie évidemment $\mathrm{H_0S}$ et un calcul facile montre qu'avec les notations du corollaire 2, on a

$$\lambda = \frac{1}{a}, \quad A_1(X) \equiv \zeta\Big(\frac{b}{a}\Big), \quad B_1(X) = \frac{1}{b/a - 1} = \frac{a}{b-a}$$

où ζ est la fonction de Riemann.

Mais comme $z \mapsto (z-1)\zeta(z)$ est une fonction entière non constante, il existe deux entiers a et b avec $0 < a < b$ tels que

$$\Big(\frac{b}{a} - 1\Big)\zeta\Big(\frac{b}{a}\Big) \neq 1,$$

c'est-à-dire que, pour ce choix de a et b, $A_1(X) \not\equiv B_1(X)$ et par conséquent, le polynôme $P(X_1, X_2) = X_1^a X_2^b$ ne vérifie pas la seconde partie de la conjecture de L. Ehrenpreis, bien qu'il soit à coefficients positifs, donc vérifiant $\mathrm{H_0S}$.

Remarques.

1) Comme l'avait indiqué Ben Lichtin dans [9], le but final de cette application arithmétique est d'arriver à étudier le comportement quand t tend vers $+\infty$ de

$$N_P(t, \varphi, S) = \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}^n \cap S \\ |P(m)| \leq t}} \varphi(m) \quad \text{et} \quad V_P(t, \varphi, S) = \int_{\{x \,|\, |P(x)| \leq t\} \cap S} \varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

et de voir dans quelle mesure il existe $\theta > 0$ tel que :

$$N_P(t, \varphi, S) - V_P(t, \varphi, S) = O\Big(\frac{V_P(t, \varphi, S)}{t^\theta}\Big)$$

quand t tend vers l'infini, où $P \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ est un polynôme qui vérifie les hypothèses minimales, φ une fonction qui vérifie aussi les hypothèses minimales et S un sous-ensemble semi-algébrique de $\mathbb{R}^n$.

Ce problème général paraît très difficile et rien n'a été fait jusqu'à maintenant dans le cas où S est un ensemble semi-algébrique quelconque. Cependant, dans le cas où S est de la forme $[B, +\infty[^n$, quelques succès ont été emportés et notre travail se situe dans cette lignée.

2) Bien que tous les résultats que nous ayons énoncés dans ce travail supposent que $\varphi \equiv 1$, il est facile de se convaincre, en examinant de plus

près les démonstrations, que ces résultats restent valables dans le cas où φ est, par exemple, le quotient de deux polynômes vérifiant l'hypothèse $\mathrm{H_0S}$; en effet, si l'on pose :

$$N_P(\varphi, t) = \sum_{\substack{m \in \mathbb{N}^{*n} \\ P(m) \leq t}} \varphi(m),$$

alors il est facile de voir de la même façon que

$$\frac{1}{2}\big[N_P(\varphi; t+0) + N_P(\varphi; t-0)\big] = \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} Z_P(\varphi; s)\, t^{-s} \frac{\mathrm{d}s}{s}$$

pour $c \gg 0$, où

$$Z_P(\varphi; s) = \sum_{m \in \mathbb{N}^{*n}} \frac{\varphi(m)}{P(m)^s}$$

et, si φ est le rapport de deux polynômes qui vérifient $\mathrm{H_0S}$, alors il est facile de voir que cette série vérifie aussi les conclusions des théorèmes 1, 2 et 3, ce qui permettra de voir que $N_P(\varphi; t)$ vérifie, de la même façon que $N_P(t)$, la conclusion du théorème 4.

Je remercie vivement P. Sargos, G. Tenenbaum et Y. Varouchas pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail et pour les nombreuses remarques judicieuses dont ils m'ont fait part.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M.F. ATIYAH, Resolutions of singularities and division of distributions, Com. Pure and Applied Mathematics, XXIII (1970), 145–150.

[2] P. CASSOU-NOGUÈS, Applications arithmétiques de l'étude des valeurs aux entiers négatifs des séries de Dirichlet associées à un polynôme, Ann. Inst. Fourier, 31–4 (1981), 1–36.

[3] P. CASSOU-NOGUÈS, Séries de Dirichlet, Journées Arithmétiques de Metz, Astérisque, 94 (1982), 1–15.

[4] P. CASSOU-NOGUÈS, Prolongement des séries de Dirichlet associées à un polynôme à deux indéterminées, J. Number Theory, 23 (1986), 1–54.

[5] M. COSTE, Ensembles semi–algébriques, géométrie algébrique réelle et formes quadratiques, in "Proceedings, Rennes, 1981", Lecture Notes in Math., 959, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1982, 109–138.

[6] H. HIRONAKA, Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero, Annals of Math., 79 (1964), 109–326.

[7] L. HÖRMANDER, Linear partial differential operators, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York.

[8] B. LICHTIN, Generalized Dirichlet series and B–functions, Compositio Math., 65 (1988), 81–120.

[9] B. LICHTIN, Volumes and lattice points. Proof of a conjecture of L. Ehrenpreis, in "Singularities", London Mathem. Soc., Lecture Notes, 201, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[10] B. LICHTIN, Asymptotics of a lattice point problem determined by finitely many polynomials II, à paraître.

[11] K. MAHLER, Über einer Satz von Mellin, Mathematische Annalen, 100 (1928), 384–395.

[12] R.H. MELLIN, Acta Soc. Scient. Fennicae, 29, 4 (1900).

[13] K.F ROTH, Rational approximation to algebriac numbers, Mathematica, 2 (1955), 1–20 (with corrigendium p. 168).

[14] P. SARGOS, Prolongement méromorphe des séries de Dirichlet associées à des fractions rationnelles de plusieurs variables, Ann. Institut Fourier, 34–3 (1984), 83–123.

[15] P. SARGOS, Séries de Dirichlet associées à des polynômes de plusieurs variables, thèse d'Etat, Université de Bordeaux I, 1987.

[16] P. SARGOS, Croissance de certaines séries de Dirichlet et applications, J. reine angew. Math., 367 (1986), 139–154.

[17] E.C. TITCHMARSH, The theory of the riemann zeta function, Oxford University Press, Oxford, 1951.

[18] A. YGER, Formules de division et prolongements méromorphes, Séminaire d'analyse (P. Lelong-P. Dolbeault–H. Skoda), Lecture Notes in Math., 1295, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg–New York, 1988.

[19] B.M. VAN DER WÆRDEN, Einführung in die algebraische Geometrie, Berlin Verlag von Julius Springer, 1939.

[20] R.J. WALKER, Algebraic curves, Princeton University Press, 1950.

Manuscrit reçu le 13 mars 1996,
accepté le 13 novembre 1996.

Driss ESSOUABRI,
Université Henri Poincaré–Nancy I
Intitut de Mathématiques Élie Cartan
B.P. 239
54506 Vandœuvre–les–Nancy (France).
essouabri@iecn.u–nancy.fr