ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JEAN-PIERRE KAHANE
HERVÉ QUEFFÉLEC

Ordre, convergence et sommabilité de produits de séries de Dirichlet

Annales de l'institut Fourier, tome 47, nº 2 (1997), p. 485-529
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1997__47_2_485_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
47, 2 (1997), 485–529

ORDRE, CONVERGENCE ET SOMMABILITÉ DE PRODUITS DE SÉRIES DE DIRICHLET

par J.-P. KAHANE & H. QUEFFÉLEC

Nous traiterons les questions suivantes, relatives à un produit de séries de Dirichlet A_j $(j = 1, 2, \cdots k)$, qui est lui-même une série de Dirichlet.

1. Supposant que les A_j sont convergentes aux points ρ_j et absolument convergentes aux points $\rho_j + \tau_j$, en quels points s'ensuit-il que le produit est convergent ?

2. Supposant que les A_j sont convergentes aux points ρ_j, en quels points s'ensuit-il que le produit est convergent ?

3. Supposant que les A_j sont α_j–sommables aux points ρ_j, en quels points s'ensuit-il que le produit est β–sommable ?

Les réponses font intervenir respectivement les fonctions convexes

$$\sum_{j=1}^{k} (\rho_j + \tau_j - \sigma)^+ / \tau_j, \quad \sum_{j=1}^{k} (\rho_j + 1 - \sigma)^+ , \quad \sum_{j=1}^{k} (\rho_j + \alpha_j + 1 - \sigma)^+ .$$

La valeur critique est respectivement la solution de

$$\sum_{j=1}^{k} (\rho_j + \tau_j - \sigma)^+ / \tau_j = 1, \quad \sum_{j=1}^{k} (\rho_j + 1 - \sigma)^+ = 1,$$

$$\sum_{j=1}^{k} (\rho_j + \alpha_j + 1 - \sigma)^+ = \beta + 1.$$

La convergence ou la sommabilité du produit a lieu strictement à droite de la valeur critique et n'a pas nécessairement lieu strictement à gauche ; de

Mots-clés : Séries de Dirichlet – Ordre – Convergence – Sommabilité – Bohr – Quasi-sûr.
Classification math. : 11M41 – 30B40 – 30C80 – 40Gxx – 54E52.

plus, la convergence du produit a lieu, sauf exceptions, au point critique. C'est là le contenu des théorèmes 3.1, 4.1, 5.1.

Les fonctions convexes ci-dessus jouent un rôle extrémal pour une autre question. Ce sont les plus grandes fonctions d'ordre pour le produit compatibles avec les données. C'est là le contenu des théorèmes de la partie 2, et la clé de l'étude de la convergence et de la sommabilité à gauche du point critique.

Les questions 1 et 2, pour un produit de deux séries de Dirichlet, ont été posées et résolues de façon optimale par Stieltjes et par Landau (voir les énoncés (L1) et (L2) dans la partie 1). En particulier, Stieltjes a établi la convergence du produit au point $\frac{1}{2}$ quand les séries facteurs convergent au point 0. L'optimalité dans ce cas a été établie par Bohr dans sa thèse, au moyen de la fonction d'ordre et d'une habile construction; on peut l'établir de façon plus élémentaire, comme nous le montrons à la fin de la partie 4. L'optimalité en général, dans les résultats de Stieltjes et Landau, ne se trouve établie qu'ici. Elle nécessite pour nous la méthode de Bohr (recours à la fonction d'ordre), rendue maniable par le recours aux méthodes de Baire et aux constructions quasi–sûres que nous avions déjà développées en [Q]. La question 2 a été considérée par Delange et Tenenbaum pour un produit de k facteurs, $k \geqslant 2$, et ils ont aussi obtenu des résultats optimaux (l'optimalité résultant de nos constructions quasi–sûres, ou aussi bien de notre proposition 4.7), mais sous des hypothèses restrictives. C'est l'approche de Delange et Tenenbaum que nous reprenons pour traiter la question 1 (partie 3); nous lui préférons une approche un peu différente pour la question 2 (partie 4). Le lecteur, s'il accède aux idées à travers la technicité des calculs, pourra se convaincre que le passage de $k = 2$ à $k > 2$ n'est pas de simple routine; nous indiquons d'ailleurs, à la fin de la partie 4, une question qui reste ouverte dans le cas $k > 2$.

La question 3, pour un produit de deux facteurs, a été posée et traitée par Bohr à la fin de sa vie (1950). Là encore, la récurrence qui permet de traiter le produit de k facteurs nécessite quelques idées nouvelles.

Le lien entre ordre et sommabilité est le résultat principal de la thèse de Bohr (1910), et il se trouve précisé, avec des questions ouvertes, dans un mémoire de Bohr posthume (1952). Au départ, Bohr considérait la sommabilité au sens de Cesáro; puis il s'est rallié à la sommabilité au sens de Marcel Riesz [Ri], qui n'est pas tout à fait équivalente mais qui donne la même "fonction de sommabilité". A la fin de la partie 5, nous pointons quelques questions qui restent ouvertes, même au sein des résultats considérés comme classiques.

Plan

1. Introduction et définitions.
2. Propriétés quasi–sûres et fonction d'ordre. Premières applications.
3. Produit de séries de Dirichlet convergentes en un point et absolument convergentes en un autre ; résultats optimaux.
4. Produit de séries de Dirichlet convergentes en un point ; résultats optimaux et problème ouvert.
5. Fonction de sommabilité d'un produit de séries de Dirichlet ; résultats optimaux et problèmes ouverts.

1. Introduction et définitions.

Nous considérons exclusivement, dans ce travail, des séries de Dirichlet «ordinaires»

$$A(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)n^{-s} \qquad (s = \sigma + it). \tag{1.1}$$

Pour les séries (1.1) on définit les abscisses suivantes :

(1.2) $\sigma_c := \inf \left\{ \sigma \in \mathbb{R} \ ; \ \sum_{n=1}^{\infty} a(n)n^{-\sigma} \text{ converge} \right\}$ =:abscisse de convergence simple.

(1.3) $\sigma_a := \inf \left\{ \sigma \in \mathbb{R} \ ; \ \sum_{n=1}^{\infty} \mid a(n) \mid n^{-\sigma} \text{ converge} \right\}$ =:abscisse de convergence absolue.

(1.4) $\sigma_b := \inf\{x \in \mathbb{R} \ ;\ A(s)$ a une extension holomorphe et d'ordre fini pour $\mathcal{R}s > x\}$ =:abscisse de Bohr.

Ici «d'ordre fini» signifie «majorée par un polynôme en t».

On a trivialement

$$\sigma_b \leqslant \sigma_c \leqslant \sigma_a \ ; \ 0 \leqslant \sigma_a - \sigma_c \leqslant 1. \tag{1.5}$$

Pour «la fonction zêta alternée» $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^{-s} = \left(1-2^{1-s}\right)\zeta(s)$, on a $\sigma_b = -\infty$, $\sigma_c = 0$, $\sigma_a = 1$; et l'exemple $\sum_{n=1}^{\infty} e^{in^\alpha}n^{-s}$ montre que $\sigma_a - \sigma_c$ peut prendre toute valeur entre 0 et 1; en effet, si $0 < \alpha < 1$, la formule sommatoire d'Euler Mac–Laurin montre que $\sum_{k=1}^{n} e^{ik^\alpha} \sim \dfrac{n^{1-\alpha}}{i\alpha}e^{in^\alpha}$ et donc $\sigma_a = 1$, $\sigma_c = 1-\alpha$.

Pour $\sigma > \sigma_b$, la fonction d'ordre (ou fonction de Lindelöf) de la somme A de (1.1) est par définition

$$\mu(A,\sigma) = \inf\{\alpha \in \mathbb{R}\ ;\ A(\sigma+it) = O(|\,t\,|^\alpha) \text{ quand } |\,t\,| \to \infty\}. \tag{1.6}$$

Posant $\mu = \mu(A,\cdot)$, on a notoirement ([HR], théorème 15)

(1.7) μ est positive, décroissante, convexe; si (1.1) converge en ρ, alors $\sigma > \rho$ entraîne : $\mu(\sigma) \leqslant (1+\rho-\sigma)^+$; de plus $\mu(\sigma) \leqslant \tau^{-1}(\rho+\tau-\sigma)^+$ si (1.1) converge absolument en $\rho+\tau$.

Pour $\alpha \geqslant 0$, (1.1) est dite Riesz–sommable à l'ordre α (en abrégé (R,α)–sommable) au point σ avec pour somme A si

$$\lim_{X\to\infty} X^{-\alpha} \sum_{\log n < X} (X-\log n)^\alpha a(n)n^{-\sigma} = A. \tag{1.8}$$

La fonction de sommabilité $\psi(A,\cdot) = \psi$ de (1.1) est définie par

$$\psi(\sigma) = \inf\left\{\alpha \geqslant 0\ ;\ \sum_{1}^{\infty} a(n)n^{-\sigma} \text{ est } (R,\alpha) \text{ sommable}\right\}. \tag{1.9}$$

Il est également bien connu ([HR]) que

(1.10) ψ est positive, décroissante, convexe, à pente $\leqslant -1$ quand $\psi > 0$, nulle à droite d'une certaine valeur ω_ψ ; et

$$\psi(\sigma) \leqslant \mu(\sigma) \leqslant \psi(\sigma)+1 \text{ pour } \sigma > \sigma_b.$$

La fonction d'ordre se révèle un outil puissant (mais non exclusif comme on le verra) pour minorer l'abscisse de convergence ou de sommabilité d'un produit de séries de Dirichlet quand on rend simultanément la fonction d'ordre de ces séries et de leurs produits partiels aussi grande que possible compte tenu de l'obstruction (1.7); de telles séries étant fort difficiles à construire explicitement, nous utiliserons une méthode «aléatoire» mais au sens topologique et non pas probabiliste du terme; une telle méthode s'est déjà révélée utile dans [Q].

Introduisons pour cela l'espace $\Omega = \{-1, 1\}^{\mathbb{N}^*}$ de tous les choix de signes $\omega = (\epsilon_n(\omega))_{n \geqslant 1}$, muni de la topologie produit de la topologie discrète sur chaque facteur, qui en fait un espace métrisable compact, en particulier un espace de Baire (Ω est l'ensemble de Cantor «abstrait»); introduisons aussi le produit $\Omega^k = \Omega \times \cdots \times \Omega$ de k copies de Ω ; une propriété relative à $(\omega^1, \cdots, \omega^k) \in \Omega^k$, et vraie sur une intersection dénombrable d'ouverts denses (en abrégé sur un G_δ dense) sera dite quasi–sûre (en abrégé qs).

La formule

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a(n)n^{-s}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b(n)n^{-s}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} c(n)n^{-s}$$

définit formellement la série du second membre, C, quand sont données formellement les séries du premier membre, A et B. Soit encore

$$c(n) = \sum_{ij=n} a(i)b(j) = \sum_{d|n} a(d)b\left(\frac{n}{d}\right). \tag{1.11}$$

Plus généralement, étant donné k séries de Dirichlet $A_j(s) = \sum_1^\infty a_j(n)n^{-s}$ $(1 \leqslant j \leqslant k)$, leur produit $C = A_1 \cdots A_k$ est défini formellement par

$$C(s) = \sum_{n=1}^{\infty} c(n)n^{-s}$$

où

$$c(n) = \sum_{n_1 \cdots n_k = n} a_1(n_1) \cdots a_k(n_k). \tag{1.12}$$

La partie 2 développe les résultats quasi–sûrs dont nous aurons besoin; la partie 5 est consacrée à la sommabilité au sens de Riesz; les parties 3 et 4 généralisent les trois résultats suivants et montrent leur caractère optimal (cf. l'article récent [K2] qui contient entre autres des commentaires historiques sur ces résultats). (L_1) et (L_2) sont dus à Landau.

(L_1) *Supposons A convergente en ρ, absolument convergente en $\rho + \tau$.*

Supposons B convergente en ρ', absolument convergente en $\rho' + \tau'$.

Supposons aussi $\tau \geqslant 0$, $\tau' \geqslant 0$, $\tau + \tau' > 0$, $\rho' \leqslant \rho + \tau$, $\rho \leqslant \rho' + \tau'$.

Alors $C = AB$ converge au point

$$\sigma = \frac{\rho\tau' + \rho'\tau + \tau\tau'}{\tau + \tau'}. \tag{1.13}$$

(L_2) *Supposons A convergente en ρ et B convergente en ρ', avec* $|\rho - \rho'| < 1$.

Alors $C = AB$ converge au point

$$\sigma = \frac{1}{2}(\rho + \rho' + 1). \tag{1.14}$$

H. Delange et G. Tenenbaum ([DT]) ont déjà généralisé (L_2) ainsi :

(DT) *Supposons A_j convergente en ρ_j $(1 \leqslant j \leqslant k)$ avec $\rho_1 \geqslant \cdots \geqslant \rho_k$ et* $\rho_1 - \rho_k < \dfrac{1}{k-1}$.

Alors $C = A_1 \cdots A_k$ converge au point

$$\sigma = \frac{1}{k}\left(\rho_1 + \cdots + \rho_k + k - 1\right). \tag{1.15}$$

En prévision de la suite, observons que (1.13), (1.14), (1.15) se réécrivent respectivement

$$\tau^{-1}(\rho + \tau - \sigma)^+ + \tau'^{-1}(\rho' + \tau' - \sigma)^+ = 1 \qquad (\tau > 0,\ \ \tau' > 0) \tag{1.13'}$$

$$(\rho + 1 - \sigma)^+ + (\rho' + 1 - \sigma)^+ = 1 \tag{1.14'}$$

$$\sum_{j=1}^{k}(\rho_j + 1 - \sigma)^+ = 1. \tag{1.15'}$$

Vérifions par exemple que (1.15) $\Rightarrow$ (1.15$'$); ce sera le cas si σ donné par (1.15) est tel que $\rho_k + 1 - \sigma > 0$, soit encore si

$$\sum_{j=1}^{k-1}(\rho_j - \rho_k) < 1, \tag{1.16}$$

ce qui est bien le cas si $\rho_1 - \rho_k = \max(\rho_j - \rho_k) < \dfrac{1}{k-1}$. On verra notamment que l'hypothèse (1.16), plus générale que celle de (DT), suffit à entraîner la convergence de C en σ donné par (1.15).

2. Propriétés quasi-sûres et fonction d'ordre. Premières applications.

Nous aurons d'abord besoin de quelques lemmes.

LEMME 2.1 ([Ru]). — *Soit $z_1, \cdots, z_N \in \mathbb{C}$; il existe $I \subset \{1, \cdots, N\}$ tel que*

$$\left|\sum_{n\in I} z_n\right| \geqslant \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{N} | z_n | . \tag{2.1}$$

Preuve. — Si $z_n = \rho_n e^{i\theta_n}$ et $h(\theta) = \sum_{n=1}^{N} \rho_n (\cos(\theta + \theta_n))^+$, on a clairement

$$\sup_I \left|\sum_{n\in I} z_n\right| = \sup_\theta h(\theta) \geqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(\theta)d\theta = \frac{1}{\pi}\sum_1^N \rho_n.$$

(L'exemple $z_n = e^{2i\pi\frac{n}{N}}$, où $N \to \infty$, montre que la constante $\frac{1}{\pi}$ dans (2.1) est optimale.)

LEMME 2.2. — *Soit E un ensemble et $(u_n^{(j)})$ k suites d'applications de E dans $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ $(n \geqslant 1,\ 1 \leqslant j \leqslant k)$ telles que $\sum_{n,j}\left|u_n^{(j)}(t)\right| < \infty$ pour tout t de E. Soit $A_\ell^{(1)}, \cdots, A_\ell^{(k)}$ des parties finies de $\mathbb{N}^*$ avec $\lim_{\ell\to\infty} \min\left(A_\ell^{(1)} \cup \cdots \cup A_\ell^{(k)}\right) = \infty$; $(t_\ell)_{\ell\geqslant 1}$ une suite de points de E;*

$$S_\ell^{(j)} = \sum_{n\in A_\ell^{(j)}} \left|u_n^{(j)}(t_\ell)\right| ;$$

$$f_j(t,\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n(\omega^j)u_n^{(j)}(t), \quad \text{où} \quad \omega = (\omega^1, \cdots, \omega^k) \in \Omega^k.$$

Alors

$$\overline{\lim_{\ell\to\infty}}\left[\min_{1\leqslant j\leqslant k}\left(\frac{| f_j(t_\ell,\omega) |}{S_\ell^{(j)}}\right)\right] \geqslant \frac{1}{\pi} \qquad \text{qs.} \tag{2.2}$$

En particulier

$$\overline{\lim_{\ell\to\infty}}\left[\frac{| f_1(t_\ell,\omega)\cdots f_k(t_\ell,\omega) |}{S_\ell^{(1)}\cdots S_\ell^{(k)}}\right] \geqslant \frac{1}{\pi^k} \qquad \text{qs.} \tag{2.3}$$

Preuve. — Fixons d'abord $\alpha < \frac{1}{\pi}$ et posons

$$\varphi_\ell(\omega) = \min_{1\leqslant j\leqslant k}\left(\frac{|\ f_j(t_\ell,\omega)\ |}{S_\ell^{(j)}}\right),$$

et

$$F_\ell = \left\{\omega \in \Omega^k\ ;\ \sup_{m\geqslant \ell}\varphi_m(\omega) \leqslant \alpha\right\} =: \bigcap_{m\geqslant\ell} G_m.$$

Chaque G_m est fermé dans Ω^k puisque φ_m est continue; donc F_ℓ est fermé; soit maintenant $\omega \in F_\ell$, V un voisinage de ω, $q \geqslant 1$ tel que $\epsilon_n(\omega^j) = \epsilon_n(\omega'^j)$ pour $1 \leqslant n \leqslant q$ et $1 \leqslant j \leqslant k$ entraîne $\omega' \in V$; soit ensuite $m \geqslant \ell$ tel que $\min\left(A_m^{(1)} \cup \cdots \cup A_m^{(k)}\right) > q$. D'après (2.1) il existe des parties $I_1, \cdots, I_k$ de $A_m^{(1)}, \cdots, A_m^{(k)}$ respectivement, telles que

$$\left|\sum_{n\in I_j} \epsilon_n(\omega^j)u_n^{(j)}(t_m)\right| \geqslant \frac{1}{\pi}S_m^{(j)} \qquad (1 \leqslant j \leqslant k). \tag{2.4}$$

Définissons $\omega' \in \Omega^k$ par

$$\begin{cases} \epsilon_n(\omega'^j) = \epsilon_n(\omega^j) & \text{si } n \notin I_j \\ \epsilon_n(\omega'^j) = -\epsilon_n(\omega^j) & \text{si } n \in I_j. \end{cases}$$

En particulier $\epsilon_n(\omega'^j) = \epsilon_n(\omega^j)$ pour $1 \leqslant n \leqslant q$ et $1 \leqslant j \leqslant k$, donc $\omega' \in V$; mais d'après (2.4)

$$|f_j(t_m,\omega') - f_j(t_m,\omega)| = 2\left|\sum_{n\in I_j}\epsilon_n(\omega^j)u_n^{(j)}(t_m)\right| \geqslant \frac{2}{\pi}S_m^{(j)},$$

donc $|f_j(t_m,\omega')| \geqslant \left(\frac{2}{\pi} - \alpha\right) S_m^{(j)} > \alpha S_m^{(j)}$ et $\varphi_m(\omega') > \alpha$; cela montre que $\omega' \notin F_\ell$ et que F_ℓ est d'intérieur vide; autrement dit $O_\ell = \Omega^k \backslash F_\ell$ est un ouvert dense de Ω^k et $\bigcap_{\ell\geqslant 1} O_\ell$ un G_δ dense; il en résulte $\overline{\lim}\varphi_\ell(\omega) \geqslant \alpha$ qs, puis $\overline{\lim}\varphi_\ell(\omega) \geqslant \frac{1}{\pi}$ qs, en faisant tendre α vers $\frac{1}{\pi}$. □

LEMME 2.3. — *Soit $\alpha \geqslant 1$ et $\sigma \in \left[0, \frac{1}{\alpha}\right]$; posons $\lambda_n = [(2n-1)^\alpha]$ et $\mu_n = [(2n)^\alpha]$, où [ ] =partie entière. Alors il existe δ et $C > 0$, ne dépendant que de α, tels que*

$$\left|\lambda_n^{-\sigma-it} - \mu_n^{-\sigma-it}\right| \leqslant C(1+t)n^{-\alpha\sigma-1} \quad (n \geqslant 1,\ t \geqslant 0), \tag{2.5}$$

$$(2.6) \qquad \left|\lambda_n^{-\sigma-it} - \mu_n^{-\sigma-it}\right| \geqslant \delta t^{-\alpha\sigma} \quad (t \geqslant C^{-1} \ ; \ Ct \leqslant n \leqslant 2Ct).$$

Preuve. — D'abord $(2n)^\alpha \geqslant (2n-1)^\alpha + 1$, donc $\mu_n \geqslant \lambda_n + 1$; ensuite

$$\left|\lambda_n^{-\sigma-it} - \mu_n^{-\sigma-it}\right| = |\sigma + it| \left|\int_{\lambda_n}^{\mu_n} x^{-\sigma-it-1} dx\right| \leqslant |\sigma+it| \int_{\lambda_n}^{\mu_n} x^{-\sigma-1} dx$$

$$\leqslant \frac{|\sigma+it|(\mu_n - \lambda_n)}{\lambda_n^{\sigma+1}} \leqslant C(1+t)\frac{n^{\alpha-1}}{n^{\alpha\sigma+\alpha}} = C(1+t)n^{-\alpha\sigma-1},$$

d'où (2.5) (C pourra varier de place en place dans la preuve). D'autre part la variation V de l'argument $-t$ Log x de l'intégrande dans $\int_{\lambda_n}^{\mu_n} x^{-\sigma-it}dx$ est

$$V = t \operatorname{Log}\frac{\mu_n}{\lambda_n} \leqslant t \operatorname{Log}\frac{(2n)^\alpha}{(2n-1)^\alpha - 1} = t \operatorname{Log}(1 + O_\alpha(n^{-1})) \leqslant C\frac{t}{n};$$

donc $V \leqslant 1 \leqslant \frac{\pi}{2}$ si $n \geqslant Ct$ et on peut ajuster θ pour avoir $|\theta - t \operatorname{Log} x| \leqslant \frac{\pi}{4}$ si $\lambda_n \leqslant x \leqslant \mu_n$. D'où

$$|\sigma+it|\left|\int_{\lambda_n}^{\mu_n} x^{-\sigma-it-1}dx\right| = |\sigma+it|\left|\int_{\lambda_n}^{\mu_n} x^{-\sigma-1}e^{i(\theta - t \operatorname{Log} x)}dx\right|$$

$$\geqslant t\int_{\lambda_n}^{\mu_n} x^{-\sigma-1}\cos(\theta - t \operatorname{Log} x)dx \geqslant t\cos\frac{\pi}{4}\int_{\lambda_n}^{\mu_n} x^{-\sigma-1}dx$$

$$\geqslant \frac{t(\mu_n - \lambda_n)\cos\frac{\pi}{4}}{\mu_n^{\sigma+1}} \geqslant \frac{t\cos\frac{\pi}{4}}{(2n)^{\alpha(\sigma+1)}}\left[(2n)^\alpha - 1 - (2n-1)^\alpha\right]$$

$$\geqslant \delta\frac{tn^{\alpha-1}}{n^{\alpha\sigma+\alpha}} \geqslant \delta t^{-\alpha\sigma}$$

si $n \leqslant 2Ct$, d'où (2.6). (Si $\alpha = 1$, $(2n)^\alpha - 1 - (2n-1)^\alpha = 0$, mais dans ce cas $\mu_n - \lambda_n = 1$!). □

Avant d'énoncer le lemme suivant, nous aurons besoin de quelques notations et inégalités empruntées à [Q]. Convenons que

$$(2.7) \qquad \varphi_s(x) = x^{-s} \qquad (x \geqslant 1, \ ; \ s = \sigma + it)$$

$$(2.8) \qquad \begin{cases} (\sigma_n)_{n\geqslant 0} \text{ est la suite de Morse définie par} \\ \sigma_0 = 1 \ ; \ \sigma_{2n} = \sigma_n \ ; \ \sigma_{2n+1} = -\sigma_n. \end{cases}$$

Si φ est définie sur $[1,\infty[$ et si p est un entier $\geqslant 0$, la différence d'ordre p de φ en x est définie par

$$\Delta_p\varphi(x) = \sum_{r=0}^{2^p-1} \sigma_r \varphi(x+2^p-1-r). \tag{2.9}$$

Par exemple $\Delta_0\varphi(x) = \varphi(x)$ et $\Delta_2\varphi(x) = \varphi(x+3)-\varphi(x+2)-\varphi(x+1)+\varphi(x)$. Soit (n_ℓ) définie par $n_0 = 0$, $n_\ell = 2^{\ell^3}$ pour $\ell = 1, 2, \cdots$; on a

$$n_{\ell+1} \geqslant 2n_\ell \ ; \ \ell^{-2}\mathrm{Log}(n_{\ell+1}-n_\ell) \to +\infty. \tag{2.10}$$

Soit ensuite

$$u_n(s) = \Delta_\ell\varphi_s[v(\ell,n)] \quad \text{si} \quad n_\ell < n \leqslant n_{\ell+1} \tag{2.11}$$

où les entiers $v(\ell,n)$ sont ajustés pour qu'on ait formellement

$$\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n(\omega)u_n(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \pm n^{-s}$$

pour tout ω de Ω,

(2.12)

$$m_\ell = v(\ell, n_\ell+1) = 1+n_1+2(n_2-n_1)+\cdots+2^{\ell-1}(n_\ell-n_{\ell-1}) \in \left[2^\ell, 2^{\ell-1}n_\ell\right],$$

$$t_\ell = \frac{m_\ell}{2^\ell} \ ; \ \lambda_\ell = [t_\ell] \ ; \ A_\ell =]n_\ell, n_\ell+\lambda_\ell[\cap\mathbb{N}^*. \tag{2.13}$$

Il résulte de (2.10), (2.12), (2.13) que

$$\forall\epsilon > 0, \ \exists C_\epsilon > 0 \quad \text{avec} \quad 2^{\ell^2} \leqslant C_\epsilon t_\ell^\epsilon. \tag{2.14}$$

Avec ces notations on a le

LEMME 2.4. — *Pour tout* $\omega \in \Omega$, $\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n(\omega)u_n(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \pm n^{-s}$ *vérifie*

$$\begin{cases} \sigma_c = 0 \ ; \ \sup_{N\geqslant 1}\left|\sum_{n=1}^{N} \pm 1\right| < \infty \ ; \\ \sigma_b = -\infty \ ; \ \mu(A,\sigma) \leqslant (1-\sigma)^+ \ \textit{pour} \ \sigma \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.15}$$

Pour tout $\epsilon > 0$, *il existe* $\delta_\epsilon > 0$ *tel que* $\rho+1-\sigma > 0$ *entraîne*

$$\sum_{n\in A_\ell} |u_n(\sigma-\rho+it_\ell)| \geqslant \delta_\epsilon t_\ell^{\rho+1-\sigma-\epsilon}. \tag{2.16}$$

Preuve. — Elle est faite en détail dans [Q], et utilise notamment (2.14).

Avant d'exploiter les lemmes précédents, faisons une observation préliminaire; soit $(\rho_1, \tau_1), \cdots (\rho_k, \tau_k)$ k couples tels que

(2.17) $$\rho_j \in \mathbb{R}\ ;\ 0 < \tau_j \leqslant 1\ ;\ (1 \leqslant j \leqslant k)\ ;\ \rho_1 \geqslant \cdots \geqslant \rho_k.$$

Alors

(2.18)

$$\text{l'équation } h(\sigma) := \sum_{j=1}^{k} \tau_j^{-1}(\rho_j + \tau_j - \sigma)^+ = 1 \text{ admet une solution unique.}$$

En effet, h est continue, $h(-\infty) = +\infty$, $h(\sigma) = 0$ pour $\sigma \geqslant \max(\rho_j + \tau_j)$, et h est strictement décroissante sur l'intervalle ouvert où elle est > 0. Remarquons que $h(\rho_1) \geqslant 1$, donc $\sigma \geqslant \rho_1$.

Nous pouvons maintenant énoncer les théorèmes suivants.

THÉORÈME 2.5. — *Soit $(\rho_1, \tau_1), \cdots, (\rho_k, \tau_k)$ comme dans (2.17). On peut trouver k séries de Dirichlet $A_1, \cdots, A_k$ telles que*

(2.19) *A_j converge en ρ_j et converge absolument en $\rho_j + \tau_j$ $(1 \leqslant j \leqslant k)$,*

(2.20) *la fonction d'ordre de A_j est : $\mu_j(\sigma) = \tau_j^{-1}(\rho_j + \tau_j - \sigma)^+$ pour $\sigma > \rho_j$.*

(2.21) *la fonction d'ordre de tout produit partiel des A_j est égale (et pas seulement inférieure ou égale) à la somme des μ_j correspondantes, i. e.*
$$C = \prod_{j \in J} A_j \Rightarrow \mu(C, \sigma) = \sum_{j \in J} \mu_j(\sigma) \text{ pour } \sigma > \sup_J \rho_j.$$

Quand tous les τ_j valent 1, on a une version du théorème précédent avec des fonctions entières.

THÉORÈME 2.6. — *Soit $\rho_1, \cdots, \rho_k \in \mathbb{R}$. On peut trouver k séries de Dirichlet $A_1, \cdots, A_k$ telles que, pour $1 \leqslant j \leqslant k$:*

(2.22) $$A_j \text{ converge en } \rho_j,$$

(2.23) $$\sigma_b(A_j) = -\infty,$$

(2.24) $$\mu_j(\sigma) = (\rho_j + 1 - \sigma)^+ \text{ pour } \sigma \in \mathbb{R},$$

$$C = \prod_{j \in J} A_j \Rightarrow \mu(C, \sigma) = \sum_{j \in J} \mu_j(\sigma) \text{ pour } \sigma \in \mathbb{R}. \tag{2.25}$$

Les théorèmes 2.5 et 2.6 ont les deux corollaires suivants, qui montreront l'optimalité des résultats de 3 et 4 (cf. aussi corollaires (C1) et (C2) de [K2]). Précisons que, lorsque nous parlons de l'optimalité des résultats, nous entendons que les formules données dans les conclusions sont optimales sous les hypothèses données. Cela n'interdit pas d'améliorer les théorèmes en restreignant les hypothèses. Le théorème 2.6 sera utilisé de nouveau dans la partie 5 (théorème 5.1).

COROLLAIRE 2.7. — *Soit $(\rho_1, \tau_1), \cdots, (\rho_k, \tau_k)$ comme dans (2.17). On peut trouver k séries de Dirichlet $A_1, \cdots, A_k$ telles que*

(2.26) *A_j converge en ρ_j et converge absolument en $\rho_j + \tau_j$ $(1 \leqslant j \leqslant k)$,*

(2.27) *la série produit $C = A_1 \cdots A_k$ a une abscisse de convergence simple $\sigma^* \geqslant \sigma$, où σ est l'unique solution de*
$$\sum_{j=1}^{k} \tau_j^{-1} (\rho_j + \tau_j - \sigma)^+ = 1.$$

COROLLAIRE 2.8. *Soit $\rho_1, \cdots, \rho_k \in \mathbb{R}$. On peut trouver k séries de Dirichlet $A_1, \cdots, A_k$ telles que*

(2.28) *la série A_j converge en ρ_j, et $\sigma_b(A_j) = -\infty$ $(1 \leqslant j \leqslant k)$,*

(2.29) *la série produit $C = A_1 \cdots A_k$ a une abscisse de convergence simple $\sigma^* \geqslant \sigma$, où σ est l'unique solution de*
$$\sum_{j=1}^{k} (\rho_j + 1 - \sigma)^+ = 1.$$

Compte tenu de (1.13′), le corollaire 2.7 pour $k = 2$ montre que le résultat de Landau dans (L_1)est optimal; de même, compte tenu de (1.14′) et (1.15′), le corollaire 2.8 montre que les résultats dans (L_2) et (DT) sont optimaux.

Preuve du corollaire 2.7. On a supposé $\rho_1 \geqslant \cdots \geqslant \rho_k$ et il existe $J \subset \{1, \cdots, k\}$ tel que, si

$$h(\sigma) = \sum_{j=1}^{k} \tau_j^{-1} (\rho_j + \tau_j - \sigma)^+ = 1,$$

on ait

$$\begin{cases} j \in J \Rightarrow \rho_j + \tau_j - \sigma > 0 \; ; \; j \notin J \Rightarrow \rho_j + \tau_j - \sigma \leqslant 0 \; ; \\ \displaystyle\sum_{j \in J} \tau_j^{-1}(\rho_j + \tau_j - \sigma)^+ = 1. \end{cases}$$

Écrivons $J = \{j_1, \cdots, j_p\}$ avec $j_1 < \cdots < j_p$ et distinguons deux cas.

$\boxed{\text{Cas 1 } : p = 1}$

Alors $\sigma = \rho_1$; $A_1(s) = \sum_{n=2}^{\infty} n^{-(s-\rho_1+1)}(\text{Log } n)^{-2}$, $A_j = 1$ si $j \neq 1$ conviennent.

$\boxed{\text{Cas 2 } : p \geqslant 2}$

Alors $1 = \tau_{j_1}^{-1}(\rho_{j_1} + \tau_{j_1} - \sigma) + \sum_{r=2}^{p} \tau_{j_r}^{-1}(\rho_{j_r} + \tau_{j_r} - \sigma) > \tau_{j_1}^{-1}(\rho_{j_1} + \tau_{j_1} - \sigma)$, donc $\sigma > \rho_{j_1} = \max(\rho_{j_1}, \cdots, \rho_{j_p})$; prenons $A_{j_1}, \cdots, A_{j_p}$ comme dans le théorème 2.5 et $A_j = 1$ si $j \notin J$; soit $C = A_1 \cdots A_k = A_{j_1} \cdots A_{j_p}$. Si $\sigma^* < \sigma$, soit σ' tel que $\max(\rho_{j_1}, \sigma^*) < \sigma' < \sigma$; (2.20) et (2.21) entraînent

$$\mu(C, \sigma') \geqslant \sum_{r=1}^{p} \tau_{j_r}^{-1}(\rho_{j_r} + \tau_{j_r} - \sigma')^+ > \sum_{r=1}^{p} \tau_{j_r}^{-1}(\rho_{j_r} + \tau_{j_r} - \sigma)^+ = h(\sigma) = 1.$$

D'autre part $\sigma' > \sigma^*$, donc (1.7) entraîne $\mu(C, \sigma') \leqslant 1$; cette contradiction achève la preuve. □

Le corollaire 2.8 se déduit du théorème 2.6 comme le corollaire 2.7 se déduisait du théorème 2.5.

Preuve du théorème 2.5. — Posons $\alpha_j = \dfrac{1}{\tau_j}$ $(j = 1, \cdots, k)$ et définissons formellement :

(2.31)
$$\begin{cases} B_j(s, \omega) = \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\epsilon_n(\omega^j)}{(\text{Log } n)^2} \Big([(2n-1)^{\alpha_j}]^{-(s-\rho_j)} - [(2n)^{\alpha_j}]^{-(s-\rho_j)} \Big) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad =: \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \epsilon_n(\omega^j) u_n^{(j)}(s) \\ A_j(s, \omega) = M + B_j(s, \omega) \end{cases}$$

où M est une constante positive assez grande pour que

$$\sigma \geqslant \rho_j + \tau_j \Rightarrow |A_j(\sigma + it)| \geqslant 1 \quad (j = 1, \cdots, k \; ; \; t \in \mathbb{R}). \tag{2.32}$$

Cela est possible car $[n^{\alpha_j}]^{-\tau_j} \sim n^{-1}$ et donc toutes les séries B_j sont absolument convergentes en $\rho_j + \tau_j$. Soit C, δ des constantes vérifiant simultanément (2.5) pour $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$, et (2.6) pour $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$, $t \geqslant C^{-1}$ et $Ct \leqslant n \leqslant 2Ct$. Observons d'abord que les séries A_j convergent en ρ_j (d'après (2.5)) et convergent absolument en $\rho_j + \tau_j$, pour tout ω de Ω^k; posons ensuite

$$E_\ell = [Ct_\ell, 2Ct_\ell] \cap \mathbb{N}^*, \qquad S_\ell^{(j)} = \sum_{n \in E_\ell} \left| u_n^{(j)}(\sigma + it_\ell) \right|$$

où (t_ℓ) est une suite qui tend vers $+\infty$ et où $j \in [1, k]$, $\sigma \in]\rho_j, \rho_j + \tau_j[$ sont fixés. (2.6) entraîne

$$S_\ell^{(j)} \geqslant \sum_{Ct_\ell \leqslant n \leqslant 2Ct_\ell} \frac{\delta\, t_\ell^{-\alpha_j(\sigma - \rho_j)}}{(\operatorname{Log} 2Ct_\ell)^2} \geqslant \delta_1 \frac{t_\ell^{1-\alpha_j(\sigma-\rho_j)}}{(\operatorname{Log} t_\ell)^2}$$

où δ_1 est une constante > 0.

D'après le lemme 2.2 on a donc

$$\overline{\lim} \frac{| A_j(\sigma + it_\ell) |}{t_\ell^{1-\alpha_j(\sigma-\rho_j)} (\operatorname{Log} t_\ell)^{-2}} \geqslant \frac{\delta_1}{\pi} \quad \text{qs.}$$

En particulier $\mu_j(\sigma) \geqslant 1 - \alpha_j(\sigma - \rho_j) = \tau_j^{-1}(\rho_j + \tau_j - \sigma)$ qs; cette inégalité jointe à la convexité de μ_j, à l'inégalité (1.7) et à l'égalité $\mu_j(\rho_j + \tau_j) = 0$, montre que

$$\text{(2.33)} \qquad \text{qs,} \quad \mu_j(\sigma) = \tau_j^{-1}(\rho_j + \tau_j - \sigma)^+ \ \text{ pour } \ \sigma > \rho_j.$$

Autrement dit, chaque A_j défini par (2.31) vérifie (2.19) sûrement et (2.20) quasi-sûrement. On va maintenant montrer que, pour toute partie non vide de J de $\{1, \cdots, k\}$, (2.21) a lieu qs; une intersection finie de parties qs étant encore qs, on peut se limiter à $J = \{1, \cdots, k\}$ et $C = A_1 \cdots A_k$; pour la simplicité des notations, on supposera de plus que $\rho_1 + \tau_1 \geqslant \rho_2 + \tau_2 \geqslant \cdots \geqslant \rho_k + \tau_k$ (on renonce donc ici, provisoirement, à la convention (2.17)); rappelons que

$$h(\sigma) := \sum_{j=1}^{k} \tau_j^{-1}(\rho_j + \tau_j - \sigma)^+$$

et décomposons l'intervalle ouvert $]\rho_1, \infty[$ en $k+1$ intervalles consécutifs $I_k \leqslant I_{k-1} \leqslant \cdots \leqslant I_1 \leqslant I_0$, éventuellement vides ou réduits à un point, tels que

$$
\begin{aligned}
h(\sigma) &= \sum_{j=1}^{k} \tau_j^{-1}(\rho_j + \tau_j - \sigma) \quad \text{si} \quad \sigma \in I_k \\
&\vdots \\
h(\sigma) &= \sum_{j=1}^{r} \tau_j^{-1}(\rho_j + \tau_j - \sigma) \ \text{ si } \ \sigma \in I_r \\
&\vdots \\
h(\sigma) &= \tau_1^{-1}(\rho_1 + \tau_1 - \sigma) \ \text{ si } \ \sigma \in I_1 \\
h(\sigma) &= 0 \quad \text{si} \quad \sigma \in I_0.
\end{aligned}
$$

Soit a_r, b_r les extrémités d'un I_r d'intérieur non vide, $c_r = \dfrac{a_r + b_r}{2}$; on va montrer que

$$
\text{(2.34)} \qquad \begin{cases} \text{qs,} \quad \mu(C,\sigma) = \sum_{j=1}^{r} \tau_j^{-1}(\rho_j + \tau_j - \sigma) = h(\sigma) = \sum_{j=1}^{k} \mu_j(\sigma) \\ \text{pour} \qquad \sigma = c_r. \end{cases}
$$

Soit donc $\sigma = c_r$; par définition des $I_k, \cdots, I_0$ on a

$$
r + 1 \leqslant j \leqslant k \Rightarrow \rho_j + \tau_j \leqslant \sigma \Rightarrow \mid A_j(\sigma + it) \mid \geqslant 1
$$

d'après (2.32). Donc

$$
\text{(2.35)} \qquad |C(\sigma + it)| \geqslant |A_1(\sigma + it) \cdots A_r(\sigma + it)| \qquad (t \in \mathbb{R}).
$$

D'autre part

$$
1 \leqslant j \leqslant r \Rightarrow \rho_j + \tau_j - \sigma > 0 \Rightarrow \sigma - \rho_j < \tau_j = \frac{1}{\alpha_j},
$$

donc le lemme 2.3 s'applique de nouveau pour donner

$$
S_\ell^{(j)} \geqslant \delta_2 \frac{t_\ell^{1-\alpha_j(\sigma-\rho_j)}}{(\operatorname{Log} t_\ell)^2}
$$

puis

$$
\text{(2.36)} \qquad S_\ell^{(1)} \cdots S_\ell^{(r)} \geqslant \delta_3 \frac{t_\ell^{r - \sum_1^r \alpha_j(\sigma-\rho_j)}}{(\operatorname{Log} t_\ell)^{2r}}
$$

où δ_2, δ_3 sont deux constantes > 0. Mais

$$r - \sum_{j=1}^{r} \alpha_j(\sigma - \rho_j) = \sum_{j=1}^{r} \tau_j^{-1}(\rho_j + \tau_j - \sigma) = h(\sigma),$$

donc (2.3) du lemme 2.2, (2.35) et (2.36) donnent

$$\overline{\lim_{\ell\to\infty}} \frac{|\, C(\sigma + it_\ell)\,|}{\delta_3 t_\ell^{h(\sigma)}(\operatorname{Log} t_\ell)^{-2r}} \geqslant \overline{\lim_{\ell\to\infty}} \frac{|\, A_1(\sigma + it_\ell) \cdots A_r(\sigma + it_\ell)\,|}{\delta_3 t_\ell^{h(\sigma)}(\operatorname{Log} t_\ell)^{-2r}} \geqslant \frac{1}{\pi^r} \text{ qs.}$$

En particulier $\mu(C, \sigma) \geqslant h(\sigma)$ qs ; l'inégalité inverse

$$\mu(C, \sigma) \leqslant \sum_{j=1}^{k} \mu_j(\sigma) = h(\sigma)$$

est toujours vraie, ce qui prouve (2.34). Or h est affine sur I_r, $\mu(C, \cdot)$ y est convexe, majorée par h et coïncidant avec h en c_r; donc $\mu(C, \sigma) = h(\sigma)$ $\forall \sigma \in I_r$; enfin, $\sigma \in I_0 \Rightarrow C$ absolument convergente en $\sigma \Rightarrow \mu(C, \sigma) = 0 = h(\sigma)$; ceci achève la preuve du théorème 2.5 puisque quasi–sûrement les séries A_j définies par (2.31) vont vérifier (2.19), (2.20) et (2.21). □

Preuve du théorème 2.6. — Elle est très voisine de celle du théorème précédent ; supposons pour simplifier la présentation que $\rho_1 > \cdots > \rho_k$; soit (u_n) la suite donnée par (2.11), puis soit (t_ℓ), (E_ℓ) la suite de réels et de blocs d'entiers donnés par (2.13) et $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ une suite décroissant assez lentement vers zéro pour que

$$\text{(2.37)} \quad \sum_{n\in E_\ell} \alpha_n \,|u_n(\sigma - \rho + it_\ell)| \geqslant \delta_\epsilon \frac{t_\ell^{\rho+1-\sigma-\epsilon}}{\operatorname{Log} t_\ell} \quad \text{si} \quad \rho + 1 - \sigma > 0,\ \epsilon > 0.$$

(Cela est possible d'après (2.16).) Définissons formellement

$$\text{(2.38)} \qquad \begin{cases} B_j(s, \omega) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n(\omega^j)\alpha_n u_n(s - \rho_j) =: \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n(\omega^j) u_n^{(j)}(s) \\ A_j(s, \omega) = M + B_j(s, \omega) \end{cases}$$

où M est une constante positive assez grande pour que

(2.39)

$$\begin{cases} \sigma \geqslant \dfrac{\rho_j + \rho_{j-1}}{2} + 1 =: c_j \Rightarrow |A_j(\sigma + it)| \geqslant 1 \qquad (j = 2, \cdots, k\ ;\ t \in \mathbb{R}) \\ \sigma \geqslant \rho_1 + \dfrac{3}{2} \Rightarrow |A_1(\sigma + it)| \geqslant 1 \qquad (t \in \mathbb{R}). \end{cases}$$

Cela est de nouveau possible car A_j converge en ρ_j d'après (2.15), (2.38) et converge donc absolument en c_j si $j \geqslant 2$, en $\rho_1 + \frac{3}{2}$ si $j = 1$. (Noter que $c_j > \rho_j + 1$.) Montrons d'abord que, si $\mu_j = \mu(A_j, \cdot)$ on a

$$\text{(2.40)} \qquad \text{qs}, \quad \mu_j(\sigma) = (\rho_j + 1 - \sigma)^+ \qquad (\sigma \in \mathbb{R}).$$

En effet, il résulte aisément du lemme 2.4 que

$$\mu_j(\sigma) \leqslant (1 - (\sigma - \rho_j))^+ = (1 + \rho_j - \sigma)^+ \ \text{ pour tout } \omega \text{ de } \Omega^k.$$

D'autre part le lemme 2.2 (pour $\sigma = \rho_1$) donne

$$\overline{\lim_{\ell \to \infty}} \frac{| A_j(\rho_j + it_\ell) |}{\sum_{n \in E_\ell} \alpha_n \mid u_n(it_\ell) \mid} \geqslant \frac{1}{\pi} \quad \text{qs},$$

soit d'après (2.37)

$$\overline{\lim_{\ell \to \infty}} \frac{| A_j(\rho_j + it_\ell) |}{\delta_\epsilon t_\ell^{1-\epsilon} (\text{Log } t_\ell)^{-1}} \geqslant \frac{1}{\pi} \quad \text{qs},$$

en particulier $\mu_j(\rho_j) \geqslant 1 - \epsilon$ qs, puis $\mu_j(\rho_j) \geqslant 1$ qs, ce qui prouve (2.40) via la convexité de μ (noter que si μ et h sont respectivement des fonctions convexe et affine sur $[a, b]$ avec $\mu \leqslant h$ et $\mu(c) = h(c)$ pour un $c \in]a, b[$, alors $\mu = h$ sur $[a, b]$; cette remarque était déjà implicitement utilisée dans la preuve du théorème 2.5).

Montrons ensuite que pour toute partie non vide J de $\{1, \cdots, k\}$, $\prod_{j \in J} A_j$ a quasi-sûrement la fonction d'ordre donnée par (2.25); là encore, on peut se limiter à $J = \{1, \cdots, k\}$. Posons $\rho_{k+1} = -\infty$ et décomposons $\mathbb{R}$ en $k + 1$ intervalles consécutifs

$$I_k =]\rho_{k+1}, \rho_k + 1] \ ; I_r =]\rho_{r+1} + 1, \rho_r + 1] \quad (r = k - 1, \cdots, 1)$$
$$I_0 =]\rho_1 + 1, \infty[$$

si bien que

$$h(\sigma) = \sum_{j=1}^{r} (\rho_j + 1 - \sigma) \quad \text{si} \quad \sigma \in I_r \quad (r = k, \cdots, 1)$$
$$h(\sigma) = 0 \qquad \text{si} \quad \sigma \in I_0.$$

(Rappelons que $h(\sigma) = \sum_{j=1}^{r} (\rho_j + 1 - \sigma)^+$.) Nous allons montrer que

$$\text{(2.41)} \qquad \begin{cases} \text{qs}, \quad \mu(C, \sigma) = \sum_{j=1}^{r} (\rho_j + 1 - \sigma) = h(\sigma) = \sum_{j=1}^{k} \mu_j(\sigma) \\ \text{au milieu } \sigma = c_r \text{ de } I_r \quad (r = k-1, \cdots, 1) \ \text{ et en } \sigma = \rho_k. \end{cases}$$

D'après les remarques faites sur les fonctions convexes, cela achèvera la démonstration ; traitons par exemple le cas $\sigma = c_r$ $(1 \leqslant r \leqslant k-1)$;

$$r + 1 \leqslant j \leqslant k \Rightarrow \sigma \geqslant \frac{\rho_j + \rho_{j-1}}{2} + 1 \Rightarrow |A_j(\sigma + it)| \geqslant 1,$$

d'après (2.39). Donc

$$\text{(2.42)} \qquad |C(\sigma + it)| \geqslant |A_1(\sigma + it) \cdots A_r(\sigma + it)| .$$

D'autre part,

$$1 \leqslant j \leqslant r \Rightarrow \rho_j + 1 - \sigma > 0 \Rightarrow S_\ell^{(j)} \geqslant \delta_\epsilon t_\ell^{1 + \rho_j - \sigma - \epsilon} (\text{Log } t_\ell)^{-1},$$

où on pose

$$S_\ell^{(j)} = \sum_{n \in E_\ell} \left| u_n^{(j)}(\sigma + it_\ell) \right|$$

et où on utilise (2.36) ; d'où

$$\text{(2.43)} \qquad S_\ell^{(1)} \cdots S_\ell^{(r)} \geqslant \delta_\epsilon^r t_\ell^{h(\sigma) - r\epsilon} (\text{Log } t_\ell)^{-r}.$$

(2.3) du lemme 2.2, (2.42) et (2.43) donnent

$$\varlimsup_{\ell \to \infty} \frac{|\, C(\sigma + it_\ell) \,|}{\delta_r^\epsilon t_\ell^{h(\sigma) - r\epsilon} (\text{Log } t_\ell)^{-r}} \geqslant \varlimsup_{\ell \to \infty} \frac{|\, A_1(\sigma + it_\ell) \cdots A_r(\sigma + it_\ell) \,|}{\delta_r^\epsilon t_\ell^{h(\sigma) - r\epsilon} (\text{Log } t_\ell)^{-r}} \geqslant \frac{1}{\pi^r} \quad \text{qs.}$$

En particulier, $\mu(C, \sigma) \geqslant h(\sigma) - r\epsilon$ qs, puis $\mu(C, \sigma) \geqslant h(\sigma)$ qs, ce qui prouve (2.41). □

Remarque 2.10. — On a toujours appliqué le lemme 2.2 avec $E_\ell^{(1)} = \cdots = E_\ell^{(k)} = E_\ell$; mais il paraissait plus naturel de l'énoncer sous la forme du texte.

Remarque 2.11. — Il est a priori insuffisant pour arriver à (2.3) de travailler avec Ω car la plus grande limite d'un produit peut être strictement inférieure au produit des plus grandes limites et on a besoin de la précision intermédiaire (2.2) ; on doit donc travailler avec l'espace–produit Ω^k et il apparaît en filigrane un "théorème de Fubini quasi–sûr", intéressant en lui–même, et proposé en exercice dans [Bo], p. 113.

PROPOSITION 2.12. — *Soit E, F deux espaces topologiques ayant la propriété de Baire, F étant à base dénombrable d'ouverts; soit A un G_δ dense de $E \times F$ et, pour $x \in E$, $A(x) = \{y \in F \; ; \; (x,y) \in A\}$. Alors*

$$\text{(2.44)} \qquad \textit{pour quasi} - \textit{tout } x \textit{ de } E, \quad A(x) \textit{ est un } G_\delta \textit{ dense de } F.$$

Preuve. — $A = \bigcap_1^\infty G_n$, où G_n est un ouvert dense de $E \times F$; soit γ un ouvert non vide de la base dénombrable de F et soit

$$\text{(2.45)} \qquad E_{\gamma,n} = \{x \in E \; ; \; G_n(x) \cap \gamma \neq \varnothing\}.$$

$x_0 \in E_{\gamma,n} \Rightarrow \exists y \in \gamma$ tel que $(x_0, y) \in G_n$; pour x voisin de x_0, $(x,y) \in G_n$ donc $x \in E_{\gamma,n}$ et $E_{\gamma,n}$ est ouvert; soit δ un ouvert non vide de E ; G_n coupe $\delta \times \gamma$ en au moins un point (x,y) ; $y \in G_n(x) \cap \gamma$, donc $x \in E_{\gamma,n} \cap \delta$ et $E_{\gamma,n}$ est dense. Soit

$$B = \bigcap_{\gamma,n} E_{\gamma,n}.$$

E étant de Baire, B est une partie quasi–sûre de E; si $x \in B$, la définition (2.45) montre que, pour n fixé, $G_n(x)$ est un ouvert dense de F (les γ formant une base d'ouverts de F) ; puisque F est aussi de Baire, $\bigcap_1^\infty G_n(x) = A(x)$ est un G_δ dense de F. □

3. Produit de séries de Dirichlet convergentes en un point et absolument convergentes en un autre ; résultats optimaux.

THÉORÈME 3.1. — *Soit k séries de Dirichlet $A_1, \cdots, A_k$ et k couples $(\rho_1, \tau_1), \cdots, (\rho_k, \tau_k)$ comme dans (2.17); on suppose que A_j converge en ρ_j et converge absolument en $\rho_j + \tau_j$ $(1 \leqslant j \leqslant k)$; soit σ l'unique solution de $h(\sigma) = 1$, où h est comme dans (II.18) (rappelons que $\sigma \geqslant \rho_1$). Alors*

(3.1) *Si $\sigma = \rho_1$, la série $C = A_1 \cdots A_k$ converge en σ.*

(3.2) *Si $\sigma > \rho_1$, la série C converge uniformément sur tout compact de $\mathcal{R}s = \sigma$.*

(3.3) *Si $\tau < \sigma$, il existe $A_1, \cdots, A_k$ telles que C diverge au point τ.*

Commentaire. — Si l'on se borne à considérer la convergence sur la droite réelle, (3.1) et (3.2) expriment que la série C converge en σ, et (3.3) que c'est la valeur optimale. S'agissant de la convergence dans le plan des s, la conclusion de (3.2) n'est pas valable dans l'hypothèse de (3.1), puisque A_1 peut converger en σ et diverger aux autres points $\sigma+it$. Tous les énoncés sont donc optimaux.

Preuve. — (3.1) correspond au cas où $\rho_j+\tau_j \leqslant \rho_1$ pour $2 \leqslant j \leqslant k$; en effet : $\sigma = \rho_1 \Rightarrow 1 = \tau_1^{-1}(\tau_1) + \sum_{j=2}^{k} \tau_j^{-1}(\rho_j+\tau_j-\sigma)^+ \Rightarrow (\rho_j+\tau_j-\sigma)^+ = 0$ si $j \geqslant 2$; et $\rho_j+\tau_j \leqslant \rho_1$ pour $j \geqslant 2$ entraîne $h(\rho_1) = 1$, d'où $\sigma = \rho_1$.

Dans ce cas, les séries $A_2, \cdots, A_k$ sont absolument convergentes en ρ_1 ainsi que leur produit, et $C = A_1(A_2 \cdots A_k)$ converge en ρ_1.

(3.3) est contenu dans le corollaire 2.7.

Pour (3.2), soit J l'ensemble des j tels que $\rho_j+\tau_j-\sigma > 0$; on va montrer que $\prod_{j\in J} A_j$ converge uniformément sur tout compact de $\mathcal{R}s = \sigma$; notons que

$$(3.4)\qquad \sum_{j\in J} \tau_j^{-1}(\rho_j+\tau_j-\sigma) = 1 \;; \qquad j \notin J \Rightarrow \rho_j+\tau_j-\sigma \leqslant 0.$$

Donc $\prod_{j\notin J} A_j$ est absolument convergente en σ ; et $C = \prod_{j\in J} A_j \prod_{j\notin J} A_j$ sera uniformément convergente sur tout compact de $\mathcal{R}s = \sigma$; tout revient donc à traiter le cas où $J = \{1, \cdots, k\}$. Notons d'abord que (3.2) entraîne

$$(3.5)\qquad |\, J \,| \geqslant 2.$$

En effet, $J = \{p\}$ entraînerait

$$1 = \tau_p^{-1}(\rho_p+\tau_p-\sigma), \quad \text{soit } \sigma = \rho_p \leqslant \rho_1.$$

On utilise alors les deux lemmes suivants.

LEMME 3.1. — *Soit $\sum_1^{\infty} u(n)$ une série convergente; on pose $R(y) = \sup_{Y\geqslant y} \left| \sum_{n>Y} u(n) \right|$; $s = \sigma+it$ avec $\sigma > 0$ et $|\, t \,| \leqslant T$. Alors*

$$(3.6)\qquad \left| \sum_{y<n\leqslant x} u(n) n^{-s} \right| \leqslant \left(2 + \frac{T}{\sigma}\right) y^{-\sigma} R(y) \quad \text{pour} \quad 0 < y \leqslant x.$$

Preuve. — Facile et bien connue.

Les hypothèses faites dans le lemme 3.2 peuvent paraître alambiquées, mais seront naturellement vérifiées quand il le faudra.

LEMME 3.2. — *Soit* $\sum_{n=1}^{\infty} u_j(n)n^{-s}$ *k séries de Dirichlet,* $\tau_1, \cdots, \tau_k$, *k réels de* $]0,1]$ *et* $\sigma_1, \cdots, \sigma_k$, *k réels* > 0 *vérifiant les trois hypothèses suivantes (où* $\alpha_j = \tau_j^{-1}$*) :*

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} u_j(n)$ *converge* $(j = 1, \cdots, k)$;

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} |u_j(n)|\, n^{-\tau_j}$ *converge* $(j = 1, \cdots, k)$;

(iii) *pour toute partie non vide* I *de* $\{1, \cdots, k\}$ *et pour tout* $j \notin I$ *on a (posant* $|\, I\,|$=cardinal de I) :

$$\left(\sum_I \alpha_i\right)^{-1} \left(|\, I\,| -1 - \sum_I \alpha_i\sigma_i\right) + \sigma_j < \tau_j.$$

Alors l'estimation suivante est vraie uniformément pour $0 \leqslant z < x$, $y \geqslant 1$, $|\, t\,| \leqslant T$:

$$\left|\sum u_1(n_1)\cdots u_k(n_k) n_1^{-\sigma_1 - it} \cdots n_k^{-\sigma_k - it}\right| = O\left(R(y^\alpha)\right) y^\mu, \tag{3.7}$$

la somme étant étendue à tous les n_j *compris entre* z *et* x *dont le produit dépasse* y :

$$(z < n_1, \cdots, n_k \leqslant x, \quad n_1 \cdots n_k > y)$$

et μ, R *et* α *étant ainsi définis :* $\mu = (\alpha_1 + \cdots + \alpha_k)^{-1}(k - 1 - \alpha_1\sigma_1 - \cdots\cdots \alpha_k\sigma_k)$; R_j *est comme dans le lemme 3.1 (pour* u_j*) ;* $R = \max(R_1, \cdots, R_k)$ *et*

$$\alpha = \min\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_k}, \cdots, \frac{\alpha_k}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_k}\right).$$

Preuve. — (3.7) se prouve par récurrence sur k; $k = 1$ découle de (3.6); supposons le résultat acquis pour $1, \cdots, k-1$ et montrons-le pour k; posons pour cela, E désignant une partie de $\{1, \cdots, k\}$:

$$I(E) = \{(n_1, \cdots, n_k) \in N^{*k} / n_1 \cdots n_k > y\,;\, j \in E \Rightarrow z < n_j \leqslant y_j\,; \\ j \notin E \Rightarrow y_j < n_j \leqslant x\}$$

où $y_1, \cdots, y_k$ sont déterminés par

$$y = y_1 \cdots y_k \ ; \ y_1^{\tau_1} = \cdots = y_k^{\tau_k} =: u. \tag{3.8}$$

Les $I(E)$ sont deux à deux disjoints et la somme $W(x,y,z,t)$ (qu'on notera en abrégé $W(x,y,z)$) à estimer s'écrit

$$W(x,y,z) = \sum_E{}' W_E(x,y,z)$$

où

$$W_E(x,y,z) = \sum_{(n_1,\cdots,n_k)\in I(E)} \cdots \tag{3.9}$$

et où l'apostrophe indique que la sommation est restreinte aux parties propres de $\{1,\cdots,k\}$; en effet on ne peut avoir $n_j \leqslant y_j$ pour tout j, sinon $n_1 \cdots n_k \leqslant y_1 \cdots y_k = y$; on va montrer que chaque $W_E(x,y,z)$ est uniformément dominé par le second membre de (3.7) ; on distingue deux cas.

$$\boxed{\text{Cas 1 } : E = \varnothing \text{ et } W_E(x,y,z) \neq 0}$$

$$W_\varnothing(x,y,z) = \sum u_1(n_1)\cdots u_k(n_k) n_1^{-\sigma_1 - it} \cdots n_k^{-\sigma_k - it}$$

la somme étant étendue à tous les n_j compris entre $\max(z, y_j)$ et x :

$$\max(z,y_j) < n_j \leqslant x \qquad (j = 1,\cdots,k),$$

soit

$$W_\varnothing(x,y,z) = \prod_{j=1}^k \left(\sum_{\max(z,y_j)<n_j\leqslant x} u_j(n_j) n_j^{-\sigma_j - it} \right)$$

$$= O\left(\prod_{j=1}^k R(y_j) y_j^{-\sigma_j} \right) \qquad (\text{d'après } 3.6)$$

$$= O\left((R(y^\alpha))^k \prod_{j=1}^k y_j^{-\sigma_j} \right) = O\left(R(y^\alpha)(R(1))^{k-1} \prod_{j=1}^k y_j^{-\sigma_j} \right)$$

$$= O\left(R(y^\alpha)\right) y^{(\alpha_1+\cdots+\alpha_k)^{-1}(k-1-\sum_{j=1}^k \alpha_j\sigma_j)}$$

car (3.8) entraîne

$$u = y^{\frac{1}{\alpha_1+\cdots+\alpha_k}} \quad \text{et} \quad y_j = y^{\frac{\alpha_j}{\alpha_1+\cdots+\alpha_k}}. \tag{3.10}$$

$\boxed{\text{Cas 2 : } E \neq \varnothing \text{ et } W_E(x,y,z) \neq 0}$

Quitte à renuméroter, on peut supposer $E = \{1, \cdots, r\}$, où $1 \leqslant r < k$. Alors $W_E(x,y,z)$ s'écrit comme somme de produits de deux facteurs W' et W'' :

$$W_E(x,y,z) = \sum W'W''$$

la somme étant étendue aux n_j compris entre z et y_j ($z < n_j \leqslant y_j$; $j = 1, \cdots, r$), où

$$W' = u_1(n_1) \cdots u_r(n_r) n_1^{-\sigma_1 - it} \cdots n_r^{-\sigma_r - it}$$

et où, pour $n_1, \cdots, n_r$ fixés :

$$W'' = \sum u_{r+1}(n_{r+1}) \cdots u_k(n_k) n_{r+1}^{-\sigma_{r+1} - it} \cdots n_k^{-\sigma_k - it}$$

la somme étant étendue aux n_j vérifiant

$$\max(z, y_j) < n_j \leqslant x \qquad (j = r+1, \cdots, k),$$

$$n_{r+1} \cdots n_k > \frac{y}{n_1 \cdots n_r}.$$

D'après l'hypothèse de récurrence, $|W''|$ est uniformément dominé par

$$\left(\frac{y}{n_1 \cdots n_r}\right)^{\lambda} R\left(\left(\frac{y}{n_1 \cdots n_r}\right)^{\beta}\right),$$

où

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{\alpha_{r+1} + \cdots + \alpha_k}\left(k - r - 1 - \sum_{r+1}^{k} \alpha_j \sigma_j\right) ; \\ \beta &= \min\left(\frac{\alpha_{r+1}}{\alpha_{r+1} + \cdots + \alpha_k}, \cdots, \frac{\alpha_k}{\alpha_{r+1} + \cdots + \alpha_k}\right). \end{aligned} \tag{3.11}$$

Or

$$\frac{y}{n_1 \cdots n_r} = \frac{y_1 \cdots y_r}{n_1 \cdots n_r} y_{r+1} \cdots y_q > y_{r+1} \cdots y_q = y^{\frac{\alpha_{r+1}+\cdots+\alpha_k}{\alpha_1+\cdots+\alpha_k}},$$

donc

$$\left(\frac{y}{n_1\cdots n_r}\right)^{\beta} > \min\left(y^{\frac{\alpha_{r+1}}{\alpha_1+\cdots+\alpha_k}}, y^{\frac{\alpha_k}{\alpha_1+\cdots+\alpha_k}}\right) \geqslant y^{\alpha} ;$$

$$| W_E(x,y,z) |= O(R(y^{\alpha})) \sum_{\substack{z<n_1\leqslant y_1\\ \vdots \\ z<n_r\leqslant y_r}} \frac{| u_1(n_1) |}{n_1^{\sigma_1}} \cdots \frac{| u_r(n_r) |}{n_r^{\sigma_r}} \left(\frac{y}{n_1\cdots n_r}\right)^{\lambda}$$

$$= O\left(R(y^{\alpha})\right) y^{\lambda} \prod_{j=1}^{r} \left(\sum_{z<n_j\leqslant y_j} \frac{| u_j(n_j) |}{n_j^{\sigma_j+\lambda}} \right).$$

Or iii) avec $I = \{r+1,\cdots,k\}$ montre que $\sigma_j + \lambda < \tau_j$ pour $1 \leqslant j \leqslant r$ et cela entraîne :

$$\sum_{z<n_j\leqslant y_j} \frac{| u_j(n_j) |}{n_j^{\sigma_j+\lambda}} = \sum_{z<n_j\leqslant y_j} \frac{| u_j(n_j) |}{n_j^{\tau_j}} n_j^{\tau_j-\sigma_j-\lambda}$$

$$\leqslant y_j^{\tau_j-\sigma_j-\lambda} \sum_{n_j\geqslant 1} \frac{| u_j(n_j) |}{n_j^{\tau_j}},$$

d'où

$$W_E(x,y,z) = O\left(R(y^{\alpha})\right) y^{\lambda} \prod_{j=1}^{r} y_j^{\tau_j-\sigma_j-\lambda} = O\left(R(y^{\alpha})\right) y^{\mu}$$

avec (d'après (3.8))

$$\mu = \lambda + \sum_{j=1}^{r} \frac{\alpha_j(\tau_j - \sigma_j - \lambda)}{\alpha_1+\cdots+\alpha_k}.$$

La majoration dans le cas 2, et donc la preuve du lemme 3.2, seront achevées si on montre que

$$\mu = \frac{1}{\alpha_1+\cdots+\alpha_k} \left(k - 1 - \sum_{j=1}^{k} \alpha_j\sigma_j \right).$$

Or

$$\mu = \frac{1}{\alpha_1+\cdots+\alpha_k} \left[(\alpha_1+\cdots+\alpha_k)\lambda + \sum_{j=1}^{r} \alpha_j(\tau_j - \sigma_j - \lambda) \right]$$

$$=: \frac{1}{\alpha_1+\cdots+\alpha_k} \nu$$

et (3.11) entraîne

$$\nu = (\alpha_{r+1} + \cdots + \alpha_k)\,\lambda + \sum_{j=1}^{r}(1 - \alpha_j\sigma_j)$$

$$= k - r - 1 - \sum_{r+1}^{k} \alpha_j\sigma_j + r - \sum_{j=1}^{r} \alpha_j\sigma_j = k - 1 - \sum_{j=1}^{k} \alpha_j\sigma_j,$$

ce qui prouve l'égalité désirée. □

Fin de la preuve du theorème 3.1. — Appliquons le lemme 3.2 avec (si $A_j(s) = \sum_1^\infty \frac{a_j(n)}{n^s}$) $u_j(n) = \frac{a_j(n)}{n^{\rho_j}}$ et $\sigma_j = \sigma - \rho_j$, où $\sum_{j=1}^{k} \tau_j^{-1}(\rho_j + \rho_j - \sigma) = 1$.

Les hypothèses du lemme sont bien vérifiées car d'une part $\sigma > \rho_1 = \sup \rho_j$ d'après (3.5) et d'autre part l'hypothèse iii) s'écrit

$$\left(\sum_I \alpha_i\right)^{-1} \left(\mid I \mid -1 + \sum_I \alpha_i(\rho_i - \sigma)\right) + \sigma - \rho_j < \tau_j,$$

soit

$$\left(\sum_I \alpha_i\right)^{-1} \left(\mid I \mid -1 + \sum_I \alpha_i(\rho_i - \sigma)\right) < \rho_j + \tau_j - \sigma. \tag{3.12}$$

Or le premier membre de (3.12) est $\leqslant 0$, car

$$\mid I \mid -1 + \sum_I \alpha_i(\rho_i - \sigma) = \sum_I \alpha_i(\rho_i + \tau_i - \sigma) - 1 \leqslant \sum_{j=1}^{k} \alpha_i(\rho_i + \tau_i - \sigma) - 1 = 0\,;$$

et le second membre de (3.12) est > 0 d'après (3.4) et l'hypothèse $p = k$. (3.12) est donc vrai, et (3.7) appliqué avec $z = 0$ et $y = x$ donne la majoration (uniforme pour $\mid t \mid \leqslant T$)

$$\left| \sum_{\substack{n_1,\cdots,n_k \leqslant x \\ n_1\cdots n_k > x}} \frac{a_1(n_1)\cdots a_k(n_k)}{(n_1\cdots n_k)^{\sigma+it}} \right| = O\left(R(x^\alpha)\right). \tag{3.13}$$

En effet, le premier membre de (3.13) vaut

$$\sum_{\substack{n_1,\cdots,n_k \leqslant x \\ n_1\cdots n_k > x}} \frac{u_1(n_1)\cdots u_k(n_k)}{n_1^{\sigma_1+it}\cdots n_k^{\sigma_k+it}} = O\left(R(x^\alpha)\right) x^\mu = O\left(R(x^\alpha)\right)$$

puisqu'ici

$$\mu = (\alpha_1 + \cdots + \alpha_k)^{-1} \left(k - 1 - \sum_1^k \alpha_j(\sigma - \rho_j) \right) = 0$$

d'après (3.4). Si maintenant $C(s) = (A_1 \cdots A_k)(s) = \sum_1^\infty c(n) n^{-s}$, on a pour $x \geqslant 1$ et $| t | \leqslant T$

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{c(n)}{n^{\sigma+it}} = \sum_{n_1 \cdots n_k \leqslant x} \frac{a_1(n_1) \cdots a_k(n_k)}{(n_1 \cdots n_k)^{\sigma+it}} = \sum_1 (x) - \sum_2 (x)$$

avec

$$\sum_1 (x) = \sum_{n_1, \cdots, n_k \leqslant x} \frac{a_1(n_1) \cdots a_k(n_k)}{n_1^{\sigma+it} \cdots n_k^{\sigma+it}} = \prod_{j=1}^k \left(\sum_{n_j \leqslant x} \frac{a_j(n_j)}{n_j^{\sigma+it}} \right)$$

$$= A_1(\sigma + it) \cdots A_k(\sigma + it) + O(R(x))$$

$$\sum_2 (x) = \sum_{\substack{n_1, \cdots, n_k \leqslant x \\ n_1 \cdots n_k > x}} \frac{a_1(n_1) \cdots a_k(n_k)}{(n_1 \cdots n_k)^{\sigma+it}} = O\left(R(x^\alpha)\right) \quad \text{d'après (3.13).}$$

D'où

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{c(n)}{n^{\sigma+it}} = A_1(\sigma + it) \cdots A_k(\sigma + it) + O\left(R(x^\alpha)\right),$$

uniformément pour $| t | \leqslant T$, ce qui achève la preuve. □

4. Produit de séries de Dirichlet convergentes en un point ; résultats optimaux et problème ouvert.

THÉORÈME 4.1. — *Soit $A_1, \cdots, A_k$, k séries de Dirichlet convergeant respectivement en $\rho_1, \cdots, \rho_k$ ($\rho_1 \geqslant \cdots \geqslant \rho_k$ et $k \geqslant 2$). Soit σ l'unique solution de $\sum_{j=1}^k (\rho_j + 1 - \sigma)^+ = h(\sigma) = 1$ et $C = A_1 \cdots A_k$. Alors on a les résultats suivants :*

(4.1) *C converge en tout point $\sigma' > \sigma$.*

(4.2) *Si de plus $\sigma > \rho_1$ et si $\sigma \neq \rho_j + 1$ pour $2 \leqslant j \leqslant k$, C converge en σ.*

(4.3) *Sous les hypothèses de (4.2), on a même convergence uniforme de C sur tout compact de $\mathcal{R}s = \sigma$.*

(4.4) *Si $\tau < \sigma$, il existe $A_1, \cdots, A_k$ convergeant en $\rho_1, \cdots, \rho_k$ et d'abscisse de Bohr $-\infty$, telles que C diverge en τ.*

Commentaire. — Notons d'abord que $\rho_1 \leqslant \sigma < \rho_1 + 1$ puisque $h(\rho_1) \geqslant 1$ et $h(\rho_1 + 1) = 0$. Si l'on se borne à considérer la convergence sur la droite réelle, (4.1) exprime que C converge sur $]\sigma, \infty[$, et (4.4) que cet intervalle ouvert est optimal en général, même pour des séries d'abscisse de Bohr $-\infty$; s'agissant de la convergence en σ, (4.2) exprime qu'elle a lieu "génériquement" ; on verra qu'elle n'a pas toujours lieu (cf. remarque 4.3) et les cas d'exception ne sont pas tous élucidés (cf. problème ouvert); quant à la convergence uniforme dans le plan des s, (4.1) et (4.3) entraînent qu'elle a lieu toujours sur un compact du demi-plan ouvert $\mathcal{R}s > \sigma$ et "génériquement" sur un compact du demi-plan fermé $\mathcal{R}s \geqslant \sigma$.

Preuve. — Désignons une fois pour toutes par q l'unique entier de $[1, k]$ tel que : $\rho_j + 1 - \sigma > 0$ si $1 \leqslant j \leqslant q$; $\rho_j + 1 - \sigma \leqslant 0$ si $q + 1 \leqslant j \leqslant k$. Et montrons d'abord (4.3) (a fortiori (4.2)) en distinguant deux cas.

$\boxed{\text{Cas 1 } : q = k \geqslant 2}$

Au lieu de procéder comme dans le théorème 3.1, on va donner ici une preuve où le jeu des exposants est sans doute plus clair; on se ramène par translation au cas où $\sigma = 0$ et on a le

LEMME 4.2. — *Si $p < k - 1$ et $y \geqslant 1$, alors*

$$\sum_{y < n_1 < \cdots < n_p} n_1^{\rho_1} n_2^{\rho_2} \cdots n_{p-1}^{\rho_{p-1}} n_p^{\rho_p + \rho_{p+1}} = O\left(y^{\rho_1 + \cdots + \rho_{p+1} + p}\right). \tag{4.5}$$

La preuve est immédiate par récurrence sur p, en notant que $\sum_{j=1}^{q} (\rho_j + 1) < 1$ pour $q < k$ et en utilisant le fait que

$$\sum_{n > z} n^{-\alpha} = O(z^{1-\alpha}) \quad \text{pour} \quad \alpha > 1.$$

Cela étant, tout revient à démontrer, comme dans la preuve du théorème 3.1, que si $| t | \leqslant T$:

$$W(x, t) = W(x) := \sum_{\substack{n_1 \leqslant x, \cdots, n_k \leqslant x \\ n_1 \cdots n_k > x}} \frac{a_1(n_1) \cdots a_k(n_k)}{(n_1 \cdots n_k)^{it}}$$

converge uniformément vers zéro ; dans la suite, les o ou O seront uniformes par rapport à t $(-T \leqslant t \leqslant T)$; avec les notations (3.8), (3.9) où on prend $z = 0$, $y = y_1 = \cdots = y_k = x^{1/k}$, on a $W(x) = \sum_E' W_E(x)$; typiquement, on peut supposer $E = \{r+1, \cdots, k\}$, avec $r \leqslant k-1$, le cas $E = \varnothing$ étant trivial à traiter ; ainsi

$$W_E(x) = \sum_{n_{r+1},\cdots,n_k} \left(\frac{a_{r+1}(n_{r+1}) \cdots a_k(n_k)}{(n_{r+1} \cdots n_k)^{it}} \sum \frac{a_1(n_1) \cdots a_r(n_r)}{(n_1 \cdots n_r)^{it}} \right)$$

où la somme intérieure est étendue aux $n_1, \cdots, n_r$ vérifiant

$$n_1 > y, \cdots, n_r > y, \qquad n_1 \cdots n_r > \frac{x}{n_{r+1} \cdots n_k}.$$

Dans la somme intérieure, on a $r!$ sous–sommes correspondant à des ordres différents des $n_1, \cdots, n_r$ (un ordre étant noté $< \cdots <$ avec la convention que des égalités sont permises en certaines places) ; pour un ordre typique, disons $n_1 < \cdots < n_r$, la sous–somme de la somme intérieure vaut

$$S = \sum_{y < n_1 < \cdots < n_{r-1}} \left(\frac{a_1(n_1) \cdots a_{r-1}(n_{r-1})}{(n_1 \cdots n_{r-1})^{it}} \sum \frac{a_r(n_r)}{n_r^{it}} \right)$$

où la nouvelle somme intérieure est étendue aux n_r vérifiant

$$n_r > n_{r-1}, \qquad n_1 \cdots n_r > \frac{x}{n_{r+1} \cdots n_k}.$$

La nouvelle somme intérieure est $o\left(n_{r-1}^{\rho_r}\right)$ puisque $\rho_r + 1 < 1$ et donc $\rho_r < 0$; d'où

$$S = o\left(\sum_{y < n_1 < \cdots < n_{r-1}} n_1^{\rho_1} \cdots n_{r-1}^{\rho_{r-1}} n_{r-1}^{\rho_r} \right)$$

puisque de plus $a_j(n_j) = O\left(n_j^{\rho_j}\right)$, la série A_j convergeant en ρ_j ; le lemme (4.2) avec $p = r-1 \leqslant k-2$ donne donc $S = o\left(y^{\rho_1 + \cdots + \rho_r + r - 1}\right)$ et on voit finalement que

$$\begin{aligned} W_E(x) &= o\left(y^{\rho_1 + \cdots + \rho_r + r - 1} \sum_{n_{r+1},\cdots,n_k \leqslant y} \mid a_{r+1}(n_{r+1}) \mid \cdots \mid a_k(n_k) \mid \right) \\ &= o\left(y^{\rho_1 + \cdots + \rho_r + r - 1} \sum_{n_{r+1},\cdots,n_k \leqslant y} n_{r+1}^{\rho_{r+1}} \cdots n_k^{\rho_k} \right) \\ &= o\left(y^{\rho_1 + \cdots + \rho_r + r - 1} y^{\rho_{r+1}+1} \cdots y^{\rho_k + 1} \right) \end{aligned}$$

puisque $-1 < \rho_j < 0$ pour tout j ; autrement dit

$$W_E(x) = o\left(y^{\rho_1+\cdots+\rho_k+r-1+k-r}\right) = o\left(y^{\rho_1+\cdots+\rho_k+k-1}\right) = o(y^0) = o(1).$$

Sommant sur les différentes parties propres E de $\{1,\cdots,k\}$, on a bien le résultat annoncé (4.3) sous l'hypothèse $\rho_j + 1 > 0$ pour tout j.

$\boxed{\text{Cas 2 } : q < k}$

Alors $q \geqslant 2$, sinon σ vaudrait ρ_1, ce qui est exclu par l'hypothèse; donc d'après le cas 1 (noter que $\sum_{j=1}^{q}(\rho_j + 1 - \sigma)^+ = 1$), la série $A_1 \cdots A_q$ converge uniformément sur tout compact de $\mathcal{R}s = \sigma$; de plus $\rho_j + 1 - \sigma < 0$ pour $q+1 \leqslant j \leqslant k$, donc la série $A_{q+1} \cdots A_k$ converge absolument en σ et $C = (A_1 \cdots A_q)(A_{q+1} \cdots A_k)$ converge uniformément sur tout compact de $\mathcal{R}s = \sigma$.

L'étude de ces deux cas achève la preuve de (4.3) et de (4.2) ; montrons maintenant (4.1) : si $q = 1$, $\sigma = \rho_1$ et $\sigma \geqslant \rho_j + 1$ pour $j \neq 1$, donc $A_2, \cdots, A_k$ sont absolument convergentes en $\sigma' > \max_{j \neq 1}(\rho_j + 1)$ et $C = A_1(A_2 \cdots A_k)$ converge en σ' ; si $q \geqslant 2$, $A_{q+1} \cdots A_k$ converge absolument en σ' et il résulte de (4.3) que $A_1 \cdots A_q$ converge en σ, a fortiori en σ' ; donc $C = (A_1 \cdots A_q)(A_{q+1} \cdots A_k)$ converge en σ'.

(4.4) est contenu dans le corollaire 2.8; il montre le caractère optimal des assertions précédentes du théorème 4.1. □

Remarque 4.3. — En général, on ne peut pas conclure à la convergence de C au point σ, comme le montre l'exemple suivant, qui correspond à la situation où on a à la fois $\sigma = \rho_1$ et $\sigma = \rho_j + 1$ pour un $j \neq 1$

$$A_2(s) = \cdots = A_k(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha_n}{n^{s+1}},$$

où (α_n) décroît vers zéro et sera ajustée plus loin;

$$A_1(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha_n}{n^s}.$$

On a clairement $\rho_2 = \cdots = \rho_k = -1$, $\rho_1 = 0$, $\sigma = \frac{1}{k}(\rho_2 + \cdots + \rho_k + k - 1) = 0 = \rho_1 = \rho_k + 1$; mais la série produit C diverge en 0; en effet, la quantité $\sum_{d|n} \frac{1}{d}$ n'est pas bornée quand n varie (prendre n de la forme $p_1 \cdots p_N$, où

(p_i) est la suite des nombres premiers impairs) ; soit donc $(N_r)_{r\geqslant 1}$ une suite croissante d'entiers telle que

$$\sum_{d\mid N_r} \frac{1}{d} \geqslant r \ ; \ N_r \text{ impair.} \tag{4.6}$$

Faisons décroître (α_n) assez lentement pour que

$$r\alpha_{N_r}^k \geqslant 1. \tag{4.7}$$

Nous allons voir que le terme général $c(n)$ de C au point zéro ne tend pas vers zéro ; en effet

$$c(n) = \sum_{n_1\cdots n_k=n} \frac{(-1)^{n_1}\alpha_{n_1}\cdots(-1)^{n_k}\alpha_{n_k}}{n_2\cdots n_k} \ ;$$

si n est impair, tous les n_j sont impairs, donc

$$\mid c(n) \mid = \sum_{n_1\cdots n_k=n} \frac{\alpha_{n_1}\cdots\alpha_{n_k}}{n_2\cdots n_k} \geqslant \alpha_n^k \sum_{n_1\cdots n_k=n} \frac{1}{n_2\cdots n_k} \geqslant \alpha_n^k \sum_{n_1\mid n} \frac{n_1}{n}$$

$$= \alpha_n^k \sum_{d\mid n} \frac{1}{d} \ ;$$

donc

$$\mid c(N_r) \mid \geqslant r\ \alpha_{N_r}^k \geqslant 1$$

d'après (4.7), ce qui prouve le résultat.

Remarque 4.4. — Un cas particulier de (4.4) ($k = 2$, $\rho_1 = \rho_2 = 0$) est qu'on peut trouver deux séries de Dirichlet A_1 et A_2 convergentes en 0 telles que $C = A_1A_2$ diverge en $\tau < \frac{1}{2}$; ce résultat était connu de Bohr, qui utilisait la fonction d'ordre comme nous le faisons ici ; mais on peut éviter d'y avoir recours à l'aide du

LEMME 4.5. — *Il existe deux séries de Dirichlet* $A(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ *et* $B(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{-s}$, *bornées en 0 (i.e.* $a_1 + \cdots + a_n = O(1)$ *et* $b_1 + \cdots + b_n = O(1)$), *mais telles que si*

$$C(s) = A(s)B(s) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n^{-s},$$

on ait

$$c_1 + \cdots + c_n = \Omega(\sqrt{n}).$$

Ce lemme donne l'exemple voulu; soit en effet $\tau < \frac{1}{2}$ et $\epsilon > 0$ tel que $\tau + \epsilon < \frac{1}{2}$; les séries

$$A_1(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n n^{-\epsilon}}{n^s} \quad \text{et} \quad A_2(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n n^{-\epsilon}}{n^s}$$

convergent en 0 mais la série produit

$$(A_1 A_2)(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n n^{-\epsilon}}{n^s}$$

ne peut converger en τ, sinon le lemme de Stieltjes–Kronecker impliquerait $c_1 + \cdots + c_n = o\,(n^{\tau+\epsilon})$, ce qui est incompatible avec $c_1 + \cdots + c_n = \Omega(\sqrt{n})$.

Il est clair (en multipliant par un facteur $(\operatorname{Log} n)^{-2}$ comme on l'a déjà fait) que dans l'énoncé on pourrait remplacer "borné en 0" par "convergent en 0", ce qui donnerait l'existence de A_1, A_2 convergentes en 0 telles que $A_1 A_2$ diverge pour tout $\tau < \frac{1}{2}$.

Preuve du lemme. — Soit (N_ℓ) une suite d'entiers tels que $N_0 \geqslant 1$ et $N_\ell > 100 N_{\ell-1}^2$ ($\ell = 1, 2, \cdots$). Lorsque l'entier pair $2j$ appartient à l'intervalle $(N_{\ell-1}, \sqrt{N_\ell})$ écrivons $j \in J_\ell$ et posons $k_j = \left[\frac{N_\ell}{2j}\right]$. Observons que k_j appartient à l'intervalle $K_\ell = \left(\sqrt{N_\ell} - 1, N_\ell / N_{\ell-1}\right)$ et que $k_j \leqslant k_{j-1} - 2$. Posons alors

$$a_{2j} = -a_{2j+1} = 1, \qquad b_{k_j} = -b_{k_j+1} = 1.$$

Cela définit les a_m et les b_n lorsque m est de la forme $2j$ ou $2j+1$ et n de la forme k_j ou $k_j + 1$ pour un certain ℓ et un certain $j \in J_\ell$, et la définition a un sens parce que les J_ℓ sont disjoints, ainsi que les K_ℓ, et que les nombres $2j$, $2j+1$ d'une part, k_j, $k_j + 1$ d'autre part, sont tous différents (on utilise ici $k_j \leqslant k_{j-1} - 2$). Pour toutes les autres valeurs de m et de n posons $a_m = 0$, $b_n = 0$. Choisissons N ; on a

$$c_1 + \cdots + c_N = \sum_{mn \leqslant N} a_m b_n.$$

Les termes non nuls dans la somme correspondent à $m = 2j$ ou $2j+1$ ($j \in J_\ell$) et $n = k_{j'}$, ou $k_{j'+1}$ ($j' \in J_{\ell'}$). Lorsque j et j' sont fixés il y a en général quatre termes de cette forme vérifiant $mn \leqslant N$, ou au contraire $mn > N$ (dans ce dernier cas, ils ne figurent pas dans la somme). Cependant, si $N = N_\ell$, il y a exception quand $j \in J_\ell$ et $j' = j$; il y a alors un seul terme de la forme indiquée vérifiant $mn \leqslant N$; il correspond à $m = 2j$ et $n = k_j$, et alors $a_m b_n = 1$. Donc, pour $N = N_\ell$,

$$c_1 + \cdots + c_N = \mid J_\ell \mid$$

et on vérifie que $\mid J_\ell \mid > \dfrac{1}{3}\sqrt{N_\ell}$. On a ainsi défini les a_m et les b_n de façon que les sommes partielles des séries $\sum a_m$ et $\sum b_n$ valent 0 ou 1, avec $c_1 + \cdots + c_N > \dfrac{1}{3}\sqrt{N}$ quand $N = N_\ell$. □

Remarque 4.6. — Montrons maintenant comment on peut se passer complètement de la fonction d'ordre, donc aussi du corollaire 2.8, pour montrer l'optimalité de la valeur de σ donnée dans le théorème 4.1. Pour cela, nous n'établirons pas (4.4), mais la variante que voici.

PROPOSITION 4.7. — *Il existe des séries de Dirichlet $A_1, \cdots, A_k$, convergeant en $\rho_1, \cdot\cdot, \rho_k$, telles que le produit C diverge en tout point $\tau < \sigma$, unique solution de $\sum_{j=1}^{k} (\rho_j + 1 - \sigma)^+ = 1$.*

Preuve. — Supposons toujours $\rho_1 \geqslant \cdots \geqslant \rho_k$. Si $\sigma - \rho_k \geqslant 1$ on choisit $A_k = 1$ et on se trouve ramené à un produit de $k-1$ facteurs. On peut donc supposer $\sigma - \rho_k < 1$, donc $k\sigma = \rho_1 + \cdots + \rho_k + k - 1$. Démontrons une généralisation du lemme 4.5, à savoir

(4.8) *il existe des séries de Dirichlet $B_1, \cdots, B_k$, bornées en $\rho_1, \cdots, \rho_k$ telles que pour la série produit*

$$D(s) = \prod_{j=1}^{k} B_j(s) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n n^{-s}$$

on ait pour tout $\tau < \sigma$

$$d_1 1^{-\tau} + \cdots + d_n n^{-\tau} = \Omega(n^{\sigma-\tau}).$$

Preuve de (4.8). — Pour simplifier les notations nous allons supposer $k = 3$, et écrire $B_1(s) = \sum a_m m^{-s}$, $B_2(s) = \sum b_n n^{-s}$, $B_3(s) = \sum c_p p^{-s}$, et

$$d_1 1^{-\tau} + \cdots + d_N N^{-\tau} = \sum_{mnp \leqslant N} a_m b_n c_p (mnp)^{-\tau}. \tag{4.9}$$

Soit (N_ℓ) une suite d'entiers tels que $N_0 \geqslant 1$ et $N_\ell > 1000\, N_{\ell-1}^3$ ($\ell = 1, 2, \cdots$). Pour un ℓ fixé considérons les entiers $i, j, k(i,j)$ vérifiant

$$N_{\ell-1} < 2i < N_\ell^{1/3}, \quad N_{\ell-1} < 2j < N_\ell^{1/3}, \quad k(i,j) = \left[\frac{N_\ell}{4ij}\right]. \tag{4.10}$$

Classons les $k(i,j)$ modulo 3 et désignons par $K(\ell)$ la classe la plus pesante, en donnant à $k(i,j)$ le poids $i^{\rho_1-\rho_3} j^{\rho_2-\rho_3}$. Désignons par $I(\ell)$ l'ensemble des i (ou aussi bien des j) vérifiant (4.10), et par $IJ(\ell)$ l'ensemble des couples (i,j) tels que $k(i,j) \in K(\ell)$. Pour $(i,j) \in IJ(\ell)$, posons

$$a_{2i} = -a_{2i+1} = i^{\rho_1}, \quad b_{2j} = -b_{2j+1} = j^{\rho_2}, \quad c_{k(i,j)} = -c_{k(i,j)+1} = (k(i,j))^{\rho_3}. \tag{4.11}$$

Cette définition a bien un sens, puisque $k(i,j) + 1 \notin K(\ell)$, et que les $IJ(\ell)$ sont disjoints, ainsi que les $K(\ell)$. Posons $a_m = 0$, $b_n = 0$, $c_p = 0$ pour toutes les autres valeurs de m, n, p. Dans la somme (4.9) on peut se restreindre aux $m = 2i$ ou $2i+1$ ($i \in I(\ell_1)$), $n = 2j$ ou $2j+1$ ($j \in I(\ell_2)$), $p = k$ ou $k+1$ ($k \in K(\ell_3)$), tels que $4ijk \leqslant N$. Choisissons $N = N_\ell$. Alors nécessairement $\ell_1 \leqslant \ell$, $\ell_2 \leqslant \ell$, $\ell_3 \leqslant \ell$. De plus, si l'une de ces inégalités est stricte, les huit triplets (m,n,p) correspondant à i,j,k vérifient $mnp \leqslant N$, et les huit termes $a_m b_n c_p$ correspondants ont une somme nulle. Bornons-nous donc à $\ell_1 = \ell_2 = \ell_3 = \ell$, $(i,j) \in IJ(\ell)$, $k \in K(\ell)$. Si $k \neq k(i,j)$, on a $k \leqslant k(i,j) - 3$, et cela assure de nouveau que les huit triplets (m,n,p) vérifient $mnp \leqslant N$; leur somme est nulle. Restent les $(i,j) \in IJ(\ell)$, $k = k(i,j)$; alors un seul des huits triplets (m,n,p) vérifie $mnp \leqslant N$; on le voit en observant que, par définition de k, le triplet $(2i,\, 2j,\, k)$ appartient au domaine $xyz \leqslant N$ et le triplet $(2i,\, 2j,\, k+1)$ au domaine $xyz > N$, et que la fonction $z = \dfrac{N}{xy}$ a ses dérivées partielles par rapport à x et par rapport à y majorées par -1 dans le carré $0 < x < N^{1/3}$, $0 < y < N^{1/3}$. La somme dans (4.9) est donc, pour $N = N_\ell$, minorée par $\sum_{(i,j) \in IJ(\ell)} i^{\rho_1} j^{\rho_2} \left(\dfrac{N}{5ij}\right)^{\rho_3} N^{-\tau}$ donc, compte tenu de la définition de $IJ(\ell)$, par

$$c N^{\frac{1}{3}(\rho_1-\rho_3+1)} N^{\frac{1}{3}(\rho_2-\rho_3+1)} N^{\rho_3-\tau}$$

où c est une constante > 0, donc par $cN^{\sigma-\tau}$ d'après la définition de σ, et cela établit (4.8).

Pour achever la preuve de la proposition 4.7 il suffit de multiplier les coefficients de $B_1, \cdots, B_k$ par des facteurs tendant vers zéro qui transforment ces séries bornées en séries $A_1, \cdots, A_k$ convergentes (aux points $\rho_1, \cdots, \rho_k$), et qui ne modifient pas l'abscisse de convergence du produit.

Remarque 4.8. — Considérons de nouveau le cas $k = 2$ et choisissons $\rho_1 = -1$, $\rho_2 = 0$, donc $\sigma = 0$. Voici une variante immédiate du lemme 4.5.

(4.12) *il existe deux séries de Dirichlet, $A(s)$, bornée en -1, et $B(s)$, bornée en 0, telles que pour la série produit $C(s) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n^{-s}$ on ait*

$$c_1 + \cdots + c_n = \Omega(\operatorname{Log} n).$$

C'est une autre manière de voir la remarque 4.3.

Problème ouvert.

Les remarques 4.3 et 4.8 montrent qu'on n'a pas toujours convergence de C en σ; mais (4.2) pose naturellement la question suivante : est–ce qu'on a un contre–exemple chaque fois que σ est l'un des $\rho_j + 1$, comme c'est le cas pour deux facteurs ? Cela n'est pas clair, même dans le cas particulier suivant :

$$\rho_3 = -1, \quad \rho_1 = \rho_2 = -\frac{1}{2}, \quad \sigma = \frac{\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + 2}{3} = 0 = \rho_3 + 1.$$

5. Fonction de sommabilité d'un produit de séries de Dirichlet ; résultats optimaux et problèmes ouverts.

THÉORÈME 5.1. — *On donne des couples (ρ_j, α_j) ($j = 1, 2, \cdots, k$; ρ_j réels, $\alpha_j \geqslant 0$). Soit $A_1, \cdots, A_k$ des séries de Dirichlet telles que la fonction de sommabilité $\psi_j(\sigma)$ de A_j est définie pour $\sigma \geqslant \rho_j$ et vérifie $\psi_j(\rho_j) = \alpha_j$ ($j = 1, 2, \cdots, k$). Soit C le produit $A_1 \cdots A_k$, et $\psi_C(\sigma)$ sa fonction de sommabilité. Alors*

$$\text{(5.1)} \qquad \psi_C(\sigma) \leqslant \left(\sum_{j=1}^{k} (\rho_j + \alpha_j + 1 - \sigma)^+ - 1 \right)^+ \qquad (\sigma \geqslant \max \rho_j)$$

et le résultat est optimal :

(5.2) *il existe un choix des A_j, prolongeables en fonctions entières, pour lequel*

$$\psi_C(\sigma) = \left(\sum_{j=1}^{k}(\rho_j + \alpha_j + 1 - \sigma)^+) - 1\right)^+ \qquad (\sigma \in \mathbb{R}).$$

Quelques explications sont nécessaires avant d'entamer la preuve.

La définition de la sommabilité (R, α) et celle de la fonction de sommabilité $\psi(\sigma)$ ont été données en (1.8) et (1.9), et les principales propriétés de $\psi(\sigma)$ en (1.10).

Le cas particulier $k = 2$, $\rho_1 = \rho_2 = 0$ a été traité par Bohr [B2]. Le cas où tous les ρ_j sont égaux nécessite une récurrence soigneuse, mais pas d'idée nouvelle. Pour une première lecture de la démonstration qui va suivre, l'examen du cas $\rho_1 = \rho_2 = \cdots = \rho_k = 0$ est donc une simplification notable.

La clé pour le cas général est un autre cas particulier, que nous énoncerons comme proposition auxiliaire.

Proposition 5.2. — *Soit A et B deux séries de Dirichlet dont les fonctions de sommabilité vérifient $\psi_A(\rho) = 0$, $\psi_B(0) = \beta$, avec $-1 < \rho < 0$ et $\beta \geqslant 0$. Alors*

(5.3) $$\psi_{AB}(0) \leqslant \beta + \rho + 1.$$

Pour démontrer le théorème 5.1, nous admettrons la proposition 5.2, que nous démontrerons ensuite. Nous admettrons également deux conséquences faciles des définitions (1.8) et (1.9), à savoir, pour deux séries de Dirichlet A et B,

(5.4) $$\psi_{AB}(\sigma) \leqslant 1 + \psi_A(\sigma) + \psi_B(\sigma)$$

partout où le second membre existe, et

(5.5) $$\psi_{AB}(\sigma) \leqslant \psi_A(\sigma) \text{ si } \sigma \geqslant \sigma_a(B)$$

$\sigma_a(\cdot)$ étant l'abscisse de convergence absolue. Une démonstration immédiate en sera donnée au moyen de la modification des définitions (1.8) et (1.9) dont nous aurons besoin pour établir la proposition 5.2.

Preuve de la partie (5.1). — Les hypothèses entraînent, compte tenu de (1.10),

$$\psi_j(\sigma) \leqslant (\rho_j + \alpha_j - \sigma)^+ \qquad (\sigma \geqslant \rho_j). \tag{5.6}$$

En conséquence (voir (1.2), (1.3), (1.5)) les abscisses de convergence et de convergence absolue de A_j vérifient

$$\sigma_c(A_j) \leqslant \rho_j + \alpha_j, \qquad \sigma_a(A_j) \leqslant \rho_j + \alpha_j + 1. \tag{5.7}$$

En conséquence du théorème 4.1, les hypothèses $\psi_j(\rho_j + \alpha_j) = 0$, vérifiées d'après (5.6), entraînent

$$\psi_C(\sigma) = 0 \ \text{ quand } \ \sum_{j=1}^{k} (\rho_j + \alpha_j + 1 - \sigma)^+ = 1, \tag{5.8}$$

d'où l'on voit que (5.1) a lieu quand le second membre est nul.

Démontrons (5.1) par récurrence. L'inégalité est correcte pour $k = 1$, à cause de (5.6) et du fait que

$$(\rho + \alpha - \sigma)^+ = \left((\rho + \alpha + 1 - \sigma)^+ - 1\right)^+.$$

Supposons-la vraie jusqu'à l'ordre $k - 1$, et, quitte à renuméroter les α_j et ρ_j, supposons

$$\alpha_1 + \rho_1 \geqslant \alpha_2 + \rho_2 \geqslant \cdots \geqslant \alpha_k + \rho_k.$$

Posons $D = A_1 \cdots A_{k-1}$,

$$L_k(\sigma) = \sum_{j=1}^{k} (\rho_j + \alpha_j + 1 - \sigma)^+,$$

$$L_{k-1}(\sigma) = \sum_{j=1}^{k-1} (\rho_j + \alpha_j + 1 - \sigma)^+.$$

L'hypothèse de récurrence entraîne

$$\psi_D(\sigma) \leqslant (L_{k-1}(\sigma) - 1)^+$$

et on veut montrer

$$\psi_C(\sigma) \leqslant (L_k(\sigma) - 1)^+. \tag{5.9}$$

La fonction du second membre est continue et convexe sur $\mathbb{R}$, à pentes entières $\leqslant 0$, et les discontinuités de la pente ont lieu en certains des points $\rho_j + \alpha_j + 1$ et au point σ où $L_k(\sigma) = 1$. Compte tenu de cela et de la convexité de ψ_C il suffit de démontrer (5.9)

a) lorsque $L_k(\sigma) = 1$

b) lorsque $\sigma = \rho_j + \alpha_j + 1$ $(j = 1, 2, \cdots, k)$

c) lorsque $\sigma = \max \rho_j$.

Le cas a) est traité en (5.8). Dans le cas b) on a $\sigma \geqslant \sigma_a(A_k)$ d'après (5.7) et notre choix de l'ordre des $\alpha_j + \rho_j$, donc, en utilisant (5.5),

$$\psi_C(\sigma) \leqslant \psi_D(\sigma) \leqslant (L_{k-1}(\sigma) - 1)^+ = (L_k(\sigma) - 1)^+ .$$

Pour le cas c), nous allons d'abord, au moyen d'une translation sur s, nous ramener à la situation où $\max \rho_j = 0$. Distinguons les cas $\rho_k + \alpha_k \geqslant 0$, $\rho_k + \alpha_k \leqslant -1$, $-1 < \rho_k + \alpha_k < 0$. Si $\rho_k + \alpha_k \geqslant 0$, nous utilisons (5.6) et (5.4) et nous obtenons $\psi_k(0) \leqslant \rho_k + \alpha_k$ et

$$\psi_C(0) \leqslant 1 + \psi_D(0) + \psi_k(0) \leqslant (L_{k-1}(0) - 1)^+ + \rho_k + \alpha_k + 1$$

donc $\psi_C(0) \leqslant (L_k(0) - 1)^+$. Si $\rho_k + \alpha_k \leqslant -1$, nous utilisons (5.7) et (5.5) et nous obtenons $\sigma_a(A_k) \leqslant 0$,

$$\psi_C(0) \leqslant \psi_D(0) \leqslant (L_{k-1}(0) - 1)^+ = (L_k(0) - 1)^+ .$$

Enfin, si $-1 < \rho_k + \alpha_k < 0$ nous utilisons la proposition 5.2 avec $A = A_k$ et $B = D$, en choisissant $\rho = \rho_k + \alpha_k$, ce qui assure $\psi_k(\rho) = 0$; ainsi

$$\psi_C(0) \leqslant \psi_D(0) + \rho_k + \alpha_k + 1 \leqslant (L_k(0) - 1)^+$$

ce qui achève la démonstration de (5.9) donc, par récurrence, celle de (5.1).

Preuve de la partie (5.2). — Appliquons le théorème 2.6 en y remplaçant les ρ_j par $\rho_j + \alpha_j$. On obtient k séries de Dirichlet $A_1, \cdots, A_k$, prolongeables en fonctions entières, dont les fonctions de sommabilité et d'ordre vérifient $\psi_j(\rho_j + \alpha_j) = 0$ et

$$\mu_j(\sigma) = (\rho_j + \alpha_j + 1 - \sigma)^+ \quad (\sigma \in \mathbb{R},\ 1 \leqslant j \leqslant k)$$

$$\mu_C(\sigma) = \sum_{j=1}^{k} (\rho_j + \alpha_j + 1 - \sigma)^+ = L_k(\sigma) \quad (\sigma \in \mathbb{R}).$$

Comme la fonction ψ_j est convexe, comprise entre $\mu_j - 1$ et μ_j (voir (1.10)), et égale à $\mu_j - 1$ au point $\rho_j + \alpha_j$, la forme de μ_j impose

$$\psi_j(\sigma) = \left((\rho_j + \alpha_j + 1 - \sigma)^+ - 1\right)^+ \quad (\sigma \in \mathbb{R})$$

donc $\psi_j(\rho_j) = \alpha_j$. De plus

$$\psi_C(\sigma) \geqslant (\mu_C(\sigma) - 1)^+ = (L_k(\sigma) - 1)^+$$

ce qui, joint à (5.1), entraîne

$$\psi_C(\sigma) = (L_k(\sigma) - 1)^+ .$$

Les hypothèses du théorème (5.1) sont bien satisfaites, et les A_j choisis vérifient la conclusion de (5.2).

Pour achever la preuve du théorème 5.1 il nous reste à établir la proposition 5.2. Auparavant, comme nous l'avons annoncé, nous avons besoin d'une modification des définitions (1.8) et (1.9) relatives à la sommabilité au sens de Marcel Riesz et à la fonction de sommabilité.

Nouvelles définitions. — Ecrivons, en complément de (1.1),

$$A(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) n^{-s} = \int e^{-sx} d\mu(x). \tag{5.10}$$

C'est la transformée de Laplace de la mesure $d\mu(x)$, que nous noterons μ :

$$\mu = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) \delta_{\mathrm{Log}\, n}. \tag{5.11}$$

La multiplication des transformées de Laplace correspond à la convolution sur $\mathbb{R}$ des mesures correspondantes, qu'on appelle les originales. La fonction indicatrice de $\mathbb{R}^+$ (fonction de Heaviside) est désignée par H. Rappelons deux résultats relatifs à la convolution par des fonctions Hx^α :

(5.12) si $\alpha > -1$, $\beta > -1$,

$$Hx^\alpha * Hx^\beta = CHx^{\alpha+\beta+1} \quad (C \text{ constante } > 0).$$

(5.13) si $\alpha \geqslant 0$ et si ν est une mesure bornée sur $\mathbb{R}^+$,

$$Hx^\alpha * \nu = O(x^\alpha) \quad (x \to \infty).$$

La définition (1.8) se transcrit ainsi : la série $\sum a(n)$ est (R,α) sommable, avec pour somme A, si

$$Hx^\alpha * \mu = (A + o(1))x^\alpha \quad (x \to \infty),$$

où μ est la mesure qui figure dans (5.10) et (5.11). Nous dirons que la série $\sum a(n)$ est (R,α) bornée si

$$Hx^\alpha * \mu = O(x^\alpha) \quad (x \to \infty). \tag{5.14}$$

Nous avons défini $\psi(A,\sigma)$, fonction de sommabilité de la série de Dirichlet (5.10), comme borne inférieure des α tels que $\sum a(n)n^{-\sigma}$ soit (R,α) sommable; c'est aussi, de manière facile à voir, la borne inférieure des α tels que $\sum a(n)n^{-\sigma}$ soit (R,α) bornée, et c'est désormais la définition que nous utiliserons.

Remarquons d'abord que si l'on a (5.14) pour la mesure μ et son analogue

$$Hx^\beta * \nu = O(x^\beta) \quad (x \to \infty) \tag{5.15}$$

pour la mesure ν, avec $\alpha > -1$, $\beta > -1$, on a

$$Hx^\alpha * Hx^\beta * \mu * \nu = O(Hx^\alpha * Hx^\beta)$$

soit, d'après (5.12),

$$Hx^{\alpha+\beta+1} * \mu * \nu = O(x^{\alpha+\beta+1}) \quad (x \to \infty).$$

Dans le cas où μ et ν sont les mesures originales de séries de Dirichlet A et B, $\mu * \nu$ est l'originale de leur produit C, et l'on voit que si A et B sont respectivement (R,α) et (R,β) bornées au point 0, C est $(R,\, \alpha+\beta+1)$ bornée en 0. Il en est de même en remplaçant 0 par un point quelconque, et cela établit la formule (5.4). Si maintenant au lieu de (5.15) on suppose que ν est une mesure bornée, (5.13) donne

$$Hx^\alpha * \mu * \nu = O(x^\alpha) \quad (x \to \infty),$$

et cela établit la formule (5.5).

Preuve de la proposition 5.2. — Restreignons d'abord un peu les hypothèses sur les séries de Dirichlet A et B. Supposons A convergente en $\rho - \epsilon$ ($\epsilon > 0$ petit) et de somme nulle $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = 0\right)$, et supposons que B

est (R,β) bornée au point 0; alors $\sum_{n=1}^{\infty} \mid a_n \mid n^{-\rho-1} < \infty$ et

$$\sum_{\log\, n<x} a_n = - \sum_{\log\, n\geqslant x} a_n = - \sum_{\log\, n\geqslant x} \frac{a_n}{n^{\rho-\epsilon}} n^{\rho-\epsilon} = O\left(e^{(\rho-\epsilon)x}\right) = O(x^\rho e^{\rho x})$$

quand $x \to \infty$. Ainsi, désignant par μ et les mesures originales deA et B,

$$\mid \mu \mid [0,1] = 0 \tag{5.16}$$

$$M(x) := \mu([0,x[) = O(x^\rho e^{\rho x}) \quad (x \to \infty) \tag{5.17}$$

$$\int_0^\infty e^{-(\rho+1)x} \mid d\mu(x) \mid < \infty \tag{5.18}$$

$$Hx^\beta * \nu = O(x^\beta) \quad (x \to \infty). \tag{5.19}$$

Nous nous proposons de montrer que

$$Hx^{\beta+\rho+1} * \mu * \nu = O\left(x^{\beta+\rho+1}\right) \quad (x \to \infty). \tag{5.20}$$

Nous nous appuierons sur le lemme clé suivant.

LEMME 5.4. — *(5.16) et (5.17) entraînent*

$$I(u) := \int_{x<u-e^{-u}} (u-x)^\rho d\mu(x) = O(u^\rho) \quad \textit{quand} \quad u \to \infty. \tag{5.21}$$

Preuve. — Une première intégration par parties donne

$$I(u) = e^{-\rho u} M\left(u - e^{-u}\right) + \rho \int_1^{u-e^{-u}} (u-x)^{\rho-1} M(x) dx$$

$$= O(u^\rho) + \left(\int_1^{u-e^{-u}} (u-x)^{\rho-1} x^\rho e^{\rho x} dx\right) =: O(u^\rho) + O(J).$$

$$J = K + L$$

avec

$$K = \int_1^{u/2} (u-x)^{\rho-1} x^\rho e^{\rho x} dx \leqslant \int_1^{u/2} (u-x)^{\rho-1} dx = O(u^\rho),$$

et

$$L = \int_{u/2}^{u-e^{-u}} (u-x)^{\rho-1} x^\rho e^{\rho x} dx.$$

Une deuxième intégration par parties, tenant compte de $\frac{d}{dx}(x^\rho e^{\rho x}) = O(x^\rho e^{\rho x})$, donne

$$L = \left([-\rho^{-1}(u-x)^\rho x^\rho e^{\rho x}]_{u/2}^{u-e^{-u}}\right) + O\left[\int_{u/2}^{u-e^{-u}} (u-x)^\rho x^\rho e^{\rho x} dx\right]$$

$$= O(u^\rho) + O\left[\int_{u/2}^{u-e^{-u}} (u-x)^\rho e^{\rho x} dx\right].$$

Une troisième intégration par parties donne de même

$$\int_{u/2}^{u-e^{-u}} (u-x)^\rho e^{\rho x} dx = O\left([-(\rho+1)^{-1}(u-x)^{\rho+1} x^\rho e^{\rho x}]_{u/2}^{u-e^{-u}}\right) + O\left(\int_{u/2}^{u-e^{-u}} (u-x)^{\rho+1} x^\rho e^{\rho x} dx\right)$$

$$= O(u^\rho e^{-u} + u^{2\rho+1} e^{\rho \frac{u}{2}}) + O\left(u^{2\rho+1} \int_{u/2}^{\infty} e^{\rho x} dx\right) = O(u^{2\rho+1} e^{\rho \frac{u}{2}}) = O(u^\rho),$$

d'où $L = O(u^\rho)$, puis $J = O(u^\rho)$, ce qui donne (5.21). □

Évaluons maintenant $I(X) = HX^{\beta+\rho+1} * \mu * \nu$ quand $X \to \infty$. Par définition, $I(X)$ est donné par l'intégrale double

$$I(X) = \int\int_{x+y<X} (X-x-y)^{\beta+\rho+1} d\mu(x) d\nu(y).$$

D'après (5.12), il revient au même d'évaluer l'intégrale triple

$$J(X) = \int\int\int_{x+y<X, 0<v>X-x-y} v^\rho (X-x-y-v)^\beta dv\, d\mu(x) d\nu(y)$$

$$= \int\int\int_{x<u<X-y, x+y<X} (u-x)^\rho (X-u-y)^\beta d\mu(x) d\nu(y) du.$$

$$J(X) = J_1 + J_2$$

avec

$$(5.22)\quad J_1 = \iiint_{x<u-e^{-u},y<X-u,u<X} (u-x)^\rho (X-u-y)^\beta d\mu(x) d\nu(y) du$$

et

(5.23)

$$J_2 = \iiint_{u-e^{-u}<x<u,y<X-u,u<X} (u-x)^\rho (X-u-y)^\beta d\mu(x) d\nu(y) du.$$

Évaluons séparément J_1 et J_2. Avec les notations de (5.21),

$$J_1 = \iint_{y<X-u} I(u)(X-u-y)^\beta d\nu(y)\, du$$

$$= \int_0^X I(u) \left(\int_{y<X-u} (X-u-y)^\beta d\nu(y) \right) du$$

$$= O\left(\int_0^X \mid I(u) \mid (X-u)^\beta du \right) \quad \text{(d'après (5.19))}$$

$$= O\left(\int_0^X u^\rho (X-u)^\beta du \right) \quad \text{(d'après (5.21))}$$

$$= O(X^{\beta+\rho+1}) \quad \text{(d'après (5.12))}.$$

De même, (5.19) entraîne

$$J_2 = O\left(\iint_{u-e^{-u}<x<u<X} (u-x)^\rho (X-u)^\beta \mid d\mu(x) \mid du \right)$$

$$= O\left(\int_1^X \left[\int_x^{z(x)} (u-x)^\rho (X-u)^\beta du \right] \mid d\mu(x) \mid \right)$$

où $z(x)$ est la fonction définie implicitement par $x = z(x) - e^{-z(x)}$. On a $z(x) > x$, donc $z(x) = x + e^{-z(x)} < x + e^{-x}$, et

$$J_2 = O\left(\int_1^X \left[X^\beta \int_x^{x+e^{-x}} (u-x)^\rho du \right] \mid d\mu(x) \mid \right)$$

$$= O\left(\int_1^X \left[X^\beta \int_0^{e^{-x}} u^\rho du \right] \mid d\mu(x) \mid \right)$$

$$= 0\left(X^{\beta}\int_{1}^{\infty} e^{-(\rho+1)x} \mid d\mu(x) \mid\right) = O(X^{\beta}) \text{ d'après (5.18).}$$

Additionnant les estimations de J_1 et J_2, on voit que $J(X) = O(X^{\beta+\rho+1})$, ce qui prouve (5.20). Revenons aux hypothèses de la proposition (5.2). Posant $a'_n = a_n n^{-2\epsilon}$ et $b'_n = b_n n^{-2\epsilon}$, on voit que les séries de Dirichlet correspondantes A' et B' vérifient les hypothèses restreintes précédentes; donc $\psi_{A',B'}(0) \leqslant \rho+\beta+1$, autrement dit $\psi_{AB}(2\epsilon) \leqslant \rho+\beta+1$. Faisant tendre ϵ vers zéro, on obtient bien $\psi_{AB}(0) \leqslant \rho+\beta+1$. CQFD

Commentaires et questions

1. Le théorème 5.1 et sa démonstration se comprennent en traçant des figures. Les figures les plus parlantes ne sont pas les graphes des fonctions ψ, mais ceux des fonctions convexes $\psi^+(\sigma)$ égales à $1+\psi(\sigma)$ quand $\psi(\sigma) > 0$, c'est-à-dire pour $\sigma < \omega_\psi$, égales à $\omega_\psi + 1 - \sigma$ pour $\omega_\psi \leqslant \sigma \leqslant \omega_\psi + 1$, et nulles pour $\sigma \geqslant \omega_\psi + 1$. Quand on donne les ρ_j et les α_j, on a

$$\psi_j^+(\sigma) \leqslant (\rho_j + \alpha_j + 1 - \sigma)^+ \quad (\sigma \geqslant \rho_j)$$

$$\psi_C^+(\sigma) \leqslant \sum_{j=1}^{k}(\rho_j + \alpha_j + 1 - \sigma)^+ \quad (\sigma \geqslant \max \rho_j)$$

et l'on peut construire les A_j de façon que

$$\psi_j^+(\sigma) = (\rho_j + \alpha_j + 1 - \sigma)^+ \quad (\sigma \in \mathbb{R})$$

$$\psi_C^+(\sigma) = \sum_{j=1}^{k}(\rho_j + \alpha_j + 1 - \sigma)^+ \text{ quand } \psi_C^+(\sigma) \geqslant 1.$$

Question. Peut-on associer aux séries de Dirichlet des fonctions $\psi^*(\sigma)$ convexes, égales à $1+\psi(\sigma)$ pour $\sigma < \omega_\psi$, nulles pour $\sigma > \omega_\psi + 1$, et telles que, pour tout couple de séries de Dirichlet A et B, on ait

$$\psi^*_{AB}(\sigma) \leqslant \psi^*_A(\sigma) + \psi^*_B(\sigma)$$

partout où le second membre est défini ? Si c'était le cas, il faudrait énoncer et démontrer le théorème 5.1 en utilisant ces fonctions ψ^*.

2. Bohr a complètement caractérisé les fonctions ψ : ce sont les fonctions convexes décroissantes telles que leur dérivée soit $\leqslant -1$ ou $= 0$ (propriété (1.10)). Il a également caractérisé les couples de fonctions (ψ, μ) dans lesquels la fonction d'ordre μ, convexe et décroissante, jouit aussi de la propriété de dérivée $\leqslant -1$ ou $= 0$: ils sont bien définis par la seule condition $\mu(\sigma) - 1 \leqslant \psi(\sigma) \leqslant \mu(\sigma)$ (propriété (1.10)). Il a posé la question sur les fonctions d'ordre, si leurs dérivées sont nécessairement $\leqslant -1$ ou 0 [B3]. La réponse est négative, mais on est encore loin de savoir caractériser les fonctions d'ordre [K1].

Questions. Si l'on sait définir des fonctions ψ^* répondant à la question 1, a-t-on nécessairement $\mu(\sigma) \leqslant \psi^*(\sigma) \leqslant \mu(\sigma) + 1$? Peut-on trouver des séries de Dirichlet A telles que $\mu_A(\sigma) = \psi_A^*(\sigma)$? Peut-on caractériser les fonctions d'ordre de telles séries ? Peut-on caractériser les fonctions μ ? les fonctions ψ^* ? les couples (ψ^*, μ) ?

3. Plus modestement, un exposé systématique et complet des propriétés des fonctions ψ reste à faire. Bohr s'est appuyé sur un théorème de Marcel Riesz concernant la convexité des fonctions ψ qui est hors de doute mais semble n'avoir jamais été publié (voir note du livre de Hardy et Riesz [HR] p. 60, et les Œuvres de Marcel Riesz). Le cadre naturel pour cela est celui de la sommabilité des transformées de Laplace, ou plutôt de la condition "$\mathcal{L}(\mu)$ est (R, α) bornée au point σ", exprimée par

$$Hx^\alpha e^{\sigma x} * \mu = O(x^\alpha e^{\sigma x}) \quad (x \to \infty).$$

Malheureusement, s'agissant des mesures discrètes, cette condition impose $\alpha \geqslant 0$. La réponse à la question 1 nous semble passer par une modification convenable de cette définition, permettant de définir "(R, α) bornée" pour $\alpha > -1$, dans le cas de mesures μ de la forme $\sum a(n)\delta_{\mathrm{Log}\ n}$. Nous comptons revenir sur cette question.

BIBLIOGRAPHIE

[B1] H. Bohr, On the convergence problem for Dirichlet series, Dan. Mat. Fys. Medd., 25, 6 (1946), 1–18 (I A 17 in Collected Math. Works).

[B2] H. Bohr, On multiplication of summable Dirichlet series, Mat. Tidsskr., (1950), 71–75 (I A 19 in Collected Math. Works).

[B3] H. Bohr, On the summability function and the order function of Dirichlet series, Dan. Mat. Fys. Medd., 27, no. 4 (1952), 3–38 (manuscript prepared by E. Følner) (I A 22 in Collected Math. Works).

[Bo] N. Bourbaki, Utilisation des nombres réels en topologie générale, Chapitre 9, Paris, Hermann, 1958.

[DT] H. Delange & G. Tenenbaum, Un théorème sur les séries de Dirichlet, Monatshefte Mat., 113 (1992), 99–105.

[HR] G. H. Hardy & M. Riesz, The general theory of Dirichlet series, Cambridge tracts in Math. and Math. Physics, 18 (1915).

[K1] J.–P. KAHANE, The last problem of Harald Bohr, J. Austr. Math. Soc., A 47 (1989), 133–152.

[K2] J.–P. KAHANE, Sur trois notes de Stieltjes relatives aux séries de Dirichlet. Numéro spécial "100 ans après Stieltjes" des Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, (1996), 33-56.

[L1] E. LANDAU, Über die Multiplication Dirichlet'schen Reihen, Rendiconti di Palermo, 24 (1907), 81–160.

[L2] E. LANDAU, Über das Konvergenzproblem der Dirichlet'schen Reihen, Rendiconti di Palermo, 28 (1909), 113–151.

[Q] H. QUEFFELEC, Propriétés presque–sûres et quasi–sûres des séries de Dirichlet et des produits d'Euler, Canad. J. Math., 32 (1980), 531–558.

[Ri] M. RIESZ, Sur l'équivalence de certaines méthodes de sommation, Proc. London Math. Soc., (2) 22 (1924), 412–419.

[Ru] W. RUDIN, Real and complex analysis, 3rd ed. Mc–Graw Hill, 1987, p. 118.

Manuscrit reçu le 4 avril 1996,
accepté le 4 octobre 1996.

J.–P. KAHANE,
Université de Paris–Sud
URA 757 (Analyse Harmonique)
Mathématiques - Bâtiment 425
91405 Orsay Cedex (France)
&
H. QUEFFÉLEC,
Université des Sciences
et Technologies de Lille
URA 751
U.F.R. de Mathématiques
59655 Villeneuve d'Ascq (France).