ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

CAROLINE GRUSON

Finitude de l'homologie de certains modules de dimension finie sur une super algèbre de Lie

Annales de l'institut Fourier, tome 47, nº 2 (1997), p. 531-553

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1997__47_2_531_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
47, 2 (1997), 531-553

FINITUDE DE L'HOMOLOGIE DE CERTAINS MODULES DE DIMENSION FINIE SUR UNE SUPER ALGÈBRE DE LIE

par Caroline GRUSON

Plan.

Introduction.

Lorsqu'on cherche à calculer l'homologie d'une algèbre de Lie semi-simple à valeurs dans un module de dimension finie, on calcule dans un premier temps l'homologie de l'algèbre de Lie à valeurs dans le module trivial, puis on démontre que l'homologie à valeurs dans un module simple non trivial est nulle : on peut ensuite conclure en décomposant le module dont on cherche l'homologie en modules simples. Dans le cas $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-gradué, cette méthode ne fonctionne pas très bien : en effet il est en général faux de dire que l'homologie d'un module simple non trivial est nulle. L'argument

Mots-clés : Super algèbres de Lie – Complexe de Koszul – Stabilité au sens de Munford.
Classification math. : 14A22 – 17A70 – 20Gxx.

qui donne ce résultat dans le cas classique est relié au fait que l'opérateur de Casimir dans l'algèbre enveloppante sépare un poids dominant du poids zéro, ce qui est faux dans le cas super (les poids atypiques ne sont pas toujours séparés de zéro par le centre de l'algèbre enveloppante). Il est de plus clair qu'il existe des modules non triviaux pour lesquels l'homologie est non triviale : la super algèbre de Lie $\mathfrak{osp}(4,2)$ admet une famille à un paramètre de déformations, donc la représentation adjointe a une homologie non triviale.

Dans le cas des super algèbres de Lie, le complexe de Koszul à valeurs dans un module de dimension finie n'est pas de longueur finie : il est donc raisonnable de se demander si l'homologie correspondant à ce complexe est de dimension finie.

Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ une super algèbre de Lie de dimension finie sur $\mathbb{C}$, dont on suppose la partie paire $\mathfrak{g}_0$ réductive, M un $\mathfrak{g}$-module de dimension finie qui est un $\mathfrak{g}_0$-module semi-simple. On suppose de plus qu'il existe un groupe réductif connexe G_0 d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_0$, tel que l'action de $\mathfrak{g}_0$ dans $\mathfrak{g}_1$ et dans M s'intègre en une action de G_0. On forme le complexe de Koszul de $\mathfrak{g}$ à valeurs dans M. Si l'on cherche à interpréter géométriquement une partie des informations contenues dans ce complexe, on en vient à considérer les équations $[y,y]=0$ dans $\mathfrak{g}_1$. Soit A la sous-variété (réduite) de $\mathbb{P}(\mathfrak{g}_1)$ définie par ces équations : on l'appelle la variété autocommutante de $\mathfrak{g}$. On peut alors ramener l'étude de la suite spectrale associée au complexe de Koszul de $\mathfrak{g}$ à valeurs dans M à un travail sur une suite spectrale qui provient d'un complexe de faisceaux dont l'homologie est à support dans la variété autocommutante.

Rappelons une définition due à Mumford ([MuFo], p. 148) :

DÉFINITION — *Soit G_0 un groupe de Lie réductif complexe et soit V une variété dans laquelle G_0 opère algébriquement. Soit $\mathcal{L}$ un faisceau ample sur V sur lequel G_0 opère. On dit qu'un point $v \in V$ est instable pour $\mathcal{L}$ si toutes les sections G_0-invariantes des puissances tensorielles de $\mathcal{L}$ sont nulles en v.*

On démontre le théorème suivant :

THÉORÈME 3.1. — *Soit V une G_0-variété projective, soit $\mathcal{L}$ un faisceau inversible ample et G_0-linéarisé sur V et soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent G_0-équivariant sur V à support dans les points instables pour $\mathcal{L}$. Alors la partie G_0-invariante de la cohomologie de $\mathcal{F}(l) = \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes l}$ est nulle pour l assez grand.*

Ceci permet ensuite de démontrer :

THÉORÈME 4.1. — *Soit* $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ *une super algèbre de Lie dont la partie paire est réductive, soit* G_0 *un groupe algébrique réductif connexe d'algèbre de Lie* $\mathfrak{g}_0$*, soit* M *un* $\mathfrak{g}$*-module de dimension finie tel que* $\mathfrak{g}_0$ *opère de manière semi-simple dans* M*. On suppose que l'action de* $\mathfrak{g}_0$ *dans* $\mathfrak{g}_1$ *et* M *s'intègre en une action de* G_0 *(i.e. la différentielle de l'action de* G_0 *est l'action de* $\mathfrak{g}_0$*). Supposons de plus que la variété autocommutante est formée de points instables pour le faisceau ample* $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathfrak{g}_1)}(1)$ *relativement au groupe* G_0 *(i.e. on suppose que tout polynôme* G_0*-invariant homogène de degré strictement positif sur* $\mathfrak{g}_1$ *est nul sur* $C(A)$*, où* $C(A)$ *désigne le cône de* $\mathfrak{g}_1$ *défini par les équations* $[Y, Y] = 0$*). Alors l'homologie de* $\mathfrak{g}$ *à valeurs dans* M *est de dimension finie.*

Le dernier paragraphe est consacré à l'étude d'exemples de super algèbres de Lie simples à partie paire réductive, $\mathfrak{osp}(m, 2n)$, $\mathfrak{sl}(m, n), m \neq n$, $G(3)$, $F(4)$ et $D(2, 1, \lambda)$. Dans un premier temps, on démontre que l'on peut appliquer le théorème 4.1 à ces super algèbres de Lie de la manière suivante : soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ une telle super algèbre de Lie. On introduit le morphisme

$$\alpha : S(\mathfrak{g}_0^*)^{\mathfrak{g}_0} \longrightarrow S(\mathfrak{g}_1^*)^{\mathfrak{g}_0}$$

qui prolonge l'application de $\mathfrak{g}_0^*$ dans $S^2(\mathfrak{g}_1^*)$ déduite par transposition du crochet de Lie sur $\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_1$. On démontre ensuite le théorème suivant :

THÉORÈME 5.1. — *Soit* $\mathfrak{g}$ *l'une des super algèbres de Lie* $\mathfrak{gl}(m, n)$, $\mathfrak{osp}(m, 2n)$, $F(4)$, $G(3)$, $D(2, 1, \lambda)$*. Alors le morphisme* α *est surjectif.*

On démontre alors (§ 5.2) que le théorème 4.1 s'applique à $\mathfrak{g}$.

Par ailleurs, Fuks, dans son livre sur la cohomologie des algèbres de Lie de dimension infinie ([Fu]), calcule la cohomologie à valeurs dans le module trivial des super algèbres de Lie $\mathfrak{gl}(m, n)$ et $\mathfrak{osp}(m, 2n)$. Les résultats sont annoncés dans une note de Fuks et Leites, [FuLe]. Il se trouve que la démonstration permet également de calculer cette cohomologie pour les super algèbres de Lie exceptionnelles.

THÉORÈME 5.3 (Fuks-Leites). — *On a les isomorphismes suivants :*

$$H^*(\mathfrak{osp}(m, 2n), \mathbb{C}) \simeq \begin{cases} H^*(\mathfrak{o}(m), \mathbb{C}) \text{ si } m \geqslant 2n \\ H^*(\mathfrak{sp}(2n), \mathbb{C}) \text{ si } m < 2n \end{cases}$$

$$H^*(\mathfrak{gl}(m, n), \mathbb{C}) \simeq H^*(\mathfrak{gl}(\sup(m, n)), \mathbb{C}).$$

THÉORÈME 5.4. — *On a les isomorphismes suivants :*

$$H^*(G(3),\mathbb{C}) \simeq H^*(\mathfrak{g}_2,\mathbb{C})$$
$$H^*(F(4),\mathbb{C}) \simeq H^*(\mathfrak{o}(7),\mathbb{C})$$
$$H^*(D(2,1,\lambda),\mathbb{C}) \simeq H^*(\mathfrak{sl}(2)\times\mathfrak{sl}(2),\mathbb{C}).$$

Pour compléter la liste des super algèbres de Lie simples à partie paire réductive, il faut ajouter les familles $\mathfrak{psl}(n,n)$, $\mathfrak{p}(n)$ et $\mathfrak{q}(n)$: ces trois familles ont une cohomologie infinie et nous ne les traiterons pas ici.

Je souhaite remercier Alberto Arabia, Michel Brion, Michel Duflo et Jean-Louis Koszul pour d'utiles discussions.

1. Le complexe de Koszul d'une super algèbre de Lie à valeurs dans un module et la suite spectrale qui en résulte.

Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ une super algèbre de Lie sur $\mathbb{C}$ de dimension finie et soit M un $\mathfrak{g}$-module de dimension finie.

On rappelle qu'il existe une algèbre extérieure, au sens gradué, de $\mathfrak{g}$:

$$\Lambda^n(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{k=0}^{n} \Lambda^k(\mathfrak{g}_0)\otimes S^{n-k}(\mathfrak{g}_1).$$

Cette algèbre extérieure est munie d'une part d'une graduation sur $\mathbb{N}$ (par n), et d'autre part d'une bigraduation sur $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ (par k et $n-k$).

On peut former le complexe de Koszul de $\mathfrak{g}$ à valeurs dans M, $\Lambda(\mathfrak{g})\otimes M$, avec la différentielle :

$$\begin{aligned}
\partial(x_1\wedge\ldots\wedge x_k\otimes y_1\ldots y_{n-k}\otimes m) &\\
= \sum_i (-1)^{i-1} x_1\wedge\ldots\wedge\hat{x}_i\wedge\ldots\wedge x_k\otimes y_1\ldots y_{n-k}\otimes x_i m &\\
+\sum_{i<j}(-1)^{i+j}[x_i,x_j]\wedge x_1\wedge\ldots\wedge\hat{x}_i\wedge\ldots\wedge\hat{x}_j\wedge\ldots\wedge x_k\otimes y_1\ldots y_{n-k}\otimes m &\\
+\sum_i(-1)^{i-1}x_1\wedge\ldots\wedge\hat{x}_i\wedge\ldots\wedge x_k\otimes x_i.(y_1\ldots y_{n-k})\otimes m &
\end{aligned}$$

$$+\sum_i x_1 \wedge \ldots\ldots \wedge x_k \otimes y_1 \ldots \hat{y}_i \ldots y_{n-k} \otimes y_i m$$

$$+\sum_{i<j} x_1 \wedge \ldots\ldots \wedge x_k \wedge [y_i, y_j] \otimes y_1 \ldots \hat{y}_i \ldots \hat{y}_j \ldots y_{n-k} \otimes m,$$

où les x_i sont des éléments de $\mathfrak{g}_0$, les y_j sont des éléments de $\mathfrak{g}_1$ et m est un élément de M.

On remarque alors que ∂ est somme de trois applications homogènes pour la bigraduation de $\Lambda(\mathfrak{g}) \otimes M$ induite par la bigraduation de $\Lambda(\mathfrak{g})$. On note ces trois applications ∂_1, ∂_2 et ∂_3, avec

$$\partial_1 : \Lambda^k(\mathfrak{g}_0) \otimes S^{n-k}(\mathfrak{g}_1) \otimes M \to \Lambda^{k-1}(\mathfrak{g}_0) \otimes S^{n-k}(\mathfrak{g}_1) \otimes M,$$

celle-ci est la différentielle du complexe de Koszul du $\mathfrak{g}_0$-module $S(\mathfrak{g}_1) \otimes M$,

$$\partial_2 : \Lambda^k(\mathfrak{g}_0) \otimes S^{n-k}(\mathfrak{g}_1) \otimes M \to \Lambda^k(\mathfrak{g}_0) \otimes S^{n-k-1}(\mathfrak{g}_1) \otimes M,$$

$$\partial_3 : \Lambda^k(\mathfrak{g}_0) \otimes S^{n-k}(\mathfrak{g}_1) \otimes M \to \Lambda^{k+1}(\mathfrak{g}_0) \otimes S^{n-k-2}(\mathfrak{g}_1) \otimes M,$$

celle-ci est également une différentielle dont nous donnerons une interprétation dans la suite. On a donc $\partial_1^2 = \partial_3^2 = (\partial_1 + \partial_2 + \partial_3)^2 = 0$.

Si l'on gradue $\Lambda^\bullet(\mathfrak{g})$ par l'entier $p = 2k + (n-k) = k + n$ dans les notations précédentes, et si l'on note $\Lambda_p(\mathfrak{g})$ la composante de degré p, on a :

$$\partial_1(\Lambda_p(\mathfrak{g}) \otimes M) \subset \Lambda_{p-2}(\mathfrak{g}) \otimes M,$$

$$\partial_2(\Lambda_p(\mathfrak{g}) \otimes M) \subset \Lambda_{p-1}(\mathfrak{g}) \otimes M,$$

$$\partial_3(\Lambda_p(\mathfrak{g}) \otimes M) \subset \Lambda_p(\mathfrak{g}) \otimes M.$$

Si maintenant on filtre $\Lambda^\bullet(\mathfrak{g}) \otimes M$ par

$$\bigoplus_{k=0}^{p} \Lambda_k(\mathfrak{g}) \otimes M,$$

on obtient une suite spectrale d'un module différentiel filtré ([God] p. 77). On a $E_0^p = \Lambda_p(\mathfrak{g}) \otimes M$, et $d_0 = \partial_3$.

2. Variété autocommutante.

On supposera dans la suite de l'article que $\mathfrak{g}_0$ est une algèbre de Lie réductive dont le centre opère de manière semi-simple dans M. On suppose de plus qu'il existe un groupe réductif connexe G_0, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_0$, tel que l'action de $\mathfrak{g}_0$ dans $\mathfrak{g}_1$ et dans M s'intègre en une action de G_0.

Considérons les équations $[y, y] = 0$ dans $\mathfrak{g}_1$. Notons $C(A)$ l'ensemble des solutions. On appellera $C(A)$ le cône autocommutant de $\mathfrak{g}$. Soit A la sous-variété de $\mathbb{P}(\mathfrak{g}_1)$ correspondante.

DÉFINITION 2.1. — *La variété A que nous venons de définir s'appelle la variété autocommutante de la super algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.*

3. Complexe de Koszul associé aux équations $[y, y] = 0$.

On construit le complexe de Koszul associé aux quadriques dont $C(A)$ est intersection : on considère l'algèbre $\Lambda(\mathfrak{g}_0) \otimes S(\mathfrak{g}_1)$. Le crochet de Lie sur $\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_1$ donne une application

$$S^2(\mathfrak{g}_1) \longrightarrow \mathfrak{g}_0,$$

que l'on transpose en une application

$$\varphi : \mathfrak{g}_0^* \to S^2(\mathfrak{g}_1^*) \hookrightarrow S(\mathfrak{g}_1^*).$$

Par extension des scalaires, ceci donne une forme linéaire sur le $S(\mathfrak{g}_1^*)$-module $\mathfrak{g}_0^* \otimes S(\mathfrak{g}_1^*)$, que l'on étend en une dérivation de l'algèbre bigraduée $\Lambda(\mathfrak{g}_0^*) \otimes S(\mathfrak{g}_1^*)$, qui est de bidegré $(-1, 2)$ et de carré nul :

$$\kappa : \Lambda^k(\mathfrak{g}_0^*) \otimes S^l(\mathfrak{g}_1^*) \to \Lambda^{k-1}(\mathfrak{g}_0^*) \otimes S^{l+2}(\mathfrak{g}_1^*)$$

$$\kappa(u_1 \wedge \ldots \wedge u_k \otimes f_1 \ldots f_l) = \sum_i (-1)^{k-i} u_1 \wedge \ldots \wedge \hat{u}_i \wedge \ldots \wedge u_k \otimes \varphi(u_i) f_1 \ldots f_l.$$

Par ailleurs, la dérivation ∂_3 que nous avons définie précédemment ne fait pas intervenir le $\mathfrak{g}$-module M. Si l'on suppose M trivial, ∂_3 s'écrit :

$$\partial_3(x_1 \wedge \ldots \wedge x_{k-1} \otimes y_1 \ldots y_{l+2}) = \sum_{i<j} x_1 \wedge \ldots \wedge x_{k-1} \wedge [y_i, y_j] \otimes y_1 \ldots \hat{y}_i \ldots \hat{y}_j \ldots y_{l+2}.$$

LEMME 3.1. — *La différentielle κ est la transposée de ∂_3.*

Démonstration. — On calcule le produit scalaire :

$$(a) = (x_1 \wedge \ldots \wedge x_{k-1} \otimes y_1 \ldots y_{l+2}, \\ \sum_i (-1)^{k-i} u_1 \wedge \ldots \wedge \hat{u}_i \wedge \ldots \wedge u_k \otimes \varphi(u_i) f_1 \ldots f_l)$$

$$(a) = \sum_i (-1)^{k-i} (x_1 \wedge \ldots \wedge x_{k-1}, u_1 \wedge \ldots \wedge \hat{u}_i \wedge \ldots \wedge u_k). \\ (y_1 \ldots y_{l+2}, \varphi(u_i) f_1 \ldots f_l),$$

où les différents produits scalaires résultent des dualités naturelles entre $\Lambda^{k-1}(\mathfrak{g}_0)$ et $\Lambda^{k-1}(\mathfrak{g}_0^*)$ et entre $S^{l+2}(\mathfrak{g}_1)$ et $S^{l+2}(\mathfrak{g}_1^*)$.

Il nous faut démontrer que $(a) = (b)$, avec

$$(b) = \left(\sum_{i<j} x_1 \wedge \ldots \wedge x_{k-1} \wedge [y_i, y_j] \otimes y_1 \ldots \hat{y}_i \ldots \hat{y}_j \ldots y_{l+2}, \\ u_1 \wedge \ldots \wedge u_k \otimes f_1 \ldots f_l \right).$$

Il suffit de démontrer cette égalité pour les générateurs de $S(\mathfrak{g}_1)$, on peut donc limiter le calcul aux cas $f_1 \ldots f_l = f^l$ pour un certain $f \in \mathfrak{g}_1^*$ et $y_1 \ldots y_{l+2} = y^{l+2}$ pour un certain $y \in \mathfrak{g}_1$.

On a :

$$(a) = \sum_i (-1)^{k-i} D_i (y^{l+2}, \varphi(u_i) f^l),$$

où D_i désigne le mineur de la matrice $b_{mn} = (x_m, u_n)$, m et n parcourant l'ensemble $\{1, \ldots, \dim(\mathfrak{g}_0)\}$ le produit scalaire provenant de la dualité entre $\mathfrak{g}_0$ et $\mathfrak{g}_0^*$, à laquelle on a retiré la i-ème colonne.

Par ailleurs, on a :

$$(y^{l+2}, \varphi(u_i) f^l) = C_{l+2}^2 (y^2, \varphi(u_i)).l!(y, f)^l$$

$$(y^{l+2}, \varphi(u_i) f^l) = C_{l+2}^2 l! (u_i, [y, y]).(y, f)^l,$$

par définition de $\varphi(u_i)$. On a donc :

$$(a) = \left(\sum_i (-1)^{k-i} D_i (u_i, [y, y]) \right) l! C_{l+2}^2 (y, f)^l$$

$$(a) = \det\,(c_{mn}) l! C_{l+2}^2 (y,f)^l$$

où $c_{mn} = (x_m, u_n)$ si $m < k$ et $c_{kn} = ([y,y], u_n)$.

Calculons maintenant (b) :

$$(b) = \Big(\sum_{i<j} x_1 \wedge \ldots \wedge x_{k-1} \wedge [y,y], u_1 \wedge \ldots \wedge u_k\Big).(f^l, y^l).$$

Comme i et j correspondent à deux places de y dans y^{l+2}, on a :

$$(b) = C_{l+2}^2 (x_1 \wedge \ldots \wedge x_{k-1} \wedge [y,y], u_1 \wedge \ldots \wedge u_k).l!(f,y)^l$$

$(b) = \det(c_{mn}) l! C_{l+2}^2 (y,f)^l$

$(b) = (a)$. □

Complexe de Koszul associé à un fibré muni d'une section :

On donne maintenant une interprétation géométrique sur $\mathbb{P}(\mathfrak{g}_1)$ du complexe de Koszul ci-dessus.

Soit F un fibré vectoriel muni d'une section σ sur une variété algébrique X. On appelle complexe de Koszul associé à la section le complexe :

$$0 \to \Lambda^{\max}(F^*) \to \ldots \to \Lambda^2(F^*) \to F^* \to \mathcal{O}_X.$$

La différentielle est le produit intérieur par la section. On notera ce complexe $K_\bullet(\sigma)$. On notera, si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{O}_X$-module, $K_\bullet(\sigma, \mathcal{M}) = K_\bullet(\sigma) \otimes \mathcal{M}$.

L'application

$$S^2(\mathfrak{g}_1) \longrightarrow \mathfrak{g}_0$$

construite à partir du crochet de $\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_1$ permet de décrire une application $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathfrak{g}_1)}$-linéaire

$${}^t\tilde{f} : \mathfrak{g}_0^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathfrak{g}_1)} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathfrak{g}_1)}(2),$$

où $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathfrak{g}_1)}(2) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathfrak{g}_1)}(1) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathfrak{g}_1)}(1)$, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathfrak{g}_1)}(1)$ désignant le fibré tautologique. En effet, l'application transposée, $\mathfrak{g}_0^* \longrightarrow S^2(\mathfrak{g}_1^*)$ induit une application $\mathfrak{g}_0^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathfrak{g}_1)} \longrightarrow S^2(\mathfrak{g}_1^*) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathfrak{g}_1)}$. On la compose avec l'application d'évaluation

$$S^2(\mathfrak{g}_1^*) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathfrak{g}_1)} = H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathfrak{g}_1)}(2)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathfrak{g}_1)} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathfrak{g}_1)}(2)$$

pour obtenir ${}^t\tilde{f}$. On a

$$\tilde{f} : \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathfrak{g}_1)}(-2) \longrightarrow \mathfrak{g}_0 \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathfrak{g}_1)}.$$

On tensorise alors cette application par $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathfrak{g}_1)}(2)$, ce qui donne une application

$$f : \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathfrak{g}_1)} \longrightarrow \mathfrak{g}_0 \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathfrak{g}_1)}(2).$$

On a donc un fibré sur $\mathbb{P}(\mathfrak{g}_1)$ de fibre $\mathfrak{g}_0$ qui est muni d'une section, f. On utilise le complexe de Koszul $K_\bullet(f)$.

Rappelons que l'on a noté A la variété autocommutante de $\mathfrak{g}$.

LEMME 3.2. — *L'homologie de $K_\bullet(f)$ est à support dans A.*

Démonstration. — Soit x un point de $\mathbb{P}(\mathfrak{g}_1)$ qui n'est pas dans A, montrons que le complexe est acyclique en x. Soit $\mathcal{A} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathfrak{g}_1),x}$ l'anneau local de $\mathbb{P}(\mathfrak{g}_1)$ en x. Choisissons un générateur de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathfrak{g}_1)}(1)$ au voisinage de x : ceci permet d'identifier f avec un élément de $\mathfrak{g}_0 \otimes \mathcal{A}$ qu'on regarde comme une suite $f_1, \dots, f_d$ d'éléments de $\mathcal{A}$ (on a noté d la dimension de $\mathfrak{g}_0$). Par hypothèse, $f_1, \dots, f_d$ ne s'annulent pas tous en x et donc ils n'appartiennent pas tous à l'idéal maximal de $\mathcal{A}$. On peut donc trouver des éléments $g_1, \dots, g_d$ dans $\mathcal{A}$ tels que $f_1 g_1 + \dots + f_d g_d = 1$. La multiplication extérieure par $g_1 \dots g_d$ dans $\Lambda(\mathcal{A}^d)$ donne une homotopie du complexe de Koszul $K_\bullet(f)$ en x, donc celui-ci est acyclique en x.

Rappelons une définition due à Mumford ([MuFo], p. 148) :

DÉFINITION 3.1. — *Soit G_0 un groupe de Lie réductif complexe et soit V une variété dans laquelle G_0 opère algébriquement. Soit $\mathcal{L}$ un faisceau ample sur V sur lequel G_0 opère. On dit qu'un point $v \in V$ est instable pour $\mathcal{L}$ si toutes les sections G_0-invariantes des puissances tensorielles de $\mathcal{L}$ sont nulles en v.*

THÉORÈME 3.1. — *Soit V une G_0-variété projective, soit $\mathcal{L}$ un faisceau inversible ample et G_0-linéarisé sur V et soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent G_0-équivariant sur V à support dans les points instables pour $\mathcal{L}$. Alors la partie G_0-invariante de la cohomologie de $\mathcal{F}(l) = \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes l}$ est nulle pour l assez grand.*

Démonstration du théorème. — Par le théorème d'annulation de Serre ([Ha], Th. III.5.2), on sait que $H^i(\mathcal{F}(l))$ est nul pour $i > 0$ et $l >> 0$. Il reste à voir que pour l assez grand, il n'y a pas de section G_0-invariante de $\mathcal{F}(l)$. On sait que $\mathcal{F}$ est à support dans V, mais on ne sait pas a priori que c'est un $\mathcal{O}_V$-module. Par contre, le théorème des zéros de Hilbert assure que si I est le faisceau d'idéaux définissant V dans l'espace projectif dans lequel V est plongé, ($\mathcal{O}_V = \mathcal{O}_{\mathbb{P}}/I$), il existe un entier d tel que $I^d\mathcal{F} = 0$. Si l'on considère la suite des $I^j\mathcal{F}/I^{j+1}\mathcal{F}$, on obtient une filtration de $\mathcal{F}$ qui est finie. Chacun des quotients successifs de cette filtration est un $\mathcal{O}_V$-module, muni d'une action de G_0 car I est G_0-invariant. Il suffit donc de démontrer le théorème pour un $\mathcal{O}_V$-module, on supposera que $\mathcal{F}$ en est un.

Soit $\mathcal{G}$ le sous-faisceau de $\mathcal{F}$ engendré par les images des morphismes $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-k) \to \mathcal{F}$ qui correspondent à des sections invariantes de $\mathcal{F}(k)$. On obtient ainsi un faisceau cohérent (car $\mathbb{P}$ est noethérien). On peut donc engendrer $\mathcal{G}$ par un nombre fini d'applications du type précédent (i.e. $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-k) \to \mathcal{F}$, G_0-invariante), ce qui nous donne un morphisme d'image $\mathcal{G}$:

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-k_1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-k_2) \oplus \ldots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-k_i) \to \mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{F}.$$

Comme $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{O}_V$-module, $\mathcal{G}$ est un $\mathcal{O}_V$-module et on peut donc remplacer $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-k_1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-k_2) \oplus \ldots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-k_i)$ par $\mathcal{O}_V(-k_1)\oplus\mathcal{O}_V(-k_2)\oplus \ldots \oplus \mathcal{O}_V(-k_i)$. On notera φ le morphisme

$$\varphi : \mathcal{O}_V(-k_1) \oplus \mathcal{O}_V(-k_2) \oplus \ldots \oplus \mathcal{O}_V(-k_i) \longrightarrow \mathcal{G}$$

il est G_0-invariant.

Soit $\mathcal{N} = \mathrm{Ker}(\varphi)$, $\mathcal{N}$ est un $\mathcal{O}_V$-module cohérent. Par le théorème d'annulation de Serre, $H^1(\mathcal{N}(l))$ est nul pour l suffisamment grand. On en déduit, en passant par la suite exacte longue de cohomologie déduite de φ, l'existence d'une surjection G_0-linéaire

$$H^0(\mathcal{O}_V(l-k_1) \oplus \ldots \oplus \mathcal{O}_V(l-k_i)) \longrightarrow H^0(\mathcal{G}(l)).$$

Or $H^0(\mathcal{O}_V(l-k_1)\oplus\ldots\oplus\mathcal{O}_V(l-k_i)) \simeq H^0(\mathcal{O}_V(l-k_1))\oplus\ldots\oplus H^0(\mathcal{O}_V(l-k_i))$. Or le seul k tel que $H^0(\mathcal{O}_V(k))^{G_0}$ soit non nul est $k = 0$ par hypothèse.

Pour l assez grand, $H^0(\mathcal{O}_V(l-k_j))^{G_0} = 0$ pour tout j, donc $H^0(\mathcal{G}(l))^{G_0} = 0$, donc $H^0(\mathcal{F}(l))^{G_0} = 0$, cqfd. □

Introduisons l'hypothèse suivante sur la super algèbre de Lie $\mathfrak{g}$: la variété autocommutante A de $\mathfrak{g}$ est formée de points instables pour le faisceau ample $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathfrak{g}_1)}(1)$. On dira alors simplement que les points de A sont instables, autrement dit le cône $C(A)$ dans $\mathfrak{g}_1$ ne contient qu'une seule orbite fermée sous l'action de G_0, à savoir $\{0\}$.

Le théorème a l'énoncé suivant dans cette situation :

COROLLAIRE. — *Supposons que les points de A sont instables. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathfrak{g}_1)}$, on suppose $\mathcal{F}$ à support dans A et muni d'une action de G_0. La partie $\mathfrak{g}_0$-invariante de la cohomologie de $\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathfrak{g}_1)}(l) = \mathcal{F}(l)$ est nulle pour l assez grand.*

4. Finitude de l'homologie.

Reprenons la suite spectrale associée au module différentiel filtré du paragraphe 1. Nous avons vu avec le lemme 3.1 qu'au stade E_0 (rappelons que $E_0^p = \Lambda_p(\mathfrak{g}) \otimes M$ muni de la différentielle $d_0 = \partial_3$), c'est le transposé du complexe de Koszul associé aux quadriques $[y, y] = 0$ après tensorisation par le module M. Cette tensorisation n'a pas d'incidence car, comme nous l'avons vu, la différentielle ∂_3 ne fait pas intervenir la structure de $\mathfrak{g}$-module de M.

On peut écrire E_0^p comme le complexe suivant :

$$\Lambda^0(\mathfrak{g}_0) \otimes S^p(\mathfrak{g}_1) \otimes M \to \Lambda^1(\mathfrak{g}_0) \otimes S^{p-2}(\mathfrak{g}_1) \otimes M \to \\ \dots \to \Lambda^{\dim(\mathfrak{g}_0)}(\mathfrak{g}_0) \otimes S^{p-2\dim(\mathfrak{g}_0)}(\mathfrak{g}_1) \otimes M.$$

L'aboutissement de la suite spectrale en question est exactement l'homologie de $\mathfrak{g}$ à valeurs dans M. On sait a priori que l'homologie de $\mathfrak{g}$ à valeurs dans M est $\mathfrak{g}_0$-invariante.

Par ailleurs, $\mathfrak{g}_0$ agit sur chacun des termes de la suite spectrale et commute avec ∂ (la différentielle totale du complexe de Koszul). On peut donc remplacer la suite spectrale (E_0^p, d_0) par sa partie $\mathfrak{g}_0$-invariante : on peut faire tout ceci car on a supposé $S(\mathfrak{g}_1) \otimes M$ semi-simple comme $\mathfrak{g}_0$-module. Donc chaque terme de la suite spectrale $\mathfrak{g}_0$-invariante est formé de $\mathfrak{g}_0$-modules semi-simples.

On supposera dans la suite de ce paragraphe que les points de A sont instables. Considérons «l'hypercohomologie» du complexe de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathfrak{g}_1)}$-modules de $K_\bullet(f) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathfrak{g}_1)}(i) \otimes M$, c'est-à-dire l'aboutissement de la suite spectrale obtenue en prenant des résolutions flasques de tous les termes de ce complexe de faisceaux. On la notera $\mathbb{H}^*(K_\bullet(f) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathfrak{g}_1)}(i) \otimes M)$. On considère que les résolutions flasques forment les colonnes du bicomplexe.

LEMME 4.1. — *Pour i assez grand, on a :*

$$(\mathbb{H}^*(K_\bullet(f) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathfrak{g}_1)}(i) \otimes M))^{\mathfrak{g}_0} = 0.$$

Démonstration. — Considérons la suite spectrale obtenue en filtrant horizontalement le bicomplexe ci-dessus : le terme $E_2^{p,q}(i)$ s'écrit $H^p(H_q(K_\bullet(f)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathfrak{g}_1)}(i) \otimes M)$. Sa partie $\mathfrak{g}_0$-invariante est nulle d'après le lemme 3.2 et le théorème 3.1, car on a supposé que G_0 agit algébriquement dans $S(\mathfrak{g}_1) \otimes M$.

Si maintenant on considère la suite spectrale obtenue avec le même bicomplexe filtré cette fois-ci verticalement, elle aura le même aboutissement, et ce sont les $\mathfrak{g}_0$-invariants du terme $E_2(i)$ de celle-ci qui nous intéressent.

Comme la première opération sur cette nouvelle suite spectrale consiste à faire agir le foncteur «sections globales», le terme $E_1(i)$ s'écrit

$$E_1^{-p,q} = \Lambda^p(\mathfrak{g}_0) \otimes H^q(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathfrak{g}_1)}(i-2p)) \otimes M.$$

(L'indexation est due au fait que l'on prend l'homologie et non la cohomologie.) Pour i assez grand et $q \geqslant 1$, on applique le théorème d'annulation de Serre. Ceci démontre que la suite spectrale dégénère, et, d'après le lemme 4.1 les parties $\mathfrak{g}_0$-invariantes des termes $E_2^{p,q}(i)$ sont nulles.

On a donc démontré le théorème suivant :

THÉORÈME 4.1. — *Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ une super algèbre de Lie dont la partie paire est réductive, soit G_0 un groupe algébrique réductif connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_0$, soit M un $\mathfrak{g}$-module de dimension finie tel que $\mathfrak{g}_0$ opère de manière semi-simple dans M. On suppose que l'action de $\mathfrak{g}_0$ dans $\mathfrak{g}_1$ et M s'intègre en une action de G_0 (i.e. la différentielle de l'action de G_0 est l'action de $\mathfrak{g}_0$). Supposons de plus que la variété autocommutante est formée de points instables pour le faisceau ample $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathfrak{g}_1)}(1)$ relativement au groupe G_0 (i.e. on suppose que tout polynôme G_0-invariant homogène de degré strictement positif sur $\mathfrak{g}_1$ est nul sur $C(A)$). Alors l'homologie de $\mathfrak{g}$ à valeurs dans M est de dimension finie.*

5. Application à certaines super algèbres de Lie simples à partie paire réductive.

Soit $\mathfrak{g}$ l'une des super algèbres de Lie simples à partie paire réductive $\mathfrak{osp}(m,2n)$, $\mathfrak{sl}(m,n), m \neq n$, $G(3)$, $F(4)$ et $D(2,1,\lambda)$. Dans chaque cas, on construit G_0. Dans un premier temps, nous donnons une description du morphisme

$$\alpha : S(\mathfrak{g}_0^*)^{\mathfrak{g}_0} \longrightarrow S(\mathfrak{g}_1^*)^{\mathfrak{g}_0}$$

qui prolonge l'application de $\mathfrak{g}_0^*$ dans $S^2(\mathfrak{g}_1^*)$ déduite par transposition du crochet de Lie sur $\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_1$. Ceci permet d'avoir une description explicite de $S(\mathfrak{g}_1^*)^{\mathfrak{g}_0}$ dans chaque cas.

On examine alors la variété autocommutante de chaque super algèbre de Lie et on déduit de l'étude précédente que dans chaque cas elle est formée de points instables pour le faisceau ample $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathfrak{g}_1)}(1)$ (relativement à l'action de G_0). On peut alors appliquer le théorème 4.1 à ces algèbres.

Le calcul des anneaux d'invariants permet de reprendre la démonstration de Fuks ([Fu]) pour le calcul de la cohomologie à valeurs dans le module trivial et de donner les résultats pour les super algèbres de Lie exceptionnelles.

Remarquons enfin que si $\mathfrak{g}_0$ est une algèbre de Lie semi-simple, i.e. si $\mathfrak{g} = \mathfrak{osp}(m, 2n)$, $m \neq 2$, $G(3)$, $F(4)$ ou $D(2,1,\lambda)$, le groupe G_0 d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_0$ qui est connexe et simplement connexe agit dans tout $\mathfrak{g}$-module M de dimension finie avec une action dont la différentielle est l'action de $\mathfrak{g}_0$. On peut alors appliquer le théorème 4.1 et en conclure que l'homologie de $\mathfrak{g}$ à valeurs dans M est toujours de dimension finie.

Le théorème 4.1 s'applique donc à toutes les super algèbres de Lie simples à forme de Killing non dégénérée et aux super algèbres de type $\mathfrak{osp}(2m+2, 2m)$ et $D(2,1,\lambda)$.

5.1. Anneaux d'invariants.

Soit $\mathfrak{g}$ l'une des super algèbres de Lie suivantes : $\mathfrak{gl}(m,n)$, $\mathfrak{osp}(m,2n)$, $\mathfrak{sl}(m,n)$, $n \neq m$, $F(4)$, $G(3)$, et $D(2,1,\lambda)$. Le but de ce paragraphe est d'étudier l'homomorphisme

$$\alpha : S(\mathfrak{g}_0^*)^{\mathfrak{g}_0} \longrightarrow S(\mathfrak{g}_1^*)^{\mathfrak{g}_0}$$

qui prolonge l'application de $\mathfrak{g}_0^*$ dans $S^2(\mathfrak{g}_1^*)$ déduite par transposition du crochet de Lie sur $\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_1$. On notera $R = S(\mathfrak{g}_0^*)^{\mathfrak{g}_0}$ et $S = S(\mathfrak{g}_1^*)^{\mathfrak{g}_0}$.

THÉORÈME 5.1. — *Soit $\mathfrak{g}$ l'une des super algèbres de Lie $\mathfrak{gl}(m,n)$, $\mathfrak{osp}(m,2n)$, $F(4)$, $G(3)$, $D(2,1,\lambda)$. Alors le morphisme α est surjectif.*

Démonstration. — Nous traiterons d'abord les cas classiques, $\mathfrak{gl}(m,n)$ et $\mathfrak{osp}(m,2n)$, en utilisant la théorie des invariants des groupes classiques (voir [We], ou [Vu] pour une référence plus récente). En effet, les résultats de [Vu] peuvent s'extraire de [We] mais [Vu] est beaucoup plus accessible...

Le cas de $\mathfrak{gl}(m,n)$.

On a $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{gl}(m) \times \mathfrak{gl}(n)$ et $G_0 = GL(m) \times GL(n)$. On supposera $m \leqslant n$. Soit V (resp. W) la représentation standard de $\mathfrak{gl}(m)$ (resp. $\mathfrak{gl}(n)$). Alors $\mathfrak{g}_1 = \mathrm{Hom}(V,W) \oplus \mathrm{Hom}(W,V)$. D'après le théorème 3 de [Vu], on a : $S(\mathfrak{g}_1^*)^{GL_n} = S(\mathrm{End}(V))$ car $m \leqslant n$, l'identification se faisant par l'intermédiaire de l'application

$$\mathfrak{g}_1 \longrightarrow \mathrm{End}(V)$$
$$(u,v) \mapsto v \circ u.$$

Il en résulte que $S(\mathfrak{g}_1^*)^{\mathfrak{g}_0} = S(\mathrm{End}(V))^{GL_m}$.

On sait d'autre part que $S(\mathrm{End}(V))^{GL_m}$ est un anneau de polynômes en m variables, l'identification se faisant en associant à $x \in \mathrm{End}(V)$ les coefficients du polynôme caractéristique de x. Il en résulte que $S(\mathfrak{g}_1^*)^{\mathfrak{g}_0}$ est un anneau de polynômes en m variables, l'identification associant au couple (u,v) les coefficients $(s_1,\dots,s_m)$ du polynôme caractéristique de $v \circ u$.

D'autre part, on sait que $S(\mathfrak{g}_0^*)^{\mathfrak{g}_0}$ est l'anneau de polynômes $\mathbb{C}[\sigma_1,\dots,\sigma_m,\tau_1,\dots,\tau_n]$ où les σ_i (resp. τ_j) sont les coefficients du polynôme caractéristique dans $\mathfrak{gl}(m)$ (resp. $\mathfrak{gl}(n)$).

L'homomorphisme α vérifie $\alpha(\sigma_i) = s_i = \alpha(\tau_i)$ pour $1 \leqslant i \leqslant m$, et $\alpha(\tau_j) = 0$ pour $j > m$. D'où l'assertion.

Le cas de $\mathfrak{osp}(m,2n)$.

On a $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{o}(m) \times \mathfrak{sp}(2n)$ et $\mathfrak{g}_1 = V \otimes W$ où V (resp. W) désigne la représentation standard de $\mathfrak{o}(m)$ (resp. $\mathfrak{sp}(2n)$). Un élément de $\mathfrak{g}_1$, u, est une application linéaire de V^* dans W. On définit un élément u^* dans $V^* \otimes W^*$: la forme symplectique (resp. quadratique) identifie W à W^* (resp. V à V^*). On a ainsi un isomorphisme de $V \otimes W$ dans $V^* \otimes W^*$ et u^* est l'image de u par cette application.

Nous devons distinguer deux cas : $2n \geqslant m$ et $m > 2n$. Dans le premier cas, $2n \geqslant m$, on applique le théorème 2 de [Vu] à l'action du groupe $Sp(2n)$ sur $V \otimes W = \mathfrak{g}_1$: le quotient par cette action s'identifie à $S(\Lambda^2(V))$ au moyen de l'application

$$\mathfrak{g}_1 = V \otimes W \longrightarrow \Lambda^2(V)$$

définie comme suit : Soit $u \in \mathrm{Hom}(V^*, W) = \mathfrak{g}_1$, on lui associe l'image de la forme symplectique sur W (considérée comme un élément de $\Lambda^2(W^*)$) par la transposée de l'application $\Lambda^2 u : \Lambda^2(V^*) \to \Lambda^2(W)$. On obtient ainsi un élément de $\Lambda^2(V)$. Celui-ci n'est autre que u^*u, lequel appartient à la composante $\Lambda^2(V)$ de $V \otimes V$, identifié à $\mathrm{End}(V^*)$ via la forme quadratique.

Ceci démontre que l'application $u \mapsto u^*u$ induit une surjection de $S(\mathfrak{g}_0^*)^{Sp(2n)}$ sur $S(\mathfrak{g}_1^*)^{Sp(2n)}$. Il en résulte que α est surjectif en prenant le quotient par l'action de $SO(m)$.

Remarquons de plus que $\Lambda^2(V)$ est la représentation adjointe du groupe $SO(m)$: le théorème de Chevalley nous donne alors la description de $S(\mathfrak{g}_1^*)^{\mathfrak{g}_0}$ comme anneau de polynômes.

Le cas $m > 2n$ se traite de façon identique en échangeant les rôles de V et W et en utilisant le théorème 1 de [Vu].

Nous traitons maintenant les cas exceptionnels $F(4)$, $G(3)$, $D(2,1,\lambda)$.

Rappels sur les super algèbres de Lie exceptionnelles.

Parmi les super algèbres de Lie admettant un produit scalaire invariant non dégénéré, on trouve deux super algèbres de Lie exceptionnelles, $G(3)$ et $F(4)$, et une famille à un paramètre de déformations de $\mathfrak{osp}(4,2)$, $D(2,1,\lambda)$. Décrivons la structure de ces super algèbres de Lie ([Se]).

Soit $\mathfrak{g} = F(4)$. On a $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{o}(7) \times \mathfrak{sl}(2)$, $\mathfrak{g}_1 = V \otimes W$ où V (resp. W) désigne la représentation spinorielle de $\mathfrak{o}(7)$ (resp. la représentation standard de $\mathfrak{sl}(2)$). Il faut décrire l'application $S^2(\mathfrak{g}_1) \to \mathfrak{g}_0$ provenant du crochet. On a $S^2(\mathfrak{g}_1) = S^2(V) \otimes S^2(W) \oplus \Lambda^2(V) \otimes \Lambda^2(W)$.

Soit Q une forme quadratique $\mathfrak{o}(7)$-invariante sur V. On peut alors écrire $\Lambda^2(V) = \mathfrak{o}(7) \oplus \mathbb{C}^7$ où $\mathbb{C}^7$ désigne la représentation standard de $\mathfrak{o}(7)$. De plus, Q définit une application linéaire que l'on notera encore Q de $S^2(V)$ dans $\mathbb{C}$. On choisit une identification de $\Lambda^2(W)$ avec $\mathbb{C}$, d'où une identification de $S^2(W)$ à $\mathfrak{sl}(2)$. On peut donc écrire

$$S^2(\mathfrak{g}_1) = S^2(V) \otimes \mathfrak{sl}(2) \oplus (\mathfrak{o}(7) \oplus \mathbb{C}^7) \otimes \mathbb{C}.$$

L'application qui a pour matrice par blocs $\begin{pmatrix} Q \otimes 1 & 0 \\ 0 & \textit{1ère projection} \end{pmatrix}$ envoie $S^2(\mathfrak{g}_1)$ dans $(\mathbb{C} \otimes \mathfrak{sl}(2)) \oplus (\mathfrak{o}(7) \otimes \mathbb{C}) = \mathfrak{g}_0$, ce qui définit le crochet.

Soit $\mathfrak{g} = G(3)$. On notera $\mathfrak{g}_2$ l'algèbre de Lie du groupe de Lie exceptionnel G_2. On a $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_2 \times \mathfrak{sl}(2)$, $\mathfrak{g}_1 = V \otimes W$ où V (resp. W) désigne la représentation standard de $\mathfrak{g}_2$ dans $\mathbb{C}^7$ (resp. de $\mathfrak{sl}(2)$ dans $\mathbb{C}^2$). On a $S^2(\mathfrak{g}_1) = S^2(V) \otimes S^2(W) \oplus \Lambda^2(V) \otimes \Lambda^2(W)$. Notons Q une forme quadratique $\mathfrak{g}_2$-invariante sur V, on a $\Lambda^2(V) = \mathfrak{g}_2 \oplus V$ comme $\mathfrak{g}_2$-module. De plus, $S^2(V)$ s'envoie par Q sur $\mathbb{C}$. On identifie $\Lambda^2(W)$ à $\mathbb{C}$, d'où une identification de $S^2(W)$ à $\mathfrak{sl}(2)$. L'application qui a pour matrice par blocs $\begin{pmatrix} Q\otimes 1 & 0 \\ 0 & \textit{1ère projection} \end{pmatrix}$ définit, comme dans le cas de $F(4)$, le crochet cherché.

Soit $\mathfrak{g} = D(2,1,\lambda)$. On a $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{sl}(2)\times\mathfrak{sl}(2)\times\mathfrak{sl}(2)$ et $\mathfrak{g}_1 = V_1\otimes V_2\otimes V_3$ où V_i désigne la représentation standard du i-ème facteur $\mathfrak{sl}(2)$. On a :

$S^2(\mathfrak{g}_1) = (S^2(V_1)\otimes S^2(V_2)\otimes S^2(V_3))\oplus(S^2(V_1)\otimes\Lambda^2(V_2)\otimes\Lambda^2(V_3))\oplus(\Lambda^2(V_1)\otimes S^2(V_2)\otimes\Lambda^2(V_3))\oplus(\Lambda^2(V_1)\otimes\Lambda^2(V_2)\otimes S^2(V_3))$.

$S^2(\mathfrak{g}_1) = (S^2(V_1)\otimes S^2(V_2)\otimes S^2(V_3))\oplus[(\Lambda^2(V_1)\otimes\Lambda^2(V_2)\otimes\Lambda^2(V_3))\otimes(\mathfrak{sl}(2)\oplus\mathfrak{sl}(2)\oplus\mathfrak{sl}(2))]$.

On identifie $\Lambda^2(V_1)\otimes\Lambda^2(V_2)\otimes\Lambda^2(V_3)$ à $\mathbb{C}$. Si l'on compose alors la seconde projection avec une matrice 3×3 inversible et diagonale, on définit un crochet, qui vérifie l'identité de Jacobi si et seulement si la trace de cette matrice est nulle.

Démontrons le résultat dans ces cas-là : on utilise la notion de «représentation visible» introduite par Kac dans [Ka2] : soit H un groupe réductif, un H-module M est dit visible si la nilvariété de M, i.e. l'ensemble des points qui annulent simultanément tous les H-invariants de $S(M^*)$ sans terme constant, est réunion finie d'orbites. Kac démontre qu'alors $S(M^*)^H$ est un anneau de polynômes si M est irréductible et donne dans chaque cas le degré des générateurs. Des tables de modules visibles sont dressées dans [Ka2] et rectifiées dans [DaKa]. On vérifie que le $\mathfrak{g}_0$-module $\mathfrak{g}_1$ est visible dans chacun des cas qui nous occupe : $D(2,1,\lambda)$ et $F(4)$ sont dans la table III (rappelons que $F(4)$ a pour partie paire $\mathfrak{sl}(2)\times\mathfrak{o}(7)$ et pour partie impaire $\mathbb{C}^2\otimes\mathrm{Spin}\,(7)$, ce que Kac abrège en $\mathfrak{sl}(2)\otimes\mathrm{Spin}\,(7)$). L'algèbre $G(3)$ se trouve dans la table IV sous la forme abrégée $G_2\otimes\mathfrak{sl}(2)$. Dans chacun de ces cas, le nombre de générateurs de $S(\mathfrak{g}_1^*)^{\mathfrak{g}_0}$ est égal à 1 et le degré de ce générateur est 4.

D'autre part, chacune de ces super algèbres de Lie a au moins un facteur $\mathfrak{sl}(2)$ dans sa partie paire. On peut donc, si l'on note Ω l'opérateur de Casimir de $\mathfrak{sl}(2)$, considérer l'opérateur $1\otimes\Omega$ dans $S(\mathfrak{g}_0)^{\mathfrak{g}_0}$ dans les cas $F(4)$ et $G(3)$ et l'opérateur $\Omega\otimes 1\otimes 1$ dans le cas de $D(2,1,\lambda)$. On vérifie que l'image de cet opérateur par le morphisme α est non nulle (rappelons que $1\otimes\Omega$ est de degré 2, et donc son image par α est de degré 4) (on a identifié ici $\mathfrak{g}_0$ et $\mathfrak{g}_0^*$), d'où le théorème. □

5.2. Variétés autocommutantes.

THÉORÈME 5.2. — *La variété autocommutante des super algèbres de Lie suivantes est formée de points instables pour le faisceau ample* $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathfrak{g}_1)}(1)$ *relativement à l'action de* G_0 : $\mathfrak{gl}(m,n)$, $\mathfrak{osp}(m,2n)$, $\mathfrak{sl}(m,n)$, $n \neq m$, $F(4)$, $G(3)$, *et* $D(2,1,\lambda)$.

Démonstration. — Le morphisme

$$\alpha : S(\mathfrak{g}_0^*)^{\mathfrak{g}_0} \longrightarrow S(\mathfrak{g}_1^*)^{\mathfrak{g}_0}$$

$$f \mapsto (x \mapsto f([x,x]))$$

est toujours surjectif dans les cas considérés. Soit P un élément non constant de $S(\mathfrak{g}_1^*)^{\mathfrak{g}_0}$, on a $P = \alpha(Q)$ avec $Q \in S(\mathfrak{g}_0^*)^{\mathfrak{g}_0}$. Donc P est nul sur A.

5.3. Cohomologie de certaines super algèbres de Lie simples à valeurs dans le module trivial.

Reprenons le complexe de Koszul décrit au paragraphe 1. On utilise cette fois-ci la filtration par des puissances croissantes de l'algèbre extérieure de la partie paire : on obtient ainsi la suite spectrale de Hochschild-Serre correspondant à notre situation. On se place en cohomologie. La numérotation canonique de la suite spectrale de Hochschild-Serre nous donne ici : $E_1^{p,q} = H^q(\mathfrak{g}_0, S^p(\mathfrak{g}_1)) = H^q(\mathfrak{g}_0, \mathbb{C}) \otimes (S^p(\mathfrak{g}_1)^*)^{\mathfrak{g}_0}$. D'après ce que nous avons vu précédemment, dans chaque cas $\bigoplus_{p,q} E_1^{p,q}$ est canoniquement muni d'une structure d'algèbre bigraduée isomorphe au produit d'une algèbre extérieure (la cohomologie de la partie paire) par une algèbre symétrique $(S(\mathfrak{g}_1^*)^{\mathfrak{g}_0})$. Nous savons également que les générateurs de l'algèbre extérieure sont tous de degré impair et les générateurs de la partie symétrique sont tous de degré pair. Or le complexe de Koszul donnant naissance à cette suite spectrale est une algèbre différentielle graduée, munie d'une filtration qui est compatible avec cette structure d'algèbre. Chaque étape de la suite spectrale sera donc une algèbre différentielle graduée, en particulier $\bigoplus_{p,q} E_1^{p,q}$.

Le lemme qui suit permet de démontrer par récurrence que les étapes successives de la suite spectrale sont, dans certains cas, des produits tensoriels d'algèbres symétriques par des algèbres extérieures.

LEMME 5.1. — *Soit* $R = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_p] \otimes \Lambda(\xi_1, \ldots, \xi_q)$ *le produit tensoriel d'une algèbre symétrique dont tous les générateurs, ordonnés par degré croissant, sont de degré pair, par une algèbre extérieure dont tous les générateurs, ordonnés par degré croissant, sont de degré impair. Soient* $x_1, \ldots, x_k$ *les générateurs de degré minimal* d *de la partie symétrique.*

Soit δ *un entier impair. Supposons que* R *est munie d'une différentielle* D, *bihomogène, de bidegré* $(d, -\delta)$, *telle qu'il existe des générateurs* $\xi_{i_1}, \ldots \xi_{i_k}$ *de l'algèbre extérieure, de degré* δ, *tels que* $D\xi_{i_j} = x_j$.

Alors, quitte à modifier les générateurs ξ_j *avec* $j \neq i_1, \ldots, i_k$, *on a* $D\xi_j = 0$. *De plus la cohomologie* $\mathrm{Ker}(D)/\mathrm{Im}(D)$ *est l'algèbre* $\mathbb{C}[X_{k+1}, \ldots, X_p] \otimes \Lambda(\eta_1, \ldots, \hat{\eta_{i_j}}, \ldots, \eta_q)$ *où* X_j *désigne la classe de* x_j *et* η_j *la classe de* ξ_j.

Démonstration. — La démonstration se fait par récurrence sur $q \geqslant i_k$. Pour $q < i_k$, l'énoncé est vide.

Remarquons que D laisse la sous-algèbre $\mathbb{C}[x_1, ..., x_p] \otimes \Lambda(\xi_1, ..., \xi_{q-1})$ stable, puisque $\deg(\xi_i) \leqslant \deg(\xi_q)$ pour tout i et que D diminue strictement le degré de la puissance extérieure. Par hypothèse de récurrence, on peut donc supposer que $D(\xi_j) = 0$ si $j \neq i_1, \ldots, i_k$ et $j \neq q$. Le bidegré de l'élément $D\xi_q$ est $(d, \deg(\xi_q) - \delta)$. On décompose $D\xi_q$ dans la base choisie de R :

$$D\xi_q = \sum_{l=1}^{k} P_l x_l$$

avec $P_l \in \Lambda(\xi_1, \ldots, \xi_{q-1})$. On écrit alors que $D^2\xi_q = 0$:

$0 = \sum_{l=1}^{k} D(P_l)x_l$ car $D(x_l) = 0$ pour $l = 1, \ldots, k$ puisque D diminue strictement le degré de la partie extérieure. Donc $0 = \sum_{l=1}^{k} x_l \sum_{j=1}^{q-1} \frac{\partial P_l}{\partial \xi_j} D\xi_j$, où $\frac{\partial}{\partial \xi_j}$ est la dérivation de l'algèbre extérieure telle que $\frac{\partial \xi_i}{\partial \xi_j} = \delta_{ij}$. Or $D\xi_j = 0$ si $j \neq i_1, \ldots, i_k$. Donc on a :

$$0 = \sum_{l=1}^{k} x_l \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial P_l}{\partial \xi_{i_j}} D\xi_{i_j}$$

$$0 = \sum_{l=1}^{k} x_l \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial P_l}{\partial \xi_j} x_j,$$

ce que l'on peut écrire $\frac{\partial P_l}{\partial \xi_{i_j}} + \frac{\partial P_j}{\partial \xi_{i_l}} = 0$, pour j, l variant entre 1 et k. Il existe donc un élément Q de $\Lambda(\xi_1, \ldots, \xi_{q-1})$ tel que $P_l = \frac{\partial Q}{\partial \xi_{i_l}}$ pour tout l (exactitude du complexe de Koszul pour l'algèbre extérieure). On a donc $D\xi_q = \sum_{l=1}^{k} x_l \frac{\partial Q}{\partial \xi_{i_l}} = D(Q)$.

Donc $D(\xi_q - Q) = 0$ et, en remplaçant ξ_q par $\xi_q - Q$, on a la première assertion du lemme. La seconde assertion est alors claire. □

Introduisons, comme le fait Fuks, l'algèbre de Weil de la partie paire $\mathfrak{g}_0$: il s'agit du produit tensoriel $\mathbb{S}(\mathfrak{g}_0^*) \otimes \Lambda(\mathfrak{g}_0^*)$, où $\mathbb{S}(\mathfrak{g}_0^*)$ désigne l'algèbre symétrique de $\mathfrak{g}_0^*$ munie de la graduation $\mathbb{S}^{2i}(\mathfrak{g}_0^*) = S^i(\mathfrak{g}_0^*)$ et $\mathbb{S}^{2i+1}(\mathfrak{g}_0^*) = 0$. On notera $W(\mathfrak{g}_0)$ cette algèbre qui est super commutative libre. Remarquons que, comme super espace vectoriel, $W(\mathfrak{g}_0)$ est une super algèbre symétrique sur le super espace vectoriel $\mathbb{S}^2(\mathfrak{g}_0^*) \otimes \Lambda^1(\mathfrak{g}_0^*)$ (les deux facteurs sont isomorphes à $\mathfrak{g}_0^*$ mais ont une parité différente). On munit $W(\mathfrak{g}_0)$ de la dérivation impaire D, que l'on décrit sur les générateurs de la super algèbre symétrique : le crochet sur $\mathfrak{g}_0$ est une application linéaire de $\Lambda^2(\mathfrak{g}_0)$ dans $\mathfrak{g}_0$. Si on la transpose, on obtient une application linéaire de $\Lambda^1(\mathfrak{g}_0^*) = \mathfrak{g}_0^*$ dans $\Lambda^2(\mathfrak{g}_0^*)$ que l'on notera γ. On notera de plus δ l'application identique de $\Lambda^1(\mathfrak{g}_0^*)$ dans $\mathbb{S}^2(\mathfrak{g}_0^*)$. Enfin, on note ε l'application de $\mathbb{S}^2(\mathfrak{g}_0^*)$ dans $\mathbb{S}^2(\mathfrak{g}_0^*) \otimes \Lambda^1(\mathfrak{g}_0^*)$ transposée du crochet vu comme une application linéaire $\mathfrak{g}_0 \otimes \mathfrak{g}_0 \to \mathfrak{g}_0$.

Soit $w \in \Lambda^1(\mathfrak{g}_0^*)$, $D(w) = 2\delta(w) - \gamma(w)$.

Soit $w' \in \mathbb{S}^2(\mathfrak{g}_0^*)$, $D(w') = \varepsilon(w')$.

On a alors $D^2 = 0$. On sait donc que $W(\mathfrak{g}_0)$ est une algèbre différentielle graduée. L'algèbre de Weil possède une propriété universelle que nous n'expliciterons pas en général ici, nous limitant au cas du complexe de Koszul cohomologique de la super algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, $(\Lambda^\bullet(\mathfrak{g}^*), d)$. Décrivons sur les générateurs un morphisme d'algèbres différentielles graduées, Ω, de $(W(\mathfrak{g}_0), D)$ dans $(\Lambda^\bullet(\mathfrak{g}^*), d)$:

Si $w \in \Lambda^1(\mathfrak{g}_0^*)$, $\Omega(w) = w \in \Lambda^1(\mathfrak{g}_0^*)$.

Si $w' \in \mathbb{S}^2(\mathfrak{g}_0^*)$, $\Omega(w') = \varphi(w') \in S^2(\mathfrak{g}_1^*)$ (on a utilisé ici les notations du paragraphe 3, $\varphi : \mathfrak{g}_0^* \to S^2(\mathfrak{g}_1^*)$ désignant la transposée du crochet de Lie de $\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_1$ dans $\mathfrak{g}_0$). On vérifie que Ω commute aux différentielles D et d.

De même que le complexe de Koszul de $\mathfrak{g}$, l'algèbre de Weil de $\mathfrak{g}_0$ peut être munie de deux filtrations, compatibles avec la différentielle D, l'une par les puissances ascendantes de l'algèbre extérieure, l'autre par $\bigoplus_{0\leqslant k\leqslant p, 0\leqslant l\leqslant k} \mathbb{S}^l(\mathfrak{g}_0^*) \otimes \Lambda^{k-l}(\mathfrak{g}_0^*)$, ce qui donne lieu à deux suites spectrales, exactement comme dans le complexe de Koszul de $\mathfrak{g}$. De plus, l'application Ω est compatible avec ces filtrations.

Il est bien connu que la cohomologie de l'algèbre $(W(\mathfrak{g}_0), D)$ est triviale, i.e. réduite à $\mathbb{C}$ en degré 0 et nulle ailleurs : il nous semble intéressant de remarquer que ce résultat peut se démontrer en utilisant la seconde suite spectrale (celle qui, dans le cas du complexe de Koszul de $\mathfrak{g}$ nous a servi pour démontrer le théorème 4.1) et en remarquant que les termes $E^1_{p,q}$ sont en fait le complexe de Koszul d'une algèbre de Lie abélienne.

THÉORÈME 5.3 (Fuks-Leites). — *On a les isomorphismes suivants :*

$$H^*(\mathfrak{osp}(m,2n),\mathbb{C}) \simeq \begin{cases} H^*(\mathfrak{o}(m),\mathbb{C}) \text{ si } m \geqslant 2n \\ H^*(\mathfrak{sp}(2n),\mathbb{C}) \text{ si } m < 2n \end{cases}$$

$$H^*(\mathfrak{gl}(m,n),\mathbb{C}) \simeq H^*(\mathfrak{gl}(\sup(m,n)),\mathbb{C}).$$

Remarquons que dans chaque cas, la cohomologie est une algèbre extérieure ayant des générateurs de degré impair.

THÉORÈME 5.4. — *On a les isomorphismes suivants :*

$$H^*(G(3),\mathbb{C}) \simeq H^*(\mathfrak{g}_2,\mathbb{C})$$

$$H^*(F(4),\mathbb{C}) \simeq H^*(\mathfrak{o}(7),\mathbb{C})$$

$$H^*(D(2,1,\lambda),\mathbb{C}) \simeq H^*(\mathfrak{sl}(2)\times\mathfrak{sl}(2),\mathbb{C}).$$

Démonstration. — Le raisonnement qui permet d'obtenir ces résultats, qui est fait par Fuks dans [Fu], est le même dans tous les cas. Nous le reproduisons ici afin d'obtenir les cas exceptionnels.

Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ une des super algèbres de Lie des théorèmes. Introduisons la propriété (P) suivante pour une algèbre différentielle graduée E munie d'une filtration : ceci donne lieu à une suite spectrale dont nous noterons les termes $E_r^{p,q}$. On exige que, pour toute valeur de r, $\bigoplus_{p,q} E_r^{p,q}$ soit le produit tensoriel d'une algèbre symétrique à générateurs de degrés pairs par une algèbre extérieure à générateurs de degrés impairs, ce que nous abrègerons en disant que $\bigoplus_{p,q} E_r^{p,q}$ est libre. Il est d'ores et déjà connu que l'algèbre de Weil $W(\mathfrak{g}_0)$ possède cette propriété, que l'on peut redémontrer comme suit : on considère la suite spectrale $F_r^{p,q}$ associée à $(W(\mathfrak{g}_0), D)$ par la filtration correspondant aux puissances croissantes de l'algèbre extérieure. On a $F_1^{p,q} = F_2^{p,q} = \mathbb{S}(\mathfrak{g}_0^*)^{\mathfrak{g}_0} \otimes \Lambda(\mathfrak{g}_0^*)^{\mathfrak{g}_0}$. Il résulte de la théorie usuelle des invariants que cette algèbre est libre si $\mathfrak{g}_0$ est réductive. D'autre part, l'aboutissement de cette suite spectrale est trivial. On raisonne par récurrence sur r. On remarque d'abord que, pour des raisons de parité des degrés des générateurs, la différentielle D_r est nulle si r est impair. Si maintenant $r = 2s$, on suppose que la propriété est vraie pour r, et on a la suite exacte

$$0 = H^{2s-1}(W(\mathfrak{g}_0)) \to F_{2s}^{0,2s-1} \to F_{2s}^{2s,0} \to H^{2s}(W(\mathfrak{g}_0)) = 0;$$

en effet, la différentielle D_{2s} est de bidegré $(2s, 1-2s)$ et l'aboutissement de la suite spectrale est trivial. De plus, $F_{2s}^{p,q}$ est nul si $p < 2s$ et $q < 2s-1$ pour les mêmes raisons. On peut alors appliquer le lemme 5.1 à $\bigoplus_{p,q} F_{2s}^{p,q}$, ce qui nous permet d'obtenir la propriété pour $r+1$.

On rappelle l'existence d'un homomorphisme d'algèbres différentielles graduées, Ω, de $(W(\mathfrak{g}_0), D)$ dans $(\Lambda^\bullet(\mathfrak{g}^*), d)$, on a vu que cet homomorphisme passe aux termes successifs des suites spectrales. Comme dans le cas de l'algèbre de Weil, nous allons montrer la propriété (P) pour $(\Lambda^\bullet(\mathfrak{g}^*), d)$ par récurrence. On a noté, au début de ce paragraphe, $E_r^{p,q}$ la suite spectrale associée à la filtration de $\Lambda^\bullet(\mathfrak{g}^*)$ par les puissances extérieures ascendantes (de $\mathfrak{g}_0$). On a

$$\Omega : \bigoplus_{p,q} F_r^{p,q} \longrightarrow \bigoplus_{p,q} E_r^{p,q}.$$

Le fait que α soit surjectif impose que Ω induit une surjection de $\bigoplus_p F_r^{p,0}$ sur $\bigoplus_p E_r^{p,0}$: ceci est clair pour $r = 1$ et $E_r^{p,0}$ est toujours un quotient de $E_1^{p,0}$. On raisonne maintenant par récurrence sur r. Comme $F_r^{p,0} = 0$ si $p < r$, on a $E_r^{p,0} = 0$ si $p < r$. On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} F_r^{0,r-1} & \to & E_r^{0,r-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ F_r^{r,0} & \to & E_r^{r,0} \end{array}$$

comme on a vu précédemment que la flèche de gauche est un isomorphisme, on en déduit que la flèche de droite, d_r est surjective. L'image de $F_r^{0,r-1}$ par Ω fait partie d'un système de générateurs de $\bigoplus_q E_r^{0,q}$, car $F_r^{0,r-1}$

fait partie d'un système de générateurs de $\underset{q}{\oplus} F_2^{0,q} = \underset{q}{\oplus} F_2^{0,q}$ (propriété (P) pour l'algèbre de Weil). Donc un certain nombre de générateurs de $E_r^{0,r-1}$ s'envoient surjectivement sur les générateurs de $E_r^{r,0}$. On peut alors appliquer le lemme 5.1, ce qui nous donne la propriété (P).

Comme la suite spectrale $E_r^{p,q}$ stationne au delà d'un certain rang, on sait que $E_\infty^{p,q}$ est libre. De plus, $E_\infty^{p,0}$ est nul pour $p \neq 0$ car c'est un quotient de $F_\infty^{p,0}$, donc tous les termes $E_\infty^{p,q}$ pour $p \neq 0$ sont nuls. L'aboutissement est donc une algèbre extérieure à générateurs de degrés impairs. Pour trouver le nombre de générateurs de degré $2k-1$ de cette algèbre extérieure, on prend les générateurs de degré $2k-1$ de $\Lambda(\mathfrak{g}_0^*)$ et on en retire un nombre égal au nombre de générateurs de degré $2k$ de $S(\mathfrak{g}_1^*)^{\mathfrak{g}_0}$. On obtient ainsi les isomorphismes de l'énoncé, mais ce raisonnement ne permet pas de décrire cette cohomologie comme sous-algèbre de $\Lambda(\mathfrak{g}_0^*)^{\mathfrak{g}_0}$. □

BIBLIOGRAPHIE

[Bou] N. BOURBAKI, Groupes et algèbres de Lie, chap. IV, V et VI, Hermann, 1968.

[DaKa] J. DADOK and V.G. KAC, Polar representations, Journal of Algebra, 92 (1985), 504-524.

[Fu] D.B. FUKS, Cohomology of infinite dimensional Lie algebras, Consultants Bureau, New York, 1986.

[FuLe] D.B. FUKS and D.A. LEITES, Cohomology of Lie superalgebras, Comptes Rendus de l'Académie Bulgare des Sciences, tome 37, n. 12 (1984).

[God] R. GODEMENT, Topologie algébrique et théorie des faisceaux, Hermann, Paris, 1964.

[GHV] W. GREUB, S. HALPERIN, R. VANSTONE, Connections, curvature, and cohomology, Volume I, II, III. Pure and Applied Mathematics, Vol. 45, 46, 47, Academic Press, New York-London, 1976.

[Ha] R. HARTSHORNE, Algebraic geometry, GTM 52, Springer (1977).

[Ka1] V.G. KAC, Lie superalgebras, Advances in Math., 26 (1977), 8-96.

[Ka2] V.G. KAC, Some remarks on nilpotent orbits, Journal of Algebra, 64 (1980), 190-213.

[LuRi] D. LUNA and R.W. RICHARDSON, A generalization of the Chevalley restriction theorem, Duke Math. J., 46 (1979), 487-496.

[MuFo] D. MUMFORD and J. FOGARTY, Geometric invariant theory, second edition, Ergebnisse 34, Springer (1982).

[Se] V. SERGANOVA, Automorphisms of simple Lie superalgebras, Math. URSS Izvestiya, vol. 24, n. 3 (1985), 539-551.

[Vu] T. VUST, Sur la théorie des invariants des groupes classiques, Ann. Inst. Fourier, 26-1 (1976), 1-31.

[We] H. WEYL, The Classical Groups, their Invariants and Representations, Princeton, University Press, 1946.

Manuscrit reçu le 17 mai 1996,
révisé le 5 novembre 1996,
accepté le 13 novembre 1996.

Caroline GRUSON,
Université Paris VII
URA 748 du CNRS
Couloir 45-55, 5ème étage, case 7012
2 Place Jussieu
75251 Paris Cedex 05 (France)
gruson@math.jussieu.fr
&
Université de Lille Flandres Artois
U.F.R. de Mathématiques
Domaine universitaire scientifique
59655 Villeneuve d'Ascq (France).