ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JEAN-MARIE LION
JEAN-PHILIPPE ROLIN

Théorème de préparation pour les fonctions logarithmico-exponentielles

Annales de l'institut Fourier, tome 47, n° 3 (1997), p. 859-884
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1997__47_3_859_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
47, 3 (1997), 859–884

THÉORÈME DE PRÉPARATION POUR LES FONCTIONS LOGARITHMICO-EXPONENTIELLES

par J.-M. LION et J.-P. ROLIN

1. INTRODUCTION

Nous donnons un *théorème de préparation* pour plusieurs classes de fonctions réelles. Préparer une fonction f en les variables $(x_1, \ldots, x_n, y)$ signifie décomposer l'espace en cylindres sur lesquels f a le même signe qu'une expression de la forme $y - \phi(x_1, \ldots, x_n)$, où ϕ appartient à la même classe de fonctions que f. En ce sens, la fonction f admet une *partie principale* sur chaque région. Ceci permet de résoudre l'équation $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$. Notre résultat implique donc un *théorème d'élimination des quantificateurs* (ou de stabilité par les projections linéaires) pour les ensembles définis par des égalités et des inégalités en ces fonctions.

La première classe que nous considérons est celle des *fonctions sous-analytiques.* Notre approche s'inspire du travail de Denef et Van den Dries [DD]. Ces derniers retrouvent le célèbre théorème du complémentaire de Gabrielov [G] en prouvant un théorème d'élimination des quantificateurs pour les composées de fonctions analytiques et de la fonction x/y. Leur preuve repose en grande partie sur un résultat d'algèbre commutative qui découle du théorème de préparation de Weierstrass. C'est le même énoncé que nous utilisons pour prouver un théorème de préparation pour les fonctions sous-analytiques. Ce dernier a précédemment été démontré par Parusiński [P] en utilisant les résultats de locale platitude de [HLT]. Notre preuve est une généralisation de la démonstration d'Abhyankar [A] du théorème de Puiseux.

Nous étudions ensuite la classe des *fonctions logarithmico-exponentielles* : il s'agit de composées de fonctions sous-analytiques, d'exponentielles

Mots-clés : Ensembles semi-analytiques - Ensembles sous-analytiques – Exponentielle – Logarithme – Élimination des quantificateurs.
Classification math. : 32C05 – 32B20 – 14P15 – 33B10.

et de logarithmes. À la suite des travaux de Wilkie [W], un théorème d'élimination des quantificateurs pour cette classe a été prouvé par Van den Dries, Macintyre et Marker [DMM]. Leur démonstration combine les propriétés usuelles des fonctions exponentielle et logarithme et des arguments difficiles de théorie des modèles. Notre approche est différente : nous montrons comment étendre notre théorème de préparation des fonctions sous-analytiques à cette classe de fonctions. En ce sens, il s'agit d'une démarche constructive : nous montrons comment associer à l'expression combinatoire d'une fonction f en termes de logarithmes et d'exponentielles une méthode de résolution de l'équation $f = 0$.

Un dernier corollaire de notre théorème de réduction initial porte sur les *x^λ-fonctions* : les compositions finies de fonctions sous-analytiques et de puissances réelles. Nous montrons un théorème de préparation pour ces fonctions, retrouvant ainsi le théorème d'élimination des quantificateurs prouvé par Miller en utilisant la théorie des modèles [M]. Ce résultat améliore la paramétrisation des petits chemins de Tougeron [T].

Nous remercions François Blais, Frédéric Chazal et Robert Moussu pour les nombreuses conversations tenues autour du Théorème de Wilkie. Les idées de ce travail sont pour une bonne part présentes dans les articles des «théoriciens des modèles» (voir [DD], [DMM], [M], [R], [W]). Lou van den Dries nous a aidés à les «décrypter» : nous lui en sommes très reconnaissants.

0. DÉFINITIONS ET RÉSULTATS

0.1. Fonctions et sous-ensembles sous-analytiques globaux.

On note $\mathbb{P}_1$ la droite projective réelle munie de sa structure analytique usuelle. Les espaces $\mathbb{R}^n$ sont naturellement plongés dans les variétés analytiques ${\mathbb{P}_1}^n$, et tout sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ peut être considéré comme un sous-ensemble de ${\mathbb{P}_1}^n$.

Un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ est un *semi-analytique global* si au voisinage de tout point de ${\mathbb{P}_1}^n$ il est défini par un nombre fini d'égalités et d'inégalités satisfaites par des fonctions analytiques.

Un sous-ensemble E de $\mathbb{R}^n$ est un *sous-analytique global* si c'est l'image d'un semi-analytique global de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ par la projection canonique de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ sur $\mathbb{R}^n$.

Une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ est une *fonction sous-analytique globale* si son graphe est un sous-analytique global de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

0.2. Comparaison de fonctions.

Soient f et g deux fonctions définies sur un sous-ensemble E de $\mathbb{R}^n$.

- La fonction f *domine* la fonction g sur E s'il existe une constante strictement positive K telle que $|g(x)| \leq K|f(x)|$ sur E.

- Les fonctions f et g sont *équivalentes* sur E si f domine g et g domine f sur E.

- Une *unité* sur E est une fonction de signe constant sur E et équivalente sur E à la fonction 1.

- Enfin, deux fonctions sont *comparables* sur E si l'une domine l'autre sur E. En particulier, elles peuvent alors être équivalentes sur E ou l'une peut être nulle sur E.

0.3. Ensembles particuliers associés à une famille de fonctions.

Les concepts définis dans cette partie sont utilisés dans toute la suite de ce travail.

Soit $\mathcal{A}$ une famille de fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

- Un $\mathcal{A}$-*ensemble* est un sous-ensemble E de $\mathbb{R}^n$ défini par un nombre fini d'égalités et d'inégalités à l'aide des fonctions de la famille $\mathcal{A}$: il existe deux familles finies $(f_{i,j})$ et $(g_{i,j})$ de fonctions de $\mathcal{A}$, avec $i \in I$ et $j \in J$, telles que

$$E = \bigcup_{i \in I} \Big(\bigcap_{j \in J} \{f_{i,j} = 0,\ g_{i,j} > 0\} \Big).$$

- Un $\mathcal{A}$-*cylindre* C est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^{n+1}$ défini à l'aide d'un $\mathcal{A}$-ensemble B de $\mathbb{R}^n$ appelé *base* et d'une ou deux fonctions ϕ et ψ de $\mathcal{A}$ de l'une des manières suivantes :

$$\begin{aligned}
&C = \big\{(x,y)\ ;\ x \in B\ ,\ \phi(x) < y < \psi(x)\big\} \\
&\qquad\qquad\qquad (\text{dans ce cas } \phi(x) < \psi(x) \text{ si } x \in B)\ ; \\
&C = \big\{(x,y)\ ;\ x \in B,\ y < \phi(x)\big\}\ ; \\
&C = \big\{(x,y)\ ;\ x \in B,\ \phi(x) < y\big\}\ ; \\
&C = \big\{(x,y)\ ;\ x \in B,\ y = \phi(x)\big\}.
\end{aligned}$$

• Une $\mathcal{A}$-*unité* en les variables $y_1, \ldots, y_m$ sur un sous-ensemble E de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \{(x, y_1, ..., y_m)\}$ est une fonction U de E dans $\mathbb{R}$ qui s'écrit :

$$U(x, y_1, \ldots, y_m) = V\big(\psi(x, y_1, \ldots, y_m)\big),$$

avec

$$\begin{aligned}\psi(x, y_1, \ldots, y_m) = (\phi_1(x), \ldots, \phi_s(x),& \\ |y_1|^{1/p_1}/a_1(x), \ldots, |y_m|^{1/p_m}/a_m(x),& \\ b_1(x)/|y_1|^{1/p_1}, \ldots, b_m(x)/|y_m|^{1/p_m}&\big),\end{aligned}$$

où les p_i sont des entiers positifs, les ϕ_i les a_i et les b_i sont des $\mathcal{A}$-fonctions de $\mathbb{R}^n$, et V est une fonction analytique et sans zéro au voisinage du compact $\overline{\psi(E)}$ de $\mathbb{P}_1^{s+2m}$.

Le point essentiel de cette définition est que les variables $y_1, \ldots, y_m$ (ou leurs inverses) ne sont pas arguments de fonctions de la famille $\mathcal{A}$, mais de la seule fonction analytique V.

0.4. Le théorème de préparation des fonctions sous-analytiques globales.

Il repose, comme les autres théorèmes de ce travail, sur une définition de fonction réduite adaptée à la classe étudiée.

On définit les fonctions *sous-analytiques réduites* ($\mathcal{R}$-*fonctions*) par récurrence sur la dimension de l'espace ambiant.

• Les constantes réelles sont les fonctions réduites de $\mathbb{R}^0$.

• Supposons définies les $\mathcal{R}$-fonctions sur $\mathbb{R}^n$ (et donc les $\mathcal{R}$-ensembles de $\mathbb{R}^n$, les $\mathcal{R}$-cylindres de $\mathbb{R}^{n+1}$ et les $\mathcal{R}$-unités de $\mathbb{R}^{n+1}$). Une fonction sous-analytique globale $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ est *réduite* si elle vérifie les propriétés suivantes :

— il existe un recouvrement fini de $\mathbb{R}^{n+1}$ par des $\mathcal{R}$-cylindres ;

— sur chaque cylindre C de ce recouvrement la fonction admet *l'écriture réduite* :

$$\forall (x, y) \in C, \quad f(x, y) = y_1^r A(x) U(x, y_1)$$

où r est un rationnel, A une $\mathcal{R}$-fonction définie sur $\mathbb{R}^n$, U une $\mathcal{R}$-unité en y_1 sur le $\mathcal{R}$-ensemble

$$\{(x, y_1)\,;\ y_1 = y - \theta(x),\ (x, y) \in C\}$$

et $y = \theta(x) + y_1$, la fonction θ étant une $\mathcal{R}$-fonction identiquement nulle ou équivalente à y sur C (dans ce cas, elle domine y_1 sur C).

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{R}_n$ la famille des fonctions réduites de $\mathbb{R}^n$.

THÉORÈME 1. — *Toute fonction sous-analytique globale est réduite.*

Il n'est pas évident *a priori* que l'intersection de deux $\mathcal{R}$-cylindres de $\mathbb{R}^{n+1}$ se décompose en $\mathcal{R}$-cylindres. Il faut montrer pour cela que la somme de deux $\mathcal{R}$-fonctions de n variables est une $\mathcal{R}$-fonction. C'est pourquoi nous raisonnons par récurrence sur n.

Il résulte du théorème 1 que les ensembles sous-analytiques globaux sont les $\mathcal{R}$-ensembles. Le théorème du complémentaire de Gabrielov en découle immédiatement.

La preuve du théorème 1 fait l'objet du chapitre 1.

0.5. Fonctions logarithmico-exponentielles.

Dans toute la suite, la fonction logarithme sera supposée définie sur $\mathbb{R}$ tout entier en la prolongeant par 0 sur $\mathbb{R}^-$.

DÉFINITION. — *Une logarithmico-exponentielle* (LE-*fonction*) *est une composée finie de fonctions sous-analytiques globales, d'exponentielles et de logarithmes. Si $g_1, \ldots, g_m$ sont des* LE-*fonctions de $\mathbb{R}^n$ et si f est une* LE-*fonction de $\mathbb{R}^m$, alors la composée $f \circ (g_1, \ldots, g_m)$ est une* LE-*fonction de $\mathbb{R}^n$.*

DÉFINITION. — *Soit f une fonction de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.*

1) *f est logarithmico-analytique* (LA-*fonction*) *de type* 0 *en la variable y si elle s'écrit*

$$f(x, y) = F\big(a(x), y\big),$$

où F est sous-analytique globale et $a = (a_1, \ldots, a_m)$ est une famille de LE-*fonctions définies sur $\mathbb{R}^n$.*

2) *f est logarithmico-analytique de type r en la variable y si elle s'écrit*

$$f(x, y) = F\big(f_1(x, y), \ldots, f_m(x, y), \log f_{m+1}(x, y), \ldots, \log f_{m+\ell}(x, y)\big)$$

où F est sous-analytique globale et les f_i sont des LA-*fonctions de type inférieur ou égal à $(r - 1)$ en y.*

Suivant les notations données dans la partie 0.3, nous parlons de LE (resp. LA)-ensembles, cylindres ou unités.

Le théorème de préparation pour les LE-fonctions se démontre en deux étapes :

a) Un théorème de préparation pour les LA-fonctions.

b) Une réduction des LE-fonctions aux LA-fonctions.

DÉFINITION. — *Une* LA-*fonction f de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est réduite s'il existe un recouvrement fini de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ par des* LE-*cylindres tel que sur chaque cylindre C de cette famille on ait :*

$$f(x,y) = y_0^{q_0} \cdots y_r^{q_r}\, A(x)\, U(x, y_0, \ldots, y_r),$$

avec $y = \theta_0(x) + y_0$, $\log y_0 = \theta_1(x) + y_1, \ldots, \log y_{r-1} = \theta_r(x) + y_r$, où $\theta_0, \ldots, \theta_r$ et A sont des LE-*fonctions définies sur $\mathbb{R}^n$, U est une* LE-*unité en $y_0, \ldots, y_r$, les exposants q_i sont rationnels, et θ_i est identiquement nul ou domine y_i pour tout i. Nous dirons que la fonction f admet sur C une écriture réduite en le système de variables admissible $y_0, \ldots, y_r$.*

THÉORÈME 2. — *Toute* LA-*fonction est réduite.*

L'emploi des variables $y_0, \ldots, y_r$ est inspiré par les constructions de Ressayre [R] et [DMM]. Notre démonstration repose sur la réduction des fonctions sous-analytiques et sur la simplicité de l'écriture du logarithme d'une fonction réduite. Contrairement à la preuve du théorème 1, celle du théorème 2 ne se fait pas par récurrence sur la dimension : la somme de deux LE-fonctions est une LE-fonction. Elle se fait par récurrence sur le type en y des fonctions.

La réduction des LE-fonctions aux LA-fonctions résulte du fait suivant (prop. 3, chap. 2) :

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une LE-*fonction. Il existe un recouvrement fini de $\mathbb{R}^n$ par des* LE-*cylindres sur lesquels f est le produit d'une* LA-*fonction et de l'exponentielle d'une* LE-*fonction.*

Ces énoncés permettent de résoudre le problème de l'élimination des quantificateurs pour les LE-fonctions.

La preuve du théorème 2 fait l'objet du chapitre 2.

0.6. Les x^λ-fonctions.

Dans la suite, les puissances réelles sont supposées prolongées par 0 sur $\mathbb{R}^-$.

DÉFINITION. — *Une x^λ-fonction est une composée finie de fonctions sous-analytiques globales et de puissances réelles. Si $g_1, \dots, g_m$ sont des x^λ-fonctions de $\mathbb{R}^n$ et si f est une x^λ-fonction de $\mathbb{R}^m$, alors la composée $f \circ (g_1, \dots, g_m)$ est une x^λ-fonction de $\mathbb{R}^n$.*

Nous parlons comme ci-dessus de x^λ-ensembles, de x^λ-cylindres et de x^λ-unités.

DÉFINITION. — *Une x^λ-fonction $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est réduite s'il existe un recouvrement fini de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ par des x^λ-cylindres tel que sur chaque cylindre C de cette famille on ait :*

$$f(x,y) = y_1^{\lambda_0} A(x)\, U(x, y_1^{\lambda_1}, \dots, y_1^{\lambda_s}),$$

où $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_s$ sont des nombres réels, A est une x^λ-fonction définie sur $\mathbb{R}^n$, U est une x^λ-unité et $y = \theta(x) + y_1$, θ étant une x^λ-fonction identiquement nulle ou qui domine y_1 sur C.

THÉORÈME 3. — *Toute x^λ-fonction est réduite.*

Nous retrouvons ainsi le théorème d'élimination des quantificateurs obtenu en utilisant la théorie des modèles par Miller [M].

La preuve du théorème 3 fait l'objet du chapitre 3.

0.7. Principe général de réduction.

Les démonstrations des théorèmes reposent sur un principe déjà mis en valeur dans [DMM]. On décompose l'espace en cylindres sur chacun desquels l'une des propriétés suivantes est vérifiée :

- y est équivalent à une fonction de x et l'expression étudiée admet une *écriture plus simple*;
- l'expression étudiée est facilement réduite.

1. THÉORÈME DE PRÉPARATION DES FONCTIONS SOUS-ANALYTIQUES GLOBALES

1.0. Introduction.

L'objet de ce chapitre est de prouver le théorème 1 : les fonctions sous-analytiques globales sont réduites. Ceci revient à montrer que le graphe d'une fonction sous-analytique globale de $\mathbb{R}^n$ est une union finie de $\mathcal{R}$-

cylindres de $\mathbb{R}^{n+1}$. Or c'est la projection sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ d'un semi-analytique de $\mathbb{P}_1^n \times \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1^m$. Il suffit de montrer les deux points suivants. Les semi-analytiques globaux sont des $\mathcal{R}$-ensembles. Tout $\mathcal{R}$-ensemble de $\mathbb{R}^n$ est une union finie de $\mathcal{R}$-cylindres. Plus précisément, on prouve pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ les deux affirmations suivantes :

$\mathbf{A}_n$: *Si $g_1, \ldots, g_m$ sont des fonctions réduites sur $\mathbb{R}^n$ et si f est une fonction analytique au voisinage du compact $\overline{(g_1, \ldots, g_m)(\mathbb{R}^n)}$ de $\mathbb{P}_1^m$, alors la composée $f \circ (g_1, \ldots, g_m)$ est réduite.*

$\mathbf{B}_n$: *La famille $\mathcal{R}_n$ des fonctions réduites de $\mathbb{R}^n$ munie de l'addition et de la multiplication forme une algèbre sur $\mathbb{R}$. De plus, l'inverse $1/f$ d'une fonction $f \in \mathcal{R}_n$ sans zéro est réduite et toute puissance rationnelle $g^{q/p}$ d'une fonction $g \in \mathcal{R}_n$ positive est réduite.*

L'addition et la multiplication ne sont pas analytiques sur $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$. L'affirmation $\mathbf{B}_n$ ne découle donc pas trivialement de $\mathbf{A}_n$.

L'affirmation $\mathbf{A}_n$ implique que les semi-analytiques globaux de $\mathbb{R}^n$ sont des $\mathcal{R}$-ensembles. L'affirmation $\mathbf{B}_n$ implique que tout $\mathcal{R}$-ensemble de $\mathbb{R}^n$ est une union finie de $\mathcal{R}$-cylindres (voir dans 1.1 la conséquence 6 de l'affirmation $\mathbf{B}_n$).

On prouve par récurrence sur n et simultanément les affirmations $\mathbf{A}_n$ et $\mathbf{B}_n$.

- Si $n = 0$ c'est trivial.

- Les affirmations $\mathbf{A}_1$ et $\mathbf{B}_1$ sont des conséquences faciles de la stabilité des applications analytiques par composition et de la correspondance biunivoque entre les séries entières et les germes d'applications analytiques.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Nous supposons $\mathbf{A}_n$ et $\mathbf{B}_n$ vérifiées. Nous dégageons d'abord des propriétés élémentaires des $\mathcal{R}$-cylindres de $\mathbb{R}^{n+1}$ et des $\mathcal{R}$-fonctions de $\mathbb{R}^{n+1}$. Ces propriétés sont des conséquences de $\mathbf{B}_n$. Nous déduisons ensuite $\mathbf{B}_{n+1}$ de ces propriétés et de $\mathbf{A}_{n+1}$. Enfin, nous prouvons $\mathbf{A}_{n+1}$.

1.1. Premières conséquences de l'affirmation B_n.

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier les propriétés suivantes. Elles découlent des définitions et de l'hypothèse $\mathbf{B}_n$.

Soit C un $\mathcal{R}$-cylindre de $\mathbb{R}^{n+1}$. Une fonction f de $\mathbb{R}^{n+1}$ dans $\mathbb{R}$, nulle en dehors du cylindre et qui admet une écriture réduite sur C, est une fonction réduite. Dans la suite, nous considérons donc des fonctions réduites définies sur une union finie de cylindres et non sur $\mathbb{R}^{n+1}$ tout entier.

1) *Partition cylindrique de* $\mathbb{R}^{n+1}$ *adaptée à des* $\mathcal{R}$*-cylindres.* — Soient $C_1, \ldots, C_d$ des $\mathcal{R}$-cylindres de $\mathbb{R}^{n+1}$. Il existe une partition finie de $\mathbb{R}^{n+1}$ en $\mathcal{R}$-cylindres adaptée aux C_i : chaque C_i est la réunion de certains cylindres de la partition.

2) *Réduction simultanée de deux* $\mathcal{R}$*-translations en* y. — Soit C un $\mathcal{R}$-cylindre de $\mathbb{R}^{n+1}$ et soient θ_1 et θ_2 deux fonctions réduites de $\mathbb{R}^n$. Le cylindre C admet une partition finie en $\mathcal{R}$-cylindres vérifiant les propriétés suivantes. Soit Γ un cylindre de la partition. Les fonctions $(y-\theta_1)$ et $(y-\theta_2)$ sont comparables sur Γ et l'une des situations suivantes a lieu.

(i) $|y - \theta_i|$ est inférieur à $|\theta_i - \theta_j|$ et à $|y - \theta_j|$ et $(y - \theta_j)$ admet sur Γ l'écriture réduite

$$(y - \theta_j) = (\theta_i - \theta_j)\Big(1 + \frac{y - \theta_i}{\theta_i - \theta_j}\Big).$$

(ii) on a $|\theta_i - \theta_j| \leq |y - \theta_i| \leq |y - \theta_j|$ et $(y - \theta_j)$ admet sur Γ l'écriture réduite

$$(y - \theta_j) = (y - \theta_i)\Big(1 + \frac{\theta_j - \theta_i}{y - \theta_i}\Big).$$

Ces deux propriétés de base permettent d'établir les quatre énoncés suivants.

3) *Partition cylindrique adaptée aux valeurs d'une fonction réduite.* Soit f une fonction réduite de $\mathbb{R}^{n+1}$ et $I_1 \cup \ldots \cup I_s$ un recouvrement fini de $\mathbb{R}$ par des ouverts. Il existe une partition finie de $\mathbb{R}^{n+1}$ en $\mathcal{R}$-cylindres vérifiant la propriété suivante : si C est un cylindre de la partition, alors $f(C)$ est inclus dans un des intervalles I_i.

4) *Caractérisation d'une fonction réduite.* — On donne une caractérisation *locale* des fonctions réduites : cette caractérisation est adaptée aux cartes de la source $\overline{\mathbb{R}}^{n+1} = \mathbb{P}_1^{n+1}$ et du but $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{P}_1$. Une fonction f définie sur $\mathbb{R}^{n+1}$ est réduite si et seulement s'il existe un recouvrement fini de $\mathbb{R}^{n+1}$ par des cylindres vérifiant les propriétés suivantes. Soit C un cylindre du recouvrement et B sa base :

(i) le cylindre C est inclus dans $\mathbb{R}^n \times [-1, 1]$ ou dans $\mathbb{R}^n \times \{|y| \geq 1\}$;

(ii) la fonction f (ou son inverse $1/f$) admet sur C l'écriture réduite

$$\alpha^{q/p} \cdot A \cdot V(\psi) \quad \text{avec} \quad \psi = \left(\phi_1, \dots, \phi_s, \alpha^{1/p}, \beta^{1/p}\right)$$

où α et β sont des fonctions bornées de C de la forme $(y' - \theta)/a$ et $b/(y' - \theta)$ ou inversement, A, a, b, θ, ϕ_i sont des fonctions de $\mathcal{R}_n$, bornées sur B, $p, q \in \mathbb{N}$ sont des entiers et V est une fonction analytique sans zéro au voisinage du compact $\overline{\psi(C)}$. La variable y' est égale à y si $C \subset \mathbb{R}^n \times [-1, 1]$ et à $1/y$ si $C \subset \mathbb{R}^n \times \{|y| \geq 1\}$. Si la fonction θ n'est pas la fonction nulle sur C elle est équivalente à y' sur C.

L'application $\psi = (\phi_1, \dots, \phi_s, \alpha^{1/p}, \beta^{1/p})$ s'appelle *morphisme de réduction de* f (ou de $1/f$) sur C. Si $p = 1$ et $\alpha = (y' - \theta)/a$, l'écriture réduite est dite *polynomiale.* Si sur tous les cylindres de la décomposition l'écriture réduite est polynomiale, on dit que f admet une *réduction polynomiale.*

5) *Réduction simultanée de plusieurs $\mathcal{R}$-fonctions de* $\mathbb{R}^{n+1}$. — Soient $f_1, \dots, f_m$ des fonctions réduites sur $\mathbb{R}^{n+1}$. Il existe une partition finie de $\mathbb{R}^{n+1}$ en $\mathcal{R}$-cylindres sur chacun desquels les fonctions f_i (ou leur inverses) admettent le même morphisme de réduction. De plus, sur ces cylindres les fonctions f_i sont comparables deux à deux.

6) *Partition d'un $\mathcal{R}$-ensemble de $\mathbb{R}^n$ en $\mathcal{R}$-cylindres.* — Tout $\mathcal{R}$-ensemble de $\mathbb{R}^n$ admet une partition finie en $\mathcal{R}$-cylindres. Ce fait se déduit de la réduction simultanée des $\mathcal{R}$-fonctions de $\mathbb{R}^n$ (conséquence de $\mathbf{B}_{n-1}$) et de la stabilité par addition de $\mathcal{R}_n$ (affirmation $\mathbf{B}_n$).

7) *Invariance des fonctions réduites sous l'action de certains morphismes.* — Soit C un $\mathcal{R}$-cylindre de $\mathbb{R}^{n+1}$, soient $t, a, b \in \mathcal{R}_n$ des fonctions réduites et $p \in \mathbb{N}$ un entier. On suppose que l'application $\psi = (x, ((y - \theta)/a)^{1/p})$ (resp. $\psi = (x, (b/(y - \theta))^{1/p})$) est définie sur C. Si $f \in \mathcal{R}_{n+1}$ est une fonction réduite, alors $f \circ \psi$ est réduite sur C. Si f admet une réduction polynomiale et si $\psi = (x, (y - \theta)/a)$, alors $f \circ \psi$ admet une réduction polynomiale.

1.2. Preuve de B_{n+1} en admettant A_n, B_n et A_{n+1}.

L'inverse $1/f$ d'une fonction réduite sans zéro et toute puissance rationnelle d'une fonction réduite positive sont clairement réduites. Soient f et g deux fonctions réduites de $\mathbb{R}^{n+1}$. Un corollaire de la propriété 5) est que leur produit $f \cdot g$ ou leurs rapports f/g et g/f sont des fonctions réduites. La propriété 5) implique également que leur somme est le produit d'une fonction réduite avec la somme de deux fonctions réduites bornées.

Il existe une partition finie de $\mathbb{R}^{n+1}$ en cylindres sur chacun desquels soit f domine g, soit g domine f. Dans le premier cas, on écrit la somme $f+g$ sous la forme $f \cdot (1+g/f)$, dans le second cas sous la forme $g \cdot (1+f/g)$. Il suffit donc de prouver que la somme de deux fonctions réduites bornées est une fonction réduite. C'est impliqué par $\mathbf{A}_{n+1}$.

1.3. Réduction de la preuve de A_{n+1}.

Il nous reste à prouver $\mathbf{A}_{n+1}$ connaissant $\mathbf{A}_n$ et $\mathbf{B}_n$. Le point essentiel de cette preuve est la démonstration de la proposition suivante.

Sous les hypothèses $\mathbf{A}_n$ et $\mathbf{B}_n$, on montre :

PROPOSITION 1. — *Soit $C \subset \mathbb{R}^{n+1}$un $\mathcal{R}$-cylindre de base B, relativement compact dans $\mathbb{R}^{n+1}$. Soient $\phi_1, \ldots, \phi_N$ et b des $\mathcal{R}$-fonctions bornées définies sur la base B. On suppose que la fonction b/y est bornée sur C. On note ψ l'application définie sur C par $\psi = (\phi_1, \ldots, \phi_N, y, b/y)$. Si F est une fonction analytique définie au voisinage du compact $\overline{\psi(C)}$ de $\mathbb{R}^{N+2}$, alors la fonction composée $F \circ \psi$ est une fonction réduite.*

Avant de la prouver, expliquons pourquoi $\mathbf{A}_{n+1}$ se réduit à cet énoncé.

Réduction de $\mathbf{A}_{n+1}$ à la proposition 1. — D'après les propriétés 4) et 5), quitte à choisir la bonne carte à la source (dans $\mathbb{R}^{n+1}$) et au but (dans $\mathbb{R}$), il suffit de considérer des fonctions $g_1, \ldots, g_m$, bornées , réduites avec le même morphisme de réduction ψ sur un cylindre relativement compact C de $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$\psi = \left(\phi_1, \ldots, \phi_s, \left(\frac{y-\theta}{a}\right)^{1/p}, \left(\frac{b}{y-\theta}\right)^{1/p}\right).$$

Soit f une fonction analytique au voisinage du compact $\overline{(g_1, \ldots, g_m)(\mathbb{R}^{n+1})}$ de $\mathbb{R}^m$. Il existe alors une fonction analytique F définie au voisinage du compact $\overline{\psi(C)}$ de $\mathbb{R}^{m+2}$ telle que $f \circ (g_1, \ldots, g_m) = F \circ \psi$. Sur le cylindre C, les fonctions $(y-\theta)/a$ et $b/(y-\theta)$ sont bornées. Par conséquent, la fonction $(y-\theta)$ domine b sur C et la fonction a domine $(y-\theta)$ et b sur C. La fonction $c = (b/a)^{1/p}$ est bornée sur le cylindre C. On pose $\psi' = (x, ((y-\theta)/a)^{1/p})$ et $h(x,z) = F(\phi_1(x), \ldots, \phi_s(x), z, c(x)/z)$. L'ensemble $\psi'(C)$ se décompose en une union finie de $\mathcal{R}$-cylindres. D'après la proposition 1, la fonction h est une fonction réduite sur ces cylindres. La fonction $F \circ \psi$ coïncide sur C avec la fonction $h \circ \psi'$. D'après la propriété 7), elle est réduite.

1.4. Un cas particulier de la proposition 1.

Énonçons la proposition 1 dans le cas particulier $b = 0$.

PROPOSITION 2. — *Soit $C \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un $\mathcal{R}$-cylindre de base B, relativement compact dans $\mathbb{R}^{n+1}$. Soient $\phi_1, \ldots, \phi_N$ des $\mathcal{R}$-fonctions bornées définies sur la base B. On note ψ l'application définie sur C par $\psi = (\phi_1, \ldots, \phi_N, y)$. Si F est une fonction analytique définie au voisinage du compact $\overline{\psi(C)}$ de $\mathbb{R}^{N+1}$, alors la fonction composée $F \circ \psi$ est réduite et admet une réduction polynomiale.*

Pour prouver la proposition 2, nous utilisons deux résultats classiques de la géométrie analytique que nous rappelons.

Fonction analytique y-générale. — Une fonction analytique F sur un voisinage U d'un point $m = (a, b)$ de $\mathbb{R}^{N+1}$ est *y-générale en m* si le germe $F(a, b + y)$ n'est pas identiquement nul. Si $F(a, b + y)$ est d'ordre d à l'origine, on dit que F est y-générale d'ordre d en m. Il existe alors un polydisque centré en m en tout point duquel F est y-générale d'ordre au plus d.

Le théorème suivant (dont on peut trouver la preuve dans [H]) permet de restreindre la preuve de la proposition 2 au cas où la fonction analytique F est y-générale en tout point du compact $\overline{\psi(C)}$. Cette réduction est due à [DD].

THÉORÈME DE FINITUDE (voir [H]). — *Soit F une fonction analytique définie sur un voisinage U de l'origine de $\mathbb{R}^{N+1}$. Il existe un entier d, un polydisque compact $\Delta = \Delta' \times I \subset U$ centré en l'origine, des unités analytiques $u_0, \ldots, u_d$ sur Δ et des fonctions analytiques $F_0, \ldots, F_d$ sur Δ' tels que*

$$F(z, y) = \sum_{i=0}^{d} F_i(z)\, y^i u_i(z, y).$$

L'entier minimal vérifiant cette propriété est appelé y-degré de F à l'origine.

Après cette première réduction, le théorème de préparation de Weierstrass (voir [H]) permet de ramener la preuve de la proposition 2 au cas où la fonction F est un polynôme unitaire en la variable y.

THÉORÈME DE PRÉPARATION DE WEIERSTRASS. — *Soit F une fonction analytique sur un voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^{N+1}$ et y-générale d'ordre d à l'origine. Il existe un polydisque compact $\Delta = \Delta' \times I$ centré à l'origine de $\mathbb{R}^{N+1}$, une unité analytique u de Δ' et un polynôme unitaire $P(z, y) = a_d(z) + \cdots + a_1(z) y^{d-1} + y^d$ de degré d à coefficients analytiques sur Δ' tels que $F = u \cdot P$.*

1.5. Preuve de la proposition 2.

D'après la propriété 3), on peut supposer que $\psi(C)$ est dans un polydisque compact $\Delta = \Delta' \times I$ centré à l'origine de $\mathbb{R}^{N+1}$ sur lequel F vérifie les conclusions du théorème de finitude précédent :

$$F(z,y) = \sum_{i=0}^{d} F_i(z) y^i u_i(z,y) \quad \text{si} \quad (z,y) \in \Delta,$$

où les fonctions F_i sont analytiques au voisinage de Δ' et où les fonctions U_i sont des unités analytiques sur Δ. On pose

$$G_i = F_i \circ (\phi_1, \dots, \phi_s) \quad \text{et} \quad v_i = u_i \circ (\phi_1, \dots, \phi_s) \quad \text{si} \quad i = 0, \dots, d.$$

D'après $\mathbf{A}_n$, les fonctions G_i et v_i sont des fonctions réduites de la base B. Le cylindre C admet la partition en $\mathcal{R}$-cylindres suivante :

$$\begin{gathered} \Delta = C_\infty \cup C_0 \cup \dots \cup C_d, \\ C_\infty = \{(x,y) \in \Delta\,;\ G_0(x) = \dots = G_d(x) = 0\}, \\ C_k = \{(x,y) \in \Delta\,;\ |G_i(x)| \leq |G_k(x)| \neq 0 \textit{ si } i = 0, \dots, d\} \\ \text{pour } k = 0, \dots, d. \end{gathered}$$

On note L_k l'ensemble

$$L_k = \{\ell = (\ell_1, \dots, \ell_k = 1, \dots, \ell_d)\,;\ |\ell_i| \leq 1\}$$

et H_k la fonction

$$H_k = \sum_{i=0}^{d} \ell_i y^i u_i(z,y).$$

La fonction H_k est analytique et y-générale d'ordre au plus d en tout point voisin du compact $\overline{L_k \times \Delta}$. De plus sur C_k, la fonction $F \circ \psi$ coïncide avec le produit $G_k(x) \cdot (H_k \circ \psi_k)$ où $\psi_k = (G_0/G_k, \dots, G_d/G_k, v_1, \dots, v_d, y)$. Pour prouver que $F \circ \psi$ est une fonction réduite et admet une réduction polynomiale, il suffit de prouver que les fonctions $H_k \circ \psi_k$ sont réduites et admettent une réduction polynomiale. La réduction qui vient d'être faite est due à [DD].

Nous venons de ramener la preuve de la proposition 1 à celle des affirmations $\mathbf{C}_d$, $d \in \mathbb{N}$, suivantes :

$\mathbf{C}_d$: *Soit C, ψ et F vérifiant les hypothèses de la proposition* 1. *Si F est y-générale d'ordre au plus d en tout point du compact $\overline{\psi(C)}$, alors la composée $F \circ \psi$ est réduite sur C et elle admet une réduction polynomiale.*

Preuve des affirmations $\mathbf{C}_d$. — L'affirmation $\mathbf{C}_0$ est triviale : une fonction F qui vérifie les hypothèses de $\mathbf{C}_0$ est une unité sur Δ. Soit d un entier non nul. Déduisons l'affirmation $\mathbf{C}_d$ de l'affirmation $\mathbf{C}_{d-1}$. D'après la propriété 3) et le théorème de préparation de Weierstrass, il suffit de considérer le cas où F est le polynôme unitaire $P = a_d + \cdots + a_1 y^{d-1} + y^d$ de degré d, restreint au polydisque $\Delta = [-K, K]^{d+1}$ où $K > 0$ est un réel positif et l'application $\psi = (\phi_1, \ldots, \phi_d, y)$ est à valeurs dans Δ.

On définit des polynômes $b_2(a), \ldots, b_d(a)$ en posant

$$Q(b, z) = P\Big(a, z - \frac{a_1}{d}\Big) = b_d + \cdots + b_2 z^{d-2} + z^d.$$

Il existe $K' > 0$ tel que $(b_2(a), \ldots, b_d(a), y + a_1/d)$ soit dans $\Delta' = [-K', K']^d$ si (a, y) appartient à Δ. D'après $\mathbf{B}_n$, les fonctions $\phi'_i = b_i(\phi_1, \ldots, \phi_d)$ sont réduites si $i = 2, \ldots, d$. On pose $\psi' = (\phi'_2, \ldots, \phi'_d, z)$. Puisque $P \circ \psi = Q \circ \psi'$ avec $z = y + a_1/d$, d'après la propriété 7) il suffit de prouver que $Q \circ \psi'$ admet une réduction polynomiale sur le $\mathcal{R}$-cylindre C', translaté de C de $(0, a_1/d)$.

Remarquons qu'en tout point m' de Δ' différent de $(0,0)$, le polynôme Q est z-général d'ordre au plus $(d-1)$. Par conséquent d'après $\mathbf{C}_{d-1}$, si C'' est un $\mathcal{R}$-cylindre inclus dans C' tel que $(0,0) \notin \overline{\psi'(C'')}$, alors la restriction de $Q \circ \psi'$ à C'' admet une réduction polynomiale.

Soit B' la base de C'. Pour tout entier k compris entre 2 et d, on pose :

$$\begin{aligned}
B_k &= \big\{x \in B' \,;\ |\phi'_i| \le K',\ |\phi'_i|^{1/i} \le |\phi'_k|^{1/k} \ne 0 \text{ si } i = 2, \ldots, d\big\},\\
C_k &= \big\{(x, z) \in C' \,;\ x \in B_k,\ |z| \le 2|\phi'_k|^{1/k}\big\},\\
D_k &= \big\{(x, z) \in C' \,;\ x \in B_k,\ |z| \ge 2|\phi'_k|^{1/k}\big\}.
\end{aligned}$$

Il existe une partition finie de C' en $\mathcal{R}$-cylindres adaptée aux C_k et aux D_k. Soit C'' un cylindre de cette partition. Si C'' n'est pas dans un C_k ou dans un D_k alors $(0,0) \notin \overline{\psi'(C'')}$: on a déjà démontré que dans ce cas la composée $Q \circ \psi'$ admet une réduction polynomiale sur C''.

Puisque sur C_∞ la composée $Q \circ \psi'$ est réduite, il reste à montrer que sur tout cylindre C'' inclus dans un C_k ou dans un D_k la fonction $Q \circ \psi'$ admet une réduction polynomiale. Sur B_k, les fonctions $t_k = |\phi'_k|^{1/k}$ et $c_{k,i} = \phi'_i / {t_k}^i$ sont réduites (d'après $\mathbf{B}_n$). Le quotient $w_k = z/t_k$ restreint à C_k et son inverse t_k/z restreint à D_k sont bornées.

La fonction $Q\circ\psi'$ admet sur tout cylindre C'' inclus dans D_k l'écriture réduite polynomiale

$$Q\circ\psi' = z^d\Big(1 + c_{k,2}\Big(\frac{t_k}{z}\Big)^2 + \cdots + c_{k,d}\Big(\frac{t_k}{z}\Big)^d\Big).$$

Sur tout cylindre inclus dans C_k la composée $Q\circ\psi'$ est égale à la composée de l'application $(x, w_k(x,z))$ avec la fonction

$$t_k{}^d\big(c_{k,d}(x) + \cdots + c_{k,2}(x)w^{d-2} + w^d\big)$$

définie sur $B_k\times[-2,2]$. D'après la propriété 7), Il suffit de vérifier que la fonction $c_{k,d}(x) + \cdots + c_{k,2}(x)w^{d-2} + w^d$ admet une réduction polynomiale sur $B_k\times[-2,2]$. Cette fonction est la composée de l'application

$$\psi_k(x,w) = \big(c_{k,2}(x),\ldots,c_{k,d}(x),w\big)$$

où $|c_{k,k}(x)| = 1$ avec le polynôme Q. Ce dernier est w-général d'ordre au plus $(d-1)$ en tout point de $\overline{\psi_k(B_k\times[-2,2])}$ (puisque $|c_{k,k}(x)|$ est alors égal à 1). On conclut en utilisant $\mathbf{C}_{d-1}$.

Ceci achève la preuve de la proposition 2.

1.6. Un lemme sur les séries entières.

La preuve de la proposition 1 consiste à se ramener à l'alternative suivante : soit les hypothèses de la proposition 2 sont satisfaites, soit la réduction est immédiate. Pour y arriver, la première étape consiste à scinder notre fonction en la somme de deux fonctions, la première analytique en y, la seconde analytique en b/y. C'est la motivation du lemme suivant.

LEMME. — *Soit F une fonction analytique définie au voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^{N+2}$. Il existe un polydisque compact $\Delta = \delta\times I\times J$ centré à l'origine de $\mathbb{R}^{N+2}$ sur lequel F est définie et deux fonctions analytiques G et H définies sur deux polydisques compacts centrés à l'origine de $\mathbb{R}^{N+2}$, $\Delta_1 = \delta\times K\times I$ et $\Delta_2 = \delta\times K\times J$ tels que*

$$F\Big(z,y,\frac{b}{y}\Big) = G(z,b,y) + \frac{b}{y}H\Big(z,b,\frac{b}{y}\Big)$$

dès que $z\in\delta$, $y\in I$, $b/y\in J$ et $b\in K$.

Preuve du lemme. — Si $\sum F_{L,i,j}\, z^L y^i y'^j$ est le développement de Taylor convergent de F à l'origine, les développements de Taylor convergents à l'origine des fonctions G et H sont respectivement

$$\sum_{\substack{L\in\mathbb{N}^m \\ 0\le j\le i}} F_{L,i,j}\, z^L t^j y^{i-j} \quad \text{et} \quad \sum_{\substack{L\in\mathbb{N}^m \\ 0\le i<j}} F_{L,i,j}\, z^L t^i y'^{j-i-1}.$$

1.7. Preuve de la proposition 1.

Premier cas. — Si 0 n'est pas dans le compact $\overline{(b/y)(C)}$ de $\mathbb{R}$, les fonctions b et y sont équivalentes sur le cylindre C.

On pose $y' = y/b$ et $\psi' = (x, y')$. Le sous-ensemble $\psi'(C) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ est un $\mathcal{R}$-cylindre. On définit sur ce cylindre l'application

$$\psi'' = (\phi_1, \dots, \phi_N, b, y').$$

La fonction F' définie par

$$F'(z_1, \dots, z_N, z_{N+1}, y') = F\Big(z_1, \dots, z_N, by', \frac{1}{y'}\Big)$$

est analytique au voisinage du compact $\overline{\psi'' \circ \psi'(C)}$. La proposition 2 et la propriété 7) permettent d'affirmer que la composée $F \circ \psi$ qui est égale à la composée $(F' \circ \psi'') \circ \psi'$ est réduite.

Second cas. — On suppose maintenant $0 \in \overline{(b/y)(C)}$. D'après la propriété 3), on peut supposer que $\psi(C)$ est inclus dans un polydisque compact $\Delta = \delta \times I \times J$ centré à l'origine de $\mathbb{R}^{N+2}$ sur lequel F vérifie les conclusions du lemme. Soient $\Delta_1 = \delta \times K \times I$, $\Delta_2 = \delta \times K \times J$, G et H donnés par le lemme. On note C' le $\mathcal{R}$-cylindre relativement compact (ou l'union finie de $\mathcal{R}$-cylindres) obtenu à partir de C à l'aide de l'inversion $y' = b/y$: (x, y') est dans C' si $(x, b/y')$ est dans C. On applique la proposition 2 à la fonction $g = G \circ (\phi_1, \dots, \phi_N, b, y)$ définie sur C et à la fonction $h = H \circ (\phi_1, \dots, \phi_N, b, y')$ définie sur C'. Ces deux fonctions admettent des réductions poynomiales sur C et C'. On en déduit (propriété 1) l'existence d'une partition finie de C en $\mathcal{R}$-cylindres sur chaque cylindre Γ de laquelle les fonctions g et $h' = h(x, b/y)$ s'écrivent sous la forme

$$g = \Big(\frac{y-\theta_1}{a_1}\Big)^{q_1} A_1 \cdot u_1, \quad h' = \Big(\frac{b/y-\theta_2}{a_2}\Big)^{q_2} A_2 \cdot u_2,$$

avec q_1 et q_2 des entiers positifs, θ_i, a_i, A_i des $\mathcal{R}$-fonctions bornées de la base de Γ et où soit θ_1 et y sont équivalents (resp. θ_2 et b/y), soit θ_1 (resp. θ_2) est nul.

Si θ_1 est équivalent à y (ou θ_2 équivalent à b/y), on conclut de la même façon que dans le premier cas. La composée $F \circ \psi$ est égale à la composée $F' \circ \psi'$ où $\psi' = (\phi_1, \ldots, \phi_s, \tau, y/\tau)$ ($\tau = \theta_1$ ou b/θ_2 suivant les cas) et F' est une fonction analytique au voisinage du compact $\overline{\psi'(\Gamma)}$.

On suppose maintenant que $\theta_1 = \theta_2 = 0$. La restriction de la composée $F \circ \psi$ au cylindre Γ est de la forme

$$u_1 \cdot \left(\left(\frac{y}{a_1}\right)^{q_1} A_1 + \left(\frac{b}{a_2\, y}\right)^{1+q_2} a_2 \cdot A_2 \cdot v \right)$$

où v la $\mathcal{R}$-unité est égale au quotient u_2/u_1. On pose $k = \min_\Gamma |v|$ et $K = \max_\Gamma |v|$. Quitte à faire une partition finie de Γ en $\mathcal{R}$-cylindres, on peut supposer que sur Γ l'une des trois situations suivantes est rencontrée (propriété 1)) :

(i) $\displaystyle \frac{1}{2} k \left| \left(\frac{b}{a_2\, y}\right)^{1+q_2} a_2 \cdot A_2 \right| \leq \left| \left(\frac{y}{a_1}\right)^{q_1} A_1 \right| \leq 2K \left| \left(\frac{b}{a_2\, y}\right)^{1+q_2} a_2 \cdot A_2 \right|.$

Dans ce cas, $|y|$ est équivalent à $(b^{1+q_2} {a_1}^{q_1} A_2 / {a_2}^{1+q_2} A_1)^{1/(1+q_1+q_2)}$ et on on conclut de la même façon que lorsque θ_1 ou θ_2 est non nul : $F \circ \psi$ est réduite sur Γ.

(ii) $\displaystyle 2K \left| \left(\frac{b}{a_2\, y}\right)^{1+q_2} a_2 \cdot A_2 \right| \leq \left| \left(\frac{y}{a_1}\right)^{q_1} A_1 \right|.$

Dans ce cas, la fonction $F \circ \psi$ admet comme écriture réduite sur Γ

$$F \circ \psi = u_1 \cdot \left(\frac{y}{a_1}\right)^{q_1} A_1 \cdot \left(1 + \frac{b^{1+q_2} {a_1}^{q_1} A_2}{{a_2}^{q_2} A_1} \cdot \frac{v}{y^{1+q_1+q_2}}\right).$$

(iii) $\displaystyle \left| \left(\frac{y}{a_1}\right)^{q_1} A_1 \right| \leq \frac{1}{2} k \left| \left(\frac{b}{a_2\, y}\right)^{1+q_2} a_2 \cdot A_2 \right|.$

Dans ce cas la fonction $F \circ \psi$ admet comme écriture réduite sur Γ

$$F \circ \psi = u_2 \cdot \left(\frac{b}{a_2\, y}\right)^{1+q_2} a_2 \cdot A_2 \cdot \left(1 + \frac{{a_2}^{q_2} A_1}{{a_1}^{q_1} b^{1+q_2} A_2} \cdot \frac{1}{y^{q_1+q_2+1}} \cdot \frac{1}{v}\right).$$

Ceci achève la preuve de la proposition 1.

2. LES FONCTIONS LOGARITHMICO-EXPONENTIELLES

2.1. Démonstration du théorème de préparation pour les LA-fonctions.

La remarque suivante est employée à plusieurs reprises dans les démonstrations de ce chapitre.

Soit $y_0, \dots, y_r$ un système de variables admissible sur un LE-cylindre C. Alors pour tout $i = 0, \dots, r$, un recouvrement fini de l'espace des (x, y_i) par des LE-cylindres induit un recouvrement fini de l'espace des (x, y) par des LE-cylindres.

Pour démontrer le théorème 2, nous formulons deux hypothèses de récurrence sur l'entier r :

$\mathbf{D}_r$: *Soient $f_1, \dots, f_s$ une famille de LA-fonctions définies sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ de type r en la variable y. Il existe un recouvrement fini de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ par des LE-cylindres sur lesquels les f_i admettent une écriture réduite en un même système de variables admissible.*

$\mathbf{E}_r$: *Soient $f : (x, z) \mapsto f(x, z)$ une LA-fonction de type r en la variable z, C un LE-cylindre dans l'espace des (x, y) et $\log y = \theta_1(x) + y_1$, la fonction θ_1 étant une LE-fonction identiquement nulle ou qui domine y_1 sur C. Soient $k < K$ deux constantes strictement positives. Il existe un recouvrement fini de C par des LE-cylindres sur lesquels ou bien y est équivalent à une LE-fonction de x, ou bien $y \leq kf(x, y_1)$, ou bien $Kf(x, y_1) \leq y$.*

Preuve de $\mathbf{D}_0$. — C'est une extension immédiate du théorème 1. Par définition, les composées de fonctions sous-analytiques et de LE-fonctions de la variable x sont encore des LE-fonctions.

Preuve de $\mathbf{E}_0$. — Nous appliquons $\mathbf{D}_0$ pour travailler sur un cylindre sur lequel, quitte à poser $y_1 = \bar{\theta}_1(x) + \bar{y}_1$, avec $\bar{y}_1 \leq c\,\bar{\theta}_1(x)$, on peut écrire $f(x, y_1) = \bar{y}_1^q A(x)\, U(x, \bar{y}_1)$, où q est rationnel et U est une LE-unité en $\bar{y}_1$ encadrée par deux constantes positives $k_1 < k_2$. Soit $M > 0$ tel que $M \leq \bar{y}_1$ implique

$$\frac{1}{2} \leq 1 - \frac{\log k + \log k_1 + q \log \bar{y}_1}{\bar{y}_1} \leq \frac{3}{2} \quad \text{et}$$
$$\frac{1}{2} \leq 1 - \frac{\log K + \log k_2 + q \log \bar{y}_1}{\bar{y}_1} \leq \frac{3}{2}.$$

Nous pouvons supposer f positive. Ainsi, $y \leq Kf(x, y_1)$ implique

$$\begin{aligned} \bar{y}_1 &= \log y - \theta_1(x) - \bar{\theta}_1(x) \\ &\leq \log K + \log k_2 + q \log \bar{y}_1 + \log A(x) - \theta_1(x) - \bar{\theta}_1(x). \end{aligned}$$

Nous en déduisons qu'il existe $c_2 > 0$ tel que $y \leq Kf(x, y_1)$ et $M \leq \bar{y}_1$

impliquent $y \leq c_2\, t(x)$ où $t(x)$ est la LE-fonction :

$$t(x) = \big(\log A(x) - \theta_1(x) - \bar{\theta}_1(x)\big)^q A(x).$$

On démontre de même qu'il existe $c_1 > 0$ tel que $kf(x, y_1) \leq y$ et $M \leq \bar{y}_1$ impliquent $c_1 t(x) \leq y$. Donc, soit $c_2\, t(x) < y$ et $Kf(x, y_1) \leq y$, soit $y < c_1\, t(x)$ et $y \leq kf(x, y_1)$, soit y est équivalent à $t(x)$.

D'autre part, si $\bar{y}_1 \in [0, M]$, puisque $y = \exp(\theta_1(x) + \bar{\theta}_1(x)) \exp \bar{y}_1$, y est équivalent à $\exp(\theta_1(x) + \bar{\theta}_1(x))$.

Preuve de $\mathbf{D}_r$. — Soient $f_1, \ldots, f_s$ une famille de LA-fonctions de type r en la variable y. Nous appliquons l'hypothèse $\mathbf{D}_{r-1}$ aux fonctions de type $(r-1)$ qui composent les f_i : nous travaillons sur un LE-cylindre C muni d'un sytème de variables admissibles $y_0, \ldots, y_{r-1}$ en lequel

$$\forall i = 1, \ldots, s, \quad f_i(x, y) = F_i\big(b(x), y_0, \ldots, y_{r-1}, \log y_{r-1}\big)$$

où $b(x) = (b_1(x), \ldots, b_m(x))$ est une famille de LE-fonctions définies sur $\mathbb{R}^n$ et les F_i sont des fonctions sous-analytiques globales des variables $z_1, \ldots, z_m, v_0, \ldots, v_r$. Posons $z = (z_1, \ldots, z_m)$. Nous appliquons le théorème 1 aux F_i en choisissant v_0 comme «variable verticale». Le recouvrement cylindrique ainsi construit induit un recouvrement fini de l'espace des $x, y_0, \ldots, y_{r-1}$ par des LA-ensembles en la variable y_0.

Aux bases de ces $\mathcal{R}$-cylindres, correspondent des ensembles de l'espace (x, y_1) définis par des fonctions de type $(r-1)$ en la variable y_1. Ce sont donc des unions finies de LE-cylindres en y_1 d'après l'hypothèse $\mathbf{D}_{r-1}$.

Les cylindres dans l'espace des $z, v_0, \ldots, v_r$ sont de deux types :

a) Ceux sur lesquels il existe une fonction sous-analytique globale θ et deux constantes positives k et K telles que :

$$k\, \theta(z, v_1, \ldots, v_r) \leq v_0 \leq K \theta(z, v_1, \ldots, v_r).$$

Sur chaque cylindre correspondant de l'espace (x, y_0), la variable y_0 est équivalente, d'après l'hypothèse de récurrence $\mathbf{E}_{r-1}$, à une LE-fonction $t(x)$. Puisque $\bar{y}_1 = y_0/t(x)$ appartient à un compact de $]0, +\infty[$, les fonctions f_i sont des LA-fonctions de type $(r-1)$ en la variable $\bar{y}_1$. Nous appliquons alors l'hypothèse $\mathbf{D}_{r-1}$.

b) Ceux sur lesquels pour chaque F_i il existe un rationnel q_i, une fonction sous-analytique globale $\psi_i(z, v_1, \ldots, v_r)$ et une $\mathcal{R}$-unité $U_i(z, v_1, \ldots, v_r, v_0)$ en v_0 tels que :

$$F_i(z, v_0, \ldots, v_r) = v_0^{q_i}\, \psi_i(z, v_1, \ldots, v_r)\, U_i(z, v_1, \ldots, v_r, v_0).$$

Chaque fonction f_i s'écrit sous la forme :

$$f_i(x,y) = y_0^{q_i}\, \psi_i(x, y_1, \dots, y_{r-1}, \log y_{r-1})\, U_i(x, y_1, \dots, y_r, y_0),$$

où les q_i sont rationnels, les ψ sont des LA-fonctions de type $(r-1)$ en y_1, et les U_i des LA-unités. Dans ce cas, nous concluons en appliquant l'hypothèse de récurrence $\mathbf{D}_{r-1}$ aux ψ_i et aux LA-fonctions de type $(r-1)$ en y_1 qui composent les U_i.

Preuve de $\mathbf{E}_r$. — Supposons $y \leq Kf(x,y_1)$. Nous appliquons l'hypothèse $\mathbf{D}_r$ à la fonction f ; en posant $y_1 = \bar{\theta}_1(x) + \bar{y}_1, \dots, \log \bar{y}_r = \bar{\theta}_{r+1} + \bar{y}_{r+1}$, on a :

$$f(x,y_1) = \bar{y}_1^{q_1} \cdots \bar{y}_{r+1}^{q_{r+1}}\, \phi(x)\, U(x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_{r+1}),$$

où les q_i sont rationnels, ϕ est une LE-fonction et U est comprise entre k_1 et k_2.

Nous pouvons supposer toutes ces quantités positives. Ainsi :

$$\bar{y}_1 \leq \sum q_i \log \bar{y}_i + \log \phi(x) - \theta_1(x) - \bar{\theta}_1(x) + \log K + \log k_2.$$

En reprenant le raisonnement fait pour prouver $\mathbf{E}_0$, il existe $M > 0$, une LE-fontion $t(x)$ et deux constantes c_1 et c_2 tels que si tous les $\bar{y}_i$ sont supérieurs à M, alors :

$$\begin{cases} y \leq Kf(x,y_1) \Longrightarrow y \leq c_2\, t(x), \\ kf(x,y_1) \leq y \Longrightarrow c_1\, t(x) \leq y. \end{cases}$$

D'autre part, $\bar{y}_{i-1} = \exp \bar{\theta}_i(x) \exp \bar{y}_i$ et $y = \exp(\theta_1(x) + \bar{\theta}_1(x)) \exp \bar{y}_1$. Donc si l'un des $\bar{y}_i$ est inférieur à M, la fonction f est de type $(r-1)$ en y_1. Nous concluons en appliquant l'hypothèse $\mathbf{E}_{r-1}$.

2.2. Réduction des LE-fonctions aux LA-fonctions.

PROPOSITION 3. — *Soit* $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une* LE-*fonction. Il existe un recouvrement de* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ *par un nombre fini de* LE-*cylindres sur lesquels* f *est le produit d'une* LA-*fonction et de l'exponentielle d'une* LE-*fonction.*

Remarque. — Cette proposition permet de ramener le problème de « l'élimination des quantificateurs » pour les LE-fonctions à celui des LA-fonctions. D'après le théorème 2, tout LE-ensemble est donc une union de LE-cylindres.

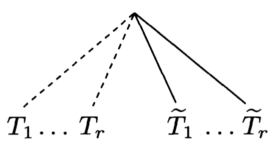
La preuve de la proposition 3 repose sur une description combinatoire des LE-fonctions. Afin de visualiser nos constructions, nous associons à chaque LE-fonction (ou plutôt à l'écriture d'une LE-fonction sur un cylindre) un arbre décrivant son « architecture logarithmico-exponentielle » en la variable y :

a) Si f est une LA-fonction de type 0 en y, nous lui associons un sommet.

b) Si f est de la forme

$$f(x,y) = F\big(a(x), \log g_1(x,y), \ldots, \log g_r(x,y), \\ \exp h_1(x,y), \ldots, \exp h_s(x,y)\big),$$

où $a(x) = (a_1(x), \ldots, a_m(x))$, les g_i et les h_i sont des LE-fonctions et F est une fonction sous-analytique globale, notons T_i l'arbre associé à g_i et $\widetilde{T}_i$ l'arbre associé à h_i. Nous associons à f l'arbre suivant où les arêtes pointillées correspondent aux logarithmes et les arêtes pleines aux exponentielles :



On obtient ainsi un arbre dont les sommets correspondent aux fonctions sous-analytiques qui apparaissent dans l'écriture de f, les arêtes pointillées à la fonction logarithme et les arêtes pleines à l'exponentielle.

Soit f une LE-fonction. Notre travail consiste avant tout à décomposer l'espace en LE-cylindres vérifiant la propriété suivante. Sur chacun d'eux, à l'écriture de f est associé un *arbre propre*, c'est-à-dire un arbre à l'intérieur duquel les arêtes pleines constituent un sous-arbre de même racine que l'arbre entier.

Pour cela, nous associons à l'écriture de f trois nombres entiers :

1) Si f est une LA-fonction en y, nous dirons que sa *chaîne exponentielle* est vide. Si

$$f(x,y) = F\big(a(x), \log g_1(x,y), \ldots, \log g_r(x,y), \\ \exp h_1(x,y), \ldots, \exp h_s(x,y)\big),$$

la chaîne exponentielle de f est l'union de l'ensemble

$$\big\{\exp h_1(x,y), \ldots, \exp h_s(x,y)\big\}$$

et des chaînes exponentielles des g_i et des h_i. Le *nombre exponentiel* $e(f)$ de f est le cardinal de sa chaîne exponentielle.

2) La *profondeur d'un sommet* est la longueur de l'arête qui le lie à la racine de l'arbre. Un *sommet maximal* est un sommet de profondeur maximale parmi les sommets dont l'arête ascendante est pointillée et dont l'une des arêtes descendantes est pleine. Le nombre $h(f)$ est la profondeur des sommets maximaux ou 0 s'il n'existe pas de tels sommets.

3) Le nombre $c(f)$ est le nombre total d'arêtes pleines qui descendent des sommets maximaux ou 0 s'il n'existe pas de tels sommets.

Remarque. — Les nombres $h(f)$ et $c(f)$, contrairement au nombre exponentiel $e(f)$, se lisent directement sur l'arbre associé à f.

Preuve de la proposition 3. — Pour associer à f un arbre propre, nous raisonnons par récurrence sur les triplets (e,h,c) ordonnés par l'ordre lexicographique.

Si $e(f)=0$, la fonction f est une LA-fonction. Si $h(f)=0$, alors $c(f)=0$ et l'arbre associé est propre.

Soit V un sommet maximal de l'arbre associé à f. Il correspond à V une «sous-expression» de f de la forme

$$t(x,y)=\log H\big(a(x),\log g_1(x,y),\dots,\log g_r(x,y),\\ \exp h_1(x,y),\dots,\exp h_s(x,y))\big),$$

où la fonction $H(z_1,\dots,z_m,v_1,\dots,v_r,w_1,\dots,w_s)$ est sous-analytique globale, les arbres associés aux h_i sont propres, et les g_i ne contiennent pas d'exponentielles.

Appliquons le théorème 1 à la fonction H en choisissant w_1 comme «variable verticale». Nous supposons que l'écriture associée à $\exp h_1(x,y)$ n'est une sous-expression d'aucune des écritures associées à $\exp h_2(x,y),\dots,\exp h_s(x,y)$. Les inégalités qui définissent les $\mathcal{R}$-cylindres ainsi construits sont du type

$$\phi(z_1,\dots,z_m,v_1,\dots,v_r,w_2,\dots,w_s)\le w_1 \quad \text{ou}\\ w_1\le\psi(z_1,\dots,z_m,v_1,\dots,v_r,w_2,\dots,w_s).$$

D'après l'hypothèse faite sur $\exp h_1(x,y)$, ces inégalités induisent un recouvrement fini de $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$ par des LE-ensembles définis par des fonctions de nombre exponentiel strictement inférieur à $e(f)$. L'hypothèse de récurrence permet de décrire ces ensembles comme une union finie de LE-cylindres.

a) Aux $\mathcal{R}$-cylindres sur lesquels il existe une $\mathcal{R}$-fonction θ et deux constantes k et K telles que :

$$\begin{aligned} &k\theta(z_1,\ldots,z_m,v_1,\ldots,v_r,w_2,\ldots,w_s) \\ &\qquad\qquad \leq w_1 \leq K\theta(z_1,\ldots,z_m,v_1,\ldots,v_r,w_2,\ldots,w_s) \end{aligned}$$

correspondent des LE-cylindres sur lesquels :

$$\log k \leq h_1 - \log\theta \leq \log K.$$

Sur ces cylindres, nous remplaçons dans l'écriture de f chaque occurrence de $\exp h_1$ par $\theta\exp(h_1 - \log\theta)$. Puisque la fonction exponentielle est analytique sur le compact $[\log k, \log K]$, l'hypothèse faite sur $\exp h_1(x,y)$ implique que l'écriture obtenue a un nombre exponentiel strictement inférieur à $e(f)$.

b) Sur les autres $\mathcal{R}$-cylindres, H s'écrit :

$$\begin{aligned} &H(z_1,\ldots,z_m,v_1,\ldots,v_r,w_1,\ldots,w_s) \\ &\qquad = w_1^q\phi(z_1,\ldots,z_m,v_1,\ldots,v_r,w_2,\ldots,w_s)\,U(z_i,v_j,w_k). \end{aligned}$$

Sur les LE-cylindres correspondants de l'espace $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} t(x,y) = ah_1 &+ \log\phi(a,\log g_1,\ldots,\log g_r,\exp h_2,\ldots,\exp h_s) \\ &+ \log U(a,\log g_1,\ldots,\log g_r,\exp h_1,\ldots,\exp h_s) \end{aligned}$$

où $\log U$ est sous-analytique. Par conséquent,

- si $c(f) > 1$, on décrit f par une nouvelle écriture $\tilde{f}$ telle que $c(\tilde{f}) < c(f)$;
- si $c(f) = 1$, on décrit f par une nouvelle écriture $\tilde{f}$ telle que $h(\tilde{f}) < h(f)$.

Une fois associé un arbre propre à f on conclut aisément la preuve de la proposition 3 en reprenant les arguments précédents.

3. LES x^λ-FONCTIONS

Le théorème 3 résulte facilement de la proposition suivante :

PROPOSITION 4. — *Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ une famille de nombres réels linéairement indépendants sur les rationnels. Soient $f_1, \dots, f_m$ une famille de x^λ-fonctions de la forme $f_i(x,y) = F_i(a(x), y^{\lambda_1}, \dots, y^{\lambda_s})$ définies sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, où $a(x) = (a_1(x), \dots, a_r(x))$ est une famille de x^λ-fonctions définies sur $\mathbb{R}^n$ et les F_i sont des fonctions sous-analytiques en les variables $z_1, \dots, z_r, v_1, \dots, v_s$. Il existe alors un recouvrement de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ par un nombre fini de x^λ-cylindres sur lesquels on a :*

$$\forall i = 1, \dots, m, \quad f_i(x,y) = y_1^{\mu_i} A_i(x)\, U_i(x, y_1^{\lambda_1}, \dots, y_1^{\lambda_s}),$$

où les μ_i sont des nombres réels, les A_i des x^λ-fonctions, les U_i des x^λ-unités et $y = \theta(x) + y_1$, la fonction θ étant une x^λ-fonction identiquement nulle ou qui domine y_1.

Pour démontrer le théorème, il suffit de considérer une famille de fonctions

$$f_i(x,y) = F_i\big(g_1(x,y)^{\lambda_1}, \dots, g_\ell(x,y)^{\lambda_\ell}\big),$$

où les fonctions g_i sont des x^λ-fonctions auxquelles le théorème 3 s'applique. Ainsi, sur chaque cylindre du recouvrement de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ ainsi construit, les fonctions f_i s'écrivent :

$$f_i(x,y) = H_i\big(b(x), y_1^{\mu_1}, \dots, y_1^{\mu_s}\big),$$

où les μ_i peuvent être supposés rationnellement indépendants. Nous concluons en appliquant la proposition.

Preuve de la proposition 4. — Nous formulons deux hypothèses de récurrence sur le cardinal s de la famille de réels rationnellement indépendants $\lambda_1, \dots, \lambda_s$:

$\mathbf{F}_s$: *Soit $f_i(x,y) = H_i(b(x), y^{\lambda_1}, \dots, y^{\lambda_s})$ une famille finie de x^λ-fonctions, où les H_i sont des fonctions sous-analytiques globales, et $b(x) = (b_1(x), \dots, b_s(x))$ est une famille de x^λ-fonctions définies sur $\mathbb{R}^n$. Il existe alors un recouvrement de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ par un nombre fini de x^λ-cylindres sur lesquels on a*

$$f_i(x,y) = y_1^{p_{i,1}\lambda_1 + \cdots + p_{i,s}\lambda_s} A_i(x)\, U_i(x, y_1^{\lambda_1}, \dots, y_1^{\lambda_s}),$$

où les $p_{i,j}$ sont rationnels, les A_i sont des x^λ-fonctions définies sur $\mathbb{R}^n$, les U_i sont des x^λ-unités et $y = \theta(x) + y_1$, la fonction θ étant une x^λ-fonction identiquement nulle ou qui domine y_1.

$\mathbf{G}_s$: *Soit ϕ une fonction sous-analytique définie sur l'espace des $(z_1,\ldots,z_r,v_1,\ldots,v_s)$. Soit $f(x,y) = \phi(b(x),y^{\lambda_1},\ldots,y^{\lambda_s})$, où $b(x) = (b_1(x),\ldots,b_r(x))$ est une famille de x^λ-fonctions. Soient $k < K$ deux constantes positives réelles et $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que les nombres $\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_s$ soient linéairement indépendants sur les rationnels. Alors il existe un recouvrement de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ par un nombre fini de x^λ-cylindres sur lesquels ou bien y est équivalent à une x^λ-fonction de x, ou bien $Kf(x,y) \le y^{\lambda_0}$, ou bien $y^{\lambda_0} \le kf(x,y)$.*

Preuve de $\mathbf{F}_1$. — Nous appliquons comme dans le chapitre précédent une extension immédiate du théorème 1 aux fonctions $H_i(b(x),v)$.

Aux cylindres en les variables (x,v) sur lesquels il existe une x^λ-fonction $\phi(x)$ et deux constantes $k < K$ tels que $k\phi(x) \le v \le K\phi(x)$ correspondent des cylindres en les variables (x,y) sur lesquels y est équivalent à une x^λ-fonction de x. Nous concluons comme précédemment : les fonctions f_i sont sous-analytiques en une nouvelle variable y_1.

Sur les autres cylindres, les f_i ont déjà l'écriture souhaitée.

Preuve de $\mathbf{G}_1$. — Nous appliquons $\mathbf{F}_1$ à $f(x,y) = \phi(b(x),y^{\lambda_1})$. Sur les cylindres ainsi obtenus où y est équivalent à une x^λ-fonction de x, la fonction f est sous-analytique en une nouvelle variable y_1.

Sur les autres cylindres, on a $f(x,y) = y^{p\lambda_1}A(x)\,U(x,y^{\lambda_1})$, où p est rationnel. Puisque λ_0 et λ_1 sont indépendants sur les rationnels, il existe une constante positive c_1 (resp c_2) et $\nu \in \mathbb{R}$ tels que $kf(x,y) \le y^{\lambda_0}$ (resp. $y^{\lambda_0} \le Kf(x,y)$) implique $c_1A(x)^\nu \le y$ (resp. $y \le c_2A(x)^\nu$).

Ceci achève la preuve de $\mathbf{G}_1$.

Preuve de $\mathbf{F_s}$. — Nous déduisons $\mathbf{F}_s$ de l'hypothèse $\mathbf{G}_{s-1}$ de la même manière que dans le chapitre précédent nous avons déduit $\mathbf{D}_r$ de $\mathbf{E}_{r-1}$.

Preuve de $\mathbf{G}_s$. — Nous appliquons $\mathbf{F_s}$ à $f(x,y) = \phi(b(x),y^{\lambda_1},\ldots,y^{\lambda_s})$. Sur les cylindres où y est équivalent à une x^λ-fonction de x, la fonction f est sous-analytique en une nouvelle variable y_1.

Sur les autres cylindres, nous écrivons

$$f(x,y) = y^{p_1\lambda_1+\cdots+p_s\lambda_s}A(x)\,U(x,y^{\lambda_1},\ldots,y^{\lambda_s}),$$

où les p_i sont rationnels. Puisque les λ_i sont indépendants sur les rationnels, il existe une constante positive c_1 (resp c_2) et $\nu \in \mathbb{R}$ tels que $kf(x,y) \leq y^{\lambda_0}$ (resp. $y^{\lambda_0} \leq Kf(x,y)$) implique $c_1 A(x)^\nu \leq y$ (resp. $y \leq c_2 A(x)^\nu$).

Ceci achève la preuve de l'hypothèse $\mathbf{G}_s$.

BIBLIOGRAPHIE

[A] S.S. ABHYANKAR, Algebraic geometry for scientists and engineers, Amer. Math. Soc., MSM 35 (1990).

[DD] J. DENEF, L. VAN DEN DRIES, p–adic and real subanalytic sets, Ann. of Maths, 128 (1988), 79–138.

[DMM] L. VAN DEN DRIES, A. MACINTYRE et D. MARKER, The elementary theory of restricted anlytic fields with exponentiation, Annals of Maths, 140 (1994), 183–205.

[G] A.M. GABRIELOV, Complements of subanalytic sets and existential formulas for analytic functions, Inventiones Mathematicae, 125 (1996), 1–12.

[H] L. HÖRMANDER, An introduction to complex analysis in several variables, North–Holland, 1973.

[HLT] H. HIRONAKA, M. LEJEUNE-JALABERT et B. TEISSIER, Platificateur local en géométrie analytique et aplatissement local, Astérisque, 7–8 (1973), 441–463.

[M] C. MILLER, Expansions of the real field with power functions, Ann. Pure Appl. Logic, 68 (1994).

[P] A. PARUSIŃSKI, Lipschitz stratification of subanalytic sets, Ann. Scient. École Normale Supérieure, 4e série, 27 (1994), 661–696.

[R] J.-P. RESSAYRE, Integer parts of real closed exponential fields, Arithmetic, Proof Theory and Computational Complexity, P. Clote and J. Krajicek, eds., Oxford University Press (1993), 278–288.

[T] J.-C. TOUGERON, Paramétrisations de petits chemins en géométrie analytique réelle, preprint, Université de Rennes.

[W] A.J. WILKIE, Model completeness results for expansions of real field II : The exponential function, preprint (1991).

Manuscrit reçu le 16 septembre 1996,
accepté le 11 décembre 1996.

J.-M. LION & J.-P. ROLIN,
Université de Bourgogne
CNRS, Laboratoire de Topologie URA5584
BP 400
21011 Dijon Cedex (France).
lion@u–bourgogne.fr
rolin@u–bourgogne.fr