ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

BRUNO KLINGLER

Structures affines et projectives sur les surfaces complexes

Annales de l'institut Fourier, tome 48, nº 2 (1998), p. 441-477

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1998__48_2_441_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
48, 2 (1998), 441–477

STRUCTURES AFFINES ET PROJECTIVES SUR LES SURFACES COMPLEXES

par Bruno KLINGLER

1. INTRODUCTION

Une surface complexe (connexe compacte) est susceptible de porter de nombreuses structures géométriques compatibles avec sa structure analytique. La plus simple de ces géométries est la géométrie complexe affine : on appellera surface complexe affine une surface complexe munie d'un atlas de cartes à valeur dans $\mathbb{C}^2$ et à changements de cartes localement constants dans le groupe affine $A(2,\mathbb{C}) = GL(2,\mathbb{C}) \ltimes \mathbb{C}^2$ (c'est-à-dire munie d'une connexion affine holomorphe plate sans torsion). C'est un cas particulier de $(\mathbf{P}GL(3,\mathbb{C}), \mathbf{P}^2\mathbb{C})$-variété, c'est-à-dire d'une surface complexe munie d'un atlas de cartes à valeur dans le plan projectif complexe $\mathbf{P}^2\mathbb{C}$ et à changements de cartes localement constants dans le groupe projectif $\mathbf{P}GL(3,\mathbb{C})$.

Intéressons-nous d'abord aux surfaces complexes affines. Dans [13], Inoue, Kobayashi et Ochiai montrent qu'une surface complexe admettant une connexion holomorphe (non nécessairement plate) est biholomorphe (à revêtement fini près) à un tore complexe, une surface de Kodaira primaire, une surface de Hopf affine, une surface d'Inoue ou à un fibré principal holomorphe en courbe elliptique sur une surface de Riemann de genre $g \geq 2$, de premier nombre de Betti impair. Ils montrent qu'une telle surface admet

Mots-clés : Surface complexe – Structure affine – Structure projective – Connexion holomorphe plate – Espace localement homogène.
Classification math. : 32J15 – 57M50.

toujours une structure complexe affine. Nous décrivons géométriquement toutes les surfaces complexes affines et calculons, à surface complexe S fixée, l'ensemble des structures complexes affines sur S compatibles avec sa structure analytique.

Commençons par donner des exemples de surfaces complexes affines. Le premier exemple est celui du tore complexe, quotient du groupe additif $\mathbb{C}^2$ par un réseau $\mathbb{Z}^4$. C'est un cas particulier de la construction suivante : soit G un groupe de Lie réel connexe simplement connexe de dimension 4, muni d'une structure complexe affine invariante à gauche (i.e pour tout élément g du groupe G la multiplication à gauche L_g est un morphisme de la structure complexe affine sur G). Si Γ est un réseau cocompact du groupe G, la variété quotient $S = \Gamma\backslash G$ est alors naturellement une surface complexe affine. Nous verrons que le groupe G est nécessairement résoluble, on appellera *solvsurface affine* le quotient $S = \Gamma\backslash G$.

Un deuxième exemple est celui des surfaces de Hopf affines : soit $\langle g \rangle$ le sous-groupe cyclique de $GL(2,\mathbb{C})$ engendré par une application linéaire contractante g, on appellera *surface de Hopf affine* la surface quotient $S = \mathbb{C}^2\backslash\{0\}/\langle g \rangle$.

Pour le troisième exemple, supposons donné un quadruplet $(\Gamma, \Delta, \phi, \rho)$ où Γ désigne un réseau cocompact sans torsion du groupe $\mathbf{P}SL(2,\mathbb{R})$, le groupe $\Delta \simeq \mathbb{Z}$ est un réseau de $\mathbb{C}^*$, l'application $\phi : \mathbf{H} \longrightarrow \mathbf{P}^1\mathbb{C}$ est la développante holomorphe d'une structure projective d'holonomie $\overline{\rho} : \Gamma \longrightarrow \mathbf{P}SL(2,\mathbb{C})$ sur la surface de Riemann $\Sigma = \Gamma\backslash\mathbf{H}$, et le morphisme $\rho : \Gamma \longrightarrow GL(2,\mathbb{C})$ a pour image le morphisme $\overline{\rho}$ par composition avec la projection canonique de $GL(2,\mathbb{C})$ dans $\mathbf{P}SL(2,\mathbb{C})$ (un tel morphisme existe toujours ([8], p. 180). Notons $W = \mathbb{C}^2\backslash\{0\}$ le $\mathbb{C}^*$-fibré tautologique sur la droite projective $\mathbf{P}^1\mathbb{C}$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \phi^*(W) & \xrightarrow{\tilde{\phi}} & W \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{H} & \xrightarrow{\phi} & \mathbf{P}^1\mathbb{C} \end{array}$$

munit le $\mathbb{C}^*$-fibré $\phi^*(W) \simeq \mathbb{C}^* \times \mathbf{H}$ sur $\mathbf{H}$ d'une structure complexe affine. Cette structure complexe affine est $\Delta \times \Gamma-$invariante, le groupe Δ agissant par multiplication dans les fibres, l'action du groupe Γ étant induite de son action naturelle sur $\mathbf{H}$ et de sa ρ-action sur W. La variété quotient $\Delta \times \Gamma\backslash\phi^*(W)$ est un fibré holomorphe en courbe elliptique $\Delta\backslash\mathbb{C}^*$ de base Σ, portant naturellement une structure complexe affine. Une telle surface complexe affine sera appelée *fibré elliptique affine*.

Ces trois exemples sont essentiellement les seuls : nous montrons le

THÉORÈME 1.1. — *À revêtement et quotient finis près, toute surface complexe affine est affinement isomorphe à une solvsurface affine, une surface de Hopf affine ou un fibré elliptique affine.*

Remarque. — Contrairement aux surfaces complexes affines connues de Inoue, Kobayashi et Ochiai ([13], p. 263), toute surface complexe affine ne s'obtient pas comme quotient d'un ouvert de $\mathbb{C}^2$ par un groupe de transformations affines : il suffit de considérer un fibré elliptique affine construit à partir d'une structure projective de développante non injective sur une surface de Riemann Σ de genre $g \geq 2$ (l'existence de telles structures projectives sur Σ est bien connue, cf. [10], [14]).

Étant donné une surface complexe S admettant une structure complexe affine, i.e appartenant à la liste de Inoue, Kobayashi et Ochiai, on peut alors décrire l'espace de déformation $\mathcal{T}(S)$ des structures complexes affines sur S (défini à la section 2.2) :

THÉORÈME 1.2. — *Soit S une surface complexe et $\mathcal{T}(S)$ l'espace de déformation des structures complexes affines sur S.*

– Si S est un tore complexe, $\mathcal{T}(S)$ est biholomorphe à la variété analytique des classes d'isomorphismes des $\mathbb{C}$-algèbres associatives et commutatives de dimension 2.

– Si S est une surface de Kodaira primaire, $\mathcal{T}(S)$ est biholomorphe à $\mathbb{C}$.

– Si S est une surface de Hopf affine ou une surface d'Inoue, $\mathcal{T}(S)$ est réduit à un point.

– Si S est un fibré principal holomorphe en courbe elliptique sur une surface de Riemann de genre $g \geq 2$, de premier nombre de Betti $b_1(S)$ impair, $\mathcal{T}(S)$ est biholomorphe à un espace vectoriel complexe de dimension $4g-3$.

Remarque. — Dans [21], Vitter calcule l'espace $\mathcal{T}(S)$ dans les cas où S est un tore complexe, une surface de Hopf affine, ou une surface de Kodaira primaire. Des deux cas restants, le cas géométriquement intéressant est celui des fibrés principaux holomorphes en courbe elliptique sur une surface de Riemann de genre $g \geq 2$, de premier nombre de Betti impair.

On peut alors s'intéresser aux $(\mathbf{P}GL(3,\mathbb{C}), \mathbf{P}^2\mathbb{C})$-variétés. Dans [15], Kobayashi et Ochiai montrent qu'une surface complexe admettant une structure projective est biholomorphe au plan projectif $\mathbf{P}^2\mathbb{C}$, à une surface complexe admettant une structure complexe affine, ou à une surface hyperbolique complexe $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}/\Gamma$, où $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$ désigne la boule hyperbolique complexe réalisée canoniquement dans $\mathbf{P}^2\mathbb{C}$ par

$$\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}} = \{z = [z_1 : z_2 : z_3] \in \mathbf{P}^2\mathbb{C}, \quad |z_1|^2 + |z_2|^2 < |z_3|^2\}$$

et Γ désigne un réseau cocompact du groupe $\mathbf{P}U(2,1)$ des isométries directes de $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}$. Le théorème suivant précise ce résultat en montrant que les structures projectives sur une surface complexe admettant une structure complexe affine sont, à revêtement fini près, ses structures complexes affines. La question demeure de savoir si une surface hyperbolique complexe $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}/\Gamma$ admet d'autres structures projectives que sa structure projective canonique.

THÉORÈME 1.3. — *Hormis les $(\mathbf{P}GL(3,\mathbb{C}), \mathbf{P}^2\mathbb{C})$-variétés biholomorphes à une surface hyperbolique complexe $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}/\Gamma$, toute $(\mathbf{P}GL(3,\mathbb{C}), \mathbf{P}^2\mathbb{C})$-variété compacte connexe est projectivement isomorphe au plan projectif $\mathbf{P}^2\mathbb{C}$ ou, à revêtement fini près, à l'une des surfaces complexes affines classifiées précédemment.*

Le plan de ce papier est le suivant : à la section 2, nous rappelons des généralités (application développante, groupe d'holonomie) concernant les (G, X)-structures au sens d'Ehresmann [5]. La complexité d'une (G, X)-variété dépend essentiellement de la complexité de son groupe d'holonomie. Ainsi les $(\mathbf{P}GL(3,\mathbb{C}), \mathbf{P}^2\mathbb{C})$-variétés les plus simples sont celles à groupe d'holonomie nilpotent : à partir d'un argument géométrique dû à Benoist [2] nous montrons à la section 3 qu'une $(\mathbf{P}GL(3,\mathbb{C}), \mathbf{P}^2\mathbb{C})$-variété à holonomie nilpotente est, à l'exception de $\mathbf{P}^2\mathbb{C}$, projectivement isomorphe à une nilsurface affine ou à une surface de Hopf affine. Malheureusement cet argument ne s'étend pas aux structures à holonomies seulement résolubles, encore moins à celles comportant un facteur semi-simple. Pour traiter ces deux cas, nous usons du fait qu'en dehors des surfaces complexes à groupe fondamental nilpotent, seules trois classes de surfaces complexes dans la classification d'Enriques-Kodaira ([16], I), sont susceptibles d'admettre une $(\mathbf{P}GL(3,\mathbb{C}), \mathbf{P}^2\mathbb{C})$-structure : les surfaces hyperboliques complexes $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}/\Gamma$, les surfaces dites d'Inoue, à groupe fondamental résoluble non nilpotent, et une certaine classe de surfaces elliptiques qui à revêtement fini près sont des fibrés principaux holomorphes en courbe elliptique sur une surface de Riemann de genre $g \geq 2$, à premier nombre de Betti impair. Ce résultat de Inoue, Kobayashi et Ochiai est rappelé à la section 2. À la section 4 nous traitons le cas des surfaces d'Inoue, qui possèdent une $(\mathbf{P}GL(3,\mathbb{C}),\mathbf{P}^2\mathbb{C})$-structure canonique : cette structure est en fait unique, de type solvsurface affine. À la section 5 nous étudions le cas des fibrés en courbe elliptique sur une surface de Riemann de genre $g \geq 2$: nous montrons qu'un tel fibré muni d'une $(\mathbf{P}GL(3,\mathbb{C}),\mathbf{P}^2\mathbb{C})$-structure est à revêtement et quotient finis près projectivement isomorphe à un fibré elliptique affine. Ceci conclut la démonstration des théorèmes 1.1 et 1.3. À la section 6, nous démontrons le théorème 1.2.

Remerciements. — Je remercie vivement Y. Benoist de ses conseils, ainsi que le referee pour ses remarques.

2. GÉNÉRALITÉS

2.1. (G, X)-variétés.

Rappelons le formalisme général des (G,X)-variétés ([5], [20]) :

DÉFINITION. — *Soit X une variété analytique réelle connexe, G un groupe de Lie agissant analytiquement sur X à gauche et M une variété C^∞. Une (G,X)-structure sur M est un atlas maximal de cartes $\phi_i : U_i \longrightarrow X$ telles que :*

– les ouverts U_i recouvrent M;

– ϕ_i est un difféomorphisme sur son image;

– les changements de cartes $\phi_{ij} = \phi_i \circ \phi_j^{-1} : \phi_j(U_i \cap U_j) \longrightarrow \phi_i(U_i \cap U_j)$ sont localement des éléments de G.

Une (G,X)-variété est une variété C^∞ munie d'une (G,X)-structure.

Étant donné deux (G,X)-variétés M et N, une application $f : M \longrightarrow N$ sera dite un (G,X)-morphisme si pour toutes (G,X)-cartes $\phi_i : U_i \longrightarrow X$ et $\psi_j : V_j \longrightarrow X$ de M et N respectivement, et toute composante connexe C de l'intersection $U_i \cap f^{-1}(V_j)$, il existe un élément g du groupe G tel que la restriction de l'application f à l'ouvert C s'identifie à la composée ${\psi_j}^{-1} \circ g \circ \phi_i$. Remarquons qu'étant donné une variété M, une (G,X)-variété N et un difféomorphisme local $f : M \longrightarrow N$, il existe une unique (G,X)-structure sur M faisant de f un (G,X)-morphisme. En particulier tout revêtement d'une (G,X)-variété possède une (G,X)-structure canonique.

Soit alors (M, m_0) une variété $\mathcal{C}^\infty$ pointée, notons Γ le groupe fondamental $\pi_1(M, m_0)$ et $\tilde{M}$ le revêtement universel de M associé. Les remarques précédentes et le principe de monodromie impliquent la définition équivalente suivante :

Définition. — *La variété M est une (G, X)-variété si on se donne un difféomorphisme local Γ-équivariant $D : \tilde{M} \longrightarrow X$, c'est-à-dire qu'il existe un morphisme de groupe $h : \Gamma \longrightarrow G$ tel que :*

$$\forall \gamma \in \Gamma, \quad D \circ \gamma = h(\gamma) \circ D.$$

L'application D est appelée développante, *le groupe $H = h(\Gamma)$* groupe d'holonomie.

Une (G, X)-structure sur M est entièrement déterminée par la donnée de la développante D à multiplication à gauche par un élément de G près. Les (G, X)-variétés les plus simples sont les (G, X)-variétés dites *complètes*, pour lesquelles la développante est un revêtement sur le modèle X. En particulier si la variété X est simplement connexe et si M est une (G, X)-variété complète, le groupe fondamental Γ s'identifie au groupe d'holonomie H et la (G, X)-variété M au quotient $\Gamma \backslash X$.

Remarque. — Une surface complexe affine est par définition une $(A(2, \mathbb{C}), \mathbb{C}^2)$-variété compacte. Une telle structure n'est pas nécessairement complète : ainsi la développante $D : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ qui au couple (z, w) associe le couple $(\exp z, \exp w)$ définit une structure affine incomplète sur un tore complexe de dimension 2.

2.2. Espace de déformation.

Dorénavant X est une variété analytique complexe et G un groupe de Lie sous-groupe du groupe des biholomorphismes de X. Une (G, X)-variété possède alors une structure analytique complexe naturelle, induite par sa (G, X)-structure.

Étant donné une variété analytique complexe S, on souhaite définir un "espace des (G, X)-structures sur S compatibles avec sa structure analytique", c'est-à-dire paramétrer de manière convenable les couples (ϕ, M), où M est une (G, X)-variété et $\phi : S \longrightarrow M$ un biholomorphisme. Pour ce faire choisissons s_0 un point de S, notons Γ le groupe fondamental $\pi_1(S, s_0)$ et $\tilde{S}$ le revêtement universel associé muni de sa structure analytique complexe canonique. Définissons $\mathcal{A}'_{(G,X)}(S)$ comme l'ensemble des couples (D,h) où $h : \Gamma \longrightarrow G$ est un morphisme de groupe et $D : \tilde{S} \longrightarrow X$ est un biholomorphisme local h-équivariant. L'ensemble $\mathcal{A}'_{(G,X)}(S)$ est muni de sa topologie naturelle induite de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact pour les applications développantes D. Remarquons que $\mathcal{A}'_{(G,X)}(S)$ ne dépend du choix du point s_0 qu'à homéomorphisme près. Le groupe G agit sur $\mathcal{A}'_{(G,X)}(S)$ selon :

$$\forall g \in G, \quad g \cdot (D,h) = (g \circ D,\, g \cdot h \cdot g^{-1}).$$

Appelons $\mathcal{A}_{(G,X)}(S)$ le quotient $\mathcal{A}'_{(G,X)}(S)/G$. Le groupe $\mathrm{Hol}^0(S)$, composante connexe de l'identité du groupe des biholomorphismes de S agit naturellement sur $\mathcal{A}_{(G,X)}(S)$.

DÉFINITION. — *On appelle espace de déformation des (G,X)-structures sur la variété analytique S l'espace*

$$\mathcal{T}_{(G,X)}(S) = \mathrm{Hol}^0(S)\backslash\mathcal{A}_{(G,X)}(S).$$

Dans le cas où le groupe G est le groupe affine $A(n,\mathbb{C}) = GL(n,\mathbb{C}) \ltimes \mathbb{C}^n$ et le modèle X est l'espace vectoriel $\mathbb{C}^n$, l'espace $\mathcal{A}(S) = \mathcal{A}_{(G,X)}(S)$ n'est autre que l'espace des connexions holomorphes plates sans torsion sur S : on identifie la classe dans $\mathcal{A}(S)$ d'une développante $D : \tilde{S} \longrightarrow \mathbb{C}^n$ à la connexion sur S induite de la connexion $D^*(d)$ sur le revêtement universel $\tilde{S}$, où d désigne la connexion triviale sur $\mathbb{C}^n$. L'espace des connexions holomorphes sur S est un espace affine A modelé sur l'espace vectoriel complexe $H^0(S, T^*S \otimes T^*S \otimes TS)$ des 1-formes holomorphes sur S à valeur dans les endomorphismes du fibré tangent holomorphe TS. Comme la torsion et la courbure sont des applications analytiques sur A, l'espace $\mathcal{A}(S)$ de leurs zéros communs est une sous-variété analytique (éventuellement singulière) de A.

En dimension $n = 2$, nous verrons que le groupe $\mathrm{Hol}^0(S)$ agit trivialement sur $\mathcal{A}(S)$ si S est un tore complexe, une surface de Kodaira primaire, une surface d'Inoue ou un fibré elliptique principal de premier nombre de Betti impair sur une surface de Riemann de genre $g \geq 2$, et transitivement si S est une surface de Hopf affine. Dans tous les cas, l'espace de déformation $\mathcal{T}(S) = \mathrm{Hol}^0(S)\backslash\mathcal{A}(S)$ est muni d'une structure analytique naturelle induite de celle de $\mathcal{A}(S)$, ce qui donne un sens au théorème 1.2.

2.3. $(\mathbf{P}GL(3,\mathbb{C}),\mathbf{P}^2\mathbb{C})$-variétés.

En remarquant que les fibres singulières d'une surface elliptique de nombres de Chern nuls sont nécessairement de type ${}_mI_0$ et qu'elle admet donc, si sa base est de genre > 0, un fibré principal holomorphe en courbe elliptique comme revêtement fini ([22], p. 137), on peut reformuler les résultats de Inoue, Kobayashi, et Ochiai ([13], [15]) de la façon suivante :

THÉORÈME 2.1. — *Soit S une $(\mathbf{P}GL(3,\mathbb{C}),\mathbf{P}^2\mathbb{C})$-variété (compacte connexe) n'admettant pas de revêtement fini à groupe fondamental nilpotent. Si S n'admet aucune structure complexe affine, S est biholomorphe à une surface hyperbolique complexe $\mathbf{H}^2_{\mathbb{C}}/\Gamma$. Sinon S est biholomorphe à une surface d'Inoue, ou à un quotient fini d'un fibré principal holomorphe en courbe elliptique sur une surface de Riemann de genre $g \geq 2$, de premier nombre de Betti impair.*

Le lemme suivant ([22], Sec. 7) nous sera également utile :

LEMME 2.1. — *Soit S un fibré holomorphe principal en courbe elliptique sur une surface de Riemann de genre $g \geq 2$, de premier nombre de Betti $b_1(S)$ impair. Alors le revêtement universel $\tilde{S}$ s'identifie holomorphiquement au produit $\mathbb{C} \times \mathbf{H}$ et le groupe fondamental $\pi_1(S)$ admet une présentation*

$$\langle a_1, b_1, \cdots, a_g, b_g, c, d \mid c, d \ \text{ centraux}, \ \prod_{i=1}^{g}[a_i, b_i] = c^r\rangle$$

où r désigne un entier naturel strictement positif.

Pour démontrer les théorèmes 1.1 et 1.3, nous étudierons successivement aux sections 3, 4, 5 les structures projectives à holonomie nilpotente, les structures projectives sur les surfaces d'Inoue, et les structures projectives sur les fibrés elliptiques principaux de premier nombre de Betti impair sur une surface de Riemann de genre $g \geq 2$.

3. $(\mathbf{P}GL(3,\mathbb{C}),\ \mathbf{P}^2\mathbb{C})$-VARIÉTÉS À HOLONOMIE NILPOTENTE

Nous décrivons les $(\mathbf{P}GL(3,\mathbb{C}),\mathbf{P}^2\mathbb{C})$-variétés *a priori* les plus simples : celles à holonomie nilpotente. Commençons par des lemmes généraux sur les $(\mathbf{P}GL(n+1,\mathbb{C}),\mathbf{P}^n\mathbb{C})$-variétés à holonomie nilpotente.

3.1. $(\mathbf{P}GL(n+1,\mathbb{C}), \mathbf{P}^n\mathbb{C})$-variétés à holonomie nilpotente.

Dans [2], Benoist décrit la structure des $(\mathbf{P}SL(m+1,\mathbb{R}), \mathbf{P}^m\mathbb{R})$-variétés à holonomie nilpotente. Certains de ses résultats se généralisent au cas complexe. Dans la suite de ce paragraphe, on notera G le groupe $\mathbf{P}GL(n+1,\mathbb{C})$ et X la variété complexe $\mathbf{P}^n\mathbb{C}$.

Soit donc (M, m_0) une (G, X)-variété pointée compacte connexe de groupe fondamental $\Gamma = \pi_1(M, m_0)$, de revêtement universel associé $\tilde{M}$, et $D : \tilde{M} \longrightarrow X$ une développante de morphisme d'holonomie h. Notons $Is(\tilde{M})$ le groupe de Lie des transformations affines de $\tilde{M}$: par définition une transformation ϕ de $\tilde{M}$ est dans $Is(\tilde{M})$ s'il existe un élément de G, encore noté $h(\phi)$ tel que $D \circ \phi = h(\phi) \circ D$. Soit K le sous-groupe de $Is(\tilde{M})$ noyau de h et $\hat{I}$ la composante connexe de l'identité de $Is(\tilde{M})$, notons K_0 l'intersection $K \cap \hat{I}$ et I l'image $h(\hat{I}) \simeq \hat{I}/K_0$. Si L est un sous-groupe connexe de I, on notera $Is_L(\tilde{M})$ sa h-préimage dans le groupe $Is(\tilde{M})$ et $\hat{L}$ la composante connexe de l'identité de $Is_L(\tilde{M})$.

Supposons le groupe d'holonomie $H = h(\Gamma)$ nilpotent. Choisissons N un sous-groupe nilpotent connexe maximal de G tel que le sous-groupe $H \cap N$ de H soit d'indice fini dans H. Un tel groupe existe, il suffit que N contienne la composante connexe de l'identité de l'adhérence de Zariski de H dans G. Benoist ([2], p. 450) démontre le :

LEMME 3.1. — *Supposons M compacte à holonomie nilpotente. Alors on a l'inclusion $N \subset I$.*

Ainsi le revêtement universel $\tilde{M}$ est réunion d'orbites du groupe $\hat{N}$. Pour décrire ces orbites, intéressons-nous d'abord à celles du groupe N dans X. Notons E l'espace vectoriel $\mathbb{C}^{n+1}$, la projection canonique $GL(E) \longrightarrow \mathbf{P}GL(E)$ définit une bijection de l'ensemble des sous-groupes nilpotents connexes maximaux de $GL(E)$ dans l'ensemble des sous-groupes nilpotents connexes maximaux de $\mathbf{P}GL(E)$.

Pour tout sous-groupe $\check{N}$ de $GL(E)$ on dit que $\check{N}$ est décomposable si on peut trouver une décomposition non-triviale $E = E_1 \oplus E_2$ telle que le groupe $\check{N}$ est inclus dans le produit $GL(E_1) \times GL(E_2)$. Le groupe $\check{N}$ s'identifie alors au produit $\check{N} = \check{N}_1 \times \check{N}_2$, où $\check{N}_i$ désigne le groupe $GL(E_i) \cap \check{N}$, $i = 1, 2$. De plus $\check{N}$ est nilpotent connexe maximal si et seulement si $\check{N}_1$ et $\check{N}_2$ le sont. Sinon on dit que $\check{N}$ est indécomposable. Définissons, pour un entier $d \geq 1$:

$$\check{N}_d = \{g \in GL(\mathbb{C}^d),\ \exists \lambda \in \mathbb{C}^*,\ g - \lambda \cdot Id \text{ est triangulaire supérieure}\}.$$

Le groupe $\check{N}_d$ est bien sûr un sous-groupe nilpotent connexe maximal indécomposable de $GL(\mathbb{C}^d)$.

Le lemme suivant ([2], p. 451) décrit les sous-groupes nilpotents connexes maximaux de $GL(E)$:

LEMMA 3.2. — *Soit $\check{N}$ un sous-groupe nilpotent connexe maximal de $GL(E)$, il existe une unique décomposition $E = \bigoplus_{1\leq i\leq k} E_i$ telle que $\check{N} = \check{N}_1 \cdots \check{N}_k$ où $\check{N}_i = GL(E_i) \cap \check{N}$ est un sous-groupe nilpotent connexe maximal indécomposable de $GL(E_i)$ semblable à $\check{N}_{d_i}$ ($d_i = \dim E_i$).*

Évidemment les orbites de $\check{N}$ dans E sont les produits des orbites de $\check{N}_i$ dans E_i. Mais $\check{N}_d$ a exactement d orbites dans $\mathbb{C}^d - \{0\}$:

$$\check{\Omega}_j = \{(z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{C}^d, z_j \neq 0 \ \text{ et } \ z_{j-1} = \cdots = z_1 = 0\}.$$

En particulier $\check{N}$ a exactement une orbite ouverte dans E, de la forme $\mathbb{C}^p \times (\mathbb{C}^*)^{n-p+1}$, où p désigne un entier naturel strictement inférieur à $n + 1$. Le sous-groupe nilpotent connexe maximal N image de $\check{N}$ dans $\mathbf{P}GL(E)$ a alors une unique orbite ouverte dans $X = \mathbf{P}(E)$, de la forme $\mathbf{P}(\mathbb{C}^p \times (\mathbb{C}^*)^{n-p+1})$.

Nous pouvons maintenant décrire le revêtement universel $\tilde{M}$. Comme la développante D est un difféomorphisme local, le groupe $\hat{N}$ admet une unique orbite ouverte $\hat{\Omega}$ dans $\tilde{M}$. Le revêtement universel $\tilde{M}$ s'identifie donc à l'adhérence $\overline{\hat{\Omega}}$ de $\hat{\Omega}$ dans $\tilde{M}$. D'après ([2], p. 459), la restriction de la développante D à l'adhérence dans $\tilde{M}$ de toute orbite de $\hat{N}$ est un revêtement sur son image. La proposition suivante résume alors la géométrie des $(\mathbf{P}GL(n+1, \mathbb{C}), \mathbf{P}^n\mathbb{C})$-variétés à holonomie nilpotente :

PROPOSITION 3.1. — *Soit M une $(\mathbf{P}GL(n+1, \mathbb{C}), \mathbf{P}^n\mathbb{C})$-variété compacte de développante D, de groupe d'holonomie H nilpotent. Soit N un sous-groupe nilpotent connexe maximal de $\mathbf{P}GL(n+1, \mathbb{C})$ tel que l'intersection $H \cap N$ soit un sous-groupe d'indice fini de H. Alors la composante connexe de l'identité $\hat{N}$ du groupe $Is_N(\tilde{M})$ agit quasi-transitivement sur $\tilde{M}$ (i.e possède une unique orbite ouverte $\hat{\Omega}$ dans $\tilde{M}$) et la développante D est un revêtement sur son image.*

3.2. Réduction au cas affine.

PROPOSITION 3.2. — *À l'exception de $\mathbf{P}^2\mathbb{C}$, toute $(\mathbf{P}GL(3, \mathbb{C}), \mathbf{P}^2\mathbb{C})$-variété compacte à holonomie nilpotente est projectivement isomorphe, à revêtement fini près, à une surface complexe affine.*

Preuve. — Soit S une $(\mathbf{P}GL(3,\mathbb{C}),\mathbf{P}^2\mathbb{C})$-variété compacte connexe à holonomie H nilpotente et N un sous-groupe nilpotent connexe maximal de $\mathbf{P}GL(3,\mathbb{C})$ tel que l'intersection $H \cap N$ soit un sous-groupe d'indice fini de H. L'orbite ouverte $D(\hat{\Omega})$ de la proposition 3.1 s'identifie à $\mathbf{P}(\mathbb{C}^{*3})$, $\mathbf{P}(\mathbb{C}^{*2}\times\mathbb{C})$ ou $\mathbf{P}(\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^2)$. On vérifie par énumération qu'il n'y a que quatre cas pour lesquels S diffère *a priori* de $\mathbf{P}^2\mathbb{C}$ ou d'une surface complexe affine :

1^er^ *cas.* Le revêtement universel $\tilde{S}$ s'identifie par D au plan projectif $\mathbf{P}^2\mathbb{C}$ privé de trois points x, y et z de coordonnées homogènes respectives $[1:0:0]$, $[0:1:0]$, et $[0:0:1]$ et le groupe N s'identifie au projectivisé du groupe des matrices diagonales de $GL(3,\mathbb{C})$. La surface complexe S s'identifie au quotient $\Gamma\backslash(\mathbf{P}^2\mathbb{C}\backslash\{x;y;z\})$. En particulier le groupe fondamental Γ agit fidèlement cocompactement sur la N-orbite $\mathbf{P}(\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \times \{0\}) \simeq \mathbb{C}^*$. À revêtement fini près, on peut supposer que le groupe Γ est isomorphe au sous-groupe cyclique infini $< g >$ de N engendré par l'élément diagonal $g = \mathrm{diag}(\alpha, \alpha^i, 1)$, où i désigne un nombre entier. Mais alors la variété S n'est pas compacte : on vérifie par exemple que si i diffère de 0 ou 1, la suite $([n:n^{i+1}:1])_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de valeur d'adhérence dans S (idem avec la suite $([0:n:1])_{n\in\mathbb{N}}$ si $i=0$, avec la suite $([n:1:0])_{n\in\mathbb{N}}$ si $i=1$). D'où la contradiction.

2^ème^ *cas.* Le revêtement universel $\tilde{S}$ s'identifie par D au plan projectif $\mathbf{P}^2\mathbb{C}$ privé de deux points x et y de coordonnées homogènes respectives $[1:0:0]$ et $[0:0:1]$ et le groupe N s'identifie au projectivisé du sous-groupe de $GL(3,\mathbb{C})$

$$\check{N} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL(3,\mathbb{C}) \right\}.$$

La surface complexe S s'identifie au quotient $\Gamma\backslash(\mathbf{P}^2\mathbb{C}\backslash\{x;y\})$. En particulier le groupe fondamental Γ agit fidèlement cocompactement sur les N-orbites $\mathbf{P}(\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*\times\{0\}) \simeq \mathbb{C}$ et $\mathbf{P}(\mathbb{C}^*\times\{0\}\times\mathbb{C}^*) \simeq \mathbb{C}^*$, le groupe Γ est donc à la fois isomorphe à $\mathbb{Z}^2$ et au produit de $\mathbb{Z}$ par un groupe fini, d'où la contradiction.

3^ème^ *cas.* Le revêtement universel $\tilde{S}$ s'identifie par D au plan projectif $\mathbf{P}^2\mathbb{C}$ privé du point x de coordonnées homogènes $[1:0:0]$, le groupe N est encore le projectivisé du groupe de $GL(3,\mathbb{C})$

$$\check{N} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL(3,\mathbb{C}) \right\}.$$

Mais le groupe fondamental Γ fixe alors le point $[0:0:1]$ de $\tilde{S}$, d'où la contradiction.

$4^{\text{ème}}$ *cas.* Le revêtement universel $\tilde{S}$ s'identifie par D à l'ouvert simplement connexe $\mathbf{P}(\mathbb{C} \times \mathbb{C}^2\backslash\{0\})$ et le groupe N au projectivisé du sous-groupe de $GL(3,\mathbb{C})$

$$\check{N} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL(3,\mathbb{C}) \right\}.$$

La surface complexe S s'identifie au quotient $\Gamma\backslash\mathbf{P}(\mathbb{C} \times \mathbb{C}^2\backslash\{0\})$. En particulier le groupe fondamental Γ agit fidèlement cocompactement sur la N-orbite $\mathbf{P}(\mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \times \{0\}) \simeq \mathbb{C}$, il est donc isomorphe à $\mathbb{Z}^2$. Soit Γ est isomorphe au sous-groupe de $\check{N}$ des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{Z}^2$$

soit Γ est isomorphe au sous-groupe de $\check{N}$ des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2/2 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{Z}^2.$$

Dans les deux cas la surface complexe S n'est pas compacte (par exemple la suite $([n:1:1])_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de valeur d'adhérence dans S) d'où la contradiction. □

3.3. Surfaces complexes affines à holonomie nilpotente.

PROPOSITION 3.3. — *Soit S une surface complexe affine à holonomie nilpotente. À revêtement fini près, S est affinement isomorphe à une surface de Hopf affine ou à une nilsurface affine, qui est biholomorphe soit à un tore soit à une surface de Kodaira primaire.*

Preuve. — Soit S une surface complexe affine à holonomie nilpotente. D'après la proposition 3.1 l'orbite ouverte $D(\hat{\Omega})$ est nécessairement $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$, $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ ou $\mathbb{C}^2$. L'image $D(\tilde{S}) = D(\overline{\hat{\Omega}})$ s'identifie donc en tant que variété affine à $\mathbb{C}^2\backslash\{0\}$, $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$, $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ ou $\mathbb{C}^2$.

1^{er} *cas : $D(\tilde{S}) = \mathbb{C}^2\backslash\{0\}$.* Comme la développante D est un revêtement sur son image et $\mathbb{C}^2\backslash\{0\}$ est simplement connexe, le revêtement universel affine $\tilde{S}$ s'identifie à $\mathbb{C}^2\backslash\{0\}$. La surface complexe affine S est donc le quotient $\Gamma\backslash(\mathbb{C}^2\backslash\{0\})$ où Γ est un sous-groupe discret du groupe $GL(2,\mathbb{C})$ des transformations affines de $\mathbb{C}^2\backslash\{0\}$ agissant proprement sans point fixe sur $\mathbb{C}^2\backslash\{0\}$. En particulier le groupe Γ contient une contraction linéaire g : à revêtement fini près, la surface complexe affine S est donc une surface de Hopf affine.

$2^{\text{ème}}$ *cas* : $D(\tilde{S}) = \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$. Le groupe N s'identifie au groupe $\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^*$, le groupe $\hat{N} = \mathbb{C}^2$ agit simplement transitivement sur le revêtement universel affine $\tilde{S}$. Ainsi $\tilde{S}$ comme $(A(2,\mathbb{C}),\mathbb{C}^2)$-variété s'identifie au groupe complexe $\hat{N} = \mathbb{C}^2$ muni d'une structure complexe affine invariante à gauche, le groupe Γ est un réseau de $\mathbb{C}^2$ et la surface complexe affine S est la nilsurface affine $\Gamma\backslash\mathbb{C}^2$. En tant que surface complexe, S est un tore.

$3^{\text{ème}}$ *cas* : $D(\tilde{S}) = \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$. Le groupe d'holonomie H est un sous-groupe du groupe des transformations affines de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$, qui s'identifie au groupe des matrices de $GL(3,\mathbb{C})$ de la forme $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Le groupe N, sous-groupe nilpotent connexe maximal de ce groupe de matrices, est nécessairement l'un des trois groupes suivants :

1. $N = \mathbb{C}\times\mathbb{C}^*$, groupe des matrices de $GL(3,\mathbb{C})$ de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. $N = \mathbb{C}^*\times\mathbb{C}$, groupe des matrices de $GL(3,\mathbb{C})$ de la forme $\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. $N = \mathbb{C}^2$, groupe des matrices de $GL(3,\mathbb{C})$ de la forme $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Dans les cas 1 et 2 le groupe $\hat{N}$ s'identifie encore au groupe $\mathbb{C}^2$ et agit simplement transitivement sur le revêtement universel $\tilde{S}$: comme $(A(2,\mathbb{C}),\mathbb{C}^2)$-variété $\tilde{S}$ s'identifie au groupe complexe $\hat{N} = \mathbb{C}^2$ muni d'une structure complexe affine invariante à gauche, la surface complexe affine S est la nilsurface affine $\Gamma\backslash\hat{N}$, où Γ est un réseau de $\mathbb{C}^2$. En tant que surface complexe, S est encore un tore.

Le cas 3 est impossible : la développante D étant un revêtement sur son image, et la variété S étant compacte, le quotient $H\backslash D(\tilde{S})$ est un espace topologique quasi-compact (pour sa topologie naturelle qui n'est pas nécessairement séparée). *A fortiori* $N\backslash D(\tilde{S})$ doit être quasi-compact. Or dans le cas 3 le groupe N n'agit pas sur le deuxième facteur de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$.

$4^{\text{ème}}$ *cas* : $D(\tilde{S}) = \mathbb{C}^2$. La surface complexe affine S est alors complète à holonomie nilpotente. D'après un résultat de Fried, Goldman et Hirsch ([6], Theorem A), le groupe d'holonomie H est en fait unipotent, en particulier le fibré canonique de S est trivial. D'après la classification d'Enriques-Kodaira ([1], p. 188), la surface S, de revêtement universel isomorphe à $\mathbb{C}^2$ et à fibré canonique trivial, est un tore complexe ou une surface de Kodaira primaire.

Le groupe N s'identifie au sous-groupe de $GL(3,\mathbb{C})$ des matrices unipotentes supérieures, il agit transitivement sur $\mathbb{C}^2$ avec comme groupe d'isotropie à l'origine le groupe

$$N_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(3,\mathbb{C}) \right\}.$$

Soit L la composante connexe de l'adhérence de Zariski de Γ dans N vu comme groupe algébrique réel. Le groupe L est encore unipotent, l'intersection $\Gamma \cap L$ est un réseau (nécessairement cocompact) de L. Comme $\Gamma \cap L$ est un sous-groupe d'indice fini de Γ, il agit proprement avec quotient compact sur $\mathbb{C}^2 = N/N_0$, donc L également. En particulier si on note $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{n}_0$ et $\mathfrak{l}$ les algèbres de Lie réelles respectives des groupes de Lie N, N_0 et L, l'intersection $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{n}_0$ est triviale. Remarquons alors que Γ, qui agit proprement avec quotient compact sur $\mathbb{C}^2$, est de dimension cohomologique 4, donc L aussi. Comme N_0 et N ont pour dimensions cohomologiques respectives 2 et 6, on en déduit l'égalité d'algèbres de Lie réelles :

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{n}_0.$$

Mais alors le groupe de Lie réel nilpotent connexe L agit simplement transitivement sur $\mathbb{C}^2$ par transformations affines complexes : il est ainsi muni d'une $(A(2,\mathbb{C}), \mathbb{C}^2)$-structure invariante à gauche et la surface complexe affine S admet pour revêtement fini la nilsurface affine $(\Gamma \cap L)\backslash L$.

Le cas où S est un tore correspond au cas où le groupe L est commutatif. On vérifie aisément que le groupe L s'identifie alors au groupe $\mathbb{C}^2$ réalisé comme sous-groupe de $GL(3,\mathbb{C})$ des matrices de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 & w \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ou de la forme $\begin{pmatrix} 1 & z & w \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Le cas où S est une surface de Kodaira primaire correspond au cas où L n'est pas commutatif. On vérifie que le groupe L est conjugué à l'un des sous-groupes de $A(2,\mathbb{C})$ de la forme

$$G_a = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \overline{z} + az & w \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(3,\mathbb{C}) \right\}, \quad a \in \mathbb{C}.$$

En tant que groupe de Lie réel, le groupe L est isomorphe au groupe $\mathbb{R}\times\mathrm{Heis}(3)$, où Heis(3) dénote le groupe d'Heisenberg classique des matrices de $GL(3,\mathbb{R})$ unipotentes supérieures. □

4. STRUCTURES PROJECTIVES SUR LES SURFACES D'INOUE

Dans cette section nous montrons la

PROPOSITION 4.1. — *Toute surface d'Inoue admet une unique $(\mathbf{P}GL(3,\mathbb{C}),\mathbf{P}^2\mathbb{C})$-structure, qui (à revêtement fini près) en fait une solvsurface affine.*

4.1. Description des surfaces d'Inoue.

Considérons les sous-groupes réels résolubles suivants du groupe $A(2,\mathbb{C})$:

$$\mathrm{Sol}_0^4=\left\{\begin{pmatrix}\lambda & 0 & a\\ 0 & |\lambda|^{-2} & b\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\ \lambda\in\mathbb{C}^*,\ \mathrm{a}\in\mathbb{C},\ \mathrm{b}\in\mathbb{R}\right\}.$$

$$\mathrm{Sol}_1^4=\left\{\begin{pmatrix}\epsilon & a & b\\ 0 & \alpha & c\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\ (\alpha,\mathrm{a},\mathrm{b},\mathrm{c})\in\mathbb{R}^4,\ \alpha>0,\ \epsilon=\pm1\right\}.$$

$$\mathrm{Sol}_1'^4=\left\{\begin{pmatrix}1 & a & b+i\log\alpha\\ 0 & \alpha & c\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\ (\alpha,\mathrm{a},\mathrm{b},\mathrm{c})\in\mathbb{R}^4,\ \alpha>0\right\}.$$

Comme ces groupes agissent transitivement avec groupes d'isotropies compacts (respectivement S^1, $\{\pm1\}$ et $\{1\}$) sur le produit $\mathbb{C}\times\mathbf{H}$, leurs réseaux agissent proprement avec quotients compacts sur cet espace et les surfaces complexes quotients sont canoniquement munies d'une structure complexe affine.

DÉFINITION. — *On appelle surfaces d'Inoue les surfaces complexes de la forme $\Gamma\backslash\mathbb{C}\times\mathbf{H}$, où Γ désigne un réseau sans torsion d'un des groupes* Sol_0^4, Sol_1^4 *ou* $\mathrm{Sol}_1'^4$.

On montre alors facilement le

LEMME 4.1 ([22], p. 146). — *À revêtement fini près, les surfaces d'Inoue munies de leur structure complexe affine canonique sont des solvsurfaces affines.*

4.2. Structures projectives sur les surfaces d'Inoue.

Soit G l'un des groupes Sol_0^4, Sol_1^4 ou $\mathrm{Sol}_1'^4$, Γ un réseau de G et S la surface d'Inoue $\Gamma\backslash\mathbb{C}\times\mathbf{H}$. Au vu du lemme 4.1, la proposition 4.1 est une conséquence immédiate des deux lemmes suivants :

LEMME 4.2. — *Les seules* $(\mathbf{P}GL(3,\mathbb{C}),\mathbf{P}^2\mathbb{C})$*-structures sur une surface d'Inoue sont ses structures complexes affines.*

Preuve. — Soit $D : \mathbb{C}\times\mathbf{H} \longrightarrow \mathbf{P}^2\mathbb{C}$ la développante d'une structure projective sur S, de morphisme d'holonomie h. Comme le groupe fondamental Γ de S est résoluble, le groupe d'holonomie $H = h(\Gamma)$ l'est donc également. À sous-groupe d'indice fini près on peut supposer que H est un sous-groupe du sous-groupe de Borel canonique B de $\mathbf{P}GL(3,\mathbb{C})$. L'action de B sur $\mathbf{P}^2\mathbb{C}$ induit une décomposition H-invariante

$$\mathbf{P}^2\mathbb{C} = \mathbb{C}^2 \cup \mathbf{P}^1\mathbb{C}$$

qui se relève en une décomposition Γ-invariante de $\tilde{S}$

$$\tilde{S} = D^{-1}(\mathbb{C}^2) \cup D^{-1}(\mathbf{P}^1\mathbb{C}).$$

Supposons $D^{-1}(\mathbf{P}^1\mathbb{C})$ non-vide, la projection de $D^{-1}(\mathbf{P}^1\mathbb{C})$ dans S est alors une sous-variété holomorphe compacte de dimension 1 de S, c'est-à-dire une réunion de courbes de S. Comme une surface d'Inoue ne contient aucune courbe (cf. [12], p. 269), le fermé $D^{-1}(\mathbf{P}^1\mathbb{C})$ est vide, l'image de la développante $D(\tilde{S})$ est contenue dans $\mathbb{C}^2$ et la structure projective définie par la développante D est bien complexe affine. □

LEMME 4.3. — *Toute surface d'Inoue admet une unique structure complexe affine.*

Preuve. — Soit D la développante

$$\begin{aligned} \mathbb{C}\times\mathbf{H} &\longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ (z,\xi) &\longmapsto (f_1(z,\xi), f_2(z,\xi)) \end{aligned}$$

d'une structure complexe affine sur S, pour montrer le lemme 4.3 montrons que la développante D est un difféomorphisme affine de $\mathbb{C}\times\mathbf{H}$ sur son image.

À sous-groupe d'indice fini près on peut supposer que le groupe d'holonomie H est formé de matrices triangulaires supérieures. Pour un élément $\gamma = \begin{pmatrix} A_\gamma & B_\gamma & C_\gamma \\ 0 & D_\gamma & E_\gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ de Γ, on notera alors $h(\gamma) = \begin{pmatrix} a_\gamma & b_\gamma & c_\gamma \\ 0 & d_\gamma & e_\gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ son holonomie.

Notons Λ le commutateur $[\Gamma, \Gamma]$, remarquons que l'action du groupe Λ sur $\mathbb{C} \times \mathbf{H}$ préserve les hyperplans réels H_ε d'équation $\Im(\xi) = \varepsilon$ dans les coordonnées (z, ξ) de $\mathbb{C} \times \mathbf{H}$, où ε désigne un nombre réel strictement positif. Si f est une fonction holomorphe Λ-invariante sur $\mathbb{C} \times \mathbf{H}$, la restriction de f à chacun de ces hyperplans est bornée. En particulier f n'est fonction que de la seule variable ξ, puis constante sur les hyperplans H_ε, donc constante. D'où le lemme crucial ([12], Lemma 3, Lemma 4) :

LEMME 4.4. — *Les seules fonctions holomorphes Λ-invariantes sur $\mathbb{C} \times \mathbf{H}$ sont les fonctions constantes.*

Remarque. — Si γ est un élément du commutateur Λ, les coefficients A_γ, D_γ, a_γ et d_γ sont égaux à 1.

La h-équivariance de la développante D se traduit par les deux équations suivantes, vérifiées pour tout élément γ du groupe Γ et tout point (z, ξ) de $\mathbb{C} \times \mathbf{H}$:

$$f_1(A_\gamma z + B_\gamma \xi + C_\gamma, D_\gamma \xi + E_\gamma) = a_\gamma f_1(z, \xi) + b_\gamma f_2(z, \xi) + c_\gamma \tag{1}$$

$$f_2(A_\gamma z + B_\gamma \xi + C_\gamma, D_\gamma \xi + E_\gamma) = d_\gamma f_2(z, \xi) + e_\gamma. \tag{2}$$

Dérivons l'équation (2) par rapport à la variable z, on trouve :

$$\forall \gamma \in \Gamma, \quad A_\gamma \frac{\partial f_2}{\partial z}(\gamma \cdot (z, \xi)) = d_\gamma \frac{\partial f_2}{\partial z}(z, \xi).$$

On déduit alors du lemme 4.4 et de la remarque que la fonction $\dfrac{\partial f_2}{\partial z}$ est constante : il existe un nombre complexe a et une fonction holomorphe $f : \mathbf{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ tels que : $f_2(z, \xi) = az + f(\xi)$. Dérivons deux fois l'équation (2) par rapport à la variable ξ et utilisons le lemme 4.4, il vient immédiatement que la fonction f est quadratique, il existe donc des nombres complexes b, c et d tels que $f_2(z, \xi) = az + b\xi^2 + c\xi + d$. Réécrivons alors l'équation (2) :

$$\begin{aligned} aA_\gamma z + b{D_\gamma}^2 \xi^2 + (aB_\gamma + 2bD_\gamma E_\gamma + cD_\gamma)\xi + (aC_\gamma + b{E_\gamma}^2 + ce_\gamma + d) \\ = ad_\gamma z + d_\gamma \xi^2 + cd_\gamma \xi + (dd_\gamma + c_\gamma). \end{aligned} \tag{3}$$

1^er^ *cas : $G = \mathrm{Sol}_1^4$ ou $\mathrm{Sol}_1'^4$.* La nullité du coefficient de ξ dans l'équation (3) impose : $\forall \gamma \in \Lambda, \quad aB_\gamma + 2bE_\gamma = 0$. Le groupe Λ étant un réseau du groupe dérivé $[G, G]$ on déduit de l'équation précédente l'égalité $a = b = 0$, et la fonction f_2 s'écrit : $f_2(z, \xi) = c\xi + d$. Dérivons alors l'équation (1) par rapport à la variable z, d'après le lemme 4.4 la fonction

$\frac{\partial f_1}{\partial z}$ est constante. Il existe donc un nombre complexe q et une fonction holomorphe $g : \mathbf{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ tels que : $f_1(z,\xi) = qz + g(\xi)$. En dérivant deux fois l'équation (1) par rapport à la variable ξ on voit encore que la fonction g est quadratique. Il existe donc des nombres complexes r, s et t tels que : $f_1(z,\xi) = qz + r\xi^2 + s\xi + t$.

Réécrivons alors l'équation (1) :

$$\begin{aligned}\forall\gamma \in \Gamma,\quad qA_\gamma z + (rD_\gamma^2)\xi^2 + (qB_\gamma + 2rD_\gamma E_\gamma + sD_\gamma)\xi + (qC_\gamma + r{E_\gamma}^2 + sE_\gamma + t)\\ = qa_\gamma z + ra_\gamma\xi^2 + (sa_\gamma + cb_\gamma)\xi + (ta_\gamma + db_\gamma + c_\gamma).\end{aligned}$$

La nullité des coefficients de z et ξ^2 dans l'équation précédente impose les deux équations $q(A_\gamma - a_\gamma) = 0$ et $r({D_\gamma}^2 - a_\gamma) = 0$. Comme la développante D est un difféomorphisme local, le produit cq est non nul. En particulier le nombre complexe q est non nul, et on déduit des deux équations précédentes l'équation :

$$\forall\gamma \in \Gamma,\quad r({D_\gamma}^2 - A_\gamma) = 0$$

qui implique l'égalité $r = 0$. Mais alors la fonction f_1 s'écrit $f_1(z,\xi) = qz + s\xi + t$, et la développante D est un difféomorphisme affine sur son image.

$2^{ème}$ *cas* : $G = \mathrm{Sol}_0^4$. Dans ce cas le coefficient B_γ est nul pour tout élément γ du groupe Γ. La nullité du coefficient de ξ dans l'équation (3) implique alors : $\forall\gamma \in \Lambda$, $2bE_\gamma = 0$ et donc b est nul. Écrivons ensuite l'égalité des coefficients de z d'une part, de ξ d'autre part : $a(A_\gamma - d_\gamma) = 0$ et $c(D_\gamma - d_\gamma) = 0$. Comme on peut trouver un élément γ du groupe Γ tel que les coefficients A_γ et D_γ soient distincts, on en déduit que le produit ac est nul. Si le nombre a est nul la situation est la même qu'au premier cas. Si le nombre c est nul la fonction f_2 s'écrit maintenant $f_2(z,\xi) = az + d$ et l'équation (1) se réécrit :

$$\forall\gamma \in \Gamma,\quad f_1(A_\gamma z + C_\gamma, D_\gamma\xi + E_\gamma) = a_\gamma f_1(z,\xi) + b_\gamma(cz + d) + c_\gamma$$

et la situation est analogue à celle du premier cas, les variables z et ξ échangeant leurs rôles.

Finalement la développante D est un difféomorphisme affine sur son image, ce qui conclut la démonstration du lemme 4.3 et donc de la proposition 4.1. □

5. $(\mathbf{P}GL(3,\mathbb{C}), \mathbf{P}^2\mathbb{C})$-STRUCTURES SUR LES SURFACES ELLIPTIQUES

5.1. Réduction au cas affine.

Dans cette section nous concluons la démonstration du théorème 1.3 en montrant la

PROPOSITION 5.1. — *Toute $(\mathbf{P}GL(3,\mathbb{C}), \mathbf{P}^2\mathbb{C})$-surface elliptique est, à revêtement fini près, projectivement isomorphe à une surface elliptique complexe affine.*

Preuve. — Soit S une $(\mathbf{P}GL(3,\mathbb{C}), \mathbf{P}^2\mathbb{C})$-surface elliptique et $D : \tilde{S} \longrightarrow \mathbf{P}^2\mathbb{C}$ la développante d'une structure projective sur S, de morphisme d'holonomie $h : \pi_1(S) \longrightarrow \mathbf{P}GL(3,\mathbb{C})$. Le cas à holonomie nilpotente ayant été traité à la section 3, on peut supposer d'après le théorème 2.1 que S est un fibré principal en courbe elliptique E de base une surface de Riemann $\Sigma = \Gamma\backslash\mathbf{H}$ de genre $g \geq 2$, de premier nombre de Betti $b_1(S)$ impair. D'après le lemme 2.1, le revêtement universel $\tilde{S}$ s'identifie au produit $\mathbb{C} \times \mathbf{H}$ et le groupe fondamental $\pi_1(S)$ a une présentation de la forme

$$\langle a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g, c, d \mid c, d \ \text{ centraux}, \ \prod_{i=1}^{g}[a_i, b_i] = c^r\rangle$$

où le nombre de Chern r désigne un entier naturel positif. Le sous-groupe de $\pi_1(S)$ engendré par c et d s'identifie au groupe fondamental Λ de la courbe elliptique E.

Notons $\bar{\Lambda}$ l'adhérence de Zariski du groupe $h(\Lambda)$ dans le groupe algébrique complexe $\mathbf{P}GL(3,\mathbb{C})$. Le groupe Λ étant commutatif et central dans $\pi_1(S)$, le groupe $\bar{\Lambda}$ est commutatif et le groupe d'holonomie $H = h(\pi_1(S))$ est un sous-groupe du commutant $C(\bar{\Lambda})$ de $\bar{\Lambda}$ dans $\mathbf{P}GL(3,\mathbb{C})$. Comme le groupe H n'est pas nilpotent, *a fortiori* $C(\bar{\Lambda})$ non plus. Les seuls cas possibles sont :

1. $\bar{\Lambda} = \{e\}, \quad C(\bar{\Lambda}) = \mathbf{P}GL(3,\mathbb{C})$.

2. $$\bar{\Lambda} = \mathbb{C} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{PGL}(3,\mathbb{C})\right\},$$
$$C(\bar{\Lambda}) = \left\{\begin{pmatrix} 1 & e & f \\ 0 & g & h \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{PGL}(3,\mathbb{C})\right\}.$$

3. $$\bar{\Lambda} = \mathbb{C}^* = \left\{\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{PGL}(3,\mathbb{C})\right\},$$
$$C(\bar{\Lambda}) = \left\{\begin{pmatrix} e & f & 0 \\ g & h & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{PGL}(3,\mathbb{C})\right\}.$$

Cas 1. Dans ce cas, la développante $D\ :\mathbb{C}\times\mathbf{H}\longrightarrow\mathbf{P}^2\mathbb{C}$ se factorise en une immersion holomorphe du produit $E\times\mathbf{H}$ dans $\mathbf{P}^2\mathbb{C}$, encore notée D. Montrons qu'il n'existe pas de telle immersion.

Notons ϕ l'application holomorphe de $E\times\mathbf{H}$ dans $\mathbf{P}^2\mathbb{C}\times\mathbf{H}$ qui au point (e,ξ) de $E\times\mathbf{H}$ associe le point $(D(e,\xi),\xi)$ de $\mathbf{P}^2\mathbb{C}\times\mathbf{H}$. Cette application est évidemment propre, son image est donc d'après un théorème de Remmert ([1], p. 26) une sous-variété analytique de dimension 2 de $\mathbf{P}^2\mathbb{C}\times\mathbf{H}$.

Pour tout point ξ de $\mathbf{H}$, l'image X_ξ de la courbe $E\times\{\xi\}$ par ϕ est une courbe analytique irréductible de $\mathbf{P}^2\mathbb{C}\times\{\xi\}$. D'après le théorème de Chow, la courbe X_ξ est algébrique dans $\mathbf{P}^2\mathbb{C}\times\{\xi\}$ ([7], p. 167). Fixons ξ_0 un point de $\mathbf{H}$, on peut donc choisir un polynôme complexe homogène à trois variables F_{ξ_0} dont le diviseur dans $\mathbf{P}^2\mathbb{C}\times\{\xi_0\}$ est X_{ξ_0}. Ce choix s'étend en une application holomorphe $F\ :\ \xi\longmapsto F(\cdot,\xi)$ d'un voisinage de ξ_0 dans $\mathbf{H}$ dans les polynômes complexes homogènes à trois variables, qui au point ξ associe un polynôme $F(\cdot,\xi)$ dont le diviseur $[F(\cdot,\xi)]$ dans $\mathbf{P}^2\mathbb{C}\times\{\xi\}$ est X_ξ.

Choisissons $z_0=D(e_0,\xi_0)$ un point d'intersection de X_{ξ_0} avec le diviseur $[\partial_\xi F(\cdot,\xi_0)]$ du polynôme $\partial_\xi F(\cdot,\xi_0)$ dans $\mathbf{P}^2\mathbb{C}\times\{\xi_0\}$. Sur un voisinage affine du point (z_0,ξ_0) dans $\mathbf{P}^2\mathbb{C}\times\mathbf{H}$, réécrivons $F(\cdot,\xi)$ comme polynôme $f(\cdot,\xi)$ à deux variables complexes $z=(z_1,z_2)$. Il existe alors un voisinage V du point (e_0,ξ_0) de $E\times\mathbf{H}$ et un voisinage U du point (z_0,ξ_0) de $\mathbf{P}^2\mathbb{C}\times\mathbf{H}$ tels que ϕ identifie V à son image

$$X_f=\{(z,\xi)\in U,\quad f(z,\xi)=0\}.$$

Par dérivation, tout point (e,ξ) de V vérifie donc le système d'équations

$$\partial_z f(\phi(e,\xi))\cdot\partial_e D(e,\xi)=0 \tag{4}$$

$$\partial_z f(\phi(e,\xi))\cdot\partial_\xi D(e,\xi)+\partial_\xi f(\phi(e,\xi))=0. \tag{5}$$

Notons

$$X_{\partial_\xi f}=\{(z,\xi)\in U,\quad \partial_\xi f(z,\xi)=0\}.$$

Comme D est une immersion, les vecteurs $\partial_e D(e,\xi)$ et $\partial_\xi D(e,\xi)$ forment une base de l'espace tangent holomorphe à $\mathbf{P}^2\mathbb{C}\times\{\xi\}$ au point $(D(e,\xi),\xi)$. On déduit alors des équations (4) et (5) que la différentielle $\partial_z f$, et donc la différentielle df, s'annulent en tout point de l'intersection

$$I=X_f\cap X_{\partial_\xi f}$$

qui est une sous-variété analytique de $\mathbf{P}^2\mathbb{C}\times\mathbf{H}$ de dimension au moins 1 : ceci contredit l'existence de points lisses dans I.

Cas 2 et 3. Dans ces deux cas, l'action du groupe $C(\bar{\Lambda})$ sur $\mathbf{P}^2\mathbb{C}$ induit une décomposition H-invariante

$$\mathbf{P}^2\mathbb{C} = \mathbb{C}^2 \cup \mathbf{P}^1\mathbb{C}.$$

L'action de l'algèbre de Lie de $\bar{\Lambda}$ sur $\mathbf{P}^2\mathbb{C}$ induit un champ de vecteurs holomorphe $X_{\mathbf{P}^2\mathbb{C}}$ sur $\mathbf{P}^2\mathbb{C}$, nul le long de $\mathbf{P}^1\mathbb{C}$. Comme le groupe $\bar{\Lambda}$ centralise le groupe d'holonomie H, ce champ est naturellement H-invariant et induit donc un champ de vecteurs holomorphe X non-nul sur la surface complexe S. D'après un théorème de Blanchard [3], le champ de vecteurs holomorphe X est tangent aux fibres de S. Mais le fibré elliptique S est principal sur Σ, il admet donc un champ de vecteurs holomorphe Y tangent aux fibres et ne s'annulant pas. Il existe alors une fonction holomorphe f sur S telle que $X = f \cdot Y$. Comme S est compacte, la fonction f est constante, non-nulle car le champ X n'est pas identiquement nul. En particulier X ne s'annule pas sur S, l'image de la développante ne rencontre pas $\mathbf{P}^1\mathbb{C}$ et S est une surface complexe affine. □

5.2. Fibrés elliptiques affines.

Soit $\Sigma = \Gamma\backslash\mathbf{H}$ une surface de Riemann de genre $g \geq 2$, Γ désignant un réseau cocompact sans torsion du groupe $\mathbf{P}SL(2,\mathbb{R})$. Notons K_Σ son fibré canonique des 1-formes holomorphes. Soit $\Psi : S \longrightarrow \Sigma$ un fibré principal en courbe elliptique $E = \Lambda\backslash\mathbb{C}$ de base Σ, de premier nombre de Betti $b_1(S)$ impair. Dans cette section nous concluons la démonstration du théorème 1.1 en montrant la

PROPOSITION 5.2. — *Toutes les structures complexes affines sur le fibré elliptique principal S le réalisent, à revêtement et quotient finis près, comme fibré elliptique affine.*

D'après le lemme 2.1, le groupe fondamental du fibré elliptique principal S admet une présentation de la forme

$$\langle a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g, c, d \mid c, d \ \text{ centraux}, \ \prod_{i=1}^{g} [a_i, b_i] = c^r \rangle$$

où le nombre de Chern r désigne un entier naturel strictement positif. Remarquons que le nombre de Chern d'un fibré elliptique affine de base Σ est égal à $g - 1$: le $\mathbb{C}^*$-fibré tautologique $W = \mathbb{C}^2\backslash\{0\}$ sur la droite projective $\mathbf{P}^1\mathbb{C}$ a pour carré le fibré des formes volumes sur $\mathbf{P}^1\mathbb{C}$, le $\mathbb{C}^*$-fibré $\Gamma\backslash\phi^*(W)$ est donc de degré $g-1$.

Associons alors au fibré elliptique principal S un fibré elliptique principal S' de nombre de Chern $g-1$, obtenu en prenant un revêtement fini de S puis un quotient fini de la façon suivante : d'après le lemme 2.1, S s'identifie à la surface complexe quotient $\delta(\pi_1(S))\backslash\mathbb{C}\times\mathbf{H}$, où δ désigne une représentation fidèle du groupe fondamental $\pi_1(S)$ dans le groupe $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}\times\mathbf{H})$ des biholomorphismes de $\mathbb{C}\times\mathbf{H}$. Notons Γ_1 le sous-groupe de $\pi_1(S)$ engendré par les a_i, b_i, $1\leq i\leq g$ et $\mathbb{Z}_{g-1}\subset S^1$ le groupe fini à $g-1$ éléments agissant naturellement sur $\mathbb{C}^*$. Définissons le fibré elliptique principal S'' comme le quotient $\delta(\Gamma_1)\backslash(\mathbb{C}\times\mathbf{H})$ et le fibré elliptique principal S' comme le quotient $\mathbb{Z}_{g-1}\backslash S''$, les fibrés elliptiques principaux S'' et S' sont de nombres de Chern respectifs 1 et $g-1$. Le diagramme de revêtement galoisiens finis

$$\begin{tikzcd} & S'' \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ S & & S' \end{tikzcd}$$

induit des applications naturelles holomorphes de $\mathcal{A}(S)$ dans $\mathcal{A}(S'')$ et $\mathcal{A}(S')$ dans $\mathcal{A}(S'')$, on dira que les espaces $\mathcal{A}(S)$ et $\mathcal{A}(S')$ sont naturellement biholomorphes si ces deux applications sont des biholomorphismes.

La proposition 5.2 est alors une conséquence des propositions suivantes :

PROPOSITION 5.3. — *L'espace $\mathcal{A}(S)$ des structures complexes affines sur S est naturellement biholomorphe à l'espace $\mathcal{A}(S')$ des structures complexes affines sur S'.*

PROPOSITION 5.4. — *Toutes les structures complexes affines sur un fibré elliptique principal de nombre de Chern $g-1$ le réalisent comme fibré elliptique affine.*

5.2.1. Existence d'une structure complexe affine sur S.

L'existence d'une structure complexe affine sur un fibré elliptique principal de premier nombre de Betti impair est un résultat dû à Maehara [18]. Dans ce paragraphe nous construisons explicitement une telle structure sur S, et la structure de fibré elliptique affine correspondante sur S' : elles nous serviront de références dans la démonstration des propositions 5.3 et 5.4.

Commençons par construire une structure complexe affine canonique sur le revêtement universel $\mathbb{C} \times \mathbf{H}$ de S. Considérons l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^* \times \mathbf{H} &\longrightarrow U \\ (w, \xi) &\longmapsto (w\xi, w) \end{aligned}$$

où U désigne l'ouvert $\{(u, v) \in \mathbb{C}^{*2}, \Im(u/v) > 0\}$ de $\mathbb{C}^2$. C'est un difféomorphisme qui munit le produit $\mathbb{C}^* \times \mathbf{H}$ d'une structure complexe affine, dont le groupe des automorphismes est le groupe $SL(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{C}^*$. Le facteur $\mathbb{C}^*$ agit par multiplication sur le premier facteur de $\mathbb{C}^* \times \mathbf{H}$, le facteur $SL(2, \mathbb{R})$ selon :

$$\forall \gamma = \begin{pmatrix} a_\gamma & b_\gamma \\ c_\gamma & d_\gamma \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R}),\ \forall (w, \xi) \in \mathbb{C}^* \times \mathbf{H}, \gamma \cdot (w, \xi) = ((c_\gamma \xi + d_\gamma) w, \gamma \cdot \xi).$$

Si $\widetilde{SL(2, \mathbb{R})}$ désigne le revêtement universel du groupe $SL(2, \mathbb{R})$ et τ un générateur dans $\widetilde{SL(2, \mathbb{R})}$ du groupe fondamental $\pi_1(SL(2, \mathbb{R}))$, notons Z le sous-groupe central du produit $\widetilde{SL(2, \mathbb{R})} \times \mathbb{C}$ des éléments de la forme $(n\tau, -2\pi i n)$, $n \in \mathbb{Z}$, et $\widetilde{SL(2, \mathbb{R})} \times_Z \mathbb{C}$ le groupe quotient $\widetilde{SL(2, \mathbb{R})} \times \mathbb{C}/Z$. L'application de revêtement

$$\begin{aligned} \mathbb{C} \times \mathbf{H} &\longrightarrow \mathbb{C}^* \times \mathbf{H} \\ (z, \xi) &\longmapsto (\exp z, \xi) \end{aligned}$$

munit alors le revêtement universel $\mathbb{C} \times \mathbf{H}$ du produit $\mathbb{C}^* \times \mathbf{H}$ d'une structure complexe affine canonique, notée $\mathbb{C} \times \mathbf{H}_{\mathrm{Can}}$, dont le groupe des automorphismes $A(\mathbb{C} \times \mathbf{H}_{\mathrm{Can}})$ est le groupe $\widetilde{SL(2, \mathbb{R})} \times_Z \mathbb{C}$. Le groupe $\mathbb{C}$ agit par addition sur le premier facteur de $\mathbb{C} \times \mathbf{H}$, un élément $\tilde{\gamma}$ de $\widetilde{SL(2, \mathbb{R})}$ d'image $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a_\gamma & b_\gamma \\ c_\gamma & d_\gamma \end{smallmatrix}\right)$ dans $SL(2, \mathbb{R})$ agit selon :

$$\forall (z, \xi) \in \mathbb{C} \times \mathbf{H},\ \ \tilde{\gamma} \cdot (z, \xi) = (z + \log(c_\gamma \xi + d_\gamma), \gamma \cdot \xi)$$

où log désigne une détermination du logarithme. En particulier τ agit par addition de $2\pi i$ sur le premier facteur du produit $\mathbb{C} \times \mathbf{H}$.

LEMME 5.1. — *Le fibré elliptique principal S admet une structure complexe affine $\tilde{\Gamma} \backslash (\mathbb{C} \times \mathbf{H})_{\mathrm{Can}}$, où $\tilde{\Gamma}$ est un sous-groupe de $\widetilde{SL(2, \mathbb{R})} \times_Z \mathbb{C}$ extension centrale de Γ par Λ.*

Preuve. — Un élément g du groupe $\mathrm{Aut}(\mathbb{C} \times \mathbf{H})$ des biholomorphismes de $\mathbb{C} \times \mathbf{H}$ associe au point (z, ξ) de $\mathbb{C} \times \mathbf{H}$ le point $g \cdot (z, \xi) = (r_g(\xi) z + s_g(\xi),\ \gamma_g \cdot \xi)$ où $r_g : \mathbf{H} \longrightarrow \mathbb{C}^*$ et $s_g : \mathbf{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ sont deux fonctions holomorphes et γ_g est un élément de $\mathbf{P}SL(2, \mathbb{R})$. Comme les éléments $\delta(c)$ et $\delta(d)$ agissent par translation constante sur le premier facteur de $\mathbb{C} \times \mathbf{H}$

et sont centraux dans le groupe $\delta(\pi_1(S))$, les fonctions r_g, $g \in \delta(\pi_1(S))$, sont constantes égales à 1.

Notons α_i, β_i, $1 \leq i \leq g$ respectivement les éléments $\gamma_{\delta(a_i)}$, $\gamma_{\delta(b_i)}$, $1 \leq i \leq g$ du groupe $\mathbf{P}SL(2, \mathbb{R})$. Ils vérifient la relation $\prod_{i=1}^{g} [\alpha_i, \beta_i] = 1$ et engendrent le groupe Γ. Choisissons alors $\tilde{\alpha_i}$, $\tilde{\beta_i}$, $1 \leq i \leq g$ des éléments de $\widetilde{SL(2, \mathbb{R})} \times_Z \mathbb{C}$ d'images respectives α_i et β_i dans $\mathbf{P}SL(2, \mathbb{R})$, le produit des commutateurs $\prod_{i=1}^{g} [\tilde{\alpha_i}, \tilde{\beta_i}]$ s'identifie à l'élément $(g-1)\tau$. Notons $\tilde{\Gamma}_1$ le sous-groupe de $\widetilde{SL(2, \mathbb{R})} \times_Z \mathbb{C}$ engendré par les éléments $\tilde{\alpha_i}$, $\tilde{\beta_i}$, $1 \leq i \leq g$, le quotient $\tilde{\Gamma}_1 \backslash \mathbb{C} \times \mathbf{H}$ est un $\mathbb{C}^*$-fibré de degré 1 sur la surface de Riemann Σ. Quitte à choisir judicieusement les composantes sur le deuxième facteur de $\widetilde{SL(2, \mathbb{R})} \times_Z \mathbb{C}$ des éléments $\tilde{\alpha_i}$, $\tilde{\beta_i}$, $1 \leq i \leq g$, les deux $\mathbb{C}^*$-fibrés $\delta(\Gamma_1) \backslash \mathbb{C} \times \mathbf{H}$ et $\tilde{\Gamma}_1 \backslash \mathbb{C} \times \mathbf{H}$ de degré 1 sur Σ sont alors isomorphes.

Posons $\tilde{c} = (g-1)\tau / r$ dans $\widetilde{SL(2, \mathbb{R})} \times_Z \mathbb{C}$, choisissons le nombre complexe $\tilde{d}$ de sorte que la courbe elliptique E s'identifie au quotient $\mathbb{C}/\mathbb{Z}\tilde{c} \oplus \mathbb{Z}\tilde{d}$, et notons $\tilde{\Gamma}$ (respectivement $\tilde{\Gamma}'$) le sous-groupe de $\widetilde{SL(2, \mathbb{R})} \times_Z \mathbb{C}$ engendré par le groupe $\tilde{\Gamma}_1$ et les élément $\tilde{c}$ et $\tilde{d}$ (respectivement le groupe $\tilde{\Gamma}_1$ et les élément τ et $\tilde{d}$), le fibré elliptique principal S s'identifie à la surface complexe affine $\tilde{\Gamma} \backslash \mathbb{C} \times \mathbf{H}_{\mathrm{Can}}$, le fibré elliptique principal S' à $\tilde{\Gamma}' \backslash \mathbb{C} \times \mathbf{H}_{\mathrm{Can}}$.

Si $p : \widetilde{SL(2, \mathbb{R})} \longrightarrow SL(2, \mathbb{R})$ désigne la projection canonique, soit

$$\begin{aligned} \pi \ : \widetilde{SL(2, \mathbb{R})} \times_Z \mathbb{C} &\longrightarrow GL(2, \mathbb{C}) \\ (\tilde{\gamma}, z) &\longmapsto p(\tilde{\gamma}) \exp(z). \end{aligned}$$

Notons $\rho_0 : \Gamma \longrightarrow GL(2, \mathbb{C})$ la représentation définie par $\rho_0(\alpha_i) = \pi(\tilde{\alpha_i})$, $\rho_0(\beta_i) = \pi(\tilde{\beta_i})$ et Δ le réseau de $\mathbb{C}^*$ engendré par $\exp \tilde{d}$. La surface complexe affine $\tilde{\Gamma}' \backslash \mathbb{C} \times \mathbf{H}_{\mathrm{Can}}$ s'identifie au fibré elliptique affine $\Delta \times \Gamma \backslash \phi^*(W)$, où l'action du groupe Γ sur $\phi^*(W)$ est induite de son action naturelle sur $\mathbf{H}$ et de sa ρ_0-action sur $W = \mathbb{C}^2 \backslash \{0\}$. □

5.2.2. Démonstration de la proposition 5.3.

Notations. — Nous identifions désormais le groupe fondamental Λ de la courbe elliptique E au groupe $\mathbb{Z}\tilde{c} \oplus \mathbb{Z}\tilde{d}$, le groupe fondamental $\pi_1(S)$ au sous-groupe $\tilde{\Gamma}$ de $\widetilde{SL(2, \mathbb{R})} \times_Z \mathbb{C}$ de présentation

$$\langle \tilde{\alpha_1}, \tilde{\beta_1}, \cdots, \tilde{\alpha_g}, \tilde{\beta_g}, \tilde{c}, \tilde{d} \mid \tilde{c}, \tilde{d} \ \text{ centraux}, \ \prod_{i=1}^{g} [\tilde{\alpha_i}, \tilde{\beta_i}] = r\tilde{c} \rangle$$

et le fibré elliptique principal S au quotient $\tilde{\Gamma}\backslash\mathbb{C} \times \mathbf{H}$. Rappelons que l'élément $\tilde{c}$ n'est autre que $(g-1)\tau/r$. De même nous identifions le fibré elliptique principal S' au fibré elliptique affine $\tilde{\Gamma}'\backslash\mathbb{C} \times \mathbf{H}_{\mathrm{Can}}$.

Soit D la développante

$$\begin{aligned} \mathbb{C} \times \mathbf{H} &\longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ (z,\xi) &\longmapsto (f_1(z,\xi), f_2(z,\xi)) \end{aligned}$$

d'une structure complexe affine sur le fibré elliptique principal S, de morphisme d'holonomie h. Pour montrer la proposition 5.3, il suffit de montrer que les translations sur le premier facteur de $\mathbb{C} \times \mathbf{H}$ sont des transformations affines pour D. C'est une conséquence du

LEMME 5.2. — *La développante $D : \mathbb{C} \times \mathbf{H} \longrightarrow \mathbb{C}^2$ est de la forme*

$$D(z,\xi) = (A(\xi)e^{\mu z}, B(\xi)e^{\mu z})$$

où μ désigne un nombre complexe non nul, A et B deux fonctions holomorphes sur $\mathbf{H}$.

Preuve. — Commençons par traduire le fait que D est un difféomorphisme local :

$$\text{(6)} \qquad \forall (z,\xi) \in \mathbb{C} \times \mathbf{H}, \quad \left(\frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{\partial f_2}{\partial \xi} - \frac{\partial f_1}{\partial \xi}\frac{\partial f_2}{\partial z}\right)(z,\xi) \neq 0.$$

Notons encore $\bar{\Lambda}$ l'adhérence de Zariski du groupe $h(\Lambda)$ dans le groupe algébrique complexe $A(2,\mathbb{C})$. Le groupe Λ étant commutatif et central dans $\tilde{\Gamma}$, le groupe $\bar{\Lambda}$ est commutatif et le groupe d'holonomie $H = h(\tilde{\Gamma})$ est un sous-groupe du commutant $C(\bar{\Lambda})$ de $\bar{\Lambda}$ dans $A(2,\mathbb{C})$. On a vu dans la démonstration de la proposition 5.1 que les seuls cas possibles pour $\bar{\Lambda}$ sont :

1. $$\bar{\Lambda} = \mathbb{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{A}(2,\mathbb{C}) \right\},$$
$$C(\bar{\Lambda}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & e & f \\ 0 & g & h \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{A}(2,\mathbb{C}) \right\}.$$

2. $$\bar{\Lambda} = \mathbb{C}^* = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{A}(2,\mathbb{C}) \right\},$$
$$C(\bar{\Lambda}) = \left\{ \begin{pmatrix} e & 0 & f \\ 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{A}(2,\mathbb{C}) \right\}.$$

3. $$\bar{\Lambda} = \mathbb{C}^* = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{A}(2,\mathbb{C}) \right\},$$
$$C(\bar{\Lambda}) = \left\{ \begin{pmatrix} e & f & 0 \\ g & h & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{A}(2,\mathbb{C}) \right\}.$$

Étudions les contraintes imposées par la h-équivariance de la développante D.

1^{er} *cas.*

$$\forall \gamma \in \Lambda, \quad \begin{cases} f_1(z+\gamma,\xi) = f_1(z,\xi) + x_\gamma \\ f_2(z+\gamma,\xi) = f_2(z,\xi). \end{cases}$$

En particulier les fonctions $\dfrac{\partial f_1}{\partial z}$ et f_2 induisent des fonctions holomorphes sur $E \times \mathbf{H}$, elles sont donc indépendantes de la variable z. Ainsi :

$$\begin{cases} f_1(z,\xi) = Cz + B(\xi) \\ f_2(z,\xi) = A(\xi) \end{cases} \tag{7}$$

où A et B sont deux fonctions holomorphes sur le demi-plan de Poincaré $\mathbf{H}$ et C est une constante complexe. Soit alors $\tilde{\gamma}$ un élément du groupe $\tilde{\Gamma}$, notons

$$h(\tilde{\gamma}) = \begin{pmatrix} 1 & e_{\tilde{\gamma}} & f_{\tilde{\gamma}} \\ 0 & g_{\tilde{\gamma}} & h_{\tilde{\gamma}} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{C}(\bar{\Lambda})$$

son holonomie. La h-équivariance de la développante D implique :

$$A(\gamma \cdot \xi) = g_{\tilde{\gamma}} A(\xi) + h_{\tilde{\gamma}}.$$

Par dérivation on en déduit :

$$A'(\gamma \cdot \xi)\, d(\gamma \cdot \xi) = g_{\tilde{\gamma}} A'(\xi)\, d\xi. \tag{8}$$

Le nombre complexe $g_{\tilde{\gamma}}$ dépend donc seulement de l'image γ de l'élément $\tilde{\gamma}$ dans Γ. Définissons $\chi : \Gamma \longrightarrow \mathbb{C}^*$ le caractère de Γ qui à γ associe $g_{\tilde{\gamma}}$, notons P_χ le fibré plat en droite complexe de base Σ défini par χ. D'après l'équation (7) la dérivée A' définit une section holomorphe globale du fibré $P_\chi \otimes K_\Sigma$. D'après l'équation (6) cette section ne s'annule pas, le fibré en droite $P_\chi \otimes K_\Sigma$ est donc trivial. Ceci contredit l'inégalité $\deg(P \otimes K_\Sigma) = \deg(K_\Sigma) = 2g - 2 > 0$.

Dans les cas 2 et 3, le groupe $\bar{\Lambda}$ est constitué de matrices diagonales et les composantes de la développante f_1 et f_2 vérifient un système d'équations de la forme :

$$\begin{cases} f(z+\tilde{c},\xi) = \alpha f(z,\xi) \\ f(z+\tilde{d},\xi) = \beta f(z,\xi) \end{cases} \tag{9}$$

où α et β sont deux nombres complexes non nuls. Fixons un élément ξ de $\mathbf{H}$ et considérons la restriction f_ξ de f à la fibre $\mathbb{C} \times \{\xi\}$. Soit P_χ le fibré holomorphe plat en droite complexe de base $E \times \{\xi\}$ défini par le caractère $\chi : \Lambda \longrightarrow \mathbb{C}^*$ qui à $n\tilde{c} + m\tilde{d}$ associe $\alpha^n \beta^m$. D'après l'équation (9) la fonction f_ξ définit une section holomorphe globale de P_χ. Comme le fibré

P_χ est plat cette section ne s'annule pas, ou est identiquement nulle sur $\mathbb{C}$. Si f_ξ ne s'annule pas, le quotient f'_ξ/f_ξ induit une fonction holomorphe sur E donc est constante. Dans tous les cas $f(z,\xi) = A(\xi)\exp(B(\xi)z)$, où A et B désignent deux fonctions holomorphes sur le demi-plan de Poincaré $\mathbf{H}$. En reportant dans l'équation (9) on en déduit que la fonction B est constante. Finalement les solutions de l'équation (9) sont les fonctions de la forme $f(z,\xi) = A(\xi)\exp(\mu z)$ où A désigne une fonction holomorphe sur $\mathbf{H}$ et μ un nombre complexe.

2$^{\text{ème}}$ *cas.* La développante est alors donnée par :

$$\begin{cases} f_1(z,\xi) = A(\xi) \\ f_2(z,\xi) = B(\xi)e^{\mu z} \end{cases}$$

où A et B sont deux fonctions holomorphes sur $\mathbf{H}$ et μ un nombre complexe non nul. Soit alors $\tilde\gamma$ un élément du groupe $\tilde\Gamma$ d'image γ dans Γ, notons $h(\tilde\gamma) = \begin{pmatrix} e_{\tilde\gamma} & 0 & f_{\tilde\gamma} \\ 0 & g_{\tilde\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{C}(\bar\Lambda)$ son holonomie. La h-équivariance de la développante D implique :

$$A(\gamma\cdot\xi) = e_{\tilde\gamma}A(\xi) + f_{\tilde\gamma}.$$

Par dérivation on en déduit :

$$A'(\gamma\cdot\xi)\, d(\gamma\cdot\xi) = e_{\tilde\gamma}A'(\xi)\, d\xi.$$

Le nombre complexe $e_{\tilde\gamma}$ ne dépend que de l'image γ de l'élément $\tilde\gamma$ dans Γ, on définit encore le caractère $\chi : \Gamma \longrightarrow \mathbb{C}^*$ qui à γ associe $e_{\tilde\gamma}$ et on conclut comme dans le premier cas.

3$^{\text{ème}}$ *cas.* La développante est donnée par :

$$\begin{cases} f_1(z,\xi) = A(\xi)e^{\mu z} \\ f_2(z,\xi) = B(\xi)e^{\mu z} \end{cases}$$

où A et B sont deux fonctions holomorphes sur $\mathbf{H}$ et μ un nombre complexe non nul : ceci démontre le lemme 5.2. □

5.2.3. Démonstration de la proposition 5.4.

Nous pouvons désormais supposer $r = g-1$, $\tilde c = \tau$, $\tilde\Gamma = \tilde\Gamma'$, $S = S' = \tilde\Gamma\backslash\mathbb{C}\times\mathbf{H}_{\mathrm{Can}}$. Soit D la développante

$$\begin{aligned} \mathbb{C}\times\mathbf{H} &\longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ (z,\xi) &\longmapsto (A(\xi)e^{\mu z}, B(\xi)e^{\mu z}) \end{aligned}$$

d'une structure complexe affine sur S.

LEMME 5.3. — *Le nombre complexe μ est de la forme $k/2g-2$, où k désigne un entier relatif.*

Preuve. — Remarquons que l'holonomie de l'élément $(g-1)\tau$ s'identifie d'une part à $\begin{pmatrix} e^{\mu\tau\bar{c}} & 0 \\ 0 & e^{\mu\tau\bar{c}} \end{pmatrix}$, d'autre part au produit des commutateurs $\prod_{i=1}^{g} [h(\tilde{\alpha_i}), h(\tilde{\beta_i})]$ dans $A(2,\mathbb{C})$, donc de déterminant 1. D'où le résultat. □

LEMME 5.4. — *Le nombre complexe μ est égal à* 1.

Preuve. — La h-équivariance de la développante D s'écrit :

$$\text{(10)} \qquad \forall \tilde{\gamma} \in \tilde{\Gamma}_1, \forall (z,\xi) \in \mathbb{C} \times \mathbf{H}, \quad F_{\tilde{\gamma}}(\xi) \cdot \begin{pmatrix} A(\gamma \cdot \xi) \\ B(\gamma \cdot \xi) \end{pmatrix} = h(\tilde{\gamma}) \begin{pmatrix} A(\xi) \\ B(\xi) \end{pmatrix}$$

où pour $\tilde{\gamma}$ élément de $\tilde{\Gamma}_1$ d'image $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a_\gamma & b_\gamma \\ c_\gamma & d_\gamma \end{smallmatrix}\right)$ dans Γ et de composante $l_{\tilde{\gamma}}$ sur $\mathbb{C}$, on définit la fonction

$$\begin{aligned} F_{\tilde{\gamma}} : \mathbf{H} &\longrightarrow \mathbb{C}^* \\ \xi &\longmapsto \exp \mu(l_{\tilde{\gamma}} + \log(c_\gamma \xi + d_\gamma)). \end{aligned}$$

Dérivons cette équation par rapport à la variable ξ et prenons le déterminant :

$$\text{(11)} \qquad F_{\tilde{\gamma}}^2(\xi) \cdot \begin{vmatrix} A & A' \\ B & B' \end{vmatrix} (\gamma \cdot \xi) = (c_\gamma \xi + d_\gamma)^2 |h(\tilde{\gamma})| \begin{vmatrix} A & A' \\ B & B' \end{vmatrix} (\xi).$$

Remarquons que d'après le lemme 5.3 la fonction $F_{\tilde{\gamma}}^2$ ne dépend de $\tilde{\gamma}$ que par l'intermédiaire de son image γ dans Γ : deux éléments de $\tilde{\Gamma}_1$ de même image γ dans Γ diffèrent d'un multiple de $(g-1)\tau$, et $\exp(2\mu(g-1)\tau) = 1$. En particulier l'application $\gamma \longrightarrow F_{\tilde{\gamma}}^2$ définit un 1-cocycle à valeur dans le Γ-module $\mathrm{Hol}(\mathbf{H}, \mathbb{C}^*)$ des applications holomorphes de $\mathbf{H}$ dans $\mathbb{C}^*$ (pour l'action canonique de Γ sur $\mathbf{H}$ et l'action triviale sur $\mathbb{C}^*$). On déduit alors de l'équation (10) que le déterminant $|h(\tilde{\gamma})|$ ne dépend de l'élément $\tilde{\gamma}$ de $\tilde{\Gamma}_1$ que par l'intermédiaire de son image γ dans Γ. Notons E le fibré en droite de base Σ associé à ce cocycle, il est de degré $2\mu(g-1) = k$. Notons $\chi : \Gamma \longrightarrow \mathbb{C}^*$ le caractère qui à γ associe $|h(\tilde{\gamma})|$ et P_χ le fibré plat en droite sur Σ associé. L'équation (11) signifie que la fonction $\begin{vmatrix} A & A' \\ B & B' \end{vmatrix} : \mathbf{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ définit une section du fibré $P_\chi \otimes E^{-1} \otimes K_\Sigma$. D'après l'équation (6) cette section ne s'annule pas, le fibré $P_\chi \otimes E^{-1} \otimes K_\Sigma$ est donc trivial. En particulier $k = \deg E = \deg K_\Sigma = 2g-2$ et donc $\mu = 1$. □

Démonstration de la proposition 5.4. — D'après le lemme 5.4, pour tout élément $\tilde{\gamma}$ de $\tilde{\Gamma}_1$ la fonction $F_{\tilde{\gamma}} : \mathbf{H} \longrightarrow \mathbb{C}^*$ ne dépend de $\tilde{\gamma}$ que par l'intermédiaire de son image γ dans Γ. Notons $F_\gamma : \mathbf{H} \longrightarrow \mathbb{C}^*$ le 1-cocycle à valeur dans le Γ-module $\mathrm{Hol}(\mathbf{H}, \mathbb{C}^*)$ ainsi défini et F le fibré en droite de base Σ de degré $g-1$ associé. D'après l'équation (10) l'holonomie $h(\tilde{\gamma})$ ne dépend elle-aussi que de γ, notons $\rho : \Gamma \longrightarrow GL(2, \mathbb{C})$ la représentation de Γ ainsi induite. L'équation (10) se réécrit alors :

$$\forall \gamma \in \Gamma, \ \ \forall \xi \in \mathbf{H}, \quad F_\gamma(\xi) \cdot \begin{pmatrix} A(\gamma \cdot \xi) \\ B(\gamma \cdot \xi) \end{pmatrix} = \rho(\gamma) \begin{pmatrix} A(\xi) \\ B(\xi) \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Notons $\phi : \mathbf{H} \longrightarrow \mathbf{P}^1\mathbb{C}$ l'application holomorphe qui à un point ξ de $\mathbf{H}$ associe le point $[A(\xi) : B(\xi)]$ de la droite projective complexe, d'après les équations (6) et (12) l'application ϕ définit la développante d'une $(\mathbf{P}SL(2, \mathbb{C}), \mathbf{P}^1\mathbb{C})$-structure sur la surface de Riemann Σ, d'holonomie $\overline{\rho} : \Gamma \longrightarrow \mathbf{P}SL(2, \mathbb{C})$ la projection dans $\mathbf{P}SL(2, \mathbb{C})$ de la représentation ρ.

Soit $\Pi : W = \mathbb{C}^2 \backslash \{0\} \longrightarrow \mathbf{P}^1\mathbb{C}$ le $\mathbb{C}^*$-fibré canonique sur $\mathbf{P}^1\mathbb{C}$, l'application $(A, B) : \mathbf{H} \longrightarrow \mathbb{C}^2 \backslash \{0\}$ définit alors une section du $\mathbb{C}^*$-fibré $\phi^*(W)$ sur la surface de Riemann Σ et donc une trivialisation $\phi^*(W) \simeq \mathbb{C}^* \times \mathbf{H}$. Dans cette trivialisation l'application $\tilde{\phi} : \phi^*(W) \longrightarrow W = \mathbb{C}^2 \backslash \{0\}$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \tilde{\phi} : \mathbb{C}^* \times \mathbf{H} &\longrightarrow \mathbb{C}^2 \backslash \{0\} \\ (w, \xi) &\longmapsto (A(\xi)w, B(\xi)w) \end{aligned}$$

et définit une structure complexe affine sur $\phi^*(W)$, Γ-invariante pour l'action de Γ sur $\phi^*(W)$ induite par son action naturelle sur $\mathbf{H}$ et sa ρ-action sur $\mathbb{C}^2 \backslash \{0\}$.

Notons $e : \mathbb{C} \times \mathbf{H} \longrightarrow \mathbb{C}^* \times \mathbf{H}$ l'application de revêtement associée à l'action de τ :

$$e(z, \xi) = (\exp z, \xi).$$

Rappelons que Δ désigne le réseau de $\mathbb{C}^*$ engendré par $\exp \tilde{d}$. Le diagramme $\tilde{\Gamma}$-équivariant suivant est alors commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \times \mathbf{H} \arrow[d, "e"'] \arrow[dr, "D"] & \\ \phi^*(W) \arrow[r, "\tilde{\phi}"] \arrow[d] & W \arrow[d] \\ \mathbf{H} \arrow[r, "\phi"] & \mathbf{P}^1\mathbb{C} \end{tikzcd}$$

et la structure complexe affine définie par la développante D réalise bien S comme fibré elliptique affine $\Delta \times \Gamma \backslash \phi^*(W)$, ce qui conclut la démonstration de la proposition 5.4. $\square$

6. DÉFORMATIONS DE STRUCTURES COMPLEXES AFFINES

Dans cette section, nous démontrons le théorème 1.2.

6.1. Cas des fibrés elliptiques principaux.

Dans cette section nous montrons la

PROPOSITION 6.1. — *Soit S un fibré principal holomorphe en courbe elliptique sur une surface de Riemann Σ de genre $g \geq 2$, de premier nombre de Betti $b_1(S)$ impair. Soit $\mathcal{T}(\Sigma)$ l'espace de déformation des $(\mathbf{P}SL(2,\mathbb{C}), \mathbf{P}^1\mathbb{C})$-structures sur Σ et K_Σ le fibré canonique de Σ. L'espace de déformation $\mathcal{T}(S)$ des structures complexes affines sur S est biholomorphe au produit*

$$\mathcal{T}(S) = \mathcal{T}(\Sigma) \times H^0(\Sigma, K_\Sigma) \simeq \mathbb{C}^{3g-3} \times \mathbb{C}^g = \mathbb{C}^{4g-3}.$$

6.1.1. Rappels sur les $(\mathbf{P}SL(2,\mathbb{C}), \mathbf{P}^1\mathbb{C})$-structures ([8], [10], [14]).

Soit $\Sigma = \Gamma\backslash\mathbf{H}$ une surface de Riemann de genre $g \geq 2$, de fibré canonique K_Σ et $\mathcal{O}_\Sigma^*$ le faisceau sur Σ des germes de fonctions holomorphes inversibles. Notons $\mathcal{T}(\Sigma)$ l'espace de déformation $\mathcal{T}_{(\mathbf{P}SL(2,\mathbb{C}),\mathbb{P}^1\mathbb{C})}(\Sigma)$ des $(\mathbf{P}SL(2,\mathbb{C}), \mathbf{P}^1\mathbb{C})$-structures sur Σ (compatibles avec sa structure analytique). Le groupe des biholomorphismes de Σ étant fini, l'espace $\mathcal{T}(\Sigma)$ est égal à l'espace $\mathcal{A}_{(\mathbf{P}SL(2,\mathbb{C}),\mathbb{P}^1\mathbb{C})}(\Sigma)$. Il est muni d'une structure analytique grâce au

LEMME 6.1 ([8], p. 170). — *L'espace $\mathcal{T}(\Sigma)$ s'identifie à l'espace vectoriel complexe $H^0(\Sigma, K_\Sigma^{\otimes 2}) \simeq \mathbb{C}^{3g-3}$ des différentielles quadratiques sur Σ.*

Preuve. — On définit l'opérateur différentiel schwarzien Θ sur les fonctions méromorphes de $\mathbb{C}$ par :

$$\Theta(\phi) = \left(\frac{\phi''}{\phi'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{\phi''}{\phi'}\right)^2.$$

On montre que :

$$\Theta(\phi \circ f) = f'^2 \cdot \Theta(\phi) \circ f + \Theta(f)$$

et $\Theta(\phi) = 0$ si et seulement si ϕ est une transformation projective, c'est-à-dire un élément du groupe $\mathbf{P}SL(2,\mathbb{C})$. En particulier un difféomorphisme local $\phi : \mathbf{H} \longrightarrow \mathbf{P}^1\mathbb{C}$ est la développante d'une $(\mathbf{P}SL(2,\mathbb{C}), \mathbf{P}^1\mathbb{C})$-structure sur Σ si et seulement si :

$$\forall\gamma \in \Gamma, \quad \Theta(\phi)(\gamma\cdot\xi)\cdot(d(\gamma\xi))^2 = \Theta(\phi)(\xi)\cdot(d\xi)^2$$

c'est-à-dire si $\Theta(\phi)$ définit une section globale du fibré $K_\Sigma^{\otimes 2}$ des différentielles quadratiques sur Σ. Réciproquement toute différentielle quadratique sur Σ peut s'écrire sous la forme $\Theta(\phi)\cdot(d\xi)^2$ pour une développante ϕ, les autres solutions étant toutes les composées $\sigma \circ \phi$, $\sigma \in \mathbf{P}SL(2,\mathbb{C})$. □

6.1.2. Démonstration de la proposition 6.1.

Soit S un fibré elliptique principal sur Σ, de premier nombre de Betti impair. Rappelons que l'espace $\mathcal{A}(S)$ s'identifie à une sous-variété analytique de l'espace vectoriel $H^0(S, T^*S \otimes T^*S \otimes TS)$ des 1-formes holomorphes sur S à valeur dans les endomorphismes du fibré tangent holomorphe TS (cf. section 2.2). L'espace $\mathcal{T}(S)$ est alors muni d'une structure analytique grâce au

Lemme 6.2. — *L'espace $\mathcal{T}(S)$ s'identifie à l'espace $\mathcal{A}(S)$.*

Preuve. — Supposons donnés une développante $D : \mathbb{C}\times\mathbf{H} \longrightarrow \mathbb{C}^2$ définissant un élément de $\mathcal{A}(S)$ et g un élément du groupe $\mathrm{Hol}^0(S)$, composante connexe de l'identité du groupe des biholomorphismes de S. Comme le groupe des biholomorphismes de Σ est fini, sa composante connexe est réduite à l'identité. Il découle alors du théorème de Blanchard [3] que le biholomorphisme g s'identifie à un élément du groupe $\mathrm{Aut}^0 S$, composante connexe de l'identité du groupe des automorphismes du fibré elliptique principal S. Mais le groupe $\mathrm{Aut}^0 S$ s'identifie au groupe E agissant fibre à fibre, en particulier les développantes D et $D\circ g$ sont affinement équivalentes, d'où le résultat. □

Notations. — D'après le lemme précédent et la proposition 5.3, on peut supposer que le nombre de Chern de S est égal à $g-1$. Avec les notations de la section 5.2.1, on appellera Δ le réseau de $\mathbb{C}^*$ engendré par $\exp\tilde{d}$. Étant donné un couple (ϕ,ρ), où $\phi : \mathbf{H} \longrightarrow \mathbf{P}^1\mathbb{C}$ est la développante d'une $(\mathbf{P}SL(2,\mathbb{C}), \mathbf{P}^1\mathbb{C})$-structure sur Σ d'holonomie $\overline{\rho} : \Gamma \longrightarrow \mathbf{P}SL(2,\mathbb{C})$ et le morphisme $\rho : \Gamma \longrightarrow GL(2,\mathbb{C})$ a pour image $\overline{\rho}$ par composition avec la projection canonique de $GL(2,\mathbb{C})$ dans $\mathbf{P}SL(2,\mathbb{C})$, on notera $F(\phi,\rho)$ le $\mathbb{C}^*$-fibré $\Gamma\backslash\phi^*(W)$ de degré $g-1$ sur Σ, où l'action de Γ sur $\phi^*(W)$ est donnée par son action naturelle sur $\mathbf{H}$ et sa ρ-action sur $W = \mathbb{C}^2 \backslash \{0\}$.

Démonstration de la proposition 6.1. — À la section 5.2.1, on a muni le fibré elliptique principal S d'une structure complexe affine de référence $\tilde{\Gamma} \backslash \mathbb{C} \times \mathbf{H}_{\mathrm{Can}}$. En termes géométriques, cette structure complexe affine réalise S comme fibré elliptique affine $\Delta \backslash F(\phi_0, \rho_0)$, où ϕ_0 désigne le plongement canonique de $\mathbf{H}$ dans $\mathbf{P}^1\mathbb{C}$ et ρ_0 la représentation construite à la section 5.2.1. En termes analytiques, la développante associée est l'application :

$$\begin{aligned} D_0 : \mathbb{C} \times \mathbf{H} &\longrightarrow \mathbb{C}^2 \backslash \{0\} \\ (z, \xi) &\longmapsto (\xi e^z, e^z). \end{aligned}$$

À la section 5.2.3, on a montré que toute structure complexe affine sur le fibré elliptique principal S le réalise comme fibré elliptique affine $\Delta \backslash F(\phi, \rho)$. Réciproquement, un tel fibré elliptique affine définit une structure complexe affine sur S si et seulement si les $\mathbb{C}^*$-fibrés $F(\phi_0, \rho_0)$ et $F(\phi, \rho)$ de degré $g-1$ de base Σ définissent la même classe dans $H^1(\Sigma, \mathcal{O}_\Sigma^*)$. En termes analytiques, on a montré que les développantes de structures complexes affines sur S sont toutes de la forme

$$\begin{aligned} D : \mathbb{C} \times \mathbf{H} &\longrightarrow \mathbb{C}^2 \backslash \{0\} \\ (z, \xi) &\longmapsto (A(\xi) e^z, B(\xi) e^z) \end{aligned}$$

où les fonctions A et B holomorphes sur $\mathbf{H}$ vérifient une condition de Γ-équivariance précisée par l'équation (12). La structure projective sur Σ associée à cette structure complexe affine sur S a alors pour développante l'application holomorphe

$$\begin{aligned} \phi : \mathbf{H} &\longrightarrow \mathbf{P}^1\mathbb{C} \\ \xi &\longmapsto [A(\xi) : B(\xi)]. \end{aligned}$$

On notera $\mathbf{w} : \mathcal{T}(S) \longrightarrow \mathcal{T}(\Sigma)$ l'application qui à la structure complexe affine sur S de développante D associe la $(\mathbf{P}SL(2, \mathbb{C}), \mathbf{P}^1\mathbb{C})$-structure sur Σ de développante ϕ.

Identifions l'espace affine A des connexions holomorphes sur S à l'espace affine de dimension finie des connections holomorphes $\tilde{\Gamma}$-équivariantes sur le revêtement universel $\tilde{S} = \mathbb{C} \times \mathbf{H}$. On calcule aisément la connexion ∇_0 associée à la développante D_0 :

$$\nabla_0 = d + \begin{pmatrix} dz & 0 \\ d\xi & dz \end{pmatrix}$$

où d désigne la connexion triviale sur $\mathbb{C} \times \mathbf{H}$. Tout élément ∇ de A s'écrit alors de façon unique sous la forme $\nabla = \nabla_0 + \alpha_\nabla$, où α_∇ désigne une 1-forme sur $\mathbb{C} \times \mathbf{H}$ à valeur dans les endomorphismes de $\mathbb{C}^2$, invariante sous l'action de $\tilde{\Gamma}$.

Soit ∇ un point de la sous-variété analytique $\mathcal{T}(S)$ de A, associé à la développante

$$\begin{aligned} D_\nabla : \mathbb{C} \times \mathbf{H} &\longrightarrow \mathbb{C}^2 \backslash \{0\} \\ (z, \xi) &\longmapsto (A_\nabla(\xi) e^z, B_\nabla(\xi) e^z). \end{aligned}$$

On vérifie que la 1-forme de connexion α_∇ s'écrit :

$$\alpha_\nabla = \begin{pmatrix} 0 & -u_\nabla(\xi)\, d\xi \\ 0 & v_\nabla(\xi)\, d\xi \end{pmatrix}$$

où u_∇ et v_∇ sont les fonctions holomorphes sur $\mathbf{H}$ définies par

$$u_\nabla(\xi) = \frac{A''B' - B''A'}{A'B - B'A}(\xi) \; ; \quad v_\nabla(\xi) = \frac{A''B - B''A}{A'B - B'A}(\xi).$$

L'image $\mathbf{w}(\nabla)$ du point ∇ de $\mathcal{T}(S)$ dans $\mathcal{T}(\Sigma)$ est la différentielle quadratique $w_\nabla(\xi)(d\xi)^2 = \Theta(\phi_\nabla)(\xi)(d\xi)^2$, où Θ désigne l'opérateur différentiel schwarzien et ϕ_∇ est la développante

$$\begin{aligned} \phi_\nabla : \mathbf{H} &\longrightarrow \mathbf{P}^1\mathbb{C} \\ \xi &\longmapsto [A_\nabla(\xi) : B_\nabla(\xi)] \end{aligned}$$

de la $(\mathbf{P}SL(2, \mathbb{C}), \mathbf{P}^1\mathbb{C})$-structure sur Σ associée à la structure complexe affine ∇ sur S. Un calcul aisé montre que la fonction w_∇ holomorphe sur $\mathbf{H}$ est définie par $w_\nabla = v'_\nabla - \dfrac{1}{2} v_\nabla^2 + 2u_\nabla$. Finalement la 1-forme de connection α_∇ s'écrit :

$$\alpha_\nabla = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}(w_\nabla - v'_\nabla + \frac{1}{2} v_\nabla^2)(\xi)\, d\xi \\ 0 & v_\nabla(\xi)\, d\xi \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, remarquons que pour toute 1-forme sur $\mathbb{C} \times \mathbf{H}$ à valeur dans les endomorphismes de $\mathbb{C}^2$ de la forme

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}(w - v' + \frac{1}{2} v^2)(\xi)\, d\xi \\ 0 & v(\xi)\, d\xi \end{pmatrix},$$

où w et v désignent deux fonctions holomorphes sur $\mathbf{H}$, la connexion $\nabla = \nabla_0 + \alpha_\nabla$ sur $\mathbb{C} \times \mathbf{H}$ est sans torsion et plate. Elle définit donc un élément de $\mathcal{T}(S)$ si et seulement si elle est $\tilde{\Gamma}$-invariante. On vérifie facilement que la condition de $\tilde{\Gamma}$-invariance s'écrit :

$$\begin{aligned} \forall \gamma \in \Gamma, \quad w(\gamma \cdot \xi)(d(\gamma \cdot \xi))^2 &= w(\xi)(d\xi)^2 \\ v(\gamma \cdot \xi) d(\gamma \cdot \xi) &= v(\xi)\, d\xi \end{aligned}$$

dont les solutions sont les éléments $(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = (w(\xi)(d\xi)^2, v(\xi)\, d\xi)$ du produit $H^0(\Sigma, K_\Sigma^{\otimes 2}) \times H^0(\Sigma, K_\Sigma)$.

Finalement le produit $\mathcal{T}(\Sigma) \times H^0(\Sigma, K_\Sigma)$ est biholomorphe à l'espace $\mathcal{T}(S)$, par l'application qui au couple $(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = (w(\xi)(d\xi)^2, v(\xi)\, d\xi)$ de

$\mathcal{T}(\Sigma) \times H^0(\Sigma, K_\Sigma)$ associe la connexion holomorphe plate sans torsion de $\mathcal{T}(S)$

$$d + \begin{pmatrix} dz & -\frac{1}{2}(w - v' + \frac{1}{2}v^2)(\xi)\, d\xi \\ d\xi & dz + v(\xi)\, d\xi \end{pmatrix}.$$

En termes géométriques, si la connexion ∇ de coordonnées $(\mathbf{w}, 0)$ dans $\mathcal{T}(S)$ correspond au fibré elliptique affine $\Delta\backslash F(\phi, \rho)$, on vérifie que la connexion de coordonnées $(\mathbf{w}, \mathbf{v})$ dans $\mathcal{T}(S)$ correspond au fibré elliptique affine $\Delta\backslash F(\phi, \delta(\mathbf{v}) \cdot \rho)$, où $\delta : H^0(\Sigma, K_\Sigma) \longrightarrow H^1(\Sigma, \mathbb{C}^*)$ est le morphisme injectif (identifiant le groupe $H^0(\Sigma, K_\Sigma)$ au groupe des classes de $\mathbb{C}^*$-fibrés plats holomorphiquement triviaux de base Σ) induit par la suite exacte de faisceaux

$$0 \longrightarrow \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathcal{O}^*_\Sigma \xrightarrow{d'} K_\Sigma \longrightarrow 0$$

où d' désigne la différentielle logarithmique $d'f = 2df/f$. □

6.2. Cas des surfaces de Hopf.

LEMME 6.3. — *Si S est une surface de Hopf affine $\mathbb{C}^2\backslash\{0\}/\langle g\rangle$, l'espace de déformation des structures complexes affines $\mathcal{T}(S)$ est réduit à un point.*

Preuve. — On a vu à la section 3.3 que la développante d'une structure complexe affine sur la surface de Hopf S est un biholomorphisme de $\mathbb{C}^2\backslash\{0\}$ qui induit un biholomorphisme de S. L'espace $\mathcal{T}(S)$ est donc réduit à un point (on notera toutefois que l'espace $\mathcal{A}(S)$ n'est pas toujours réduit à un point : c'est le cas sauf si la contraction affine g est de la forme $\begin{pmatrix} \beta^n & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$, n entier, auquel cas $\mathcal{A}(S) = \mathbb{C}$ ([13], Theorem 7.5). □

6.3. Cas des solvariétés affines.

LEMME 6.4. — *Soit S une surface complexe admettant une structure de solvsurface affine et $\mathcal{T}(S)$ l'espace de déformation des structures complexes affines sur S.*

– Si S est un tore complexe, $\mathcal{T}(S)$ est biholomorphe à la variété analytique des classes d'isomorphismes des $\mathbb{C}$-algèbres associatives et commutatives de dimension 2.

– Si S est une surface de Kodaira primaire, $\mathcal{T}(S)$ est biholomorphe à $\mathbb{C}$.

– Si S est une surface d'Inoue, $\mathcal{T}(S)$ est réduit à un point.

Preuve. — D'après le lemme 4.2, nous savons déjà que les surfaces d'Inoue ont une unique structure complexe affine. Dans les cas restants, nous avons montré que la surface complexe S s'identifie à un quotient $\Gamma\backslash G$, où le groupe G s'identifie :

– au groupe complexe $\mathbb{C}^2$ si S est un tore (dans ce cas la structure complexe est aussi invariante à droite);

– au groupe $\mathbb{R} \times \mathrm{Heis}(3)$ muni de sa structure complexe invariante à gauche canonique induite par sa réalisation comme sous-groupe réel de $GL(3, \mathbb{C})$ des matrices de la forme $\begin{pmatrix} 1 & \bar{z} & w \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, si S est une surface de Kodaira primaire.

La donnée d'une structure complexe affine sur S équivaut alors à la donnée d'une structure complexe affine invariante à gauche sur G, compatible avec la structure complexe invariante à gauche de G :

– d'après la section 3 le groupe $\mathbb{R} \times \mathrm{Heis}(3)$ muni de sa structure complexe invariante à gauche canonique possède un espace de déformation des structures complexes affines invariantes à gauche (compatibles) en bijection avec $\mathbb{C}$: ces structures sont données par les réalisations de $\mathbb{R} \times \mathrm{Heis}(3)$ comme groupe des matrices de la forme $\begin{pmatrix} 1 & \bar{z} + az & w \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, où a décrit $\mathbb{C}$. On vérifie facilement que le paramétrage par le nombre a de l'espace $\mathcal{A}(S)$ est en fait holomorphe, et que le groupe $\mathrm{Hol}^0(S)$ agit trivialement sur $\mathcal{A}(S)$ ([21]).

– enfin l'espace des structures complexes affines invariantes à gauche sur le groupe $\mathbb{C}^2$ est bien connu : il est biholomorphe à la variété analytique des classes d'isomorphismes de $\mathbb{C}$-algèbres associatives et commutatives de dimension 2 ([13], [21]).

Ceci achève la démonstration du lemme 6.4. □

Le théorème 1.2 découle immédiatement de la proposition 6.1 et des lemmes 6.3 et 6.4.

BIBLIOGRAPHIE

[1] W. BARTH, C. PETERS, A. VAN DE VEN, Compact complex surfaces, Ergebnisse der Mathematik, vol. 4, 1984, Springer Verlag.

[2] Y. BENOIST, Nilvariétés projectives, Comment. Math. Helvetici, 69 (1994), 447–473.

[3] A. BLANCHARD, Automorphismes des variétés fibrées analytiques complexes, C.R.A.S., Paris, 233 (1951), 1337-1339.

[4] F.A. BOGOMOLOV, Surfaces of class VII_0 and affine geometry, Math. USSR Izvestiya, vol. 21 (1983), 31–73.

[5] C. EHRESMANN, Sur les espaces localement homogènes, Enseign. Math., 35 (1936), 317–333.

[6] D. FRIED, W. GOLDMAN, M.W. HIRSCH, Affine manifolds with nilpotent holonomy, Comment. Math. Helvetici, 56 (1981), 487–523.

[7] P. GRIFFITHS, J. HARRIS, Principles of algebraic geometry, Wiley & Sons, 1978.

[8] R.C. GUNNING, Lectures on Riemann Surfaces, Princeton Mathematical Notes (1966).

[9] R.C. GUNNING, Lectures on vector bundles over Riemann surfaces, Princeton Mathematical Notes (1967).

[10] R.C. GUNNING, Special coordinate coverings of Riemann surfaces, Math. Annalen, 170 (1970), 67–86.

[11] R.C. GUNNING, Affine and projective structures on Riemann surfaces, in "Riemann surfaces and related topics", Proceedings of the 1978 Stony Brook conference, Princeton University Press (1980).

[12] M. INOUE, On surfaces of class VII_0, Invent. Math., 24 (1974), 269–310.

[13] M. INOUE, S. KOBAYASHI, T. OCHIAI, Holomorphic affine connections on compact complex surfaces, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 27 (1980), 247–264.

[14] M. KAPOVICH, On monodromy of complex projective structures, Invent. Math., 119-2 (1995), 243–265.

[15] S. KOBAYASHI, T. OCHIAI, Holomorphic projective structures on compact complex surfaces, Math. Annalen, 249 (1980), 75–94.

[16] K. KODAIRA, On compact analytic surfaces I: Ann. Math., 71 (1960), 111–152, II: ibid, 77 (1963), 563–626, III: ibid., 78 (1963), 1–40.

[17] K. KODAIRA, On the structure of compact complex analytic surfaces I: Am. J. Math., 86 (1964), 751–798, II: ibid., 88 (1966), 682–721, III: ibid., 78 (1968), 55–83, IV: ibid., 90 (1968), 1048–1066.

[18] K. MAEHARA, On elliptic surfaces whose first Betti numbers are odd, Intl. Symp. on Alg. Geom., Kyoto (1977), 565–574.

[19] T. SUWA, Compact quotients of $\mathbb{C}^2$ by affine transformation groups, J. Diff. Geometry, 10 (1975), 239–252.

[20] W. THURSTON, The geometry and topology of 3-manifolds, Lecture Notes from Princeton Univ. (1977–1978).

[21] A. VITTER, Affine structures on compact complex manifolds, Invent. Math., 17 (1972), 231–244.

[22] C.T.C. WALL, Geometric structures on compact complex analytic surfaces, Topology, vol. 25-2 (1986), 119–153.

Manuscrit reçu le 25 avril 1997,
révisé le 15 octobre 1997,
accepté le 18 novembre 1997.

Bruno KLINGLER,
École Polytechnique
Centre de Mathématiques - CNRS URA 169
91128 Palaiseau Cedex (France).
klingler@math.polytechnique.fr